МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО УЛУГБЕКА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ имени В.И. РОМАНОВСКОГО АН РУз

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Республиканской научной конференции
с участием зарубежных ученых

САРЫМСАКОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

16–18 сентября 2021 года Ташкент, Узбекистан

Ташкент–2021

Сарымсаковские чтения: Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных учёных 16–18 сентября 2021 года, г. Ташкент, Узбекистан. — Ташкент. "Университет". 2021. 305 с.

Тезисы докладов республиканской научной конференции "**Сарымсаковские чтения**" содержат научные доклады по следующим направлениям: алгебра и функциональный анализ, теория функций и комплексный анализ, теория вероятностей, математическая статистика и их приложения, уравнения с частными производными, уравнения математической физики, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы, теория операторов, спектральная теория, геометрия и топология, теория приближений, математическое моделирование, методы вычислений.

Данная конференция организована на основании распоряжения №03/19-10/05-30 Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан от 10 мая 2021 года.

В авторской редакции
Компьютерная верстка **Абдурасулова К. К.**

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Председатель:

Маджидов И.У. – ректор Национального университета Узбекистана.

Сопредседатели:

Аюпов Ш.А. – директор Института математики АН РУз.

Заместители председателя:

Сабуров Х.Х. – проректор по научной работе и инновациям НУУз,
Зикиров О.С. – декан математического факультета НУУз.

Члены оргкомитета:

Абдуллаев Р.З. (Ташкент),
Бешимов Р.Б. (Ташкент),
Газиев К.С. (Фергана),
Дадаходжаев Р. (Ташкент),
Жабборов Н.М. (Ташкент),
Исломов Б. (Ташкент),
Омиров Б.А. (Ташкент),
Тахиров Ж.О. (Ташкент),
Хаҷтов А.Р. (Ташкент),
Халхужаев А.М. (Самарканд),
Хусанбоев Я. (Ташкент),
Ахмедов А.Б. (Ташкент),
Ботиров Г.И. (Ташкент),
Ганиходжаев Н.Н. (Ташкент),
Дурдиев Д.К. (Бухара),
Имомкулов С. (Ургенч),
Кудайбергенов К.К. (Нукус),
Рахматуллаев М.М. (Наманган),
Уразбаев Г. (Ургенч),
Хажиев И.О. (Ташкент),
Хасанов А.Б.(Самарканд),
Шарипов О.Ш. (Ташкент).

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ КОНФЕРЕНЦИИ

Сопредседатели:

Азамов А.	– академик АН РУз., (Узбекистан),
Алимов Ш.А.	– академик АН РУз., (Узбекистан),
Садуллаев А.	– академик АН РУз., (Узбекистан).

Члены программного комитета:

Арипов М.М.	– профессор (Узбекистан),
Ашуров Р.Р.	– профессор (Узбекистан),
Варисов А.К.	– профессор (Узбекистан),
Ганиходжаев Р.Н.	– профессор (Узбекистан),
Джалилов А.А.	– профессор (Узбекистан),
Егоров И.Е.	– профессор (Россия),
Имомназаров Х.Х.	– профессор (Россия),
Кабанихин С.И.	– член-корреспондент РАН (Россия),
Кальменов Т.Ш.	– академик НАН РК (Казахстан),
Кац А.А.	– профессор (США),
Кожанов А.И.	– профессор (Россия),
Лакаев С.Х.	– академик АН РУз (Узбекистан),
Литвинов С.Н.	– профессор (США),
Муратов М.А.	– профессор (Россия),
Нарманов А.Я.	– профессор (Узбекистан),
Псху А.В.	– профессор (Россия),
Розиков У.А.	– профессор (Узбекистан),
Сукочев Ф.А.	– профессор (Австралия),
Фарманов Ш.К.	– академик АН РУз (Узбекистан),
Фаязов К.С.	– профессор (Узбекистан),
Хаджиев Дж.Х.	– академик АН РУз (Узбекистан),
Халмухамедов А.Р.	– профессор (Узбекистан),
Худайберганов Г.	– профессор (Узбекистан),
Худойбердиев А.Х.	– профессор (Узбекистан),
Чилин В.И.	– профессор (Узбекистан),
Шадиметов Х.М.	– профессор (Узбекистан).

Секретариат конференции:

Азизов А., Аминов Б., Бегматов А.С., Гайбуллаев Р., Жураев Р., Кучаров Р., Мамадалиев Н., Рахматов Н., Хайдаров Ф.

СОДЕРЖАНИЕ

Академик
Ташмухамед Алиевич Сарымсаков
(1915 - 1995)

ВОСПОМИНАНИЯ ОБ АКАДЕМИКЕ Т.А. САРЫМСАКОВЕ

Ташмухамед Алиевич Сарымсаков – известный ученый-математик, доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Республики Узбекистан, лауреат Государственных премий. Среди математической общественности в нашей стране и за рубежом Т.А.Сарымсаков широко известен как автор исследований в области теории вероятностей, математического и функционального анализа, общей топологии и их приложений. Он положил начало перспективному научному направлению в математике - теории полуполей и их приложений к теории вероятностей, функциональному анализу и общей топологии.

Будучи талантливым педагогом и умелым организатором он оказал благотворное влияние на формирование многих математиков нашей страны.

Т.А. Сарымсаков родился 10 сентября 1915 г. в селе Шахрихан Андижанской области. После переезда семьи в Коканд он учился в восьмилетней школе, которую окончил в 1931 г. Полный желания продолжить образование, Т.А.Сарымсаæков приезжает в Ташкент и поступает в подготовительное отделение Среднеазиатского государствен-ного университета (ныне Нациoнальæный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека). В сентябре 1931 г. его зачислили студентом первого курса физико-математического факультета.

В формировании Т.А. Сарымсакова как ученого большую роль сыграл известный математик В.И. Романовский – представитель всемирно известной Петербургской математической школы. Научные интересы, сложившиеся у В.И. Романовского еще в Петербурге, получили дальнейшее развитие в Среднеазиатском государственном университете. Блестящий ученый и педагог, В.И.Романовский приобщал способных студентов к научно-исследовательской работе. Его содержательные и увлекательные лекции по теории вероятностей оказали огромное влияние на Т.А. Сарымсакова. Он потянулся к творческой работе - решению интересных и весьма актуальных проблем теории вероятностей и ее приложений к вопросам классического анализа.

В 1936 г., успешно окончив физико-математический факультет университета, Т.А.Сарымсаков поступает в аспирантуру где продолжает заниматься у В.И. Романовскому.

Научную деятельность Т.А.Сарымсаков начал с исследования проблем классического анализа, касающихся распределения нулей классических ортогональных полиномов. В изучении этих вопросов Т.А. Сарымсаков впервые применил методы теории вероятностей. Это позволило ему, с одной стороны, добиться новых глубоких результатов, с другой - значительно проще получить, а в отдельных случаях и улучшить ранее известные результаты многих зарубежных математиков.

Применяя вероятностный метод в сочетании с некоторыми известными подæходами к приближенному нахождению корней классических полиномов, Т.А. Сарымсаков выводит формулы для асимптотических значений корней этих полиномов и оценки их наибольшего корня, а также ряд других важных и полезных соотношений.

Указанные исследования Т.А.Сарымсакова привлекли внимание известных специалистов по классическому анализу. Основные результаты этих работ вошли в кандидатскую диссертацию Т.А.Сарымсакова на тему "Распределение корней интегралов дифференциальных уравнений второго порядка и асимптотическое решение некоторых алгебраических уравæнений которую он успешно защитил в 1938 г.

Метод, предложенный Т.А.Сарымсаковым, оказался пригодным для изучения не только классических ортогональных полиномов, но и функций, являющихся колеблющимися решениями дифференциальных уравнений второго порядка. В дальнейшем, развивая свой метод, Т.А. Сарымсаков изучает распределение корней и другие свойства произвольной последовательности полиномов. Полученные им в этом направлении результаты имеют глубокие связи с теорией потенциала.

Большое влияние на научную деятельность Т.А.Сарымсакова оказал выдающийся математик, академик А.Н.Колмогоров, на семинаре которого в Московском государственном университете в 1938 г. он выступил с докладом по результатам своих научных изысканий. Между ними установились тесные научные контакты.

С сентября 1938 г. Т.А. Сарымсаков - доцент, а с 1938 г. по август 1941 г. - заведующий кафедрой общей математики и одновременно заместитель декана физико-математического факультета САГУ.

В годы войны 1941-1945 г.г. Т.А.Сарымсаков, находясь на действительной службе, упорно продолжал заниматься вопросами теории вероятностей, математической статистики и их приложениями. Ему удалось матричный метод исследования конечных цепей Маркова, созданный В.И. Романовским, распространить на случай счетных цепей Маркова и цепей Маркова с непрерывным множеством состояний, перенести ряд классических теорем теории вероятностей (закон больших чисел, центральную предельную теорему, закон повторного логарифма и др.) на случай цепей Маркова со счетным, а также с непрерывным множеством состояний.

В 1942 г. Т.А.Сарымсаков успешно защитил докторскую диссертацию на тему: "К теории однородных стохастических процессов со счетным множеством возможных состояний". В ноябре того же года ему была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук и присвоено звание профессора.

В 1940-1950-е годы Т.А.Сарымсаков развивает теорию одноæродных цепей Маркова и ее приложений к синоптической метеорологии. Из этих исследований особый интерес представляют результаты, касающиеся синтеза методов изложения теории цепей Маркова по А.Н.Колмогорову и В.И.Романовскому. Итоги исследований по однородным цепям Маркова Т.А.Сарымсаков изложил в монографии "Основы теории процессов Маркова опубликованной в Москве в 1954 г. С дополнениями эта монография была переиздана в 1988 г. в г. Ташкенте.

Ряд работ Т.А.Сарымсакова посвящен эргодичности, регулярности и другим вопросам предельного поведения вероятностей перехода для конечных, но неоднородных цепей Маркова, а также для однородных цепей с множеством состояний из конечного интервала. Структурное изучение последовательности стохастических матриц позволило ему сформулировать утверждения об эргодических свойствах неоднородных цепей Маркова, которые в последующем продолжил и развил австралийский математик Е. Сенета.

Ведя научные изыскания по цепям Маркова, Т.А.Сарымсаков установил ряд результатов по линейным однородным интегральным уравнениям. В исследованиях Т.А.Сарымсакова отразились широта и многогранность его научных интересов, умение гармонически сочетать глубокие теоретические разработки с конкретными практическими задачами. Поэтому неслучайно в течение ряда лет Ташмухамад Алиевич с большим увлечением и весьма успешно занимался приложением вероятностных схем цепей Маркова к синоптическим процессам над Средней и Передней Азией. Одна из главных идей Т.А.Сарымсакова состояла в том, что эволюция во времени тех или иных типизированных метеорологических событий трактуется как дискретный Марковский процесс. Эта идея оказалась весьма плодотворной и получила реализацию в сотрудничестве с известными геофизиками-синоптиками В.А.Бугаевым, В.А.Джорджио и др. Были составлены весьма, полезные для практического приложения календарные типы синоптических процессов над Средней и Передней Азией, изучены циркуляции атмосферы, что позволило построить схему динамического формиæрования климата Средней Азии в холодном и теплом полугодиях, и разработаны практические рекомендации большого народнохозяйствен-ного значения. Т.А.Сарымсаков вместе с группой сотрудничавших с ним ученых был удостоен звания лауреата Государственной премии. Этот цикл работ был положен в основу фундаментальной коллективной монографии "Синоптические процессы Средней Азии изданной в Ташкенте в 1957 г.

За многолетнюю плодотворную научную деятельность в 1960 г. Т.А.Сарымсакову было присвоено почетное звание "Заслуженный деятель науки и техники Узбекистана".

В конце 50-х-начале 60-х годов начинается новый этап в научной деятельности Т.А.Сарымсакова, связанный с исследованием упорядочен-ных топологических векторных пространств.

Под влиянием работ М.Г.Крейна, Л.В.Канторовича и их учеников по теории полуупорядоченных пространств и их приложений Т.А.Сарым-саков, М.Я.Антоновский и В.Г.Болтянский вводят новый математический объект - топологическое полуполе, изучают его свойства, и намечают обширную программу его приложений к общей топологии, функцио-нальному анализу и теории вероятностей. Вокруг этого направления Т.А.Сарымсаков объединил многих ученых и талантливую молодежь.

Топологическое полуполе - решеточно упорядоченное топологи-ческое кольцо с частичной обратимостью операции умножения. Этот объект позволил обобщить такие важные понятия, как метрические, нормированные и гильбертовы пространства.

Теория метрических и нормированных пространств над полуполями дала возможность метризовать всякое регулярное топологическое пространство, обобщить и усилить многие классические теоремы общей топологии, топологической алгебры и функционального анализа. С помощью техники пространств, нормированных над полуполями, Т.А.Сарымсаков предложил простое доказательство классической теоремы А.Н.Тихонова о неподвижæной точке.

Итоги первого этапа развития теории топологических полуполей и их приложений изложены в монографии Т.А.Сарымсакова "Тополо-гические алгебры Буля"(Ташкент, 1963), написанной им в соавторстве с М.Я.Антоновским и В.Г.Болтянским и в обстоятельной обзорной статья тех же авторов, опубликованной в 1966 г. в журнале "Успехи матема-тических наук". В 1967 г. авторы монографии были удостоены высокого звания лауреатов Государственной премии Узбекистана им. Беруни. Монография была издана на английском языке в США.

Общая теория полуполей и алгебр Буля позволила Т.А.Сарымсакову перейти к изложению теории вероятностей с алгебраической точки зрения. В 1969 г. вышла его монография "Топологические полуполя и теория вероятностей"(Ташкент), в которой данная концепция обрела свое систематическое воплощение.

Идея алгебраизации подхода к изучению основ теории вероятностей нашла свое дальнейшее развитие в последующих работах Т.А.Сарым-сакова и его учеников, касающихся теории упорядоченных алгебр и алгебраического изложения основ некоммутативной (квантовой) теории вероятностей.

Развитие теории некоммутативного интегрирования привело к необходимости построения некоммутативного аналога алгебр измеримых функций (случайных величин). Это - алгебры измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана и Капланского, которые занимают в теории некоммутативного интегрирования и квантовой теории вероятностей такое же место, что и алгебры измеримых функций в классической теории интегрирования и теории вероятностей.

В исследованиях, проводимых в школе Т.А.Сарымсакова, были определены упорядоченные инволютивные и бэровские алгебры, близкие по своим свойствам к алгебрам измеримых и локально измеримых операторов. Проводились исследования по теории упорядоченных йорда-новых алгебр, как правило, реализующихся в виде алгебр ограниченных и неограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, а также по развитию вероятностных аспектов этой теории.

Итоги исследований по данному направлению были подведены в коллективной монографии "Упорядоченные алгебры"(авторы - Т.А.Сарымсаков, Ш.А.Аюпов, Д.Х.Хаджиев, В.И.Чилин. Ташкент, 1983), получившей широкое признание в научных кругах.

Значительное место в исследованиях Т.А.Сарымсакова и его коллег занимала теория операторных алгебр и теория некоммутативного интегрирования. Эти теории, изучающие свойства алгебр операторов в гильбертовых пространствах, состояния на операторных алгебрах, а также возникающие здесь распределения вероятностей являются математичеæским аппаратом квантовой статистической механики (по этой причине она носит название квантовой теории вероятностей).

В последние десятилетия в некоммутативной теории вероятностей были достигнуты значительные успехи. Существенный вклад в ее развитие внесла школа Т.А.Сарымсакова. Так, Т.А.Сарымсаковым и его учениками были получены центральная предельная теорема и усиленный закон больших чисел для сумм слабозависимых операторов, установлены границы применимости этих теорий. Сформулированы также индиви-дуальная эргодическая теорема и теорема о сходимости условных математических ожиданий в пространстве измеримых операторов, интегрируемых с квадратом, которые для случая ограниченных операторов при некоторых дополнительных предположениях были установлены в работах Я.Г.Синая, В.В.Аншелевича, К.Ленса, Ф.Йедона и др.

В 1985 г. вышла в свет монография Т.А.Сарымсакова "Введение в квантовую теорию вероятностей"(Ташкент), в которой на примере двух важнейших пространств Џ алгебре конечных матриц и алгебре ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве - дано система-тическое изложение основных понятий и методов некоммутативной теории вероятностей.

Широта и многогранность научных интересов Т.А.Сарымсакова, умение гармонично сочетать глубокие теоретические разработки с конкретными практическими задачами получили еще одно яркое подтверждение в исследованиях, проводимых им в последние годы жизни, по теории квадратичных операторов и их приложениям в биологии.

Т.А.Сарымсаковым опубликовано более 170 научных работ, восемь монографий и два учебника. Он автор многих интересных научно-популярных статей.

Т.А.Сарымсаков - выдающийся организатор науки в Узбекистане, один из основателей Академии наук Узбекистана, с 1943 г. - ее действительный член, в 1943-1946 гг. - вице-президент, а с 1946 по 1952 г. - президент.

По инициативе и при активном участии Т.А.Сарымсакова в 1963 г. была проведена IV Всесоюзная конференция по топологии и ее приложениям, были также организованы ряд всесоюзных математических семинаров и школ: по эргодической теории (сентябрь 1965 г.), пред-ставлениям групп и их приложениям (май 1975 г.) и др., которые в значительной мере стимулировали развитие современных областей математики в Узбекистане.

Плодотворные научные исследования Т.А.Сарымсаков успешно совмещал с педагогической и общественной работой. Педагогическая деятельность Т.А.Сарымсакова неразрывно связана с математическим факультетом ТашГУ (ныне Национальный университет Узбекистана). После защиты докторской диссертации и демобилизации из рядов армии в июне 1942 г. Т.А.Сарымсаков возвратился на работу в университет, где возглавил кафедру общей математики (1944 - 1957 гг.), руководил кафедрой теории вероятностей и математической статистики. В 1943-1944, 1952-1958, 1971-1983 гг. Т.А.Сарымсаков был ректором ТашГУ. На этом посту особенно ярко проявился его талант ученого-педагога, воспитателя и организатора. В сентябре 1964 г. по инициативе Т.А.Сарымсакова на математическом факультете ТашГУ была организована кафедра функци-онального анализа (ныне кафедра алгебры и функционального анализа), которой он заведовал до 1994 года. В 1979 г. в Институте математики им В.И.Романовского АН Узбекистана (ныне Институт математики при Национальном университете Узбекистана) также по инициативе Ташмухамеда Алиевича был организован отдел функционального анализа (с 1985 года - отдел алгебры и анализа). Коллективы кафедры и отдела делают многое для продолжение дел Т.А.Сарымсокова, в том числе для подготовки высококвалифицированных специалистов по современным областям математики - алгебре, функциональному анализу, математической физике и других.

Т.А.Сарымсаков внес весомый вклад в развитие высшего образования Узбекистана, будучи с 1959 по 1960 гг. на посту председателя Госкомитета, а с 1960 по 1971 гг. в должности министра высшего и среднего специального образования Узбекистана. С именем Т.А.Сарым-сакова связано возникновение и развитие математических кафедр в вузах республики.

Т.А.Сарымсаков был активным участником многих международных научных и общественно-политических форумов. Видный ученый и общественно-политический деятель, он посетил около 30 стран мира, где достойно представлял нашу страну.

Т.А.Сарымсаков принадлежит к числу выдающихся общественных и государственных деятелей Узбекистана, внесших неоценимый вклад в развитие науки, культуры и высшего образования в республике. За большие заслуги в развитии математической науки и высшего образования в Узбекистане, плодотворную педагогическую деятельность и подготовку научных кадров ему присвоено звание Героя Труда, он награжден многими орденами и медалями. В 2002 году за выдающиеся заслуги в деле развития науки и образовании Узбекистана Т.А.Сарымсаков был награжден (посмертно) орденом "Буюк хизматлари учун".

Жизнь замечательного ученого Т.А.Сарымсакова является примером беззаветного служения Отчизне и своему народу.

Об одной краевой задаче для смешанного параболо-гиперболического уравнения с двумя перпендикулярными линиями изменения типа

Абдуллаев А. С.[1], Пулатов С.[2]

[1,2]Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,
suratjonpolatov@gmail.com

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_y+c(x,y)u, \ (x>0, \ y>0), \\ u_{xx}-u_{yy}+signx\lambda^2 u, \ (xy<0) \end{cases} \tag{1}$$

где $c(x,y) \leq 0, c(x,y) \in C^{0,\alpha}, \ 0<\alpha \leq 1, \lambda$ -произвольное действительное число. Пусть D -конечная односвязная область плоскости x,y ограниченная отрезками $BB_0, \ B_0A_0$ прямых $x=1, \ y=1$ и характеристками $EF: x+y=0, \ BF: x-y=1, \ A_0E: x-y=-1$.

Примем следующие обозначения:

$$\begin{array}{l} D_1=D\bigcap(x>0,y<0), \\ D_2=D\bigcap(x<0,y>0), \\ D_3=D\bigcap(x>0,y>0), \\ J_1=\{(x,y): y=0, 0<x<1\}, \\ J_2=\{(x,y): x=0, 0<y<1\}, \\ \theta_0(x)=\frac{x}{2}-i\frac{x}{2}, \theta_1(x)=\frac{x+1}{2}+i\frac{x-1}{2}, \\ \theta_2(y)=-\frac{y}{2}+i\frac{y}{2}, \theta_3(y)=\frac{y-1}{2}+i\frac{y+1}{2}. \end{array}$$

$$A_{ax}^n[f(x)]=f(x)-\int_a^x f(t)(\frac{t-a}{x-a})^n\frac{\partial}{\partial t}J_0[\lambda\sqrt{(x-a)(x-t)}]dt,$$

где $J_k(x)$ -функция Бесселя k-го порядка первого рода: $a=const$ -произвольное действительное число $n=\overline{0,1}$.

Задача A_λ. Найти функцию $u(x,y)$, которая:

$$1)u(x,y)\in C(\bar{D}_i\bigcap C^1(D_1\bigcup J_1)\bigcap C^1(D_2\bigcup J_2)\bigcap C^1(D_3\bigcup J_3)], \ i=\overline{1,3};$$

2) удовлетворяет уравнению в $D\backslash J_i, \ i=\overline{1,3}$;
3) удовлетворяет условиям

$$u|_{x=1}=\varphi(y) \tag{2}$$

$$a_1(x)A_{0x}^0\{u[\theta_0(x)]\}+b_1(x)A_{1x}^0\{u[\theta_1(x)]\}+c_1(x)u(x,-0)=\alpha_1(x), \ 0\leq x\leq 1, \tag{3}$$

$$a_2(y)A_{0y}^0\{u[\theta_2(y)]\}+b_2(y)A_{1y}^0\{u[\theta_3(y)]\}+c_2(y)u(-0,y)=\alpha_2(y), \ 0\leq y\leq 1; \tag{4}$$

4) и для которой выполняются условия склеивания

$$\begin{array}{l} u(x,-0)=\alpha_1(x)u(x,+0)+\gamma_1(x), \\ u_y(x,-0)=\beta_1(x)u_y(x,+0)+\delta_1(x)u(x,+0)+\sigma_1(x) \\ \\ u(-0,y)=\alpha_2(y)u(+0,y)+\gamma_2(y), \\ u_x(-0,y)=\beta_2(y)u_x(+0,y)+\delta_2(y)u(+0,y)+\sigma_2(y) \end{array} \tag{5}$$

где $\varphi(y)$, $a_i, b_i, c_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \sigma_i$ - заданные функции, причем φ, $a_i', b_i', c_i', \alpha_i'', \beta_i'', \gamma_i'', \delta_i, \sigma_i$ непрерывны. $\alpha_i\beta_i \neq 0$, $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 \neq 0$, $i = 1,2$ кроме того выполняются следующие неравенства:

$$\frac{a_1(1)}{l_1(1)} + \frac{b_1(0)}{l_1(0)}0,\ [\frac{a_1(x)}{l_1(x)}]' \leq 0,\ [\frac{b_1(x)}{l_1(x)}]' \leq 0, \tag{6}$$

$$\alpha_1(x)\beta_1(x) > 0,\ \alpha_1(x)\delta_1(x) + \alpha_1(x)\beta_1(x)c(x) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}[\alpha_1(x)\beta_1(x)] \leq 0, \tag{7}$$

$$[\frac{a_2(y)}{\alpha_2(y)\beta_2(y)l_2(y)}]^1 \leq 0,\ [\frac{b_2(y)}{\alpha_2(y)\beta_2(y)l_2(y)}]0,\ \frac{\delta_2(y)}{\alpha_2(y)\beta_2(y)} \leq 0 \tag{8}$$

где $l_i(t) = a_i(t) + b_i(t) + c_i(t),\ i = 1,2.$

Если выполняются условия (1)-(8) тогда задачи A_λ имеет единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салахитдинов М.С. Уринов А.К. Об обной краевой задаче для уравнения смешанного типа с нагладкими линиями вырождених. –ДОКЛ АН СССР, 1982. Т. 262, є3, с. 539–541.

2. Собелев С.Л. Уравнения математической физика. М.: ГИТТЛ, 1954, 443 с.

Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения с двумя параллельными линиями изменения типа

Абдуллаев И. А.[1], Артиков Б.[2]

Самаркандский государственный архитектурный строительный институт, Самарканд, Узбекистан,
iskandar-aa@inbox.ru;
Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + a(x,y)u_x + b(x,y)u \ 2\ D_1, \\ u_{xx} - u_{yy} + u_i u_x + b_i u_y + c_i u \ 2\ D_i,\ \ i = 2,3 \end{cases} \tag{1}$$

где D_1-область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0 и A_0A прямых $y = 0, x = 1, y = 1$ и $x = 0$; D_2-характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 оси y и двумя характеристиками $AC : x + y = 0$, $A_0C : y - x = 1$ уравнения (1), выходящими из точек A и A_0 и пересекающимися в точке $C(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$; D_3-характеристический треугольник, ограниченный отрезком BB_0 и двумя характеристиками $BE : x - y = 1$, $B_0E : x - 2 = -y$ уравнения (1), выходящими из точек B и B_0 и пересекающимися в точке $E(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$.

Совокупность областей D_1, D_2 и D_3 вместе с открытыми отрезками AA_0 и BB_0 обозначим через D. Относительно коэффициентов в уравнении (1) предположим, что $a(x,y) \in C^{1,\alpha}(\bar{D}_1)$, $b(x,y) \in C^{0,D}(\bar{D}_1), 0 < \alpha \leq 1, a_i, b_i, c_i$ -произвольные постоянные.

Уравнение (1) в области D_1; заменой

$$u(x,y) = v(x,y)\exp\{-\frac{1}{2}\int_a^x a(t,y)dt\}$$

сведем к уравнению
$$v_{xx} - v_y + c(c,y)v = 0, \tag{2}$$
где
$$c(x,y) = \frac{1}{4}a^2(x,y) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}a(x,y) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^x a(t,y)dt + b(x,y),$$
а в D_i, $i = 2,3$ заменой
$$u(x,y) = v(x,y)e^{\alpha_j x + \beta_j y}$$
получим уравнение
$$v_{xx} - v_{yy} + \lambda_j^2 v = 0 \tag{3}$$
где
$$\lambda_j^2 = \frac{1}{4}(4c_j^2 - a_j^2 - b_j^2),\ \alpha_j = \frac{a_j}{2},\ \beta_j = -\frac{b_j}{2},\ j = 1,2.$$
Поэтому вместо уравнение (1) исследуем уравнение
$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + b(x,y)u \ \ 2\ D_1, \\ u_{yy} - u_{xx} + u_i u_x + \lambda_j^2 u \ \ 2\ D_i,\ \ i = 1,2 \end{cases} \tag{4}$$
где $c(x,y)$ и λ_j^2 связаны с коэффициентами уравнения (1) соотношениями (1) и (2), кроме того, $c(x,y) \le 0$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$, которая:

1) является регулярным решением уравнения (3) в области D, кроме точек отрезков AA_0 и BB_0;

$$2) u(x,y) \in C(\bar{D}_i)\bigcap[C^1(D_2\bigcup AA_0)\bigcap C^1(D_3\bigcup BB_0)\bigcap C^1(D_1(D_1\bigcup AA_0\bigcup BB_0)];$$

3) удовлетворяет условиям
$$u|_{A_0C} = \psi_1(y),\ \frac{1}{2} \le y \le 1 \tag{5}$$
$$u|_{BE} = \psi_2(y),\ 0 \le y \le \frac{1}{2} \tag{6}$$
$$u|_{AB} = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1 \tag{7}$$
4) и для которой выполняются условия склеивания
$$\begin{aligned} u(-0,y) &= \alpha_1(y)u(+0,y) + \gamma_1(y), \\ u_x(-0,y) &= \beta_1(y)u_x(+0,y) + \delta_1(y)u(+0,y) + \sigma_1(y) \end{aligned} \tag{8}$$
$$\begin{aligned} u(1+0,y) &= \alpha_2(y)u(1-0,y) + \gamma_2(y), \\ u_x(1+0,y) &= \beta_2(y)u_x(1-0,y) + \delta_2(y)u(1-0,y) + \sigma_2(y) \end{aligned} \tag{9}$$
где $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $\varphi(x)$, α_i, β_i, γ_i, δ_i, σ_i - заданные функции, причем ψ_1'', ψ_2'', φ', α_i'', β_i'', γ_i'', δ_i, σ_i непрерывны.

Задача 2. Найти функцию, удовлетворяющую всем условиям задача $_1$, кроме (1) и (2), вместо которого должны выполняются условия
$$u|_{AC} = \psi_1(y),\ 0 \le y \le \frac{1}{2}, u|_{B_0E} = \psi_2(y),\ \frac{1}{2} \le y \le 1.$$
Доказываются теоремы существования и единственности решения задаче $_1$. Аналогично исследуются задаче $_2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сопуев А. Об аналогах задач Теллерстедта для уравнения смешанного паробола-гиперболического типа// Краевые задача механики сплошных сред. Тошкент: Фан, 1982 с. 87–89.

2. Керефов А.А. Задача жевре для одного смешанно –пороболического уравнения// Дифференциальные уравненных. 1977. Т.13, №1. с. 76–83.

Изометрия log-алгебр, построенных относительно σ-конечных мер

Абдуллаев Р.[1], Мадаминов Б.[2]

Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан, arustambay@yandex.ru;

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекситан, aabekzod@mail.ru

В работе [1] введены коммутативные и некоммутативные log-алгебры. Доказано, что они являются F-пространствами. В работе [2] установлены необходимое и достаточное условия изоморфности log-алгебр, построенных на пространствах с мерой.

В настоящей заметке проиводится критерий изометричности log-алгебр, построенных по различным σ-конечным мерам.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ пространство с σ-конечной мерой μ и пусть $X = X_\mu$ полная булева алгебра классов эквивалентностей $e = [A]$ всех множеств равных почти всюду. Известно, что $\widehat{\mu}(e) = \mu(A)$, $e \in X_\mu$, есть строго положительная σ-конечная мера на X_μ. Меру $\widehat{\mu}$ будем обозначать через μ.

Обозначим через $\mathcal{L}_0(X) = \mathcal{L}_0(X, \mu)$ алгебру μ-эквивалентных классов комплекснозначных измеримых функций на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Пусть [1]

$$\mathcal{L}_{log}(X, \mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(X, \mu) : log(1 + |f|) \in \mathcal{L}_1(X, \mu)\}.$$

$\mathcal{L}_{log}(X, \mu)$ является F-пространством относительно F-нормы $\|f\|_{log} = \int\limits_\Omega log(1+|f|)d\mu$. В [1] показано, что $\mathcal{L}_{log}(X, \mu)$ является алгеброй.

Пусть X произвольная полная булева алгебра, $e \in X$, $X_e = [0, e] = \{g \in X : g \le e\}$. Через $\tau(X_e)$ обозначим минимальную мощность множества, плотного в X_e в (o)-топологии. Бесконечная полная булева алгебра X называется однородной, если $\tau(X_e) = \tau(X_g)$ для любых ненулевых $e, g \in X$ [3].

Теорема 1. *Пусть X и Y однородные булевы алгебры с конечными мерами μ и ν. Следующие условия эквивалентны:*

(i) Алгебры $\mathcal{L}_{log}(X, \mu)$ и $\mathcal{L}_{log}(X, \nu)$ изометричны;

(ii) $\tau(X) = \tau(Y)$ и $\mu(\mathbf{1}_X) = \nu(\mathbf{1}_Y)$.

Теорема 2. *Пусть X и Y однородные булевы алгебры с σ-конечными, но не конечными мерами μ и ν. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) Алгебры $\mathcal{L}_{log}(X, \mu)$ и $\mathcal{L}_{log}(X, \nu)$ изометричны;

(ii) $\tau(X) = \tau(Y)$.

Пусть X полная неатомическая булева алгебра и μ – строго положительная счетно аддитивная σ-конечная мера на X. Тогда разложение X на однородные компоненты не более чем счетно. Обозначим через $\{X_{s_i}\}$ однородные компоненты булевой алгебры X, для которых

$$\tau_{s_i} = \tau(X_{s_i}) < \tau_{s_{i+1}},\ \mu(s_i) = \infty,$$

а через $\{X_{u_i}\}$ обозначим однородные компоненты булевой алгебры X, для которых

$$\tau_{u_i} = \tau(X_{u_i}) < \tau_{u_{i+1}},\ \mu(u_i) < \infty.$$

Тогда однозначно определена матрица

$$\begin{pmatrix} \tau_{s_1} & \tau_{s_2} & \dots \\ \tau_{u_1} & \tau_{2_1} & \dots \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots \end{pmatrix},$$

которую назовем паспортом булевой алгебры X с σ-конечной мерой μ. В случае конечной меры получим определение паспорта нормированной булевой алгебры, введенной в [3, стр. 273].

Теорема 3. *Пусть X и Y полные булевы алгебры с σ-конечными мерами μ и ν. Тогда $\mathcal{L}_{log}(X, \mu)$ и $\mathcal{L}_{log}(X, \nu)$ изометричны тогда и только тогда, когда их паспорта совпадают.*

Рассмотренные в работе log-алгебры являются примерами полуполей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dykema K., Sukochev F., Zanin D. Algebras of log-integrable functions and operators // Complex Anal. Oper. Theory. 2016. Vol. 10, Issue 10. P. 1775–1787.

2. Abdullaev R.Z., Chilin V.I. Isomorphic classification of $*$-algebras of log-integrable measure functions // Algebra, Complex analysis and Pluripotential theory. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. Vol. 264. P. 73-83.

3. Vladimirov D.A. Boolean algebras in analysis. Dordrecht.: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Двухфазная модель реактора с псевдоожиженным слоем при наличии рецикла

Абдурахимов А.

Ташкентский архитектурно строительный институт, Ташкент, Узбекистан,
abduraximov1943@mail.ru;

Для увеличения единичной мощности в химических реакторах применяется: Технология рециркуляции. Многие процессы органической и неорганической химии осуществляются при неполном превращении исходного сырья, т.е. в конечные продукты реакции превращается только часть его, остальная остается неизменной. Для того чтобы достичь максимального выхода продукта, часто применяют технологию рециркуляции.

Рециркуляция непрореагировавшего сырья - подача части продукта из выхода обратно во вход - применяется как в одностадийном, так и в многостадийных процессах для многократной повторной переработки сырья, вплоть до полного его использования.

Постановка задачи. Пусть в проточном химическим реакторе с неоднородным кипящим слоем происходит одностадийная химическая реакция. Предложим, что перенос вещества в плотной и разбавленной фазах, а также тепловая энергия в разбавленной фазе описываются моделью полного вытеснения а тепловая энергия плотной фазы - моделью полного перемешивания.

В реакторе происходит химическая реакция первого порядка, сопровождаемая выделением (поглощением) тепла по закону Аррениуса. Кроме того, осуществляется рецикл, т.е. часть потока, выходящего из реактора, возвращается на его вход . С учетом этих предположений уравнения изменения массы и поля температуры в безразмерном виде для адиабатического реактора можно записать так : плотной фазы-

$$\frac{dZ_1}{d\tau} + u_1\frac{dZ_1}{dx} = (1 - Z_1)\, g e^{\left(-\frac{\beta}{T_1}\right)} - A\,(Z_1 - Z_2) \tag{1}$$

$$\frac{dT_1}{d\tau} = \alpha(T_0' - T_1) + wu_1(T_0'' - T_1) + wge^{\left(-\frac{\beta}{T_1}\right)}\int\limits_0^1 (1 - Z_1)dx - B(T_1 - \int\limits_0^1 T_2 dx) \tag{2}$$

Начальные и граничные условия

$$\tau = 0; \quad Z_1\,(x,0) = Z_{01}\,(x)\,, \quad T_1(0) = T''(0) \quad x = 0; \quad Z_1(0,\tau) = 0 \tag{3}$$

Для разбавленной фазы

$$\frac{dZ_2}{d\tau} + u_2\frac{dZ_2}{dx} = A\,(Z_1 - Z_2) \tag{4}$$

$$\frac{dT_2}{d\tau} + u_2\frac{dT_2}{dx} = B\,(T_1 - T_2) \tag{5}$$

Начальные и граничные условия

$$\tau = 0; \quad Z_2\,(x,0) = Z_{02}\,(x)\,, \quad T_2(x,0) = T_{02}(x) \tag{6}$$

$$x = 0; \quad Z_1(0,\tau) = 0, \quad T_2(0,\tau) = T_0'' \tag{7}$$

Здесь используются обозначения принятые в работе [2].

Предполагаем, что процессы теплообмена в реакторе с неоднородным псевдоожиженным слоем достаточно интенсивны, так что градиентом температуры в плотной фазе внутри реактора можно пренебречь. С этим предположением связана форма уравнения сохранения тепловой энергии, которое выражает интегральный баланс тепла в реакторе.

Рассмотрим стационарный случай процесса,т.е. градиент искомых функций от времени равен нулю.

Будем изучать влияние, парамера рецикла и скорости разбавленной фазы в реакторе на степень продвижения реакции реагентов и на температуры каждой фазы. Из анализа выражения следует, что стационарная температура разбавленной фазы при отсутствии теплообмена (B=0) постоянна:

$$T_2^0 = const, T_i < T_2^0 < T_1^0$$

При отсутствии теплообмена и рецикла ($\beta = 0, y = 0$) получим $T_2^0 = T_i$. Если в реакторе отсутствует только теплообмен между фазами, то температура в разбавленной фазе растет с увеличением рецикла и уменьшается с увеличением доли разбавленной фазы.Показано, что с увеличением интенсивности теплообмена температура разбавленной фазы увеличивается

Количество стационарных режимов работы реактора определяется числом решений уравнения (5) относительно T_1^0 с учетом зависимоети $\beta(T_1^0)$.

Расчеты проводили при следующих значениях параметров:

$A = 0.01; B = 0.01; T_i = 1.65; y = 0.01; U_2 = 1,45\beta = 50; \omega = 0.9; \phi = 0.1$. Построена диаграмма бифуркации, соответствующей тепловыделению в плотной фазе. Кривая тепловыделения имеет три точки пересечения -Н, Н, +Н с прямой, параллельной оси температур. Они соответствуют нижнему, среднему, верхнему темпера-турным стационарным режимам с температурами $T_{11}^0, T_{12}^0 T_{13}^0$. Это указывает что, при изменении параметра рецикла количество стационарных состояний режима работы реактора может изменяться от одного до трех.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдурахимов А. Об одном методе стаблизации среднего режима работы реактора.// Доклады АН РУз., 2000, №7.
2. Гупало Ю.П., Абдурахимов А.А., Джуманиязов К.А. Об одной модели химического реактора с неоднородным псевдоожиженным слоем // ТОХТ, 1989, T.XXII, №6. - С.772-781.

Некоторые оценки для бисингулярного интеграла с локально суммируемой плотностью

Абсаламов Т., Файзуллаева Б., Хамракулова Ш.

Самаркандкий Государственный университет, Самарканд, Узбекистан, fayzullayeva55@mail.ru

Рассмотрим бисингулярный интеграл вида:

$$\tilde{u}(x_1, x_2) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \frac{u(s_1, s_2)}{(s_1 - x_1)(s_2 - x_2)} \, ds_1 ds_2,$$

где функция $u \in L_p(\Delta), \Delta = (a_1, a_2, b_1, b_2), p > 1$.

Введем характеристики

$$\Omega_{p,1}(u_1, \xi_1, \xi, \eta) = \left(\int_{a_1+\xi_1}^{a_2} \int_{b_1+\xi}^{b_2-\eta} |u(x_1, x_2)|^p \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\Omega_{p,2}(u_2,\xi_2,\xi,\eta)=\left(\int\limits_{a_1}^{a_2-\xi_2}\int\limits_{a_2+\xi}^{b_2-\eta_1}|u(x_1,x_2)|^p\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\omega_{p,1}(u_1,\delta,\xi_1,\xi,\eta)=\sup_{h_1\in E_1}\left(\int\limits_{a_1+\xi}^{a_2-\eta_1-\xi_1}\int\limits_{b_1+\xi}^{b_2-\eta}|u(x_1+h_1,x_2)-u(x_1,x_2)|^p\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\omega_{p,2}(u_2,\delta,\xi_2,\xi,\eta)=\sup_{h_2\in E_2}\left(\int\limits_{a_1}^{a_2-h_2-\xi_2}\int\limits_{b_1+\xi}^{b_2-\eta}|u(x_1,x_2+h_2)-u(x_1,x_2)|^p\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}}$$

где $\eta+\xi\leq b_2-b_1=l_2,\ \ \xi_i=a_2-a_1=l_1,\ E_i=\{h_i:\ 0<h_i<min\{\delta,l_1-\xi_i\}\},\ \ i=1,2,\ \ \delta>0,\ \ p>1.$

Пользуясь [1-6] доказана следующая

Теорема. Пусть $u_i\in L_p^{loc}(a_i,b_1,b_2),\ \ p>1,\ \ \xi_i\in(0,l_1]\ \ (i=1,2)$. Тогда при сходимости соответствующих интегралов справедливо неравенства

$$\begin{aligned}\Omega_{p,i}(\tilde{u}_i,\xi_i,\xi,\eta)\ \ &\leq\ \ C\left[\frac{1}{\xi^{1/q}}\int\limits_0^{\frac{l_1}{2}}\int\limits_0^{\frac{\xi}{2}}\frac{\Omega_{p,i}\left(u_i,t_1,t_2,\frac{l_1}{2}\right)}{(t_1t_2)^{\frac{1}{p}}(t_1+\xi_i)^{\frac{1}{q}}}dt_1dt_2\right.\\ &+\ \ \frac{1}{\eta^{\frac{1}{q}}}\int\limits_0^{\frac{l_1}{2}}\int\limits_0^{\frac{\eta}{2}}\frac{\Omega_{p,i}\left(u_i,t_1,\frac{l_2}{2},t_2\right)}{(t_1t_2)^{\frac{1}{p}}(t_1+\xi_i)^{\frac{1}{q}}}dt_1dt_2\\ &+\ \ \frac{1}{\xi^{\frac{1}{q}}}\int\limits_0^{\frac{\xi_i}{2}}\int\limits_0^{\frac{\xi}{2}}\frac{\omega_{p,i}\left(u_i,t_1,\frac{\xi_i}{2},t_2,\frac{l_2}{2}\right)}{t_1t_2^{\frac{1}{p}}}dt_1dt_2\\ &+\ \ \frac{1}{\eta^{\frac{1}{q}}}\int\limits_0^{\frac{\xi_i}{2}}\int\limits_0^{\frac{\eta}{2}}\frac{\omega_{p,i}\left(u_i,t_1,\frac{\xi_i}{2},\frac{l_2}{2},t_2\right)}{t_1t_2^{\frac{1}{p}}}dt_1dt_2\\ &+\ \ \left.\Omega_{p,i}\left(u_j,\frac{l_1}{6},\frac{l_2}{2},\frac{l_2}{2}\right)ln\frac{2l_1}{\xi_i}\right],i,j=1,2,\ \ i\neq j.\end{aligned}$$

Далее, получены оценки $\omega_{p,i}(\tilde{u}_i,\delta,\xi_i,\xi,\eta)$.

На основе полученной оценки строится класс функций инвариантной относительно бисингулярного оператора $\tilde{u}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абсаламов Т., Файзуллаева Б., Маннонов Г. Некоторые свойства бисингулярного интеграла Коши. Научный вестник СамГУ,2019,є1,6-14.

2. Гусейнов Е.Г., Салаев В.В. Особый интеграл по отрезку прямой в пространствах суммируемых функций, Науч.Тр.МВ и ССО Азерб.ССР, серия физ-мат. Наук, є1,1979, 81-87. 3. Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г. О Неравенства-М., Изд.И.Л.,

1948. 4. Холмуродов Э. Некоторые оценки для особого интеграла с локально суммируемой плотпостью, Уч.зап. МВ и ССО Азерб. ССР, серияфиз-мат. Наук-1978,6,71-80. 5. Fefferman R. A_p weights and singular integrals., Amer.J. Math., M1988, 110, 5, p. 975-987. 6. Riesz M. Surles functions conjugueЎes., Math.Z., 1927,27,2.

Разрешимость нелинейного бисингулярного интегрального уравнения в пространстве $H^p_{\varphi\psi}$

Абсаламов Т., Хамракулова Ш., Мухаммадиев А.

Самаркандкий Государственный университет, Самарканд, Узбекистан,
tolliboyabsalamov@gmail.com

Методом последовательных приближений доказана разрешимость нелинейного бисингулярного интегрального уравнения

$$u(x_1,x_2)=\lambda\int\limits_{a_1}^{a_2}\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{u(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}\,ds_1ds_2, \qquad (1)$$

в $H^p_{\varphi\psi}$ [1], где функция $f(s_1,s_2,u)$ определена на $(a_1,a_2)\times(b_1,b_2)\times(-\infty,+\infty)$, а λ - действительный параметр.

Лемма 1. Пусть функция $f(s_1,s_2,u)$ удовлетворяет условиям:

1. Для почти всех $s_1\in(a_1,a_2), s_2\in(b_1,b_2)$ и при любых $u_1,u_2\in(-\infty,+\infty)$, $|f(s_1,s_2,u_1)-f(s_1,s_2,u_2)|\le D|u_1-u_2|$, где $D-$ положительная постоянная;

2. $f(s_1,s_2,0)\in H^p_{\varphi\psi}$

Тогда:

а) оператор $(fu)(s_1,s_2)=f(s_1,s_2,u(s_1,s_2))$ действует в $H^p_{\varphi\psi}$

в) при любых $u_1,u_2\in H^p_{\varphi\psi}$, $\|fu_1-fu_2\|_{H^p_{\varphi\psi}}\le D\|u_1-u_2\|_{H^p_{\varphi\psi}}$

Рассмотрим следующие операторы

$$(Bu)(x_1,x_2)=\int\limits_{a_1}^{a_2}\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{f(s_1,s_2,u(s_1,s_2))}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2,$$

$$(Av)(x_1,x_2)=\int\limits_{a_1}^{a_2}\int\limits_{b_1}^{b_2}\frac{v(s_1,s_2)}{(s_1-x_1)(s_2-x_2)}ds_1ds_2.$$

Лемма 2. Пусть функция $f(s_1,s_2,u)$ удовлетворяет условия 1 и 2 леммы.

Тогда:

а)$B:H^p_{\varphi\psi}\to H^p_{\varphi\psi}$;

в)при любых $u_1,u_2\in H^p_{\varphi\psi}$ имеет место неравенство:

$$\|Bu_1-Bu_2\|_{H^p_{\varphi\psi}}\le D\|A\|_{H^p_{\varphi\psi}}\|u_1-u_2\|_{H^p_{\varphi\psi}}$$

Доказательство.

Справедливость первый части леммы следует из леммы 1 и теоремы [1] об инвариантности $H^p_{\varphi\psi}$ относительно бисингулярного оператора A.

Докажем вторую часть леммы. Учитывая лемму 1 и равенство $Bu = Afu$, где

$$\|Bu_1 - Bu_2\|_{H^p_{\varphi\psi}} = \|Afu_1 - Afu_2\|_{H^p_{\varphi\psi}} \leq$$

$$\leq \|A\|_{H^p_{\varphi\psi}} \|fu_1 - fu_2\|_{H^p_{\varphi\psi}} \leq D\|A\|_{H^p_{\varphi\psi}} \|u_1 - u_2\|_{H^p_{\varphi\psi}}$$

Из леммы 2 и принципа сжатых отображений вытекает

Теорема 1. Пусть функция $f(s_1, s_2, u)$ удовлетворяет условиям I и 2 леммы 1. Тогда, если

$$|\lambda| < \frac{1}{D\|A\|_{H^p_{\varphi\psi}}},$$

то уравнение (1) имеет единственное решение в $H^p_{\varphi\psi}$ и это решение можно найти методом последовательных приближений, начиная с любого элемента $H^p_{\varphi\psi}$.

Пользуясь теоремой об ограниченности оператора A ([2], [3]) в $L_p(\rho)$ доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функция $f(s_1, s_2, u)$ удовлетворяет условию 1 из леммы 1 и $f(s_1, s_2, 0) \in H^p_{\varphi\psi}$. Тогда, если

$$|\lambda| < \frac{1}{D\|A\|_{H^p_{\varphi\psi}}},$$

то уравнение (1) имеет единственное решение в $L_p(\rho)$ и это решение можно найти методом последовательных приближении, начиная с любого элемента $L_p(\rho)$ Последовательные приближения сходятся в метрике $L_p(\rho)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абсаламов Т., Файзуллаева Б., Мухаммадиев А. Бисингулярный интеграл Коши с суммируемой плотностью и его приложения.PROCEEDINGS of scientific conference YActual problems of stochastic analysisY 20-21 феврал 2021, Тошкент.258-259.

2.Джвершейшвили А. Г. О кратных интегралах типа Коши .Труд Тбл. Госуниверситет т. 84, 1961, с .409-424.

3. Fefferman R., weights and singular integrals, Amer.J.Math.-M., 1988,110,5,p.975-987.

Продолжение векторно-значных мер на проекторах йордановых банаховых алгебрах

Адизов А.А.

ТУИТ, Ташкент, Узбекистан

@mail.ru;

Пусть A – JBW алгебра, $P(A) = \{e \in A : e^2 = e\}$ – решетка проекторов (идемпотентов) из A и X – банахово пространство.

Определение. Ограниченная функция $\mu : P(a) \to X$ называется конечно-аддитивной X-значной мерой, если выполняется следующие два условия:

1. $\mu(e + f) = \mu(e) + \mu(f)$ для идемпотентов $e, f \in P(A)$, $e \cdot f = 0$;

2. $sup\{\|\mu(e)\| : e \in P(A)\} < \infty$.

Если $\psi : A \to X$ – некоторый ограниченный линейный оператор, то его сужение $\psi|_{P(A)} = \mu$ на решетке $P(A)$ есть, очевидно, конечно-аддитивная X-значная мера. Обратно, пусть на $P(A)$ задана некоторая X-значная конечно-аддитивная мера μ. В самой общей постановке проблема существования ограниченного линейного оператора $\psi : A \to X$, сужением которого на $P(A)$ является μ, имеет отрицательное решение: на спин факторе (JBW-факторе типа I_2) легко построить примеры конечно-аддитивных X-значных мер, не являющихся сужениями никаких ограниченных линейных операторов $\psi : A \to X$ [4]. Однако если рассмотреть JBW-алгебры без прямых слагаемых типа I_2 то, как и в случае алгебр Фон Неймана[4], проблема имеет положительное решение. Используя метод работы [4] доказывается следующая:

Теорема. Пусть A – JBW алгебра без прямых слагаемых типа I_2 и X-банахово пространство. Тогда всякую конечно-аддитивную X -значную меру на проекторах A можно единственным образом продолжить до ограниченного линейного оператора отображающего A в X.

Пусть теперь A – JW алгебра, действующая в гильбертовом пространстве H [5]. Если на решетке $P(A)$ задана конечно-аддитивная X-значная мера μ то естественно возникает вопрос о возможности продолжения μ до конечно-аддитивную X-значную меру на решетке $P_1(U)$-проекторов обертывающей W^*-алгебры(алгебры Фон Неймана) $U(A) = A''$. В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. В самом деле, пусть A-бесконечномерный спин фактор (JW-фактор типа I_2) такой, что $U(A)$ является W^*-фактором типа II_2 (существование такого A вытекает из [6](теорема 2)). Тогда по основного результата работы [1] всякую конечно-аддитивную X-значную меру на $P_1(U)$ можно продолжить до ограниченного линейного оператора отображающего $U(A)$ в X. В тоже время на A есть, очевидно, конечно-аддитивная X-значная мера, которые не продолжаются до ограниченного линейного оператора. Это противоречие показывает, что конечно-аддитивные X-значные меры на $P(A)$ не продолжаются до конечно-аддитивную X-значную меру из $P_1(A)$ в X.

Однако если рассмотреть JW-алгебру A без прямых слагаемых типа I_2 то, то вопрос о продолжении конечно-аддитивную X-значную меру на $P(A)$ на проекторах A до конечно-аддитивную X-значную меру на проекторах $U(A)$ эквивалентен проблеме о продолжении конечно-аддитивную X-значную меру μ на $P(A)$ до ограниченного линейного оператора на A. Тогда из теоремы вытекает следуюшие:

Следствие. Пусть A – JW алгебра без прямых слагаемых типа I_2 и X-банахово пространство. Тогда всякая конечно-аддитивная X-значная мера на проекторах A продолжается до конечно-аддитивной X-значной мерой на проекторах обертывающей W^*-алгебры $U(A)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shultz F.M. On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces. J. Functional Analysis, 1979, vol. 31, № 3, p. 360-376.

2. Сарымсаков Т.А., Аюпов Ш.А., Хаджиев Дж., Чилин В.И. Упорядоченные алгебры. Ташкент. “ФАН”, 1983.

3. Аюпов Ш.А. Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр. Ташкент. ҮФАНҰ, 1986.

4. L. J. Bunce and J. D. M. Wright, The Mackey-Gleason problem. Bulletin (New Series) of the Amer. Math. Soc. 1992, vol. 26, № 2, p. 288-293.

5. Topping D. Jordan algebras of self-adjoint operators. Mem. Amer. Math. Soc. 1965, № 53, p. 1-48.

6. Topping D. An isomorphism invariant for spin factors. J. Math.Mech., 1966, vol. 15, p. 1055-1064.

Об асимптотике вероятности продолжения Марковских ветвящихся процессов с иммиграцией, зависящей от состояния

Азимов Ж.Б.

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан, azimovjb@mail.ru

Пусть имеются частицы одного типа, где каждая существующая в данный момент частица независима от других частиц с вероятностью $\delta_{1j} + p_j\Delta t + o(\Delta t)$ превращается за время $\Delta t \to 0$ в j частиц. Если в момент $t \geq 0$ процесс выродился, т.е. число частиц равна нулю, то с вероятностью $\delta_{0k} + q_k(t)\Delta t + o(\Delta t)$ за время $\Delta t \to 0$ иммигрируют k частиц того же типа. В дальнейшем возникшие таким образом частицы эволюционируют по описанной выше схеме. (Здесь и далее $\delta_{ij}-$ символ Кронекера).

Ветвящийся процесс с иммиграцией, зависящей от состояния, с непрерывным временем изучался в работах [1], [2]. Процессы с иммиграцией, зависящей от состояния, с непрерывным временем стали называться процессами Фостера-Ямазато. Асимптотические свойства ветвящихся процессов Фостера-Ямазато с бесконечной дисперсией рассмотрены в работе [3]. Настоящая работа посвящена асимптотике вероятности продолжения ветвящегося процесса Фостера-Ямазато с убывающей иммиграцией и бесконечной дисперсией.

Чтобы определить процесс $Z(t)$ более строго, приведем вид инфинитезимальной матрицы $(a_{ij})_0^\infty$ процесса $Z(t)$:

$$a_{ij} = \begin{cases} ip_{j-1+i} \quad \text{если} \quad j \geq i-1, \quad i \geq 1, \\ q_j(t) \quad \text{если} \quad i = 0, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

причем

$$p_1 < 0, \qquad p_j \geq 0, \qquad j \neq 1, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} p_j = 0,$$

$$q_0(t) < 0, \qquad q_j(t) \geq 0, \qquad j \geq 1, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} q_j(t) = 0, \qquad t \geq 0.$$

Введем производящие функции

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad g(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(t) s^k, \quad |s| \leq 1.$$

Предположим, что имеет место представление

$$f(s) = (1+s)^{1+\nu} L(1-s), \quad 0 < \nu \leq 1,$$

где $L(1-s)$– м.м.ф при $1-s \to 0$.

Пусть выполнены следующие условия

$$f'(1) = 0, \quad m(t) = \frac{\partial g(t,s)}{\partial s}|_{s=1} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty \ .$$

В дальнейшем важную роль играет функция

$$M(t) = \int\limits_0^t \frac{N(u)}{u^{1/\nu}} du,$$

где $N(t)$ -м.м.ф. при $t \to \infty$, удовлетворяющая условию

$$vN^v(t)L(t^{-1/v}N(t)) \to 1, \quad t \to \infty.$$

Рассмотрим случай, когда $M(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Теорема. Пусть $m(t) \sim \frac{l(t)}{t^\alpha}$ и $C(t) = o(m(t)\ln t)$, где $0 \leq \alpha < 1$, а $l(t)$ -м.м.ф на бесконечности. Тогда

а) если $\alpha = 0$, $l(t) \sim \frac{N(t)}{\ln t}$ где $N(t) \to 0$ то

$$P(Z(t) > 0) \sim N(t)$$

при $t \to \infty$,

б) если $o < \alpha < 1$, то

$$P(Z(t) > 0) \sim \frac{l(t)\ln t}{t^\alpha}$$

при $t \to \infty$,

в) если $\alpha = 1$, $l(t) \sim K(\ln t)^r, \quad K > 0, \quad r > -1$ то

$$P(Z(t) > 0) \sim \ \frac{K(r+2)(\ln t)^{r+1}}{(r+1)t}$$

при $t \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yamazato M. Some Results on Continuous Time Branching Processes with State-Dependent Imigration. // J.Math. Soc. Japan; 27, 1975, 479-496.
2. Митов К., Янев Н. Ветвящиеся процессы с убывающей иммиграцией, зависящей от состояния процесса. // Сердика Българско мат. списание. Т.11, 1985, с.25-41.
3. Formanov Sh.K., Azimov Zh.B. Markov branching processes with regular varying generating function and immigration of special form. // Theor. Probabilty and Math. Statist. 2002. Vol.65. p.181-188.

Об одной краевой задаче для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками в прямоугольной области

Апаков Ю. П. [1], **Мамажонов С. М.**[2]

Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
[1]yusupjonapakov@gmail.com; [2]sanjarbekmamajonov@gmail.com

Аннотация. В работе для уравнения четвертого порядка с младшими членами рассмотрена одна краевая задача в прямоугольной области. Единственность решение поставленном задачи доказана методом интегралов энергии. Решение выписано через построенную функцию Грина.

Рассмотрим общее уравнение четвертого порядка вида

$$U_{xxxx} - U_{yy} + A_1 U_{xxx} + A_2 U_{xx} + A_3 U_x + A_4 U_y + A_5 U = 0,$$

где $A_i \in R, i = \overline{1,5}$. Заменой $U = u \cdot e^{-\frac{A_1}{4}x + \frac{A_4}{2}y}$, это уравнения можно привести к уравнению

$$u_{xxxx} + a_1 u_{xx} + a_2 u_x + a_3 u - u_{yy} = 0, \tag{1}$$

здесь $a_1 = A_2 - \frac{3A_1^2}{8}$, $a_2 = A_3 + \frac{A_1^3}{8} - \frac{A_1 A_2}{2}$, $a_3 = \frac{A_1^2 A_2}{16} - \frac{3A_1^4}{256} - \frac{A_1 A_3}{4} + \frac{A_4^2}{4} + A_5$.

Для уравнения (1) в области $\Omega = \{(x,y) :\ 0 < x < p,\ 0 < y < q\}$ изучим следующую задачу.

Задача A_1**.** Найти функцию из класса $u(x,y) \in_{x,y}^{4,2} (\Omega) \cap C_{x,y}^{3,1} (\bar{\Omega})$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1) и следующим краевым условиям:

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le p,$$

$$u(0,y) = \psi_1(y),\ u(p,y) = \psi_2(y),$$

$$u_{xx}(0,y) = \psi_3(y),\ u_{xx}(p,y) = \psi_4(y),\ 0 \le y \le q,$$

где $\psi_i(y) \in C^3[0,q], i = \overline{1,4}$ заданные функции, причем

$$\psi_i(0) = \psi_i(q) = \psi_i''(0) = \psi_i''(q) = 0,\ \ i = \overline{1,4}.$$

Отметим, что уравнения (1) рассмотрена в работе [1], в случаи $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = -c(x,t)$, а в работах [2]-[4]: $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. В работах [1]-[4] рассмотрен случай $\psi_i(x) = 0$ и с начальным условием отличным от нуля.

Теорема 1. Если задача A_1 имеет решение, то при выполнениях условий $a_1 \le 0$, $a_3 0$, оно единственно.

Доказательство теоремы 1. Предположим, обратное пусть задача A_1 имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

В области Ω справедливо тождество

$$uL[u] \equiv 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx} - u_x u_{xx} + a_1 u u_x + \frac{1}{2}a_2 u^2\right) + u_{xx}^2 - a_1 u_x^2 + a_3 u^2 - \frac{\partial}{\partial y}(uu_y) + u_y^2 = 0. \tag{2}$$

Интегрируя тождество (2) по области Ω и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\int_0^p \int_0^q u_{xx}^2(x,y)\,dxdy - a_1 \int_0^p \int_0^q u_x^2(x,y)\,dxdy + a_3 \int_0^p \int_0^q u^2(x,y)\,dxdy + \int_0^p \int_0^q u_y^2(x,y)\,dxdy = 0,$$

отсюда $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in \bar{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

При доказательстве существования решения задачи, переменные сначала были разделены с помощью метода Фурье. Затем при нахождении решения уравнения, образованного по переменной x, мы построили функцию Грина и решили интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно искомого решения методом последовательного приближения. В результате доказана следующая теорема.

Теорем 2. Если выполняется неравенство

$$\left(\left(CKp + \sqrt{(CKp)^2 + CKp}\right)^4 - \frac{C}{4}\right) q^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2,$$

то решение задачи A_1 существует. Здесь $K = \left(1 - e^{-2p\sqrt{\frac{\pi}{2q}}}\right)^{-2}$, $C = \max\left\{|a_i|, i = \overline{1,3}\right\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аманов Д., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2013, выпуск 1, стр. 3-10
2. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами, Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2015, том 19, №2, стр. 311-324
3. Иргашев Б. Ю. Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами // Бюллетень Института математики 2019, №6, стр.23-30.
4. Urinov A.K., Azizov M.S. Boundary Value Problems for a Fourth Order partial Equation with an Unknown Right - hand Part // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42 №3 pp.632-640

Базисные дифференциальные соотношения для полной системы глобальных дифференциальных инвариантов конечной системы путей в эвклидовой геометрии

Арипов Р.Г. [1]

Ташкент, Узбекистан

arrustam@yandex.ru

В [1] указана полная система глобальных дифференциальных и интегральных G-инвариантов кривой в евклидовой геометрии, т.е. в случае, когда $G = M(n)$ группа всех изометрий n – мерного евклидова пространства E_n или $G = SM(n)$ группа всех евклидовых движений. Установлено, что эти G-инварианты разделяют не эквивалентные кривые и между ними существуют базисные дифференциальные соотношения в виде неравенств. В [2] указана полная система глобальных дифференциальных и интегральных G-инвариантов конечной системы путей в евклидовой геометрии, разделяющих не G-эквивалентные конечные системы путей. В этой ситуации также показано, что для конечной системы путей в их полной системе глобальных дифференциальных и интегральных G-инвариантов существуют базисные дифференциальные соотношения в виде неравенств.

Далее используется терминология и обозначения работы [1].

Пусть $R\langle x_1, \dots, x_k\rangle$ дифференциальное поле дифференциальных рациональных функций от системы I-путей $\{x_i | i = \overline{1,k}\}$. Дифференциальная рациональная функция $h(x)$ называется G-инвариантной, если $h(F(x)) = h(x)$ для всех $F \in G$. Множество всех G-инвариантных дифференциальных рациональных функций системы $I-$ путей $\{x_i | i = \overline{1,k}\}$ образует дифференциальное подполе в поле $R\langle x_1, \dots, x_k\rangle$, которое обозначается через $R\langle x_1, \dots, x_k\rangle^G$.

Для конечной системы невырожденных $I-$ путей $\{x_i | i = \overline{1,k}\}$ рассмотрим матрицы-функции

$$H_{1i}(t) = (A_{x_i}(t))^{-1} A'_{x_i}(t), \tag{1}$$

$$H_{2i}(t) = A^*_{x_i}(t) A_{x_i}(t), \tag{2}$$

где $A_{x_i}(t) =\| \; [x'_i x''_i \dots x_i^{(n)}] \; \|$, $A^*_{x_i}(t)$- транспонированная матрица к матрице $A_{x_i}(t),\ i = \overline{1,k}$.

Известно, что элементы матрицы-функции (1) единственным образом дифференци-ально-рационально выражаются через образующие дифференциального поля
$R\langle x_1, \dots, x_k\rangle^G$ т.е. если $c^{x_i}_{ms}(t)$ и $d^{x_i}_{ms}(t)$ элементы матриц-функций $H_{1i}(t)$ и $H_{2i}(t)$, то

$$c^{x_i}_{ms}(t) = C_{ms}\langle Q_1\{x_1, \dots, x_k\},\ Q_2\{x_1, \dots, x_k\}, \dots, Q_{nk}\{x_1, \dots, x_k\}\rangle, \tag{3}$$

$$d^{x_i}_{ms}(t) = D_{ms}\langle Q_1\{x_1, \dots, x_k\},\ Q_2\{x_1, \dots, x_k\}, \dots, Q_{nk}\{x_1, \dots, x_k\}\rangle, \tag{4}$$

где Q_l образующие дифференциального поля $R\langle x_1, \dots, x_k\rangle^G$, C_{ms} и D_{ms}–некоторые дифференциальные рациональные функции, $l = \overline{1,nk},\ m,s = \overline{1,n},\ i = \overline{1,k}$, [2].

Теорема 1. Пусть $G = M(n)$ и $f_l(t),\ l = \overline{1,nk}$, бесконечно дифференцируемые функции на I такие, что

(i) для любого $t \in I$

$$det \| d^{x_i}_{ms}(t) \| = det \| D_{ms}\langle f_1(t), f_2(t), \dots, f_{nk}(t)\rangle \| \neq 0;$$

(ii) матрица $d^{x_i}_{ms}(t) = D_{ms}\langle f_1(t), f_2(t), \dots, f_{nk}(t)\rangle$ положительно определена для некоторого $t_0 \in I$, где D_{ms}- дифференциальные рациональные функции, определенные равенствами (4), $i = \overline{1,k},\ m,s = \overline{1,n}$. Тогда существует конечная система невырожденных $I-$ путей $\{x_i | i = \overline{1,k}\}$ в E_n единственная с точностью до G- эквивалентности, удовлетворяющая следующей системе дифференциальных уравнений:

$$Q_l\{x_1, \dots, x_k\} = f_l(t),$$

где D_l- образующие дифференциального поля $R\langle x_1, \dots, x_k\rangle^G,\ l = \overline{1,nk}$.

Теорема 2. Пусть $G = SM(n)$ и $\varphi_l(t),\ l = \overline{1, nk}$, бесконечно дифференцируемые функции на I такие, что

(i) для любого $t \in I$

$$det \parallel d^{x_i}_{ms}(t) \parallel = det \parallel D_{ms}\langle \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_{nk}(t)\rangle \parallel \neq 0;$$

(ii) матрица $d^{x_i}_{ms}(t) = D_{ms}\langle \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_{nk}(t)\rangle$ положительно определена для некоторого $t_0 \in I$, где D_{ms}- дифференциальные рациональные функции, определенные равенствами (4), $i = \overline{1, k},\ m, s = \overline{1, n}$. Тогда существует конечная система невырожденных $I-$ путей $\{x_i | i = \overline{1, k}\}$ в E_n единственная с точностью до G- эквивалентности, удовлетворяющая следующей системе дифференциальных уравнений:

$$P_l\{x_1, \ldots, x_k\} = \varphi_l(t),$$

где P_l- образующие дифференциального поля $R\langle x_1, \ldots, x_k\rangle^G,\ l = \overline{1, nk}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арипов Р.Г., Хаджиев Дж.. Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии.// Известия ВУЗов, Математика, No7 (542), 2007. - С.3-16.
2. Арипов Р.Г. Полная система дифференциальных инвариантов конечной системы путей в эвклидовой геометрии.- В кн.// Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых Операторные алгебры и смежные проблемы. -Ташкент. 12-14 сентября, 2012, с. 93-94.

Видоизмененной задачи Коши для уравнения гиперболического типа второго рода с сингулярным коэффицентом

Ахметов К. Н.

Национальный университет Узбекистана, г.Ташкент, Узбекистан;
islomovbozor@yandex.com ; Lars28@inbox.uz

Насколько нам известно, в работе [1] получены представления обобщенного решения класса R_2 видоизмененной задачи Коши для гиперболического уравнения второго рода, удобные для дальнейших исследований. Воспользовавшись найденными предст-авлениями, в работах [2-9] исследованы локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода.

В данной работе получено представление обобщенного решения класса R_2 видоизмененной задачи Коши для уравнения гиперболического типа второго рода с сингулярным коэффицентом.

Рассмотрим уравнение

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0/y)u_y = 0\,, \quad y < 0, \tag{1}$$

в конечной односвязной области D, ограниченной характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = -1, \quad BC :\ x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1) и отрезком AB оси $y=0$, здесь $A=A(-1,0)$, $B=B(1,0)$, $C=C\left(0,-((m+2)/2)^{2/(m+2)},\right)$ а постоянные m и β_0 удовлетворяют условия $-1<m<0, \quad -m-1\leqslant\beta_0<-m/2$.

Решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$\lim_{y\to 0-} u(x,y)=\tau(x),\ \ x\in\overline{AB},\ \ \lim_{y\to 0-}(-y)^{\beta_0}u_y(x,y)=\nu(x),\quad x\in AB,$$

для уравнения (1) дается формулой[5]:

$$u\left(x,y\right)=\gamma_1\int\limits_{-1}^{1}\tau\left(z\right)\left(1-t^2\right)^{\beta}dt+\frac{2\gamma_1}{\left(1+2\beta\right)\left(m+2\right)}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}\tau'\left(z\right)\left(1-t^2\right)^{\beta}t\,dt-\left[2\left(1-2\beta\right)\right]^{1-2\beta}\gamma_2(-y)^{1-\beta_0}\int\limits_{-1}^{1}\nu\left(z\right)\left(1-t^2\right)^{-\beta}dt,$$

где $\qquad 2\beta=\frac{m+2\beta_0}{m+2}\quad$ и $\quad -1<2\beta<0\quad$ при $\quad -1<m<0,$

$$\gamma_1=\frac{\Gamma\left(2+2\beta\right)}{\Gamma^2\left(1+\beta\right)2^{1+2\beta}},\ \ \gamma_2=\left[2\left(1-2\beta\right)\right]^{2\beta-1}\frac{\Gamma\left(2-2\beta\right)2^{2\beta-1}}{(1-\beta_0)\Gamma^2\left(1-\beta\right)},\ \ z=x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}.$$

Определение класса R_2. Функция $u\left(x,y\right)$ называется обобщенным решением задачи Коши для уравнения (1) при $y<0$ из класса R_2, если $\tau\left(z\right)$ представима в виде $\tau\left(z\right)=\int\limits_{-1}^{z}\left(z-t\right)^{-2\beta}T\left(t\right)dt$, где $\nu\left(z\right)$ и $T\left(z\right)-$ непрерывные и интегрируемые функции на $(-1,1.)$

Тогда представление обобщенного решения класса $u\left(x,y\right)\in R_2$ задачи Коши для уравнения (1) в области D имеет вид:

$$u\left(\xi,\eta\right)=\int\limits_{-1}^{\xi}\left(\eta-t\right)^{-\beta}(\xi-t)^{-\beta}T\left(t\right)dt+\int\limits_{\xi}^{\eta}\left(\eta-t\right)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}N\left(t\right)dt,\tag{2}$$

где

$$\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},\ \ \eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}},\ \ N\left(t\right)=\frac{1}{2\cos\pi\beta}T\left(t\right)-\gamma_2\nu\left(t\right).$$

Воспользовавшись найденным представлениям (2) можно исследовать различные локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода с сингулярным коэффицентом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кароль И.Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа.//Докл.АН СССР. **88**(2). 1953.С. 197-200.

2. Терсенов С.А. К теории гиперболических уравнений с данными на линии вырож-дения типа. // Сиб. мат. журнал. **2**(6). 1961. С. 931-935.

3. Салахитдинов М.С., Исамухамедов С.С. Краевые задачи для уравнения смешан-ного типа второго рода. // Сердика. Бьлгарско математическо списанае. 1977. Т.3. С. 181-188.

4. Крикунов Ю.М. Видоизмененная задача Трикоми для уравнения $u_{xx} + yu_{yy} + (-n + 1/2)u_y = 0$. // Известия вузов, серия Математика. 1979. № 9. С.21-28.

5. Мамадалиев Н.К. О представления, решения видоизмененной задачи Коши. // Сиб. мат. журнал РАН. **41**(5).2000. С.1087-1097.

6. Мамадалиев Н.К. Задача Трикоми для сильно-вырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа. // Матем. заметки. **66**(3). 1999. С. 385-392; Math. Notes, **66**:3 (1999), 310-315.

7. Исламов Н. Б. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения эллиптико - гиперболического типа второго рода. // Узбекский мат. журнал. 2012. № 4. С. 38-50.

8. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением. 2015. Казань. 236 с.

9. Салахитдинов М.С., Исламов Н. Б. Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе-Самарского для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода. // Известия вузов. Математика. Россия. 2015. № 6. С. 43-52.

Резко очерченные пары $(F(X), \eta_F(X))$ компактов вида $P(X)$

Аюпов Ш.А.[1], Жураев Т.Ф. [2]

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан
sh_ayupov@mail.ru;
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами, Ташкент, Узбекистан,
tursunzhuraev@mail.ru

В данной работе изучая расположенности компактов друг в друге рассматривается резко очерченные (сс-пары) пары $(P(X), \eta_P(X))$ для функтора $P : Comp \to Comp$- вероятностных мер в категории компактов и непрерывных отображений в себя [1].

Доказывается, что для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ отличного от X подпространства вида $P(A), P_f(X)$ и $P_{f,n}(X)$ составляют резко очерченных пар компакта $P(X)$.т.е. пары $(P(X), P(A)), (P(X), P_f(X))$ и $(P(X), P_{f,n}(X))$ являются резко очерченными (коротко, сс-парами) компакта $P(X)$. Кроме того выделено гомотопически плотные подпространства $P(X)$ всех вероятностных мер определенных в бесконечном компакте X, а так же показано, что для любого бесконечного выпуклого компакта X, пара $(P(X), \eta_P(X))$ является резко очерченной парой.

Для произвольного компакта X и меры $\mu \in P(X)$ определен ее носитель $\sup p(\mu)-$ это наименьше из замкнутых множеств $F \subset X$, для которых $\mu(F) = \mu(X)$. т.е. $supp(\mu) = \bigcap\{A : A \subset X, A = \bar{A}, \mu \in P(A)\}$. Для натурального числа $n \in N$ определяем $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |supp\mu| \leq n\}$ подпространство $P(X)$. Рассмотрим счетное объединение $P_n(X)$ т.е. $P_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(X)-$ множество всех вероятностных мер с конечными носителями.

Напомним, что пространство $P_f(X) \subset P(X)$ состоит из всех вероятностных мер вида:

$$\mu = m_1\delta(x_1) + m_2\delta(x_2) + ... + m_n\delta(x_n)$$

с конечными носителями, для каждой из которых $m_i \frac{n}{n+1}$ при некотором i. Через $\delta(x)$ или δ_x обозначается. Вероятностные меры Дирака сосредоточенная в точке $x \in X$. Для натурального числа $n \in N$ определяем $P_{f,n}(X) = \{\mu \in P_f(X) : |supp\mu| \leq n\}$ подпространство $P_n(X)$.

Очевидно, что для компакта X и любого $n \in N$ множества $P_n(X)$ замкнуты в $P(X)$, $P_f(X)$ и $P_{f,n}(X)$ замкнуты в $P(X)$[2-3].

Следовательно, подпространство $P_\omega(X) \subset P(X)$ является σ-компактом и $P_\omega(X)$ всюду плотно в $P_\omega(X)$. Следовательно, компакт $P_f(X)$ есть объединение компактов $P_{f,n}(X)$и $P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X)$. Очевидно, что $P_{f,n}(X) \subseteq P_n(X)$ и $P_f(X) \subseteq P_\omega(X)$[2-3].

Пусть X топологическое пространство и $A \subset X$ его некоторое подпространство

Определение [4]. Пара (X, A) называется (clean-cut) резко очерченным (коротко, cc-парой), если X метризуемое , A замкнуто в X, A является сильным деформационным ретрактом для X и $X \backslash A$ является абсолютным окрестностным ретрактом (коротко, ANR пространством).

Для каждого бесконечного компакта $X \in Comp$ и нормального (или полунормального) функтора $F : Comp \to Comp$ имеющего бесконечной степени следуя по Заричному М.М. [5] примем следующие обозначения:

1) $F_\nabla(X) = F(X) \backslash \eta_F(X)$;
2) $F_n(X) = \{a \in F(X) : |\sup p(a)| \leq n\}$;
3) $F_{\nabla n}(X) = F(X) \backslash F_n(X)$, при $n = 1$ отождествим $F_{\nabla_1}(X) \cong F_\nabla(X)$;
4) $S_F(X) = \{a \in F(X) : \sup p(a) \bigcap A \neq \emptyset\}$ где $A \neq \emptyset$ и $A \subset X$;
5) $F_{nk}(X) = F_n(X) \backslash F_k(X), n > k, n2$;
6) $F_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$;
7) $F_{\nabla\omega}(X) = F(X) \backslash F_\omega(X)$;
8) $F_{\omega n}(X) = F_\omega(X) \backslash F_n(X)$;

Очевидно, что подпространство $F_\nabla(X)$ и $F_{\nabla n}(X)$ открыто в $F(X)$, $F_{n,k}(X)$ открыто в $F_n(X)$, $F_\omega(X)$ является счетным объединением компактов в $F(X)$ т.е. $F_\omega(X)$–σ–компактно, другой стороны $F_\omega(X)$ всюду плотно в $F(X)$; а $F_{\nabla\omega}(X)$ есть F_σ– подпространство пространства $F(X)$, подпространство $F_{\omega n}(X)$ есть открытое множество в $F_\omega(X)$.

Доказаны следующие

Теорема 1. Для любого бесконечного компакта X и любого замкнутого подмножества $A \subset X$ отличного от самого X пара $(P(X), P(A))$ является cc-парой.

Теорема 2. Для любого бесконечного компакта X и любого непустого замкнутого подмножества $A \subset X$ отличного от самого компакта X пара $(S_P(A), P(A))$ есть cc-парой.

Теорема 3. Для любого бесконечного нульмерного компакта X и для любого замкнутого подмножества $A \subset X$ отличного от самого X пара $(P_\omega(X), P_n(A))$ является –парой, для любого $n \in N$, $n > 1$.

Теорема 4. Для любого бесконечного компакта X пары $(P_f(X), \delta(X))$ и $(P_{f,n}(X), \delta(X))$ является cc–парой.

Теорема 5. Бесконечный компакт X есть $A(N)R$ компакт, тогда и только, когда $P_f(X)$ есть $A(N)R$ компакт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии Успех.мат.наук,М. 1991, Т.46, вып. 1(277), с.41-80.

2. Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов М.МГУ. 1989, канд.дис. 90с.

3. Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства подфункторов функтора P вероятностных мер. М. МГУ, 1989. 60 ст., // Деп. в ВИНИТИ АН СССР 05.07.89. №4471-В89.

4. A.H.Kruse, P.W.Leibniz An application of family homotopy extension theorem to the spaces pacific.// J.Math. 1966, V.16, №2, pp.331-336.

5. М.М. Заричный Абсолютные экстензоры и умножения монад в категории компактов, //Мат. сб. 1991, М., Т.182, №9, с.1261-1280.

Об одной переопределенной стационарной системы типа стокса в полупострванстве

Бахрамов Р. Х.[1], Имомназаров Х.Х.[2], Имомназаров Ш.Х. [2,3], Урев М.В.[2]

[1] НУУз имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;

[2] Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;

imom@omzg.sscc.ru

[3] Институт Геологии и Минералогии СО РАН, Новосибирск, Россия;

Рассматривается краевая задача в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ двухмерного евклидова пространства с границей $S = \{(x_1, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}$ для стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с однородными краевыми условиями [1]

$$\nu_1 \mathbf{\Delta u}_1 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{u}_1|_S = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\nu_2 \mathbf{\Delta u}_2 - \nabla p = -\rho \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{u}_2|_S = \mathbf{0}, \tag{2}$$

и условием ограниченности $|\mathbf{u}_i(x_1, x_2)|$ при $x_2 \to +\infty$, где $\mathbf{f} = (f_1, f_2)-$ массовая сила, $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2})$, $i = 1, 2$, ∇ – оператор градиента по $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, ρ_i- парциальная плотность $i-$й фазы, ν_1 и ν_2- соответствующие сдвиговые вязкости фаз.

Решение системы (1)-(2) с одним давлением p сводится к последовательному решению двух краевых задач. Сначала решается задача Стокса (1) для $\mathbf{u}_1$ и p, а затем при найденном давлении p из решения задачи (1) определяется скорость $\mathbf{u}_2$ как решение задачи

$$\mathbf{\Delta u}_2 = \mathbf{F},\ \mathrm{div}\mathbf{u}_2 = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2_+,\ \mathbf{u}_2|_S = \mathbf{0},\ \text{где } \mathbf{F} = \frac{1}{\nu_2}\big(\nabla p - \rho \mathbf{f}\big). \tag{3}$$

Другими словами, давление p перенормирует массовую силу $\mathbf{f}$ и поле скорости $\mathbf{u}_2$ является соленоидальным решением краевой задачи для векторного уравнения Пуассона. В стационарном случае, когда имеет место равновесие фаз по давлению и диссипация энергии происходит только за счет вязкостей фаз, система уравнений (1)-(2) оказывается переопределенной [2]. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ система (1)-(2) с неоднородными условиями рассматривалась в [3].

Для краткости обозначим $\mathbf{X} = \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$, $M = L_2(\mathbb{R}^2_+)$, $\mathbf{X}^*$ – сопряженное пространство для пространства $\mathbf{X}$ с нормами $\|\cdot\|_{\mathbf{X}} = \|\cdot\|_{1,\mathbb{R}^2_+}$, $\|\cdot\|_M = \|\cdot\|_{0,\mathbb{R}^2_+}$, $\|\cdot\|_{\mathbf{X}^*} = \|\cdot\|_{-1,\mathbb{R}^2_+}$ и пусть $< \cdot, \cdot >$ означает отношение двойственности между элементами $\mathbf{X}^*$ и $\mathbf{X}$. Система (11)

$$\nu_1 \mathbf{\Delta u}_1 - \nabla p = -\mathbf{f}_1, \quad \mathrm{div}\mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{u}_1|_S = \mathbf{0}, \tag{11}$$

является стационарной задачей Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$, где $\mathbf{f}_1 = \rho\mathbf{f}$. В качестве ее обобщенной постановки примем широко распространенную смешанную формулировку в исходных переменных: для заданной $\mathbf{f}_1 \in \mathbf{X}^*$ требуется найти вектор-функцию $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{X}$ и функцию $p \in M$, удовлетворяющие равенствам

$$\begin{cases} a_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, p) =< \mathbf{f}_1, \mathbf{v} > & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X}, \\ b_1(\mathbf{u}_1, q) = 0 & \forall q \in M, \end{cases} \tag{12}$$

и оценке

$$\|\mathbf{u}_1\|_{1,\mathbb{R}^2_+} + \|p\|_{0,\mathbb{R}^2_+} \leq C\|\mathbf{f}_1\|_{-1,\mathbb{R}^2_+}, \tag{13}$$

где билинейные формы $a_1(\cdot,\cdot) : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ и $b_1(\cdot,\cdot) : \mathbf{X} \times M \to \mathbb{R}$ определяются как

$$a_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu_1(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) = \nu_1 \sum_{i,j=1}^{2} \Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X},$$

$$b_1(\mathbf{v}, q) = -(q, \mathrm{div}\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{X},\ \forall q \in M.$$

Обозначим через $\hat{\mathbf{V}}(\mathbb{R}^2_+)$ замкнутое подпространство в $\mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$, определяемое как

$$\hat{\mathbf{V}}(\mathbb{R}^2_+) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) : \mathrm{div}\mathbf{v} = 0\}.$$

Хейвудом доказано [8, теорема 9], что $\hat{\mathbf{V}}(\mathbb{R}^2_+) = \mathbf{V}(\mathbb{R}^2_+)$.

Теорема. Для задачи Стокса (11) существует единственное обобщенное решение $(\mathbf{u}_1, p) \in \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+) \times L_2(\mathbb{R}^2_+)$ как решение системы (12) с оценкой (13).

Теперь перейдем к рассмотрению второй системы уравнений относительно скорости $\mathbf{u}_2$ второй фазы жидкости с уже известным давлением $p \in M$.

$$\mathbf{\Delta u}_2 = \mathbf{f}_2, \quad \mathrm{div}\mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2_+, \quad \mathbf{u}_2|_S = \mathbf{0}, \tag{18}$$

где $\mathbf{f}_2 = \nu_2^{-1}(\nabla p - \mathbf{f}_1)$. Для $p \in M = L_2(\mathbb{R}^2_+)$ градиент ∇p есть линейный непрерывный функционал над пространством $\mathbf{X} = \mathbf{V}_0^1(\mathbb{R}^2_+)$, то есть $\nabla p \in \mathbf{X}^* = \mathbf{V}^{-1}(\mathbb{R}^2_+)$.

Лемма. Справедливо неравенство

$$\|p\|_{0,\mathbb{R}^2_+} \leq K\|\nabla p\|_{-1,\mathbb{R}^2_+}, \qquad \forall p \in M,$$

где $K > 0$ –постоянная.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 21-51-15002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика, 1989, No. 9, С. 56–64.
2. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х. Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред. Ташкент, 2012.
3. Урев М.В., Имомназаров Х.Х., Жиан-Ган Тан. Краевая задача для одной переопределенной стационарной системы, возникающей в двухскоростной гидродинамике // Сиб. журн. вычисл. математики. 2017. Т. 20, No. 4. С. 425–437.
4. Heywood J.G. On uniqueness questions in the theory of viscous flow // Acta Math., 1976. Vol. 136, P. 61–102.

Обобщение производных Гюнтера на случай липщицевых областей

Бендали А.[1], Тордье С.[2], Волчков Ю.М.[3]

Университет г. Тулузы, Тулуза, Франция;
Университет г. По, По, Франция;
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия;
yumvol@omzg.sscc.ru

В данной работе определяется производное Гюнтера для липщицевых областей, т.е. для областей класса $C^{0,1}$. Это позволит обобщение ранее полученных результатов на области часто встречающейся в прикладных задачах геометрией. Более того, определенные таким образом производные Гюнтера можно использовать для аппроксимации применяемых в методе граничных коечных элементов операторов напряжения, соответствующих потенциалу простого слоя и потенциалу двойного слоя системы уравнений Лам и системы волновых уравнений теории упругости.

В потенциалах теории упругости производные Гюнтера содержатся в виде компонент $M_{ij}^{(n)}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ кососимметричной матрицы $M^{(n)}$, действующей на вектор-функцию $\mathbf{u}$:

$$\left(M^{(n)}\mathbf{u}\right)_i = \sum_{j=1}^{3} M_{ij}^{(n)}\, u_j, \quad (i = 1, 2, 3),$$

где $\left(M^{(n)}\mathbf{u}\right)_i$ и u_j $(j = 1, 2, 3)$ – компоненты векторов $M^{(n)}\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}$ соответственно. В [5] эта матрица называется производными Гюнтера в матричной форме. В данной работе будем называть $M^{(n)}\mathbf{u}$ матрицией производных Гюнтера.

Матрица производных Гюнтера порождает различные операторы, имеющие различные представления. Использование этих операторов позволило развить теорию поверхностных потенциалов уравнений Ламе в статических задачах теории упругости [4-7], а также разработать алгоритмы предобусловливания в методе граничных элементов решения задач рассеивания упругих волн [8].

Справедлива следующая лемма, доказанная в [3] только для областей класса $C^{1,\alpha}$ $0 < \alpha \leq 1$ более сложным способом.

Лемма. Для функций $u, v \in C^1_{comp}(R^3)$ справедлива формула интегрирования по частям

$$\int_{\partial\Omega} v\, M_{ij}^{(n)}\, u\, ds = \int_{\partial\Omega} u\, M_{ij}^{(n)}\, v\, ds.$$

Следующее утверждение выражает оптимальные свойства отображения оператора производных Гюнтера.

Теорема. Пусть Ω^+ – ограниченная липшицева область. Тогда продолжение производной Гюнтера $M_{ij}^{(n)}$ на пространство $H^s(\partial\Omega)$, где $(0 \leq s \leq 1)$, является ограниченным линейным оператором, действующей из $H^s(\partial\Omega)$ в $H^{s-1}(\partial\Omega)$.

Следствие 1. Из теоремы 1 следует, что тангенцальный вектор поворота является ограниченным линейным оператором $\mathbf{u} \to \nabla_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{n}$, действующим из $H^s(\partial\Omega)$ в $H^{s-1}(\partial\Omega; C^3)$ для $0 \leq s \leq 1$. Следовательно, оператор $\mathbf{u} \to \nabla_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{n}$ также является ограниченным оператором, действующим из $H^s(\partial\Omega; C^3)$ в $H^{s-1}(\partial\Omega)$ для $0 \leq s \leq 1$.

Следствие 2. Матрица производных Гюнтера $M^{(n)}$ определяет ограниченный линейный оператор, действующий из $H^s(\partial\Omega; C^3)$ в $H^{s-1}(\partial\Omega; C^3)$ для $0 \leq s \leq 1$, со следующим свойством симметрии:

$$\langle \mathbf{v}, M^{(n)}\mathbf{u}\rangle_{1-s,\partial\Omega} = \langle \mathbf{u}, M^{(n)}\mathbf{v}\rangle_{s,\partial\Omega}, \quad \mathbf{u} \in H^s(\partial\Omega; C^3), \quad \mathbf{v} \in H^{1-s}(\partial\Omega; C^3).$$

Замечание. Двойственное произведение $H^s(\partial\Omega$ и $H^{-s}(\partial\Omega)$ обычно обозначается через $\langle \mathbf{l}, \mathbf{v}\rangle_{s,\partial\Omega}$ для $\mathbf{l} \in H^{-s}(\partial\Omega)$ и $\mathbf{v} \in H^s(\partial\Omega)$. Такое обозночение удобно использоваать при исследовании потенциала простого слоя в теории распространения упругих волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 21-51-15002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary integral equations. Ucrlin; Heidelberg: Springer, 2008.
2. Kupradze V.D., Gegelia T.G., Basheleishvili M.O., Burchuladze T.V. Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelacticity. Amsterdam; N. Y.; Oxford: North Holland, 1979.
3. Han H. The boundary integro-differential equations of three-dimensional Neumann problem in linear elasticity // Numer. Math. 1994. V. 68. P. 269–281.
4. Le Louer F. A high-order spectral algorithm for elastic obstacle scattering in three dimensions // J. Comput. Phys. 2014. V. 279. P. 1–17.
5. Darbas M., Le Louer F. Well-conditioned boundary integral formulations for high-frequency elastic scattering problems in three dimensions // Math. Methods Appl. Sci. 2015. V. 38. P. 1705–1733 .
8. Brenner S.C., Scott L.R. The mathematical theory of finite element methods. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Предкомпактное пространство и его гиперпространство

Бешимов Р.Б.[1], Сафарова Д.Т.[2]

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
[1]rbeshimov@mail.ru; [2]safarova.dilnora87@mail.ru

В этой работе изучены некоторые топологические свойства равномерных пространств и их гиперпространств. Установлено, что равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ является равномерно предкомпактным тогда и только тогда, когда $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ равномерно предкомпактно.

Определение 1 [1]. Пусть X – непустое множество. Семейство $\mathcal{U}$ покрытий множества X называется равномерностью на X, если выполняются условия:
(P1) Если $\alpha \in \mathcal{U}$ и α вписано в некоторое покрытие β множества X, то $\beta \in \mathcal{U}$.
(P2) Для любых $\alpha_1 \in \mathcal{U}$, $\alpha_2 \in \mathcal{U}$ существует $\alpha \in \mathcal{U}$, которое вписано и в α_1, и в α_2.
(P3) Для любого $\alpha \in \mathcal{U}$ существует $\beta \in \mathcal{U}$, сильно звездно вписанное в α.
(P4) Для любой пары x, y различных точек X существует такое $\alpha \in \mathcal{U}$, что ни один элемент α не содержит одновременно x и y.

Семейство $\mathcal{U}$ состоящая из множества X, удовлетворяющего условиям (P1)-(P4), называется равномерностью на X; а пара $(X, \mathcal{U})$ – равномерным пространством.

Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется компактом, если множество X с топологией, индуцированной равномерностью $\mathcal{U}$, есть компакт [2].

Пусть $(X, \mathcal{U})$ – равномерное пространство, а $\exp X$ – множество всех непустых замкнутых подмножеств пространства $(X, \tau_{\mathcal{U}})$. Для каждого $\alpha \in \mathcal{U}$ положим $P(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \ \alpha' \subseteq \alpha\}$, где $\langle \alpha' \rangle = \{F \in \exp X : \ F \subseteq \cup \alpha'\}$ и $F \cap A \neq \emptyset$ для каждого $A \in \alpha'$.

Предложение 2 [1]. Если $\mathcal{B}$ – база равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$, то $P(\mathcal{B}) = \{P(\alpha) : \ \alpha \in \mathcal{B}\}$ образует базу некоторой равномерности $\exp \mathcal{U}$ на $\exp X$.

Равномерное пространство $(\exp X, \ \exp \mathcal{U})$ называется гиперпространством замкнутых подмножеств равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$, а равномерность $\exp \mathcal{U}$ – равномерностью Хаусдорфа на $\exp X$.

Псевдоравномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется предкомпактным, если псевдоравномерность $\mathcal{U}$ имеет базу $\mathcal{B}$, состоящую из конечных покрытий [1].

Теорема 1. Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ предкомпактно тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ предкомпактно.

Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ называется равномерно локально компактным, если существует покрытие $\alpha \in \mathcal{U}$, состоящее из компактных подмножеств [1].

Теорема 2. Пусть равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ равномерно локально компактно. Тогда равномерное пространство $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ тоже равномерно локально компактно.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А. Борубаев, Равномерная топология. Бишкек. Илим, 2013. 338 с.
2. Энгелькинг Р, Общая топология. Москва: Мир, 1986. 752 с.
3. R.Salvador., A.Miguel., G.Sanchez, Compactifications of quasi-uniform heperspaces // Topology and its application. 2003. No 127, 409-423 p.

Принцип квазиинвариантности неавтономной системы в цилиндрическом фазовом пространстве

Буранов Ж. И.[1], Хусанов Д. Х.[2]

Академический лицей ТашГТУ им. И. Каримова, Ташкент, Узбекистан,
juventus88.60.94@mail.ru;
Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан,
d.khusanov1952@mail.ru

Исследование свойств устойчивости системы дифференциальных уравнений в цилиндрическом фазовом пространстве имеет ряд важных особенностей [1]. В данной работе представлена модификация известной теоремы о предельном поведении решений такой системы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t,x), \quad X(t,0) \equiv 0 \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $X(t,x) = (X_1(t,x), X_2(t,x), \dots, X_n(t,x))^T$ (индекс T означает транспонирование), вещественные функции $X_i(t,x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ определены и непрерывны в области $R \times R^n$ и удовлетворяют в этой области следующему условию: переменную x можно разделить $x^T = (y^T, z^T)$, $y \in R^m$, $z \in R^s$, $m + s = n$, так что функция $X(t,x)$ является 2π-периодической по переменной z, т.е. $X(t,y,z+2\pi 1_j) = X(t,y,z)$, $(z + 2\pi 1_j) = (z_1, z_2, \dots, z_{j-1}, z_j + 2\pi, z_{j+1}, \dots, z_s)$, $j = 1, 2, \dots, s$.

Таким образом, решения системы (1) можно рассматривать в цилиндрическом фазовом пространстве $R \times R^m \times P^s$, $P^s = \{z \in R^s : \ -\pi \le z_j \le \pi, \ j = 1, 2, \dots, s)$.

Будем полагать также, что функция X удовлетворяет условию Липшица по $x \in \{y \in R^m : \ ||y|| \le H = const > 0\} \times P^s$ равномерно относительно $t \in R$ ($||y||$ есть некоторая норма вектора $y \in R^m$, $||z||$ есть норма вектора $z \in R^s$, $||x|| = ||y|| + ||z||$).

При этом предположении также семейство сдвигов $\{X_\tau(t,x) = X(t+\tau,x), \ \tau \in R^+\}$ является предкомпактным в некотором компактном метрическом пространстве [2], и для системы (1) можно построить семейство предельных систем [2]

$$\dot{x} = X^*(t,x), \ X^*(t,x) = \frac{d}{dt} \lim_{j\to\infty} \int\limits_0^t X_j(\tau,x)d\tau, \ X_j(\tau,x) = X(t_j + \tau, x) \tag{2}$$

определяемых последовательностями $t_j \to +\infty$ и $(t,x) \in R^+ \times R^m \times P^s$.

Введем классы функций: $\mathcal{K}_1$ – класс векторных функций $V = (V^1, V^2, \dots, V^k)^T$, $V : R \times R^n \to R^k$, $V(t,0) = 0$, периодических по z_i, $i = 1, 2, \dots, s$ с периодом 2π, $V(t,y,z+2\pi 1_j) = V(t,y,z)$, $\quad j = 1, 2, \dots, s$, являющихся ограниченными и равномерно непрерывными на множестве $R \times K_1 \times P^s$, где $K_1 = \{y \in R^m : \ ||y|| \le H_1 > 0\}$; $\mathcal{K}_2$ – класс векторных функций $U : R \times R^k \to R^k$, ограниченных и равномерно непрерывных на множестве $K_2 = \{u \in R^k : \ ||u|| \le H_2 > 0\}$, и $\mathcal{K}_3$ – класс векторных функций $W : R \times R^m \times P^s \times R^k \to R^k$, ограниченных и равномерно непрерывных на множестве $R \times K_1 \times P^s \times K_2$.

Пусть для системы (1) найдется непрерывно дифференцируемая функция $V \in \mathcal{K}_1$, производная которой в силу этой системы представима в виде [3,4]

$$\dot{V}(t,x) = U(t,V(t,x)) + W(t,x,V(t,x)), \ U(t,0) = 0, \ W(t,0,0) = 0 \tag{3}$$

где функция $U = U(t,u)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_2$ и является квазимонотонной и непрерывно дифференцируемой по $u \in R^k$, $\partial U/\partial u \in \mathcal{K}_2$, функция $W = W(t,x,u)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_3$, и имеет место неравенство $W(t,x,u) \le 0$ для любых $(t,x,u) \in R \times S_\nu \times R^k$.

Из равенства (3) следует, что функция $V(t,x)$ является вектор-функцией сравнения, а система

$$\dot{u} = U(t,u) \tag{4}$$

является системой сравнения с соответствующим семейством предельных систем.

Предположим, что для любого компакта $K_2 = \{u \in R^k : \ ||u|| \leq H_2\}$ существуют числа $M(K_2)$ и $\alpha(K_2)$, такие, что матрица $\Phi = \partial u(t, t_0, u_0)/\partial u_0$ для любых $(t, t_0, u_0) \in R^+ \times R^+ \times K_2$ удовлетворяет условиям

$$||\Phi(t, t_0, u_0)|| \leq M(K_2), \quad det\Phi(t, t_0, u_0)\alpha(K_2) > 0 \tag{5}$$

Имеет место следующая теорема о локализации положительного предельного множества $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ решения системы (1).

Теорема. Допустим, что для системы (1) найдется векторная функция Ляпунова $V \in \mathcal{K}_1$, производная которой удовлетворяет равенству (3), и такая, что

1) $||V(t, y, z)|| \to \infty$ равномерно по $(t, z) \in R^+ \times R^s$ при $||y|| \to \infty$; $||V(t, y, z)|| \leq m(H)$ $\forall (t, y, z) \in R^+ \times \{y : ||y|| \leq H\} \times P^s$;

2) решения системы сравнения (4) удовлетворяют условию (5);

3) решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) ограничено некоторым компактом $K \subset R^n$ для всех tt_0

4) решение $u(t, t_0, V_0)$ системы сравнения (4), где $V_0 = V(t_0, x_0)$ ограничено при всех tt_0.

Тогда $\omega^+ \subset M$, где M – максимальное квазиинвариантное подмножество множества $\{W^*(t, x, u^*(t)) = 0\}$, где $u^*(t)$ – решение некоторой предельной системы сравнения.

Полученная теорема развивает результаты работ [1,3,4] о локализации положительного предельного множества решения как автономной, так и неавтономной системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашин Е.А., Табуева В.А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Физматгиз, 1969.
2. Artstein Z. Topological dynamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equat. 1977. Vol. 23. P. 216–223.
3. Перегудова О.А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем. Ульяновск: УлГУ, 2009.
4. Андреев А.С., Перегудова О.А. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // ПММ. 2006. Т. 70, В. 6. С. 965–976.

Разрешимые n-лиевые алгебры с максимальным гипо-нильпотентным филиформным идеалом $\mathcal{NGF}_{m,n}$

Гайбуллаев Р.К.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент
r_gaybullaev@mail.ru;

В данной работе приведена классификация разрешимых n-лиевых алгебр с максимальным естественным образом градуированным филиформным гипо-нильпотентным идеалом.

В работе [1] получены все разрешимые 3-лиевые алгебры с m-мерной филиформной 3-лиевой алгеброй $N(m \geq 5)$ как максимальным гипо-нильпотентным идеалом, и доказано, что m-мерная филиформная 3-лиевая алгебра N не может быть нильрадикалом разрешимой не нильпотентной 3-лиевой алгебры. Некоторые классы разрешимых алгебр Ли непосредственно получены с помощью одномерного расширения алгебр Ли на 3-лиевые алгебры.

Определим понятия n-лиевой алгебры. Векторное пространство A над полем F называется n-лиевой алгеброй, если существует n-арная полилинейная операция $[-,-,\dots,-]$, удовлетворяющая следующим тождествам

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = (-1)^{sign(\sigma)}[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}], \tag{1}$$

и

$$[[x_1, \dots, x_n], y_2, \dots, y_n] = \sum_{i=1}^{n}[x_1, \dots, x_{i-1}, [x_i, y_2, \dots, y_n], x_{i+1}, \dots, x_n]. \tag{2}$$

где $\sigma \in S_n$, а число $sign(\sigma)$ равно 0 или 1, в зависимости от четности и нечетности перестановки σ, соответственно.

Определение 1. Пусть A – n-лиевая алгебра. Подпространство B в A называется n-лиевой подалгеброй, если $[B, B, \dots, B] \subseteq B$. Подпространство I алгебры A называется идеалом, если $[I, A, \dots, A] \subseteq I$.

Если $[I, I, A, \dots, A] = 0$, то I называется абелевом идеалом. Алгебра A называется простой, если A не абелева т.е. $[A, A, \dots, A] \neq 0$, и она не имеет нетривиальных идеалов.

Для произвольного идеала I алгебры A определим, соответственно, нижний центральный и производный ряды:

$$I^1 = I, \ I^{k+1} = [I^k, I, A, \dots, A], \ k \geq 1,$$

$$I^{(1)} = I, \ I^{(s+1)} = [I^{(s)}, I^{(s)}, A, \dots A] \ s \geq 1.$$

Определение 2. Идеал I называется разрешимым если существует натуральное число r такое, что $I^{(r)} = 0$. Алгебра A называется разрешимой n-лиевой алгеброй если $A^{(r)} = 0$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$.

Аналогично, определим понятие нильпотентности для идеала n-лиевой алгебры A и самой алгеброй.

Определение 3. Идеал I называется нильпотентным, если $I^r = 0$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$. Если, $I = A$, то A называется нильпотентной n-лиевой алгеброй.

Пусть A – n-лиевая алгебра, I ее идеал. Если мы рассмотрим данной идеал как подалгебры и изучаем нильпотентность как алгебра оно отличается нильпотентности как идеала. Потому, что если для нильпотентности идеала I, нижний центральный ряд определяется как $I^k = [I^{k-1}, I, A, \dots, A]$ а для подалгебры I оно определяется как $I^k = [I^{k-1}, I, I, \dots, I]$. Поэтому идеал n-лиевой алгебры A может быть нильпотентной подалгеброй, но не является нильпотентным идеалом. Надо отметить, что это свойство отличается от свойства алгебр Ли, т.е. при $n = 2$ понятие нильпотентность идеала и подалгебры совпадают. Далее, мы рассмотрим именно такие идеалы n-лиевых алгебр, которые является нильпотентной подалгеброй, но не является нильпотентным идеалом.

Определение 4. Пусть $A-n$-лиевая алгебра и I идеал A. Если I нильпотентная подалгебра, но не нильпотентный идеал, то I называется гипо-нильпотентным идеалом A. Если I не является собственным подмножеством никакого другого гипо-нильпотентного идеала, то I называется максимальным гипо-нильпотентным идеалом A.

Надо отметить, что сумма двух нильпотентных идеалов является нильпотентным идеалом [2], но для гипо-нильпотентных идеалов это свойство вообще говоря не верно. Например, следующий пример показывает, что сумма двух гипо-нильпотентных идеалов может не быть гипо-нильпотентным.

Пример.[1] Пусть A – 6-мерная 4-лиевая алгебра над полем $\mathbb{C}$ и пусть ее таблица умножения в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_6\}$ задана следующим образом:

$$\begin{cases} [e_1, e_4, e_5, e_6] = e_1 + \alpha e_2, \quad \alpha \neq 0, \\ [e_2, e_4, e_5, e_6] = e_2 + \alpha e_3, \\ [e_3, e_4, e_5, e_6] = e_3. \end{cases}$$

Положим $I_1 = span\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6\}$ и $I_2 = span\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\}$. Нетрудно проверит, что I_1 и I_2 являются гипо-нильпотентными идеалами A, так как $[I_1, I_1, I_1, I_1] = [I_2, I_2, I_2, I_2] = 0$ и

$$I_1^{s+1} = [I_1^s, I_1, A, A] = \{e_1, e_2, e_3\}, \quad I_2^{s+1} = [I_2^s, I_2, A, A] = \{e_1, e_2, e_3\}.$$

При этом идеал $I_1 + I_2 = A$ не является нильпотеным, так как $A^{s+1} = [A^s, A, A, A] = span\{e_1, e_2, e_3\}$.

Пусть $\mathcal{NGF}_{m,n}$ m-мерная филиформная n-лиевая алгебра, где произведения базисных векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ задается формулой:

$$\mathcal{NGF}_{m,n} : [e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, e_j] = e_{j+1}, \quad n \leq j \leq m-1.$$

Далее приведем классификацию разрешимых n-лиевых алгебр с максимальным гипо-нильпотентным идеалом $\mathcal{NGF}_{m,n}$.

Пусть R – $n-$лиевая разрешимая алгебра с максимальным гипо-нильпотентным идеалом $\mathcal{NGF}_{m,n}$. Тогда векторное пространство R можно представить как прямую сумма подпространств $\mathcal{NGF}_{m,n}$ и Q следующим образом $R = \mathcal{NGF}_{m,n} \oplus Q$, где $\dim \mathcal{NGF}_{m,n} = m$, и Q – дополняющее подпространство. Верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть R – $(m+2)$-мерная разрешимая n-лиевая алгебра с максимальным гипо-нильпотентным идеалом $\mathcal{NGF}_{m,n}$, т.е. $\dim Q = 2$. Тогда в R существует базис $\{x, y, e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ такой, что таблица умножения R в этом базисе имеет следующий вид:

$$R(\mathcal{NGF}_{m,n}) : \begin{cases} [e_1, e_2 \ldots, e_{n-1}, e_i] = e_{i+1}, & n \leq i \leq m-1, \\ [x, e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}] = e_{n-1}, & \\ [x, e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_i] = (i-n)e_i, & n+1 \leq i \leq m, \\ [y, e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_i] = e_i, & n \leq i \leq m, \end{cases}$$

(все остальные n-арные произведение базисных элементов равны нулю).

ЛИТЕРАТУРА

1. Bai R., Shen C., Zhang Y. Solvable 3-Lie algebras with a maximal hypo-nilpotent ideal N* // Electronic Journal of Linear Algebra, 21, 2010, p. 43-62.
2. Kasymov S. On a theory of n-Lie algebras. Algebra Logika, 26(3), (1987) p. 277–297.

Четырехмерные алгебры порожденные квадратичными стохастическими операторами

Ганиходжаев Н. Н.[1], **Дусмуродова Г. Х.**[2]
Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
nasirgani@yandex.com
Чирчикский педагогический институт, Чирчик, Узбекистан;
dusmurodova77@gmail.com

Пусть $S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\} - (n-1)$- мерный симплекс. Преобразование $V : S^{(n-1)} \to S^{(n-1)}$

$$(V\chi)_k = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij,k} x_i x_j$$

где

$$P_{ij,k} \geq 0, P_{ij,k} = P_{ji,k} \sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} = 1,$$

называется квадратичным стохастическим оператором (ксо). Алгебра порожденная ксо - это алгебра A над полем действительных чисел с базисом $\{a_1, a_2, ..., a_n$ и таблицей умножения

$$a_i a_j = \sum_{k=1}^{n} P_{ij,k} a_k.$$

Для $n = 4$ рассмотрим семейство операторов

$$x_1^{'} = x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_1 x_3 + 2\gamma x_1 x_4$$
$$x_2^{'} = x_2^2 + 2(1-\alpha) x_1 x_2 + 2\delta x_1 x_3 + 2\varepsilon x_2 x_4$$
$$x_3^{'} = x_3^2 + 2(1-\beta) x_1 x_2 + 2(1-\delta) x_2 x_3 + 2\lambda x_3 x_4$$
$$x_4^{'} = x_4^2 + 2(1-\gamma) x_1 x_4 + 2(1-\varepsilon) x_2 x_4 + 2(1-\lambda) x_3 x_4$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda \in \{0, 1\}$. В этой работе следуя [1,2] мы изучаем алгебры с базисом e_1, e_2, e_3, e_4 и следующей таблицей умножения

	e_1	e_1	e_1	e_1
e_1	e_1	$\alpha e_1 + (1-\alpha)e_2$	$\beta e_1 + (1-\beta)e_3$	$\gamma e_1 + (1-\gamma)e_4$
e_2	$\alpha e_1 + (1-\alpha)e_2$	e_2	$\delta e_2 + (1-\delta)e_3$	$\varepsilon e_2 + (1-\varepsilon)e_4$
e_3	$\beta e_1 + (1-\beta)e_3$	$\delta e_2 + (1-\delta)e_3$	e_3	$\lambda e_1 + (1-\lambda)e_4$
e_4	$\gamma e_1 + (1-\gamma)e_4$	$\varepsilon e_2 + (1-\varepsilon)e_4$	$\lambda e_3 + (1-\lambda)e_4$	e_4

и выясним при каких значениях $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda \in \{0, 1\}$ соответствующая алгебра будет ассоциативной. Также мы проверим при каких значениях $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda \in \{0, 1\}$ соответствующая алгебра будет частично обратимой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nasir Ganikhodjaev and Gavhar Dustmuradova, On classification of associative non-division genetic algebras. // AIP Conf. Proc. 1557, 26 (2013); doi: 10.1063/1.4823868
2. N. N. Ganikhodjaev and H.H. Hisamuddin. Название статьи //Malaysian Journal of Sciences 27, 131-136 (2008) .

Критерий эффективной расщепляемости алгоритмических представлений универсальных алгебр

Дадажанов Р.Н., Касымов Н.Х., Ходжамуратова И.А.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
nadim59@mail.ru; dadajonovrn@mail.ru indiraazatovna@mail.ru

Дана характеризация равномерно вычислимо отделимых алгебр с эффективно расщепляемыми семействами негативных конгруэнций и рассмотрены близкие вопросы.

Ключевые слова: Нумерованные алгебры и морфизмы, вычислимо отделимые нумерации, равномерность, эффективная расщепляемость, полупродуктивность.

Введение

С неопределяемями базовами понятиями можно ознакомиться в [1,2,3,4].

Алгоритмическим представлением (нумерацией) универсальной алгебры A эффективной сигнатуры Σ называется всякое отображение ν из множества натуральных чисел ω на A такое, что любая Σ-операция σ поддерживается на ω подходящей вычислимой функцией f_σ в смысле коммутативночти диаграммы: $\sigma\nu\overline{x} = \nu f_\sigma \overline{x}$. Ядром нумерации ν называется множество $ker(\nu) = \{\langle x, y\rangle | \nu x = \nu y\}$, а трансверсалью – множество $tr(\nu) = \{x | \forall y(\nu x = \nu y \Rightarrow x \leqslant y)\}$.

Понятие равномерно вычислимо отделимой алгебры, естественное само по себе, оказалось полезным для решения ряда задач как в теории вычислимых моделей, так и в теоретической информатике (см. обзор [4]).

Определение 1. Алгебра A называется вычислимо (позитивно, негативно) представимой, если существует ее нумерация с разрешимым (перечислимым, коперечислимыи) ядром.

Определение 2. Нумерованная алгебра (A, ν) называется вычислимо отделимой, если всякая пара различных ее элементов отделяется подходящим ν-вычислимым множеством.

Следующая теорема играет фундаментальную роль в теории вычислимо отделимых алгебр:

Теорема о негативной аппроксимируемости ([4]). Нумерованная алгебра вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она эффективно аппроксимируется негативными алгебрами.

Таким образом, в рамках структурной теории вычислимо отделимых алгебр негативные алгебры определяют класс объектов, из которых строятся все вычислимо отделимые алгебры (как подходящие подпрямые произведения).

С точки зрения приложений важнейший подкласс класса вычислимо отделимых алгебр образуют равномерно вычислимо отделимые алгебры.

Определение 3. Нумерованная алгебра (A, ν) называется равномерно вычислимо отделимой, если существует эффективная процедура, "выдающая" для каждой пары $\langle x, y\rangle$ при $x \neq y \pmod{ker(\nu)}$, алгоритм разрешения $ker(\nu)$-замкнутого множества, отделяющего x от y.

Определение 4. Равномерно вычислимо отделимая нумерованная алгебра называется эффективно расщепляемой, если существует эффективная процедура, сопоставляющая любому вычислимому семейству негативных конгруэнций перечислимый индекс такой конгруэнции, которая находится строго ниже пересечения всех конгруэнций данного семейства.

Предложение 1. Если алгебра имеет эффективно расщепляемую нумерацию, то решетка ее конгруэнций неартинова.

Следствие 1. Всякая равномерно вычислимо отделимая нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является негативной.

Следствие 2. Всякая равномерно вычислимо отделимая позитивная нумерация алгебры с артиновой решеткой конгруэнций является разрешимой.

Теорема 1. Нумерованная алгебра эффективно расщепляема тогда и только тогда, когда ее трансверсаль полупродуктивна.

В связи с теоремой 1 возникает принципиальный вопрос: можно ли в условиях этой теоремы заменить свойство полупродуктивности на продуктивность?

Теорема 2. Существует эффективно расщепляемая позитивная алгебра, трансверсаль ядра которой не продуктивна.

Литература

1. Ершов Ю. Л. *Теория нумераций.* Наука, М., 1977, 416 с.

2. Гончаров С. С., Ершов Ю. Л. *Конструктивные модели.* Новосибирск, Научная книга, 1999, 360 с.

3. Мальцев А. И. *Конструктивные алгебры.I.* Успехи мат. наук, 1961, 16, No. 3, 3–60.

4. Касымов Н. Х. *Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры.* Успехи мат. наук, 1996, 51, No. 3, 145Ц176.

Об одном семействе критических отображений отрезка

Джалилов А. А.[1], Абдухакимов С. Х.[2]

Туринский политехнический университет в Ташкенте, Узбекистан;
adzhalilov21@gmail.com;
Национальный Университет Узбекистана им.Мирзо Улугбека, Ташкент;,
asaidahmat@mail.ru

В теории динамических систем важное место занимает одномерные отображения. Значительным событием было открытие в 1978 г. М. Фейгенбаумом явления универсальности для последовательности бифуркаций удвоения периода у однопараметрических семейств отображений отрезка в себя [1].Более подробно,рассматривается семейство отображений $f(x, t)$ отрезка $[-1, 1]$ в себя,гладко зависящее от $x \in [-1, 1]$ и параметра t. Предполагается, что при всех t отображение $f(x, t)$ является унимодальным, т.е. имеет единственную критическую точку $x_c(t)$. Считаем для определенности, что $x_c(t)$ есть точки максимума. Введем возрастающую последовательность значений параметра $t_n,\ n = 0, 1, 2, ...$, определяемую следующим образом: при $t = t_0$ у отображения $f(x,t)$ впервые появляется притягивающая неподвижная точка, при $t = t_1$ впервые появляется притягивающая периодическая траектория периода 2, при $t = t_n$ впервые появляется притягивающая периодическая траектория периода 2^n. Пусть $t_n \to t_\infty$ при $n \to \infty$. Согласно Фейгенбауму $t_\infty - t_n \sim const \cdot \delta^{-n}$, или, более точно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n+1} - t_n} = \delta$$

где постоянная $\delta-$ универсальна, т.е. одинакова для различных семейств $f(x,t)$, из некоторого открытого множества в пространстве таких семейств. Численный счет дает значение $\delta = 4,669...$.

Рассмотрим пространство четных унимодальных отображений $\varphi(x)$ отрезка $[-1,1]$ в себя, переводящих критическую точку $x = 0$ в 1, $\varphi(0) = 1$. Для объяснения явления универсальности Фейгенбаум предложил исследовать нелинейное отображение этого пространства в себя:

$$(T\varphi)(x) = -\alpha\varphi(\varphi(\alpha^{-1}x)), \quad \alpha^{-1} = -\varphi(1).$$

Универсальность Фейгенбаума эквивалентна тому, что преобразование T имеет неподвижную точку $g(x)$, $(Tg)(x) = g(x)$ и что спектр дифференциала отображения в неподвижной точке D_gT лежит внутри единичного круга за исключением единственного собственного значения, большего 1. Это собственное значение и есть упомянутая выше постоянная δ.(см.[1],[4].) Приведем несколько первых членов разложения $g(x)$ (см.[3]):

$$g(x) \approx 1 - 1,52763x^2 + 0,104815x^4 - 0,0267057x^6 + ...$$

Величина $\alpha = -g^{-1}(1)$ является универсальной константой, характеризующей изменение масштаба, связанное с удвоением отображений, $\alpha \approx 2,50290...$ (см.[1],[4]).

Пусть $f(x,t)-$ семейство четных унимодальных отображений отрезка $[-1,1]$ в себя, аналитически зависящих от x и t в области $|x| < 1 + \varepsilon_0$, $|t| < (\delta-1)^{-1} + \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$. Предположим, что при $t = 0$ критическая точка $x = 0$ переходит в 1 и является периодической с периодам 2: $f(0,0) = 1,\ f(1,0) = 0$. Определим преобразование T^* в пространстве таких семейств. Положим $f^{(2)}(x,t) = f(f(x,t),t)$ и найдем минимальное положительное значение параметра $t = \overline{t_2}$, при котором $x = 0$ является периодической точкой периода 2 для отображения $f^{(2)}(x,t)$, т.е. $f^{(2)}(f^{(2)}(x,\overline{t_2}),\overline{t_2}) = 0$. Положим $f_1(x,t) = f^{(2)}(x,\overline{t_2}(1+t))$ и $T^*f(x,t) = -\alpha f_1(\alpha^{-1}x,t),\ \alpha^{-1} = -f_1(0,0)$. В результате получается семейство отображений с такими же свойствами, что и исходное. Преобразование T^* имеет неподвижную точку $f_0(x,t)$:

$$T^*f_0(x,t) = -\alpha f_0(f_0(\alpha^{-1}x,\overline{t_2}(1+t)) = f_0(x,t),\ \alpha \approx 2,5,$$

причем эта неподвижная точка является устойчивой, т.е. спектр производного отображения $D_{f_0(x,t)}T^*$ лежит строго внутри единичного круга. Нетрудно понять, что $\overline{t_2} = \frac{1}{\delta}$. В работе (см.[2]) приведены результаты численного счета для семейства $f_0(x,t)$ и для старшего собственного значения $D_{f_0}T^*$.

Положим

$$g(x,t) = \beta^{-1}f_0(\beta x, \frac{1}{\delta}(1+t)),\ \beta = f_0(0,(\delta-1)^{-1}).$$

Обозначим через $x_0^{(s)}(t)$, $0 \le s \le n$, ближайшую к нулю периодическую точку периода 2^s, отображения $g(x,t)$.

Положим

$$x_i^{(s)}(t) = g^{(i)}(x_0^{(s)}(t), t),\ 1 \le i < 2^s.$$

Пусть $t \in (t_1, t_2]$. Рассмотрим уравнение

$$x - g^4(x,t) = h$$

на отрезке $[x_0^{(1)}(t), x_0^{(0)}(t)]$. Сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема. Пусть h достаточно мало. Существует $\tilde{t} \in (t_1, t_2)$, зависящее от h, такое, что при $\tilde{t} \le t \le t_2$ найдутся отрезки $U_0^1(t)$, $U_1^1(t)$, а при $t_1 < t \le \tilde{t}$ отрезок $U_0^0(t)$, обладающими свойствами:

I) $x_i^1(t) \in U_i^{(1)}(t),\ i = 0,1,\ x_i^1(t) \in U_0^{(0)}(t),\ i = 0,1.$

II) $U_0^{(1)}(t) \cap U_1^{(1)}(t) = \emptyset,\ \overline{U}_0^{(1)}(t) \cap U_1^{(1)}(t) = \emptyset, V_0^{(1)}(t) \cap V_1^{(1)}(t) = \emptyset,\ \overline{V}_0^{(1)}(t) \cap V_1^{(1)}(t) = \emptyset,$ где $V_0^{(1)}(t) = -\alpha^{-1} U_0^{(0)}(t),\ V_1^{(1)}(t) = g(V_0^{(1)}(t), t),\ \overline{X} = \{|x| : x \in X \subset R^1\};$

III) $g^{(2)}(U_i^{(1)}(t), t) \subset U_i^{(1)}(t),\ g^{(2)}(V_i^{(1)}(t), t) \subset V_i^{(1)}(t),\ i = 0,1.$

IV) $g^{(4)}(a_i^{(1)}(t), t) - a_i^{(1)}(t) \ge h,\ b_i^{(1)}(t) - g^{(4)}(b_i^{(1)}(t), t) \ge h,\ i = 0,1,$
где $a_i^{(1)}(t)$ и $b_i^{(1)}(t)-$ левый и правый концы отрезка $U_i^{(1)}(t)$.

Подобные неравенства справедливы и для концов отрезка $V_i^{(1)}(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations,// Journal of Statistical Physics. 1978, 19:1, p. 25-52.

2.Вул Е. Б., Ханин К. М. О неустойчивой сепаратрисе неподвижной точки Фейгенбаума, УМН. 1982, том 37, выпуск 5(227), 173-174.

3. Lonford III O. E. , A computer assisted proof of the Feigenbaum conjectures, Bull, Amer. Math. 1982, Volme 6, Number 3, 427-434.

4.Flanagan R., Lacasa L., Nicosia V. On the spectral properties of Feigenbaum graphs. //Journal of Physics A Mathematical and theoretical. 2019. 53(2).

Отображения возвращения для отображений окружности с изломом

Джалилов А. А.[1], Каримов Ж. Ж.[2]

Туринский политехнический университет в городе Ташкенте, Узбекистан [1,2]
adzhalilov21@gmail.com; jkarimov0702@gmail.com

Настоящая работа посвящена изучению поведения отображения возвращения для отображений окружности с изломом и иррациональным числом вращения.

Мы рассмотрим ренормгрупповое преобразование в пространстве гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома и с числом вращения $\rho = [k,\, k, \ldots, k, \ldots] = \frac{-k+\sqrt{k^2+4}}{2},\ k1.$

Преобразование ренормгруппы в пространстве гомеоморфизмов окружности с изломами и алгебраическим числом вращения имеет периодическую орбиту [1]. Обозначим через X_b множество пар строго возрастающих функций $(f(x),\ x \in [-1, 0],$

$g(x)$, $x \in [0, \alpha]$), удовлетворяющих следующим условиям:
а) $f(0) = \alpha$, $g(0) = -1$; б) $f(g(0)) = f(-1) < 0$;
в) $f(-1) = g(\alpha)$; г) $f^{(2)}(g(0)) \geq 0$;
д) $f(x) \in C^{2+\varepsilon}([-1, 0])$, $g(x) \in C^{2+\varepsilon}([0, \alpha])$ для любого $\varepsilon > 0$.
Условия а)–в) позволяют при помощи $(f, g) \in X_b$ построить гомеоморфизм окружности $[-1, \alpha)$ по формуле:

$$T_{f,g}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [-1, 0), \\ g(x), & \text{если } x \in [0, \alpha). \end{cases}$$

Обозначим через $X_b(\rho)$ подмножество, состоящее из таких пар $(f, g) \in X_b$, что число вращения $\rho = [k,\, k, \ldots, k, \ldots]$.

Определим преобразование ренормгруппы $R_b \colon X_b(\rho) \to X_b(\rho)$ по формуле [2]:

$$R_b(f(x), g(x)) = (\tilde{f}(x), \quad x \in [-1, 0]; \qquad \tilde{g}(x), \quad x \in [0, \alpha']),$$

где

$$\tilde{f}(x) = -\alpha^{-1} f(g(-\alpha x)), \qquad \tilde{g}(x) = -\alpha^{-1} f(-\alpha x), \qquad \alpha' = -\alpha^{-1} f(-1).$$

Определим величину излома: $c = \sqrt{\frac{f'(-0)}{f'(+0)}}$. В работе [1] доказано, что при фиксированном c преобразование R_b в подмножестве $X_b(\rho)$ имеет единственную периодическую траекторию $\{f_i(x, c_i), g_i(x, c_i), i = 1, 2\}$ периода два. Это означает, что

$$R_b(f_1(x, c_1), g_1(x, c_1)) = (f_2(x, c_2), g_2(x, c_2)),$$

$$R_b(f_2(x, c_2), g_2(x, c_2)) = (f_1(x, c_1), g_1(x, c_1)).$$

Функции $f_i(x, c_i)$ и $g_i(x, c_i)$, $i = 1, 2$, имеют вид:

$$f_i(x, c_i) = \frac{(\alpha_i + c_i x)\beta_i}{\beta_i + (\beta_i + \alpha_i - c_i)x}, \quad g_i(x, c_i) = \frac{\alpha_i \beta_i (x_i - c_i)}{\alpha_i \beta_i c_i + (c_i - \alpha_i - c_i \beta_i)x}, \tag{1}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{c - \beta_0^2}{1 + \beta_0}, \qquad \alpha_2 = \frac{c^{-1} - \beta_0^2}{1 + \beta_0}, \qquad c_1 = c, \qquad c_2 = c^{-1}, \qquad \beta_1 = \beta_2 = \beta_0,$$

β_0 — единственный корень уравнения

$$\beta^4 - \beta^3 - \beta^2 \frac{(c+1)^2}{c} - \beta + 1 = 0,$$

принадлежащий интервалу $(0, 1)$.

Отождествляя концы полуинтервалов $[-1, \alpha_i)$, $i = 1, 2$ получаем окружности S_i, $i = 1, 2$. Теперь при помощи (f_i, g_i), $i = 1, 2$ определим гомеоморфизмы окружности $T_i : S_i \to S_i$ по формуле:

$$T_i(x) = \left\{ \begin{array}{lll} f_i(x, c_i) & \text{если} & x \in [-1, 0), \\ g_i(x, c_i) & \text{если} & x \in [0, \alpha_i) \end{array} \right.$$

Ниже мы описываем свойства гомеоморфизма T_1 окружности S_1. Гомеоморфизм T_1 имеет изломы в точках x_0 и $x_1 = T_1(x_0)$ и произведение величин изломов в этих точках равно c_1. Гомеоморфизм T_1 переобозначим через T_b.

Пара функций $(f_1(x,c),\ -1 \leq x \leq 0;\ g_1(x,c),\ 0 \leq x \leq \alpha_1)$ является неподвижной точкой преобразования $R_b^2 = R_b \circ R_b$. Отсюда, используя определение преобразования R_b, получаем, что функции $f_1(x) = f_1(x,c)$ и $g_1(x) = g_1(x,c)$ удовлетворяют следующей системе уравнений [3]:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_1\alpha'} f_1(g_1(f_1(\alpha_1\alpha' x))) = f_1(x), & x \in [-1,0), \\ \dfrac{1}{\alpha_1\alpha'} f_1(g_1(\alpha_1\alpha' x)) = g_1(x), & x \in [0,\alpha_i], \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha' = -\frac{g_1(\alpha_1)}{\alpha_1}$. Путем простых вычислений можно легко убедиться, что $\alpha_1\alpha' = \beta_0$.

Обозначим через $\frac{p_n}{q_n}$, $n1$, n-ую подходящую дробь ρ. Числа q_n удовлетворяют следующему разностному уравнению

$$q_{n+1} = q_n + q_{n-1}, \qquad q_0 = 1, \quad q_1 = 1.$$

Числа q_n называются числами Фибоначчи. Отображения $T^{q_n}(x)$ называются отображениями Пуанкаре или отображениями возвращения.

Теперь изучим поведение отображения возвращения $T_b^{q_{2n}}(x), T_b^{q_{2n+1}}(x)$, $n \geq 1$.

Теорема. *Для всех $n \geq 1$ справедливы следующие формулы:*

$$T_b^{q_{2n}}(\beta_0^n x) = \beta_0^n g_1(x), \quad x \in [0,\alpha_1],$$
$$T_b^{q_{2n+1}}(\beta_0^n x) = \beta_0^n f_1(x), \quad x \in [-1,0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вул Е.Б., Ханин К.М. Гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома. // Успехи математических наук. 1990. Т. 45. Вып. 3 (273). С. 189–190.

2. Джалилов А.А. Термодинамический формализм и сингулярные инвариантные меры критических отображений. // Теоретическая и математическая физика. 2003. Т. 134, №2. С. 191–206.

3. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. Термодинамический формализм и показатели сингулярности инвариантной меры отображений окружности с одним изломом. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т-30. Вып. 3. С. 343–366.

Асимптотики времени возвращения для иррационального поворота окружности

Джалилов А. А.[1], Хомидов М. К.[2]

Туринский политехнический университет в Ташкенте, Узбекистан,
adzhalilov21@gmail.com;
Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент;
mkhomidov0306@mail.ru

Пусть $(M,\ \mathfrak{F},\ \mu)$- вероятностное пронстраство, $T: M \to M$ измеримое переобразование, и $mu-$ инвариантная мера (т.е. $\mu(T^{-1}A)=\mu(A)\ \ \forall A\in\mathfrak{F}$). Для произвольного $A\in\mathfrak{F}$ определим "*функция первой возвращения*"$R_A: A\to\mathbb{N}$:

$$R_A(x):=\inf\{n:\ \ T^n x\in A\}.$$

Пусть $\mathcal{P}$ некоторые конечное разбиение на M. Определим последовательность разбиений $\{\mathcal{P}_n\}$ на вероятностном пронстрастве M: $\mathcal{P}_n := \mathcal{P}\vee T^{-1}\mathcal{P}\vee\ldots\vee T^{-n+1}\mathcal{P}$, где, $\mathcal{P}\vee\mathcal{Q}=\{P\cap Q|\ P\in\mathcal{P},\ Q\in\mathcal{Q}\}$. В работе Шеннона-Макмиллиана-Брейна [1] доказано , что если отоброжения T эргодичиское и энропия Колмогоров-Синая $h(T,\mathcal{P})$ динамического разбиения $\mathcal{P}$ положителная, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-\log\mu(P_n(x))}{n}=h(T,\mathcal{P}),\quad ..,$$

где $P_n(x)$ множество из $\mathcal{P}_n$ содержашее точку $x\in P_n(x)$. Орнстейн и Вейсс [2] доказали, что для эргодического отображения T:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log R_{P_n(x)}(x)}{n}=h(T,\mathcal{P}),\quad ..\text{ по меру } \mu$$

Хорошо известно, что энтропия линейного иррационального поворота окружности равно нулю. Если энтропия положителна, мы знаем асимптотические поведение функции первого возвращения $R_{P_n(x)}(x)$ стремтся к бесконечности как последовательность $2^{nh(T,\mathcal{P})}$. Возникает вопрос об асимптотике $R_{P_n(x)}(x)$ при $n\to\infty$. Ким Парк и Донг Хан Ким [3] показали, что для линейного иррационального поворота окружности следиющие равенства:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log R_{\mathcal{P}_n(x)}}{\log n}=1,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log R_{\mathcal{P}_n(x)}}{\log n}=\frac{1}{\eta}.$$

где η тип иррационального числа, и здесь нормировка другая а именно $\log^{-1}n$.

В настоящей работе мы изучаем асимптотическое поведение функции первого возвращения $R_{P_n(x)}(x)$ для линейного иррационального поворота окружности с разбиеним порожденного орбитой двух точек.

Пусть $T_\theta: S^1\to S^1$ линейный иррационалный поворот окружности, μ лебеговая мера на окружности. Мы рассмотрим разбиение $\mathcal{P}=\{[0,b),\ [b,1)\}$, точки 0 и b не лежат одной орбите. Для каждого $n\geq 1$, определим следующие разбиения:

$$\mathcal{P}_n=\mathcal{P}\vee T^{-1}\mathcal{P}\vee\ldots\vee T^{-n+1}\mathcal{P},$$

$$\mathcal{Q}_n = \mathcal{P} \vee T\mathcal{P} \vee ... \vee T^{n-1}\mathcal{P}.$$

Для произволной точки $t \in \mathbb{R}^1$ определим ее норму $||t||$:

$$||t|| := \min_{n\in\mathbb{Z}} |t-n|$$

Пусть иррациональное число $\eta \in [0,1)$. Число η определенное по формуле

$$\eta = \sup\{\beta > 0 : \lim \inf_{j\to\infty} j^\beta ||j\theta|| = 0\}$$

називается типом θ, или же $\theta-$ иррациональным числом типа η.

Ясно $\eta \geq 1$. Подмножество иррациональных числа отрезка $[0,1]$ типа 1, имеет лебегову меру 1 [4].

Теперь сформылируем основные результаты нашей работы.

Теорема 1. Пусть $\theta \in [0,1)$ иррационалнjt число, тогда почти всех $x \in [0,1)$ имеет место следующие:

$$\lim \inf_{n\to\infty} \frac{-\log \mu(Q_n(x))}{\log n} = \frac{1}{\eta},$$

$$\lim \sup_{n\to\infty} \frac{-\log \mu(Q_n(x))}{\log n} = 1.$$

Теорема 2. Для всех $x \in [0,1)$ верно следующее:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log R_{Q_n(x)}(x)}{\log \mu(Q_n(x))} = 1.$$

Из утверждений теорем 1 и 2 вытекает, что

$$\lim \inf_{n\to\infty} \frac{\log R_{Q_n(x)}(x)}{\log n} = \frac{1}{\eta},$$

$$\lim \sup_{n\to\infty} \frac{\log R_{Q_n(x)}(x)}{\log n} = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1.Shannon E.and Weaver W. // The mathematical theory of communication, The university of Illinois press, Urbana. 1964.

2.Ornstein D. and Weiss B. , //Entropy and data compression schemes, IEEE Trans. Inform. Theory 39 (1993), 78Ц83. MR1211492 (93m:94012).

3. Dong H. K., Kyewon K. P., The first return time properties of an irrational rotation,// Proceeding of the American mathematical society, Volume 136, Number 11, November 2008, Pages 3941Ц3951.

4.Cornfeld I.P., Fomin S.V. and Sinai Ya.G., Ergodic Theory, Springer Verlag, Berlin, (1982).

5.Khinchin, A.I. (1957) Mathematical Foundation of Information Theory. Dover Publications, New York.

Об одной полунелокальной краевой задаче для трехмерного уравнения Трикоми в призматической неограниченной области

Джамалов С. З.[1], Ашуров Р. Р.[2], Туракулов Х. Ш.[3]
[1],[2],[3] *Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан*
E-mail: [1] *siroj63@mail.ru,* [2] *ashurovr@gmail.com,* [3] *hamidtsh87@gmail.com*

УДК 517.956.6; MSC 2010: 35M10

Аннотация. В данной статье изучаются методами "ε- регуляризации"и априорных оценок с применением преоброзования Фурье однозначная разрешимость обобшенного решения одной полунелокальной краевой задаче для трехмерного уравнения Трикоми в призматической неограниченной области.

Ключевые слова: трехмерная уравнения Трикоми, полунелокальная краевая задача, преоброзование Фурье, методы "ε -регуляризации"и априорных оценок.

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работе Ф.И.Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [2]. Близкие по постановке задач, для уравнения Трикоми были исследованы в ограниченных областях в работах [3]-[6]. В данной работе с использованием результатов работ [5],[6] изучаются однозначная разрешимость обобшенного решения одной полунелокальной краевой задачи для трехмерного уравнения Трикоми в призматической неограниченной области.
В области

$$Q = (-\alpha, \beta) \times (0, T) \times \mathbb{R} =$$
$$= Q_1 \times \mathbb{R} = \{(x, t, z); x \in (-\alpha, \beta), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R}\},$$

рассмотрим уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - \Delta u + a\,(x, t)\,u_t + c\,(x, t)\,u = f\,(x, t, z), \tag{1}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$- оператор Лапласа . Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.

Полунелокальная краевая задача. Найти обобщенное решение $u(x, t, z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p\, u|_{t=0} = D_t^p\, u|_{t=T}\,, \tag{2}$$

$$u|_{x=-\alpha} = u|_{x=\beta} = 0, \tag{3}$$

при $p = 0, 1$, где $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$, $\gamma-$некоторое постоянное число, отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Определение.Обобщенным решением задачи (1)-(3) будем называть функцию $u(x, t, z) \in W_2^{2,3}(Q)$, удовлетворяющее почти всюду уравнению (1) с условиями (2)-(3).

Теорема.Пусть выполнены следующее условия для коэффициентов уравнения (1); $2a(x,t)+\mu x > \delta_1 > 0$, $\mu c(x,t)-c_t(x,t) > \delta_2 > 0$,для всех $(x,t) \in \overline{Q_1}$, где $\mu = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$ при $|\gamma| > 1$, $a(x,0)=a(x,T)$, $c(x,0)=c(x,T)$. Тогда для любой функции $f \in W_2^{1,3}(Q)$, такой, что $\gamma \cdot f(x,0,z) = f(x,T,z)$, существует единственное обобщенное решение задачи (1)-(3) из пространства $W_2^{2,3}(Q)$.
Здесь через $W_2^{l,s}(Q)$, обозначено гильбертово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{l,s}(Q)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^s \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^l(Q_1)}\, d\lambda, \qquad (A)$$

где $W_2^l(Q_1)$ пространства Соболева, $s,l-$ любые конечные положительные целые числа, а норма в пространстве Соболева $W_2^l(Q_1)$, определяется следующим образом

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q_1)} = \sum_{|\alpha|\le l} \int\limits_{Q_1} |D^\alpha \vartheta|^2\, dxdt,$$

$\alpha-$ это мультииндекс, $D^\alpha-$есть обобщенная производная по переменними x и t,а через

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

обозначено преобразование Фурье, функции $u(x,t,z)$,
Замечание. Результат справедливо для многомерного уравнения Трикоми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа// *ДАН СССР*,**122**:2 (1953), 167–170.
2. Франкль.Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения //*Прикладная математика и механика*,**20**:2 (1956), 196–202
3. Кальменов Т.Ш. О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа.// *Дифференциальные уравнения*,**14**:3 (1978), 546–548.
4.Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области.// *Док. РАН*,**413**:1 (2007), с.23–26.
5.Джамалов.С.З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода.// *Вестник Самарского государственного технического университета, Сер.физ.-мат.науки*, **21**:4 (2017),1–14.
6.Джамалов.С.З., Ашуров.Р.Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве.//*Казахский математ журнал*.**18**:2 (2015), 59–70.

Теорема вложения для симметричных пространств Банаха-Канторовича

Закиров Б. С.[1], **Закирова Г. Б.**[2]

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан,
[1]botirzakirov@list.ru; [2]zg1090@list.ru

Пусть B произвольная полная булева алгебра с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$. Обозначим через $L^0(B) := C_\infty(Q(B))$ алгебру всех непрерывных функций $x : Q(B) \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, определенных на стоуновском компакте $Q(B)$, отвечающем булевой алгебре B, которые принимают значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$. Через $C(Q(B))$ обозначается банахова алгебра всех непрерывных действительных функций на $Q(B)$ с равномерной нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in Q(B)} |x(t)|$.

Пусть (Ω, Σ, μ) измеримое пространство с σ-конечной мерой, $L^0(\Omega)$ алгебра всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на (Ω, Σ, μ). Относительно естественного частичного порядка $f \leq g \Leftrightarrow g - f \geq 0$ почти всюду, алгебра $L^0(\Omega)$ является порядково полной векторной решеткой, а множество $B(\Omega)$ всех идемпотентов из $L^0(\Omega)$ образует полную булеву алгебру относительного частичного порядка, индуцируемого из $L^0(\Omega)$. Положим $L^0(\Omega)_+ := \{f \in L^0(\Omega) : f \geq 0\}$.

Пусть $m : B \to L^0(\Omega)$ – строго положительная $L^0(\Omega)$-значная мера на B, обладающая свойством Магарам, т.е. для любых $e \in B,\ f \in L^0(\Omega),\ 0 \leq f \leq m(e)$, существует такое $q \in B,\ q \leq e$, что $m(q) = f$ (такие меры называют мерами Магарам). В этом случае [1], существует единственный инъективный вполне аддитивный булев гомоморфизм $\varphi : B(\Omega) \to B$ такой, что $\nabla(m) = \varphi(B(\Omega))$ есть правильная булева подалгебра в B, и $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ для всех $q \in B(\Omega)$, $e \in B$. Кроме того, алгебра $L^0(\Omega)$ отождествляется с подалгеброй $L^0(\nabla(m)) = C_\infty(Q(\nabla(m)))$ в алгебре $L^0(B)$ и является правильной векторной подрешетку в $L^0(B)$ (это означает, что точные верхние и нижние границы для ограниченных подмножеств из $L^0(\nabla(m))$ совпадают в $L^0(B)$ и в $L^0(\nabla(m))$. При этом, $L^0(B)$ является $L^0(\nabla(m))$-модулем.

Обозначим через $L^1(B, m)$ пространство всех функций из $L^0(B)$, интегрируемых по $L^0(\Omega)$-значной мере m. Для любого $x \in L^1(B, m)$ отображение $\|x\|_{1,m} = \int |x| dm$ определяет L^0-значную норму в $L^1(B, m)$, относительно которой $L^1(B, m)$ является пространством Банаха-Канторовича (см., [2, п. 6.1.10]).

Элемент $x \in L^0(B)$ называют $L^0(\Omega)$*-ограниченным,* если $|x| \leq f$ для некоторого $f \in L^0(\Omega)_+$. Ясно, что множество $L^\infty(B, L^0(\Omega))$ всех $L^0(\Omega)$-ограниченных элементов из $L^0(B)$ является подалгеброй в $L^0(B)$, а также порядково полной векторной подрешеткой в $L^0(B)$, при этом, $L^0(\Omega) \subset L^\infty(B, L^0(\Omega))$ и $C(Q(B)) \subset L^\infty(B, L^0(\Omega))$.

Для каждого $x \in L^\infty(B, L^0(\Omega)$ положим

$$\|x\|_{\infty, L^0(\Omega)} = \inf\{f \in L^0(\Omega)_+ : |x| \leq f\}.$$

Известно, что пара $(L^\infty(B, L^0(\Omega)), \|\cdot\|_{\infty, L^0(\Omega)})$ является пространством Банаха-Канторовича [3].

Обозначим через $L^0_{++}(\Omega)$ множество всех тех $f \in L^0(\Omega)_+$, для которых носитель $s(f) := \sup\limits_{n1}\{|f| > n^{-1}\} = \mathbf{1}$. Ясно, что каждая функция $f \in L^0_{++}(\Omega)$ обратима в алгебре $L^0(\Omega)$, т.е. существует такая функция $g \in L^0(\Omega)$, что $f \cdot g = \mathbf{1}$, при этом, $g \in L^0_{++}(\Omega)$.

$L^0(\Omega)$-значной невозрастающей перестановкой элемента $x \in L^0(B)$ называется отображение $m(x,t):(0,\infty)\to L^0(\Omega)$, определяемое равенством:

$$m(x,t)=\inf\{\|xe\|_{\infty,L^0(\Omega)}: e\in B,\ xe\in L^\infty(B,L^0(\Omega)),\ m(\mathbf{1}-e)\le t\cdot\mathbf{1}\},\ t>0.$$

Для фиксированных $x\in L^0(B)$, $f\in L^0_{++}(\Omega)$ положим

$$\xi(x,f)=\inf\{h\in L^0_{++}(\Omega): m(\{|x|>h\})\le f\}\in L^0(B).$$

Тогда для любых $x\in L^0(B)$ и $t>0$ верно равенство

$$m(x,t)=\xi(x,\ t\cdot\mathbf{1}),$$

при этом, $m\{|x|>\xi(x,t\cdot\mathbf{1})\}\le t\cdot\mathbf{1}$.

Определение. Пусть E – ненулевой $L^0(\nabla(m))$-подмодуль в $L^0(B)$ со свойством идеальности, т.е. из $|x|\le|y|$, $x\in L^0(B)$, $y\in E$ следует $x\in E$. Рассмотрим $L^0(\Omega)$-значную монотонную норму $\|\cdot\|_E$ на E, наделяющую E структурой пространство Банаха-Канторовича. Будем говорить, что E – симметричное пространство Банаха-Канторовича, если из равенств $m(x,t)=m(y,t)$ для всех $t>0$, где $x\in L^0(B)$, $y\in E$, следует, что $x\in E$ и $\|x|_E=\|y|_E$.

Основными и важнейшими примерами симметричных пространств Банаха-Канторовича являются пространства $L^p(B,m)$, $1\le p<\infty$ и $L^\infty(B,L^0(\Omega))$.

Следующими примерами симметричных пространств Банаха-Канторовича являются пересечение и сумма пространств L^1 и L^∞ :

Теорема 1. (i). Пара $(L^1(B,m)\cap L^\infty(B,L^0(\Omega)),\|\cdot\|_{L^1\cap L^\infty})$ является симметричным пространством Банаха-Канторовича, где $\|x\|_{L^1\cap L^\infty}=\max\{\|x\|_{1,m},\|x\|_{\infty,L^0(\Omega)}\}$, $x\in L^1(B,m)\cap L^\infty(B,L^0(\Omega))$.

(ii). Множество

$$L^1(B,m)+L^\infty(B,L^0(\Omega))=\{z=x+y,\ x\in L^1(B,m),\ y\in L^\infty(B,L^0(\Omega))\}$$

с $L^0(\Omega)$-значной нормой

$$\|z\|_{L^1+L^\infty}=\inf\{\|x\|_{1,m}+\|y\|_{\infty,L^0(\Omega)}: z=x+y,\ x\in L^1(B,m),\ y\in L^\infty(B,L^0(\Omega))\}$$

является симметричным пространством Банаха-Канторовича.

Как и в случае числовой меры, имеет место следующая теорема вложения:

Теорема 2. (ср. [4, гл. II, §4]) Для любого симметричного пространства Банаха-Канторовича E имеют место следующие непрерывные вложения:

$$L^1(B,m)\cap L^\infty(B,L^0(\Omega))\subseteq E\subseteq L^1(B,m)+L^\infty(B,L^0(\Omega)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Закиров Б.С., Чилин В.И. Разложимые меры со значениями в порядково полных векторных решетках // Владикавказский матем. журн., 2008. № 4 (10). С. 31–38.
2. Кусраев А.Г. Мажорируемые операторы. - М.: Наука, 2003. - 619 с.
3. Zakirov B.S., Umarov Kh.R. Duality for L^1-spaces associated with the Maharam measure // Bulletin of National University of Uzbekistan. Mathematics and Natural Sciens. 2021. Vol. 4, Issue 1, p. 64–76.
4. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. - М.: Наука, 1978. - 400 с.

Строгая монотоность нормы в пространствах Орлича-Канторовича

Закиров Б. С.[1], Чилин В. И.[2]

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан, botirzakirov@list.ru;
Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан, vladimirchil@gmail.com

Пусть B произвольная полная булева алгебра с нулем $\mathbf{0}$ и единицей $\mathbf{1}$. Через $e \vee q$ и $e \wedge q$ обозначаются точные верхняя и нижняя границы множества $\{e, q\} \subset B$. Булеву подалгебру A в полной булевой алгебре B называют правильной подалгеброй, если $\sup E$, $\inf E \in A$ для любого подмножества $E \subset A$. Обозначим через $L^0(B)$ алгебру всех непрерывных функций $x : Q(B) \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, определенных на стоуновском компакте $Q(B)$, отвечающем булевой алгебре B, которые принимают значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах из $Q(B)$.

Линейное отображение $T : L^0(B) \to L^0(B)$ называется гомоморфизмом, если $T(x \cdot y) = T(x) \cdot T(y)$ для всех $x, y \in L^0(B)$. Каждый гомоморфизм T является положительным отображением, т.е. $T(x) \geq 0$ для любого положительного элемента $x \in L^0(B)$.

Гомоморфизм $T : L^0(B) \to L^0(B)$ называется нормальным, если $T(x) = \sup\limits_{\alpha \in A} T(x_\alpha)$ для любой возрастающей сети $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset L^0(B)$ $x_\alpha \uparrow x \in L^0(B)$.

Пусть (Ω, Σ, μ) измеримое пространство с σ-конечной мерой, $L^0(\Omega)$ алгебра всех классов равных почти всюду действительных измеримых функций на (Ω, Σ, μ). Относительно естественного частичного порядка $f \leq g \Leftrightarrow g - f \geq 0$ почти всюду, алгебра $L^0(\Omega)$ является порядково полной векторной решеткой, а множество $B(\Omega)$ всех идемпотентов из $L^0(\Omega)$ образует полную булеву алгебру относительного частичного порядка, индуцируемого из $L^0(\Omega)$.

Пусть $m : B \to L^0(\Omega)$ строго положительная $L^0(\Omega)$-значная мера на полной булевой алгебре B. Говорят, что мера m *разложима*, если для любых $e \in B$ и разложения $m(e) = f_1 + f_2$, $f_1, f_2 \in L^0(\Omega)$ существуют такие $e_1, e_2 \in B$, что $e = e_1 \vee e_2$, и $m(e_i) = f_i$, $i = 1, 2$. Известно [1], что мера m разложима в том и только в том случае, когда она является мерой Магарам, т.е. для любых $e \in B$, $0 \leq f \leq m(e)$, $f \in L^0(\Omega)$, существует такое $q \in B$, $q \leq e$, что $m(q) = f$. В этом случае, существует единственный инъективный вполне аддитивный булев гомоморфизм $\varphi : B(\Omega) \to B$ такой, что $\nabla(m) = \varphi(B(\Omega))$ есть правильная булева подалгебра в B, и $m(\varphi(q)e) = qm(e)$ для всех $q \in B(\Omega)$, $e \in B$. Кроме того, алгебра $L^0(\Omega)$ отождествляется с подалгеброй $L^0(\nabla(m)) = C_\infty(Q(A(\nabla)))$ в алгебре $L^0(B) := C_\infty(Q(B))$ и является правильной векторной подрешетку в $L^0(B)$ (это означает, что точные верхние и нижние границы для ограниченных подмножеств из $L^0(\nabla(m))$ совпадают в $L^0(B)$ и в $L^0(\nabla(m))$.

Пусть $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *функция Орлича*, т.е. непрерывная слева, выпуклая, возрастающая функция, удовлетворяющая условиям $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(t) > 0$ для некоторого $t \neq 0$. Функция Орлича Φ удовлетворяет (Δ_2)-*условию*, если $0 < \Phi(t) < \infty$ для всех $t > 0$ и $\sup\limits_{0<t<\infty} \frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)} < \infty$.

Обозначим через $L^1(B, m)$ пространство Банаха-Канторовича всех функций из $L^0(B)$, интегрируемых по $L^0(\Omega)$-значной мере m (см., например, [3]). Следуя традиционной схеме вводим классы и пространства Орлича, ассоциированные с $L^0(\Omega)$-

значной мере m и функцией Орлича Φ.

Множество $L^0_\Phi(B,m)=\{x\in L^0(B):\Phi(|x|)\in L^1(B,m)\}$ называют классом Орлича, а линейное пространство $L_\Phi(B,m)=\{x\in L^0(B):xy\in L^1(B,m)\}$ для всех $y\in L^0_\Psi(B,m)$ называют пространством Орлича, где Ψ дополнительная к Φ функция Орлича. На пространстве Орлича $L_\Phi(B,m)$ определяется $L^0(\Omega)$-значная норма Орлича, с помощью равенства
$\|x\|_\Phi=\sup\{|\int xydm|:y\in L^0_\Psi(B,m),\ \int\Psi(|y|)\leq\mathbf{1}\},\ x\in L_\Phi(B,m)$.
Известно, что пара $(L_\Phi(B,m),\|\cdot\|_\Phi)$ является решеткой Банаха-Канторовича [2], которую называют пространством Орлича-Канторовича.

Говорят, что норма $\|\cdot\|_\Phi$ имеет свойство Фату, если для любой возрастающей сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ положительных элементов из $L_\Phi(B,m)$ из условия $\sup\limits_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|_\Phi<\infty$, следует, что существует такой элемент $x\in L_\Phi(B,m)$, что $x_\alpha\uparrow x$ и $\sup\limits_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|_\Phi=\|x\|_\Phi$.

Норма $\|\cdot\|_\Phi$ называется порядково непрерывной, если $\|x_\alpha\|_\Phi\downarrow\mathbf{0}$ для любой убывающей сети $x_\alpha\downarrow\mathbf{0}$, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset L_\Phi(B,m)$.

Следующая теорема выясняет наличие свойства Фату и свойства порядково непрерывности в пространствах Орлича-Канторовича.

Теорема 1. (i). В каждом пространстве Орлича-Канторовича $(L_\Phi(B,m),\|\cdot\|_\Phi)$ его норма имеет свойство Фату;

(ii). Норма $\|\cdot\|_\Phi$ является порядково непрерывной в том и только в том случае, когда функция Орлича Φ удовлетворяет (Δ_2)-условию.

Говорят, что норма $\|\cdot\|_\Phi$ строго монотонна, если из условий $|x|\leq|y|$, $|x|\neq|y|$, $x,y\in Ł_\Phi(B,m)$ вытекает неравенство $\|x\|_\Phi<\|y\|_\Phi$.

Теорема 2. Если функция Орлича Φ удовлетворяет (Δ_2)-условию, то норма $\|\cdot\|_\Phi$ является строго монотонной.

Следствие 1. Пусть функция Орлича Φ удовлетворяет (Δ_2)-условию, x,y – положительные элементы из $L_\Phi(B,m)$. Тогда $x\cdot y=\mathbf{0}$ в том и только в том случае, когда верно равенство $\|x+y\|_\Phi=\|x-y\|_\Phi$.

Следствие 2. Пусть функция Орлича Φ удовлетворяет (Δ_2)-условию, и пусть $V:L_\Phi(B,m)\to L_\Phi(B,m)$ — положительная линейная изометрия. Тогда для любых положительных элементов x,y из $L_\Phi(B,m)$, удовлетворяющих равенству $x\cdot y=\mathbf{0}$, верно равенство $V(x)\cdot V(y)=\mathbf{0}$.

Используя следствия 1 и 2, получаем следующее описание всех положительных линейных изометрий, действующих в пространствах Орлича-Канторовича.

Теорема 3. Пусть функция Орлича Φ удовлетворяет (Δ_2)-условию, и пусть $V:L_\Phi(B,m)\to L_\Phi(B,m)$ — положительная линейная изометрия. Тогда существует такой инъективный нормальный гомоморфизм $T:L^0(B)\to L^0(B)$ и положительный элемент $y\in L^0(B)$ такие, что $V(x)=y\cdot T(x)$ для всех $x\in L_\Phi(B,m)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Закиров Б.С., Чилин В.И. Разложимые меры со значениями в порядково полных векторных решетках // Владикавказский матем. журн., 2008. № 4 (10). С. 31–38.
2. Закиров Б.С. Решетки Орлича-Канторовича, ассоциированные с L^0-значной мерой // Узбекский мат. журн., 2007. № 4. С. 18–34.
3. Кусраев А.Г. Мажорируемые операторы. - М.: Наука, 2003. - 619 с.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Зикиров О. С.[1], Сагдуллаева М. М.[2]

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан;
[1]zikirov@yandex.ru [2]sagdullaevam@mail.ru

В данной работе изучается нелокальная начально-краевая задача для уравнения в частных производных третьего порядка с теплопроводности в главной части

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $c(x,t)$, $f(x,t)$ — заданные функции в области.

Уравнения в частных производных третьего порядка лежат в основе математических моделей различных физических явлений и процессов.

Например, уравнение

$$\nu\,\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),$$

описывает распространение плоской волны в вязко упругом твердом теле или в сжимаемой вязкой жидкости с незначительной удельной теплопроводностью.

Для уравнения (1) в области $D = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим нелокальную задачу в следующей постановке: *найти регулярное в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), непрерывное в $\overline{D}$ и удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \lambda(t)\int_0^l u(x,t)dx + \int_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)d\tau + \mu_1(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(l,t) = \mu_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

здесь $\varphi_i(x)$, $\mu_i(t)$, $(i = 1,2)$ а $\lambda(t)$ и $\rho(t,\tau)$ — заданные гладкие функции, причем

$$\varphi_1'(l) = \mu_2(0), \quad \varphi_1(0) = \lambda(0)\int_0^l \varphi_1(x)dx + \mu_1(0).$$

В поставленной задаче в краевых условиях содержится нелокальность по времени, что впервые была рассмотрена в работе А.И.Кожанова [1].

При определенных условиях гладкости на заданных функциях доказывается регулярная разрешимость поставленной нелокальной задачи (1)–(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера.// Дифференц. уравнения. 2004. – том 40, №6. – С. 763–774.

Обратная задача определения порядка дробной производной Римана-Лиувилля по времени для уравнения субдиффузии в R^N

Зуннунов Р. Т.
Институт Математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан
zunnunov@mail.ru

Аннотация. В данной работе мы исследуем существование и единственность решения начально-краевой задачи для уравнения субдиффузии с дробной производной Римана-Лиувилля и эллиптическим оператором $A(D)$ в R^N с постоянными коэффициентами. Также будут исследована обратная задача определения порядка дробной производной по времени.

Одним из наиболее важных дробных по времени уравнений является уравнение субдиффузии, которое моделирует аномальные или медленные процессы диффузии. Это уравнение представляет собой интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, полученное из классического уравнения теплопроводности путем замены производной первого порядка дробной по времени производной порядка $\rho \in (0,1)$. При рассмотрении уравнения субдиффузии как модельного уравнения при анализе аномальных диффузионных процессов, порядок дробной производной часто неизвестен и его трудно измерить напрямую. Чтобы определить этот параметр, необходимо исследовать обратные задачи идентификации этих физических величин на основе некоторой косвенно наблюдаемой информации о решениях . Математические модели процессов с аномальным режимом, как правило, содержат в качестве основного уравнения дифференциальное уравнение дробного порядка по времени и/или по пространству. В зависимости от характера процесса, например если рассматривается начальная фаза процесса используются дробные производные Герасимова-Капуто, если же процесс стабилизировавшийся то дробные производные Римана-Лиувилля .

Прямая задача. Пусть $A(D) = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ однородное симметричное эллиптическое дифференциальное выражение четного порядка $m = 2l$ с постоянными коэффициентами,т.е $A(\xi) > 0$ для всех $\xi \neq 0$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ - мультииндекс и $D = (D_1, D_2, ..., D_N)$, $D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$, $i = \sqrt{-1}$.

Пусть $\rho \in (0,1]$- заданное число и $L_2^\tau(\mathbb{R}^N)$ обозначают классы Соболева . Рассмотрим начально-краевую задачу: найти функцию $u(x,t) \in L_2^m(\mathbb{R}^N)$, $t \in (0,T)$ такую, что

$$\partial_t^\rho u(x,t) + A(D)u(x,t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

$$\lim_{t\to 0} \partial_t^{\rho-1} u(x,t) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ - заданная функция.

Задачу (1) - (2) мы называем прямой задачей.

Определение 1. Функция $u(x,t) \in C(\mathbb{R}^N \times (0,T))$ со свойствами

$$\partial_t^\rho u(x,t) \ \text{ and } \ A(D)u(x,t) \in C(\mathbb{R}^N \times (0,T))$$

и удовлетворяющие условиям (1) - (2) называют классическим решением (или просто, решением) прямой задачи.

Сформулируем теорему существования и единственности для прямой задачи.

Теорема 1. Пусть $\tau > \frac{N}{2}$ и $\varphi \in L_2^\tau(\mathbb{R}^N)$ Тогда прямая задача имеет единственное решение, и это решение имеет вид

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} t^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-A(\xi)t^\rho)\,\hat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \tag{3}$$

Последний интеграл сходится абсолютно и равномерно относительно $x \in \mathbb{R}^N$ и для каждого $t \in (0,T)$. Здесь $E_{\rho,\beta}(t)$ функция Миттага-Леффлера [1].

Кроме того, решение (3) обладает свойством

$$\lim_{|x|\to\infty} D^\alpha u(x,t) = 0, \quad |\alpha| \le m, \quad 0 < t < T, \tag{4}$$

Далее мы будем предполагать, что исходная функция φ принадлежит классу $L_2^\tau(\mathbb{R}^N)$ при $\tau > \frac{N}{2}$, тогда по теореме 1 прямая задача имеет единственное решение вида (3) для любого $\rho \in (0,1]$. Теоерема 1 доказывается аналогично как и теорема 1 в [2].

Обратная задача. Теперь рассмотрим порядок дробной производной ρ в уравнении (1) как неизвестный параметр. Чтобы сформулировать нашу обратную задачу мы дополнительно предположим, что $\varphi(x) \in L_1(\mathbb{R}^N)$. Это означает , что обе функции $\hat{\varphi}(\xi)$ и $\hat{u}(\xi,t) = \ t^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-A(\xi)t^\rho)\,\hat{\varphi}(\xi)$, $t \in (0,T)$, непрерывны по переменной $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Пусть вектор $\xi_0 \ne 0$, такой, что $\hat{\varphi}(\xi_0) \ne 0$ и положим $\lambda_0 = A(\xi_0) > 0.$. Чтобы определить порядок ρ дробной производной воспользуемся следующими дополнительными данными:

$$U(t_0,\rho) \equiv \mid \hat{u}(\xi_0,t_0) \mid = d_0 \tag{5}$$

где t_0 , $0 < t_0 < T$ - фиксированный момент времени. Задача (1) - (2) вместе с дополнительным условием (5) называется обратной задачей. Для решения обратной задачи зафиксируем число $\rho_0 \in (0,1)$ и рассмотрим задачу для $\rho \in [\rho_0, 1]$.

Определение 2. Пара $\{u(x,t),\rho\}$ решения $u(x,t)$ прямой задачи и параметра $\rho \in [\rho_0, 1]$ называется классическим решением (или просто решением) обратной задачи.

Следующее свойство преобразования Фурье $\hat{u}(\xi,t)$ решения прямой задачи играет важную роль в решении обратной задачи и, на наш взгляд, представляет самостоятельный интерес.

Лемма 1. Для ρ_0 из интервала $0 < \rho_0 < 1$ существует такое число $T_0 = T_0(\lambda_0,\rho_0)$, такое что для всех t_0, $T_0 \le t_0 < T$, функция $U(t_0,\rho)$ монотонно убывает относительно $\rho \in [\rho_0, 1]$.

Результат, связанный с обратной задачей, имеет вид

Теорема 2. Пусть $T_0 \le t_0 < T$. Тогда обратная задача имеет единственное решение $\{u(x,t),\rho\}$ тогда и только тогда, когда

$$U(t_0,1) \le d_0 \le U(t_0,\rho_0). \tag{6}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005. P.199.

2. Ashurov R.R.,Zunnunov R.T. Initial-boundary value and inverse problems for subdiffusion equations in R^N. Fractional Differential Calculus.2020.Vol.10. Number 2. P.291-308.

О приложении интервальной обобщенной задачи на собственные значения в сфере электротехники и электроники

Ибрагимов А. А., Хамраева Д. Н.

Навоийский государственный педагогический институт, г.Навоий, Узбекистан, alim-ibragimov@mail.ru, hdilafruz285@mail.ru

Как известно, работу различных устройств в электротехнике и электронике можно проанализировать с помощью математической модели в виде обобщенной задачи на собственные значения:

$$Ax = \lambda Bx \tag{1}$$

где A и B - известные действительные матрицы размера $n \times n$.

В действительности, по разным причинам (обычно из-за несовершенства производства, старения приборов во время эксплуатации и неполного понимания основных физических процессов) параметры исследуемого устройства точно не известны. Чтобы учесть неопределенности параметров, более реалистичным подходом является замена уравнения (1) следующей проблемой "возмущенных" собственных значений:

$$\boldsymbol{A}x = \lambda \boldsymbol{B}x, \quad A \in \boldsymbol{A}, \quad B \in \boldsymbol{B}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{A}$ - интервальная матрица размером $n \times n$, то есть каждый элемент a_{ij} матрицы A принимает фиксированное (но неизвестное) значение в пределах интервала $\boldsymbol{a}_{ij}$ независимо от других элементов матрицы; $\boldsymbol{B}$ также является интервальной матрицей размером $n \times n$. Соотношение (2) определяет каждое собственное значение λ_k как неявную функцию от A и B, то есть $\lambda_k = \lambda_k(A, B)$. Напомним, что интервальные величины в тексте выделяются жирным шрифтом [1].

В случае действительных собственных значений интервал $\boldsymbol{\lambda}_k^* = [\underline{\lambda}_k^*, \overline{\lambda}_k^*]$ задается множеством:

$$\boldsymbol{\lambda}_k^* = \{\lambda_k \mid \boldsymbol{A}x^{(k)} = \lambda_k \boldsymbol{B}x^{(k)}, \quad A \in \boldsymbol{A}, \quad B \in \boldsymbol{B}\}. \tag{3}$$

Аналогичным образом определяем собственного вектора $x^{*(k)}$, связанного с $\boldsymbol{\lambda}_k$, компоненты которого $x_i^{*(k)}$ и $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\boldsymbol{x}_i^{*(k)} = \{x_i^{(k)} \mid \boldsymbol{A}x^{(k)} = \lambda_k \boldsymbol{B}x^{(k)}, \quad A \in \boldsymbol{A}, \quad B \in \boldsymbol{B}\}. \tag{4}$$

Таким образом определим интервал $\boldsymbol{\lambda}_k^*$ действительного собственного значения для заданного порядкового номера k. Такая формулировка, хотя и не такая общая, как случай комплексных собственных значений, но имеет множество интересных приложений. Таким образом, во многих случаях (механический анализ электрических или электронных устройств, конечные аппроксимации задач распределения электрического, магнитного или теплового поля) результирующие матрицы $A \in \boldsymbol{A}$, $B \in \boldsymbol{B}$ являются симметричными, это гарантирует, что все собственные значения уравнения (2) являются действительными. Если матрицы несимметричны, то иногда практический интерес представляют две следующие задачи:

- гарантировать, что данное собственное значение λ_k структурно устойчиво [2] (оно остается действительным для всех $A \in \boldsymbol{A}$, $B \in \boldsymbol{B}$);
- проверить робастную апериодичность [3] рассматриваемой интервальной задачи на собственные значения (все собственные значения являются действительными структурно устойчивыми собственными значениями).

Следует подчеркнуть, что определение реального диапазона собственных значений является NP-трудной задачей, ее числовая сложность экспоненциально зависит от размера n используемых матриц. Этот факт был доказан Дж.Роном [4, 5] для более простого случая стандартной интервальной задачи на собственные значения (когда B - единичная матрица):

$$\boldsymbol{A}x = \lambda x, \quad A \in \boldsymbol{A}. \tag{5}$$

В некоторых случаях так называемые внешние решения уравнения (5) или уравнения (2) [2, 6] для $\boldsymbol{\lambda}_k$, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ обладающим свойством включения:

$$\boldsymbol{\lambda}_k^* \subset \boldsymbol{\lambda}_k, \qquad \boldsymbol{x}^{*(k)} \subset \boldsymbol{x}^{(k)}. \tag{6}$$

В данной статье предлагается новый метод полиномиальной сложности для определения диапазона $\boldsymbol{\lambda}_k^*$ в случае обобщенной задачи (2) на собственные значения.

Основная идея предлагаемого метода заключается в использовании внешних границ $\boldsymbol{x}^{(k)}$ и $\boldsymbol{y}^{(k)}$ для правого и левого собственных векторов, связанных с рассматриваемым собственным значением $\boldsymbol{\lambda}_k^*$, с использованием полной или частичной инвариантности шаблонов знаков обоих $\boldsymbol{x}^{(k)}$ и $\boldsymbol{y}^{(k)}$. Поскольку нам известно, что такой подход еще не был предложен в контексте обобщенного уравнения задачи на собственные значения (2).

С вычислительной точки зрения данный метод сводится, по сути, к формированию и решению двух нелинейных систем (неполные квадратичные системы) для нахождения внешних интервалов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ для правого и левого собственного вектора, соответствующих собственным значениям. Следует иметь в виду, что его нынешняя реализация основана на полноматричных операциях, что ограничивает применение метода проблемами умеренного размера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kearfott, R.B., Nakao, M.T., Neumaier, A., Rump, S.M., Shary, S.P., Hentenryck, P. *Standardized notation in interval analysis.* // Computational technologies. 15(1):7–13.

2. Kolev, L. and Filipova-Petrakieva, S. *Assessing the stability of linear time-invariant continuous interval dynamic systems* // IEEE Trans. on CAS, 2005, Vol. 50, pp. 393-397.

3. Polyak, B. *Robust linear algebra and robust aperiodicity* // in Rantzer, A. and Byrnes,

C. (Eds), Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization, LNCIS. 2003, Vol. 286, Springer, New York, NY, pp. 249-260.
4. Rohn, J. *Stability of interval matrices: the real eigenvalue case* // IEEE Transactions on Automatic Control. 1992, Vol. 37(10), pp. 1604-1605.
5. Rohn, J. *Checking positive definiteness or stability of symmetric interval matrices is NP-hard* // Computat. Math. Univ. Carol, 1994, Vol. 35, pp. 795-797.
6. Kolev, L. and Filipova-Petrakieva, S. *Outer bounds on the eigenvalues of interval matrices - the complex eigenvalues case* // Proceedings of the Technical University of Sofia, 2001, Vol. 51, pp. 139-147.

Задача коши для одной квазилинейной системы

Имомназаров Б.Х.[1], Эркинова Д.А.[2], Имомназаров Х.Х.[3]

[1]Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия;
[2]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улегбека, г. Ташкент;
[3]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия;
imom@omzg.sscc.ru

Чрезвычайная трудность анализа нелинейных волн, в особенности сильной турбулентности, обусловила другую тенденцию развития их теории - переход от сложных уравнений нелинейных случайных волн к более простым модельным уравнениям [1]. Одним из таких модельных уравнений турбулентности является уравнение Бюргерса.

Современные теории механики сплошной среды [2-4] предполагают влияние на движение среды ее прошлого, причем в общем случае материал может иметь сколь угодно длинную "память". Однако долгая память порождает значительные трудности, преодолеть которые можно двумя путями: во-первых, рассматривать специальные классы движений, в которых память - какова бы она ни была - не имеет возможности существенно проявиться (например, вискозиметрические течения вязких жидкостей [5, гл. V]), во-вторых, выделять классы сред или материалов, в которых на напряжения в любой точке влияет лишь предыстория движения на произвольно малом интервале времени. Материалы такого типа называются материалами с инфинитезимальной памятью.

Подклассом системы двухскоростной гидродинамики в случае постоянстве насыщенности фаз и диссипативном случае являются системы уравнений типа Хопфа. В одномерном случае в отсутствии массовых сил данная системы имеет вид [5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = -b\,(u-v), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x} = b\,\varepsilon\,(u-v), \quad \varepsilon>0. \tag{2}$$

Далее рассмотрим задачи Коши для системы (1), (2) с начальными условием при $t=0$:

$$u\,|_{t=0} = u_0(x), \qquad v\,|_{t=0} = v_0(x), \tag{3}$$

где $u_0(x)$ и $v_0(x)$ – произвольные ограниченные измеримые в R функции; $|u_0(x)| \leq M_0$, $|v_0(x)| \leq M_0$.

Определение. Ограниченные измеримые в $\Pi_T = [0,T) \times R$ функции $u(t,x)$, $v(t,x)$ называются обобщенным энтропийным решением (по Кружкову) задачи (1)-(3), если:

а) Для любой константы $k_1, k_2 \in R$ и для любых пробных функций $\phi(t,x), \psi(t,x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\phi(t,x) \geq 0$, $\psi(t,x) \geq 0$ выполняются неравенства

$$\int_{\Pi_T} \Big[|u-k_1|\phi_t + \mathrm{sign}\,(u-k_1)\left(\frac{1}{2}(u^2-k_1^2)\phi_x - b\,(u-v)\,\phi\right)\Big]dxdt \geq 0,$$

$$\int_{\Pi_T} \Big[|v-k_2|\psi_t + \mathrm{sign}\,(v-k_2)\left(\frac{1}{2}(v^2-k_2^2)\psi_x + b\,\varepsilon\,(u-v)\,\psi\right)\Big]dxdt \geq 0.$$

b) $u(t,x) \to u_0(x)$, $v(t,x) \to v_0(x)$ при $t \to +0$ в пространстве $L_{1,loc}(R)$, то есть для любого отрезка $[a,b]$

$$\lim_{t\to+0}\int_a^b |u(t,x)-\tilde{u}_0(x)|\,dx = 0, \qquad \lim_{t\to+0}\int_a^b |v(t,x)-\tilde{v}_0(x)|\,dx = 0.$$

Справедливо следующее

Теорема 1. Пусть функции $u(t,x)$, $v(t,x)$ и $\tilde{u}(t,x)$, $\tilde{v}(t,x)$ являются обобщенными решениями задачи (1)-(3) с начальными функциями $u_0(x)$, $v_0(x)$ и $\tilde{u}_0(x)$, $\tilde{v}_0(x)$ соответственно, причем $|u(t,x)| \leq M$, $|v(t,x)| \leq M$ и $|\tilde{u}(t,x)| \leq M$, $|\tilde{v}(t,x)| \leq M$ почти всюду в четырехугольнике $[0,T_0] \times K_R$, где $K_r = \{x : |x| \leq r\}$. Тогда для почти всех $t \in [0,T_0]$

$$\int_{-r}^{r} (\rho_1|u(t,x)-\tilde{u}(t,x)| + \rho_2|v(t,x)-\tilde{v}(t,x)|)\,dx \leq$$

$$\leq \int_{-r}^{r} (\rho_1|u_0(x)-\tilde{u}_0(x)| + \rho_2|v_0(x)-\tilde{v}_0(x)|)\,dx.$$

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Обобщенное решение задачи (1)-(3) в слое Π_T единственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 21-51-15002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурбатов С.Н., Саичев А.И., Якушкин И.Г. Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // УФН, 1983, т. 141, с. 221–255. 2. Труcделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с. 3. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. - 256 с. 4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. т.2. М.: Наука, 1973, - 584 с. 5. Турдиев У.К., Имомназаров Х.Х. Система уравнений типа Римана, возникающая в двухжидкостной среде // Тезисы Межд. конфер. "Обратные и некорректные задачи"2-4 октября 2019 г. Самарканд, Узбекистан, с. 119–120.

Задача с условиями сопряжения для вырождающегося уравнения высокого порядка с дробной производной

Иргашев Б. Ю.

Наманганский инженерно-строительный институт,
Институт Математики им.В.И.Романовского, Узбекистан
bahromirgasev@gmail.com

Аннотация. В работе для вырождающегося уравнения высокого порядка с дробной производной в смысле Капуто изучена нелокальная задача с условиями сопряжения, в прямоугольной области. Решение построено в виде ряда Фурье по собственным функциям одномерной задачи. Дан критерий единственности решения.

В области $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $\Omega_x = \{x : 0 < x < 1\}$, $\Omega_y = \{y : -a < y < b\}$, $a, b > 0$, $a, b \in R$, рассмотрим уравнение в частных производных

$$L[u] \equiv \begin{cases} {}_C D_{0y}^{\alpha} u(x,y) + (-1)^k x^m \dfrac{\partial^{2k} u(x,y)}{\partial x^{2k}} = 0,\ y > 0, 0 < \alpha < 1, \\ {}_C D_{0y}^{\beta} u(x,y) + (-1)^k x^m \dfrac{\partial^{2k} u(x,y)}{\partial x^{2k}} = 0 = 0, y < 0, 1 < \beta < 2, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$0 \leqslant m < k,\ m \notin N,$$

$${}_C D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{\frac{\partial u(x,z)}{\partial z}}{(y-z)^{\alpha}} dz, {}_C D_{0y}^{\beta} u(x,y) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^y \frac{\frac{\partial^2 u(x,z)}{\partial z^2}}{|y-z|^{\beta-1}} dz$$

- дробные производные в смысле Капуто.

Пусть $\Omega_+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_- = \Omega \cap (y < 0)$. Для уравнения (1) рассмотрим следующую задачу.

Задача D. Найти функцию $u(x, y)$ с условиями

$$Lu(x,y) \equiv 0,\ \ (x,y) \in \Omega_+ \cup \Omega_-,$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \in C(\Omega), \frac{\partial^{2k-1} u}{\partial x^{2k-1}} \in C(\bar{\Omega}), x^{\frac{m}{2}} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} \in L_2(\overline{\Omega}_x), y \in [-a, b],$$

$${}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega_+), {}_C D_{0y}^{\beta} u \in C(\Omega_-),$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial x^j}(0,y) = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}(1,y) = 0,\ j = 0, 1, ..., k-1; -a \leqslant y \leqslant b,$$

$$u(x,+0) = u(x,-0), {}_C D_{0y}^{\alpha} u(x,+0) = u_y(x,-0), 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$u(x,b) - u(x,-a) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $\varphi(x)$ достаточно гладкая функция.

Дифференциальные уравнения в частных производных дробного порядка лежат в основе математического моделирования различных физических процессов и явлений окружающей среды, имеющих фрактальную природу [1].

Уравнение (1) при $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $k = 1$ является параболо-гиперболическим и исследовалось во многих работах, например [2]-[5].

Задачи с условиями сопряжения для уравнений с дробными производными изучались в работах [6]-[8] для уравнений второго порядка, а в работах [9],[10] для уравнений четвертого порядка с нелокальными условиями.

В данной работе изучается краевая задача с нелокальным условием и условиями сопряжения для уравнения высокого четного порядка с вырождением. Решение построено в виде ряда Фурье. Получены достаточные условия возможности почленного дифференцирования ряда. Найдены условия единственности решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. // М., Физматлит,2003. С. 272.
2. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальныхураванений. // УМН. 1959. Т. XIV. вып. 3(87). С. 3-19.
3. Стручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений. // Инженерно-физический журнал. 1961. Т. IV. No.11. С. 99-104.
4. Сабитов К. Б. Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения. // Матем. заметки. 2017. Т. 102, выпуск 3. С. 415-435.
5. К. Б. Сабитов, Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. // Матем. заметки, 2011. Т. 89, выпуск 4. С.596-602.
6. A.S. Berdyshev, A. Cabada, E.T. Karimov. On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann-Liouville fractional differential operator. // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. T.75, No. 6. P. 3268-3273.
7. P.Agarwal, A.S. Berdyshev, E. T. Karimov. Solvability of a non-local problem with integral transmitting condition for mixed type equation with Caputo fractional derivative. // Results in Mathematics. 2017. T.71, No. 3. P.1235-1257.
8. O. Kh. Masaeva. Uniqueness of solutions to Dirichlet problems for generalized Lavrentev-Bitsadze equations with a fractional derivative. // Electron. J. Differential Eq., 2017. No.74. P. 1-8.
9. A. S. Berdyshev , A. Cabada , B. J. Kadirkulov. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator. // Comput. Math. Appl., 2011. Vol. 62. P. 3884- 3893.
10. A. S. Berdyshev , B. J. Kadirkulov . On a nonlocal problem for a fourth-order parabolic equation with the fractional Dzhrbashyan-Nersesyan operator. // Differ. Equ., 2016. Vol. 52, No. 1. P. 122-127.

Краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа, вырождающегося в внутри области

Исломов Б. И.[1], Рахимова З. В.[2]

[1]Национальный университет Узбекистана, г.Ташкент, Узбекистан;
islomovbozor@yandex.com
[2]Наманганский государственный университет, г. Наманган, Узбекистан;
zuhrarahimova256@gmail.com

Одним из важнейших классов уравнений с частными производными являются так называемые уравнения смешанно-составного типа. Впервые в работах А.В.Бицадзе и М.С.Салахитдинова[1] поставлен и исследован ряд задач для модельного уравнения смешанно-составного типа видов.

После этих работ краевые задачи для модельных уравнений смешанно-составного типа, главная часть которых содержит операторы эллиптико-гиперболического, пара-боло-гиперболического и эллиптико-параболического типов, были исследованы в рабо-тах М.С.Салахитдинова[2], Т.Д.Джураева[3-4] и их учеников.

Начиная с работ [5-6] в теории уравнений параболического типа появилось новое направление, в котором рассматриваются краевые задачи для вырождающегося урав-нения параболического типа

Насколько нам известно, краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа с одной линией вырождения второго и третьего порядков изучены, сравнительно мало. Отметим работы Б.Исломова и Ф. Хасанова [7], Б.И. Исломова и З.С. Мадрахимовой [8].

Поэтому данная работа посвящена постановке и исследованию локальной краевой задачи для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка, вырождаю-щегося в внутри области.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(Lu\right), \tag{1}$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} x\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x,y) \in \Omega_0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x,y) \in \Omega_j,\ (j = 1,2), \end{cases}$$

$$0 < \alpha < 1. \tag{2}$$

Здесь Ω_0 - область, ограниченная отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$, соответственно, а Ω_1 - характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB оси x и двумя характеристиками $AC : x + y = 0$, $BC : x - y = 1$ уравнения (1), выходящими из точек A и B, пересекающимися в точке $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, Ω_2 - характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 оси y и двумя характеристиками $AD : x + y = 0$, $A_0D : y - x = 1$ уравнения (1), выходящими из точек A и A_0, пересекающимися в точке $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Введем обозначения: $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I_1 \cup I_2$,

$$I_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1, y = 0\},\ \ I_2 = \{(x,y) :\ \ x = 0,\ \ 0 < y < 1\}.$$

Задача А. Требуется найти функцию $u(x,y)$,обладающую следующими свойствами: 1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$; 2) $u(x,y) \in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0) \cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ и удовлетворяет уравнения (1) в области Ω_i $(i = \overline{0,2})$; 3) u_x, u_y - непрерывны вплоть до $AC \cup BC \cup AD$; 4) на интервале I_1 и I_2 соответственно имеет место условие сопряжения $\lim\limits_{y \to -0} u_y(x,y) = \lim\limits_{y \to +0} u_y(x,y), \quad (x,0) \in I_1$ и $\lim\limits_{x \to -0} u_x(x,y) = \lim\limits_{x \to +0} u_x(x,y), \quad (0,y) \in I_2$; 5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{AC} = \psi_1(x), \qquad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

$$u(x,y)|_{AD} = \varphi_1(y), \qquad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AD} = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2},$$

$$u(x,y)|_{BB_0} = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \qquad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,$$

где n - внутренняя нормаль, $\varphi_j(y)$, $\psi_j(x)$ $(j = \overline{1,3})$– заданные функции, причем

$$2\varphi_1'(0) = \sqrt{2}\psi_2(0) - \psi_1'(0), \ \ \varphi_1(0) = \psi_1(0), \ \ \psi_2'\left(\frac{1}{2}\right) = -\psi_3'\left(\frac{1}{2}\right), \tag{3}$$

$$\varphi_3(y) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \quad \varphi_2(y) \in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0;\frac{1}{2}\right), \tag{4}$$

$$\psi_1(x) \in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0;\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_1(y) \in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0;\frac{1}{2}\right), \tag{5}$$

$$\psi_2(x) \in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0;\frac{1}{2}\right), \quad \psi_3(x) \in C^1\left[\frac{1}{2};1\right] \cap C^2\left(\frac{1}{2};1\right), \tag{6}$$

а функции $\psi_1'''(x)$, $\psi_2''(x)$, $\psi_3''(x)\,({\varphi'''}_1(y),\ {\varphi''}_2(y))$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше α_0 на концах интервала $I_1\,(I_2)$.

Справедливо следующее

Теорема. Если выполняются условия (2) - (6), то в области Ω существует единственное решение задачи А.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В., Салахитдинов М.С. К теории уравнений смешанно-состав-ного типа // Сибирский математический журнал. Новосибирск, 1961. Т.II. № 1. С. 7-19.

2. Салахитдинов М.С. Уравнение смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.

3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 240 с.

4. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений парабол-гиперболического типа. Ташкент: ФАН, 1986. 204 с.

5.Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе. Новосибирск: НГУ, 1973. 144 с.

6. Терсенов С.А. Первая краевая задача для уравнения параболического типа с меняющимся направлением времени. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. 53 с.

7. Исломов Б., Хасанов Ф. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа, вырождающегося внутри области. // Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики: Тез. докл. Международного Российско-Узбекского симпозиума. Нальчик, 2003. С. 58-59.

8. Исломов Б.И., Мадрахимова З.С. Краевая задача со смещением для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором. // Узбекский математический журнал. Ташкент, 2009. № 4. С.76-81.

Аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения смешанного типа в бесконечной цилиндрической области, когда нагруженной часть уравнения содержит след оператора дробного порядка

Исломов Б. И.[1], Узбеков Ж. А.[1]

Национальный университет Узбекистана, г.Ташкент, Узбекистан;
[1]islomovbozor@yandex.com; [2]ozbekovjorabek@gmail.com

Трехмерные аналоги задаче Трикоми и Геллерстедта для уравнения эллиптико-гиперболического изучены в работах [1-3].

Локальные и нелокальные задачи для параболо-гиперболического уравнения с общими нагруженными слагаемыми в двухмерных областях рассмотрены в работах [4-7].

Насколько нам известно, что трехмерные краевые задачи для нагруженного уравне-ния смешанного типа ранее мало изучены. Отметим работы [8-9].

В настоящей работе в бесконечной цилиндрической области изучается аналог задачи Трикоми для нагруженного уравнения смешанного типа, когда нагруженной часть уравнения содержит след оператора дробного порядка.

Рассмотрим уравнение

Пусть Ω - трехмерная область, ограниченная поверхностями:

$$\Gamma_k: \ \ x=k,\, 0\leqslant y\leqslant h,\ -\infty<z<+\infty,\, k=0,1,$$

$$\Gamma_2: \ \ y=h,\ \ 0\leqslant x\leqslant 1,\ \ -\infty<z<+\infty,$$

$$\Gamma_3: \ \ x+y=0,\ \ 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\ \ -\infty<z<+\infty,$$

$$\Gamma_4: \ \ x-y=1,\ \ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\ \ -\infty<z<+\infty.$$

Введем обозначения:

$$J=\left\{(x,y,z): \quad 0<x<1,\ y=0,\ z\in(-\infty,+\infty\right\},\quad \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup J,$$

$$\Omega_1=\Omega\cap\left\{(x,y,z): \ \ x>0,\ \ y>0,\ \ \ z\in(-\infty,+\infty\right\},$$

$$\Omega_2=\Omega\cap\left\{(x,y,z): \ \ x>0,\ \ y<0,\ \ \ z\in(-\infty,+\infty\right\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} U_y - U_{xx} - U_{zz} + \mu\, D_{0x}^{-\alpha} U\,(x, 0, z) & (x, y, z) \in\ \Omega_1, \\ U_{yy} - U_{xx} - U_{zz} + \mu\, D_{0x}^{-\beta} U\,(x, 0, z) & (x, y, z) \in\ \Omega_2 \end{cases} \qquad (1)$$

где μ - любая действительная постоянная, причем $\mu < 0$, а $D_{0x}^{-\gamma}$ $(\gamma = \alpha, \beta)-$ оператор дробного (в смысле Римана-Лиувилля [6]) интегрирования порядка γ, при $0 < \gamma < 1$.

В области Ω изучем следующую аналог задачи Трикоми.

Задача *AT*. Найти функцию $U\,(x, y, z)$ со следующими свойствами: 1) $U\,(x, y, z)$ функция непрерывна вплоть до границы области Ω;

2) $U(x, y, z) \in C^1\,(\Omega) \cap C_{x,y,z}^{2,1,2}\,(\Omega_1) \cap C_{x,y,2}^{2,2,2}\,(\Omega_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_j\,(j = 1, 2)\,;$ 4) $U\,(x, y, z)$ удовлетворяет условиям

$$U|_{\Gamma_0} = \Phi_0(y, z), \quad U|_{\Gamma_1} = \Phi_1(y, z), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \;\; z \in (-\infty, +\infty),$$

$$U|_{\Gamma_3} = \Psi_1(x, z), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \quad z \in (-\infty, +\infty),$$

$$\lim_{|z| \to \infty} U = \lim_{|z| \to \infty} U_x = \lim_{|z| \to \infty} U_y = \lim_{|z| \to \infty} U_z = 0,$$

где $\Phi_0(y, z)$, $\Phi_1(y, z)$, $\Psi_1(x, z)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\Phi_0(0, z) = \Psi_1(0, z)$, $\lim\limits_{|z| \to \infty} \Phi_j(y, z) = 0$, $(j = 0, 1)$, $\lim\limits_{|z| \to \infty} \Psi_1(x, z) = 0$.

Основным методом исследования задачи АТ является преобразование Фурье[8]. На основании преобразование Фурье при определенных ограничениях на заданные функции доказывается однозначная разрешимость задачи АТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми. // Сибирский математический журнал. 1962. Т. III. С.642-644.

2. Нахушев А.М. Об одном трехмерном аналоге задачи Геллерстедта. //Дифферен-циальные уравнения. 1968. Т. 4. № 1. С.52-62.

3. Салахитдинов М.С., Исламов Б. О трехмерном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного типа. // "Доклады АН СССР". 1990. Т.311. № 4. С.797-801.

4. Исломов Б., Курьязов Д.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка // ДАН РУз. 1996. № 1-2. С.3-6.

5. Kishin B.S. and Abdullaev O.Kh. About a Problem for Loaded Parabolic-Hyperbolic Type Equation with Fractional Derivatives // International Journal of Differential Equations. 2016. vol. Article ID 9815796. 6 p.

6. Islomov, B.; Baltaeva, U. I.Boundary value problems for the classical and mixed integrodifferential equations with Riemann-Liouville operators. (English) Int. J. Partial Differ. Equ. 2013. Article ID 157947. 7 p. (2013).

7. Дженалиев Н.Т. Об одной краевой задаче для линейного нагруженного параболи-ческого уравнения с нелокальными и граничными условиями. // "Дифференциальные уравнения". 1991. Т. 27. № 10. С. 1925-1927.

8. Islomov B.I., Yuldashev T. K., Alikulov E. K. Boundary-Value Problems for Loaded Third-Order Parabolic-Hyperbolic Equations in Infinite Three-Dimensional Domains.// Labachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41. № 5. pp. 926-944.

9. Islomov,B.I., Alikulov, Y.K. Boundary value problem for loaded equation of parabolic-hyperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain. (English) International Journal of Applied Mathematics. 2021. V.34. № 2. pp. 377-390.

Двойственные поверхности $(n+1)-$ мерного изотропного пространства

Исмоилов Ш. Ш.[1], Артикбаев А.[2]

[1]Национального университета Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
ismoilovsh94@mail.ru

[2]Ташкентский Транспортный Университет, Ташкент, Узбекистан;
aartykbaev@mail.ru

Пусть Ox_i $(i = 1...n+1)$ система координат в аффинном пространстве A_{n+1}. Скалярную произведению вектор $\vec{X}\,(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ и $\vec{Y}\,(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ определим по следующему правилу

$$(\vec{X}\,,\vec{Y}\,) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \neq 0 \\ x_{n+1} y_{n+1} & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Определение 1. Аффинное пространство A_{n+1}, где скалярное произведение векторов определена по формуле (1) - называется изотропным пространством R_{n+1}^n[1].

Расстояния между точками A и B вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})} = \begin{cases} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} & \text{если } \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} \neq 0 \\ |y_{n+1} - x_{n+1}| & \text{если } x_i = y_i \quad (i = \overline{1..n}) \end{cases} \qquad (2)$$

Аффинное преобразование координат сохраняемая расстоянию определяемой формулой (2), то есть движение в изотропном пространстве R_{n+1}^n задается формулой[4]

$$X' = A \cdot X + B \qquad\qquad A = \left(\begin{array}{ccccc|c} & & & & & 0 \\ & & A_E & & & ... \\ & & & & & 0 \\ \hline h_1 & h_2 & ... & h_{n-1} & h_n & 1 \end{array} \right)$$

Где $A_E = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$- матрица движения в евклидовом пространстве, $B^T = (b_1, b_2, ..., b_{n+1})-$ вектор параллельного переноса и $(h_1, h_2, ..., h_n, 1)-$ координаты скольжения.

Сфера второго типа, как поверхность нормальная кривизна по всем направлением постоянно, определяется уравнением[2]

$$2x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2. \qquad (3)$$

Поверхность заданной уравнением (3)- назовем, изотропной сферой в R_{n+1}^n.

Пусть $n-$мерная плоскость пространства R_{n+1}^n, не параллельная оси Ox_{n+1} задана уравнением

$$x_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}A_ix_i+C \qquad (4)$$

Обозначим через $\Gamma-$ сечения изотропную сферу с плоскостью (4). Множеству касательных $n-$мерных плоскостей изотропной сферы в точках Γ обозначаем через $\{\pi\}$[3].

Лемма. Все $\{\pi\}$ касательные плоскости изотропной сферы в точках множество $\Gamma-$ пересекаются в одной точке с координатами $(A_1, A_2, ..., A_n, -C)$.

Определение 2. Точку $(A_1, A_2, ..., A_n, -C)$ назовеем двойственной точкой плоскости (4), относительно изотропной сферу.

Пуст задана поверхность F с уравнением

$$x_{n+1}=f(x_1,x_2,...,x_n)| \quad (x_1,x_2,...,x_n)\in D\subset R_n,\ i=\overline{1..(n+1)} \qquad (5)$$

Обозначим через L поверхность уравня $x_{n+1}=H \quad (H=const)$ поверхности F. Рассматриваем класс выпуклых поверхностей $\{H\}$ у которых поверхность уравня $f(x_1,x_2,...,x_n)=H$ и пересечение гиперплоскости $x_{n+1}=H$ со изотропной сферой, совпадают.

Причем поверхности класса $\{H\}$-содержатся внутренней области изотропной сферы, и однозначного проектируется в область D на плоскости $x_{n+1}=0$. Проведем опорную плоскость π_0 в точке $X_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0,)$к поверхности $F\in\{H\}$.

Так как Fсодержится внутри изотропной сферы, то касательный плоскость пересекается изотропной сферой. Естественно касательная плоскость π_0 имеет двойственную точку X_0^*.

В общем случае когда точка $X_0\in F$ изменяется по поверхности, двойственные точки к опорным плоскостям образуют некоторую множеству F^*.

Определение 3. Множеству F^*-назовеем двойственной поверхностью к поверхности F- относительно изотропной сферы.

Если поверхности F- регулярна, то F^*-является поверхностью и задается уравнением

$$\begin{cases} x_1^*(u,v)=f'_{x_1}(x_1,x_2,...,x_n)\\ x_2^*(u,v)=f'_{x_2}(x_1,x_2,...,x_n)\\ -----------\\ x_n^*(u,v)=f'_{x_n}(x_1,x_2,...,x_n)\\ x_{n+1}^*(u,v)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot f'_{x_i}(x_1,x_2,...,x_n)-f(x_1,x_2,...,x_n)\end{cases}.$$

Теореме. Двойственная образ поверхности F^* совпадает с поверхностью F, то есть $F^{**}=F$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артикбаев А., Соколов Д.Д., Геометрия в целом в плоском пространстве времени, Ташкент Фан. 1991.

2. Артикбаев А.,Исмоилов Ш., Сечение сферы с плоскостью в изотропном пространстве.// Scientific Journal of Samarkand University: Vol-4. 2020 , 84-89.

3. Ismoilov Sh., Izotrop fazo sferasining yevkilid fazo sferasi bilan o'xshash xossalari, Юш математиклар яьнги теоремалари НамДУ-2018 конфренция, 65-66.

4. Sipus Z. M., Translation Surfaces of constant curvatures in a simply Isotropic space, Period Math. Hung., 68 (2014), 160-175.

Об аппроксимации степенной оценки отношения рисков в модели случайного цензурирования справа

Какаджанова Л. Р.[1]

Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз., Ташкент, Узбекистан, leyla_tvms@rambler.ru

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ заданы $\{T_k,\ k1\}$ и $\{C_k,\ k1\}$ - две независимые последовательности н.о.р.с.в. с непрерывными функциями распределения (ф.р.) F и G, соответственно (см. [2]). Схема наблюдений такова, что C_k цензурируют T_k справа так, что на $n-$м шаге эксперимента наблюдается выборка $\mathbb{S}^{(n)} = \{(X_k, \delta_k), 1 \le k \le n\}$, где $X_k = \min(T_k, C_k)$ и $\delta_k = I(T_k \le C_k)$. В этой выборке интересующие нас с.в. T_k наблюдаемы лишь в случае $\delta_k = 1$ и общее их число равно с.в. $\nu_n = \delta_1 + \ \dots\ + \delta_n$. Задача состоит в оценивании ф.р. F или какого-нибудь функционала $\Phi(F)$ по выборке $S^{(n)}$ при мешающей ф.р. G. К настоящему времени имеются ряд оценок для ф.р. F, находивших широкие применения в научных и прикладных исследованиях. Одной из более предпочтительных оценок является степенная оценка отношения рисков $F_n^{RR}(t)$, определяемая формулой

$$F_n^{RR}(t) = 1 - [1 - H_n(t)]^{R_n(t)} =$$
$$= \begin{cases} 0, & t < X_{(1)} \\ 1 - \left(\frac{n-j}{n}\right)^{R_n(t)}, & X_{(j)} \le t < X_{(j+1)},\ j = 1,\ \dots\ , n-1, \\ 1, & tX_{(n)}, \end{cases} \tag{1}$$

где $X_{(1)} \le X_{(2)} \le\ \dots\ \le X_{(n)}$ - вариационный ряд, построенный по подвыборке $\{X_k,\ k = 1,\ \dots\ , n\}$, $H_n(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} I_{(-\infty,t]}(X_k)$ - эмпирическая оценка для ф.р. $H(t) = P(X_k \le t) = 1 - (1 - F(t))(1 - G(t))$, $R_n(t) = (N_n(t))^{-1} N_{1n}(t)$- оценка функции отношения рисков $R(t) = (N(t))^{-1} N_1(t)$. Здесь $N(t) = N_0(t) + N_1(t)$, $N_0(t)$ и $N_1(t)$- интегральные функции интенсивностей, соответствующие ф.р. H, G и F:

$$N(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dH(u)}{1 - H(u)},\ \ N_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dG(u)}{1 - G(u)} = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dH_0(u)}{1 - H(u)}$$

$$N_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dF(u)}{1 - F(u)} = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dH_1(u)}{1 - H(u)}, \tag{2}$$

$H_0(t) = \mathbb{Q}_0((-\infty, t])$, $H_1(t) = \mathbb{Q}_1((-\infty, t])$, $H_0(t) + H_1(t) = H(t) = \mathbb{Q}((-\infty; t])$, где субмеры задаются формулами

$$\mathbb{Q}_0(B) = P(X_k \in B, \delta_k = 0) = P(C_k \in B \cap (-\infty, T_k]) = \int\limits_{B} (1 - F(t)) G(dt),$$

$$\mathbb{Q}_1(B) = P(X_k \in B, \delta_k = 0) = P(T_k \in B \cap (-\infty, C_k]) = \int\limits_B (1 - G(t))F(dt).$$

Оценками функций (2) являются

$$N_n(t) = N_{0n}(t) + N_{1n}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dH_n(u)}{1 - H_n(u-)}, \qquad N_{mn}(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{dH_{mn}(u)}{1 - H_n(u-)}, \ \ m = 0, 1,$$

где $H_{mn}(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(X_k \le t, \delta_k = m)$ - эмпирические оценки субраспределений $H_m(t)$, $m = 0, 1$.

Рассмотрим следующую теорему об аппроксимации оценки (1) последовательностью мартингалов.

Теорема 1. Пусть выполнены условия

(S1) (см. [1], стр. 162) $k \log n$ для всех достаточно больших n и последовательность $\left\{\frac{k_n}{n}, \ n1\right\}$ асимптотически не возрастает (т.е. для невозрастающей последовательности чисел $\{a_n, \ n1\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{na_n} = 1$) и

(S2) Последовательность положительных неубывающих чисел $\{\gamma_n, \ n1\}$ такова, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (k\gamma_{2^k})^{-1} < \infty$. Тогда при $n \to \infty$

$$\sup_{t \le X_{(n-k_n)}} \left| \sqrt{n}\left(F_n^{RR}(t) - F(t)\right) - \frac{(1 - F(t))}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_t(X_k; \delta_k) \right| =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{O}_p\left(\frac{\sqrt{n}}{k_n}\right), \\ o\left(\frac{\sqrt{n\gamma_n \log n}}{k_{2n}}\right), \ \ \text{п.н.} \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдушукуров А.А. Статистика неполных наблюдений. Асимптотическая теория оценивания для неклассических моделей. Ташкент.: Университет. 2009. 269 с.

2. Abdushukurov A.A., Kakadjanova L.R. Sequential empirical process of independence // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys. 2018. 5(11). pp. 634-643.

О приближении негауссовских случайных процессов

Камолов А.И.

Джизакский госпединститут, г. Джизак , Узбекистан.
kamolovabror5627@gmail.com

Работа посвящена аппроксимации субгауссовских стационарных случайных процессов регрессионными сплайнами в равномерной метрике.

Пусть $\xi(t)$, $t \in [0; T]$ действительный сепарабельный стационарный в широком смысле субгауссовский случайный процес непрерывной корреляционной функцией

$$r(t) = M\xi(t)\xi(0), \quad M\xi(t) = 0, \ M\xi^2(t) = 1.$$

Регрессионым сплайном шага $h, h > 0$ процесса $\xi(t)$ следуя [2], назовем процесс $\xi_h(t)$, определенный следующим образом: $\xi_h(t) = \alpha_k(t,h)\xi(kh) + \beta_k(t,h)\xi((k+1)h)$, при $t \in [kh,(k+1)h]$ где

$$\alpha_k(t,h) = \frac{r(t-kh) - r(h)r(t-(k+1)h)}{1-r^2(h)},$$

$$\beta_k(t,h) = \frac{r(t-(k+1)h) - r(h)r(t-kh)}{1-r^2(h)}, \quad k = 0,1,...,[\frac{T}{h}],$$

$[\lambda]-$ целая часть λ.

Название "регрессионный сплайн"обьясняется тем, что в гауссовском случае $\xi_h(t)$ состоит из кусков линий регресси [2]: $\xi_h(t) = M[\xi(t)/\xi(kh),\xi((k+1)h)]$, при $t \in [kh,(k+1)h]$, а в общем случае

$$M[\xi(t) - \xi_h(t)]^2 = \min_{\alpha,\beta} M[\xi(t) - (\alpha\xi(kh) + \beta\xi((k+1)h)]^2,$$

т. е. на отрезке $[kh,(k+1)h]$ процесс $\xi_h(t)$ является наилучшей в среднеквадратическом смысле линейной оценкой, построенной по значениям $\xi(kh), \xi((k+1)h)$.

Для приближения случайного процесса $\xi(t)$ используем его регрессионный сплайн $\xi_h(t)$ шага $h,\ h \in (0,h_0]$.

Предположим, что для случайного процесса $\xi(t)$ выполнены условия

$$(I) : ||\xi(t) - \xi(s)||_{sub} \le \omega(|t-s|),\ t,s \in [0,T],$$

где, $\omega(x)$ модуль непрерывности, для которой существует обратная функция $\omega^{-1}(y)$ и интеграл $\int_0^1 \frac{\omega(z)dz}{z\sqrt{|lnz|}} < \infty$. (Норма $||*||_{sub}-$ введена в работе [1])

$$(II) : b\omega^2(t) \le 1 - r(t) \le B\omega^2(t)$$

для всех $t \in [0,h_0]$, где $0 < b \le B \le 1$.

Положим $\tau_T = \max_{t\in[0.T]} ||\xi(t)||_{sub}$. Исследуем процесс уклонений

$$\eta_h(t) = \frac{\xi(t) - \xi_h(t)}{c_0\omega(h)},$$

где

$$c_0 = (1 + \tau_T B\omega(h_0))(1 + \frac{B(3 + B\omega^2(h_0))}{b(2 - B\omega^2(h_0))}).$$

Теорема. Пусть выполнены условия (I) и (II). Тогда для любого $h \in (0,h_0]$ и для всех $z \ge 64$ имеет место неравенство

$$P\{\max_{t\in[0,T]} \frac{|\eta_h(t)|}{\gamma_h} \ge z\} \le 2\exp\{-\frac{z^2}{8}\gamma_h^2\},$$

где

$$\gamma_h = \frac{\sqrt{2}}{2}\{\sqrt{ln2} + 2c_2[\sqrt{ln\frac{T}{h}} + \frac{1}{\omega(h)}\int_0^h \frac{\omega(z)dz}{z\sqrt{|lnz|}}]\},$$

$$c_2 = \max\{1,c_1\},\ c_1 = \frac{1}{c_0}[1 + \tau_T\sqrt{2}B + (1 + \tau_T B\omega(h_0))\frac{2\sqrt{B} + B\sqrt{2}\omega(h_0)}{\sqrt{b}(2 - B\omega^2(h_0))}].$$

Используя утверждение теоремы находится условие , при котором ощибка приближения в равномерной метрике не привосходит заданного уровня $\varepsilon, \varepsilon > 0$ с доверительной вероятностью $\delta,\ 0 < \delta < 1$.

Отметим, что процесс уклонений $\eta_h(t)$ в случае, когда $\xi(t)$- гауссовский стационарный сл. пр. и $\omega(z) = cz^{\alpha}, c > 0, 0 < \alpha < 1$, был изучен в работах [2],[3].

Литература

1. Булдыгин В. В., Козоченко Ю. В., О субгауссовских случайных величинах. Украинский мат. журн. 1980, 32, 2, с. 723-730

2. Беляев Ю. К., Симонян А. Х. Асимптотика числа уклонений гауссовского процесса от аппроксимирующей случайной кривой. Тесисы докладов II Вильнюсской конференции по теор. вер. и мат. статистике, Вильнюс, 1977, Т. I, С. 31-32

3. Беляев Ю. К., Симонян А. Х., Красавкина В. А . Квантование по времени реализаций недифференцируемых гауссовских процессов. Изв. АН СССР., Тех. Кибернетика, 1976, 4, с. 139-147.

Об алгоритмических представлениях групп

Касымов Н. Х.[1], Джавлиев С. К.[2]

Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан,

[1]nadim59@mail.ru; [2]sarvar.javliyev@mail.ru

С неопределяемыми понятиями можно ознакомиться в [1,2].

Под словом эквивалентность понимается эквивалентность на множестве натуральных чисел ω.

Для нумерации ν через $ker(\nu)$ будем обозначать нумерационную эквивалентность, которую, для краткости, назовем ядром ν.

Определение 1. Универсальная алгебра называется представимой над эквивалентностью η, если существует ее нумерация с ядром η.

В работе рассматриваются, в основном, вопросы существования представлений классических алгебраических систем над эквивалентностями различных типов.

Определение 2. Эквивалентность η называется m-эквивалентностью (равномерной m-эквивалентностью), если существует такое семейство F вычислимых функций (перечислимое семейство F вычислимых функций), индуцирующих перестановки фактор-множества ω/η, что для всякой пары натуральных чисел x, y найдется такая функция $f \in F$, рая m-сводит класс $\{x\}/\eta$ к классу $\{y\}/\eta$.

Тривиальными примерами равномерных m-эквивалентностей являются разрешимые эквивалентности.

Теорема 1. Если (G, ν) – нумерованная группа, то ядро $ker(\nu)$ ее нумерации – равномерная m-эквивалентность.

Замечание 1. Мы работаем в сигнатуре $\langle \cdot, ^{-1} \rangle$, которая обеспечивает равномерность. В сигнатуре с одной бинарной групповой операцией $\langle \cdot \rangle$ теорема теорема 1 верна в той части, которая утверждает, что ядро нумерации – m-эквивалентность.

В обзоре [3] ставился вопрос: "существует ли конечно-определенная группа, нумерационная эквивалентность стандартной нумерации которой предполная?".

Следствие 1. Ни над какой предполной эквивалентностью не представима никакая группа.

Таким образом, не только не существует конечно-определенной группы с предполным позитивным ядром (т.к. необходимым условием конечной определенности алгебры является позитивность ее стандартной нумерации), но и предполно нумерованной группы любой алгоритмической сложности.

Предложение 1. Если равномерная m-эквивалентность имеет хотя бы один разрешимый класс, то она разрешима.

Следствие 2. Если неразрешимая эквивалентность имеет хотя бы один разрешимый смежный класс, то над ней не представима никакая группа

Следствие 3. Если равномерная m-эквивалентность неразрешима, то все ее смежные классы невычислимы.

Предложение 2. Всякая пара смежных классов ядра неразрешимой позитивной нумерации любой группы является вычислимо изоморфной (т.е. для любой пары смежных классов ядра существует вычислимая перестановка на ω, индуцирующая перестановку фактор-множества ω/η, переводящая один из этих классов на другой). При этом, существует равномерно эффективно зависящая от x, y процедура построения характеристического индекса вычислимого изоморфизма на ω, являющегося перестановкой на ω/η и переводящего $\{x\}/\eta$ в $\{y\}/\eta$.

Отметим, что в случае существования группы, представимой над эквивалентностью η, имеется много различных способов задания группы над η. В частности, любой класс эквивалентности может быть интерпретирован как единичный элемент подходящей группы, представимой над η.

Предложение 3. Если над η представима группа, то для любого η-класса существует такое представление над η подходящей группы, для которого данный класс будет единицей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yu.L. Ershov, *The Theory of Enumerations [in Russian]*, Nauka, Moscow, 1977.

2. S.S. Goncharov, Yu.L. Ershov, *Constructive Models*, Ser. Siberian School of Algebra and Logic, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, etc., 2000.

3. N.Kh. Kasymov, *Recursively separable enumerated algebras*, Russian Math. Surveys, **51**:3 (1996), 509–538.

Построение периодических решений квазилинейных уравнений при резонансе в критическом случае

Каххаров А. Э.[1], Бердияров А. Ш.[2]

Академический лицей ТГТУ имени И.Каримова, Ташкент, Узбекистан,
azizqahhorov@gmail.com;
Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан,
berdiyorov1957@mail.ru

Периодические решения представляют собой частный случай двусторонних решений квазилинейных уравнений [1]. Особое место периодических решений в теории интегро-дифференциальных уравнений, их важная роль в приложениях заставляет разрабатывать конструктивные и практические эффективные методы их построение.

Рассмотрим квазилинейную систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \varepsilon[\int\limits_{-\infty}^{t} R(t-s)x(s)ds + F(x,t)], \tag{1}$$

где $x - n$ - мерный вектор; A - постоянная $n \times n$ - матрица, обладает собственными значениями, равными нулю или целой кратности $\sqrt{-1}$.

В силу свойств матрицы A $F(x,t)$ - 2π - периодическая и всюду дифференцируемая по t, аналитическая по x функция, ε - малый параметр (его считаем положительным), $R(t-s)$ - ядро системы (1).

Интеграл в правой части (1) будем считать интегралом в смысле Римана.

Системы такого вида называют системами с наследственностью или последействием [2], причем с бесконечно далеким последействием. Значения производной $\frac{dx}{dt}$ в момент $t = t^* > 0$ зависит от значений $x(t)$ для бесконечно удаленных значений t в интервале $(-\infty, t^*)$.

Ядро $R(t-s)$ - называют ядром наследственности или ядром релаксации. Примем для простоты дальнейшего анализа, что

$$\|R(t)\| \leq e^{-\gamma t}$$

где γ - положительно постоянная.

Как следует из теории линейных дифференциальных уравнений [3,4] однородная система (получающаяся из (1) уравнения при $\varepsilon = 0$ и называемая порождающей

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3}$$

обладает тогда некоторым числом линейных независимых 2π - периодических решений. Это число зависит от особенностей резонансных собственных значений и пусть оно равно m.

Теорема. Каждому простому решению $c_0 = c_0^*$ уравнения $\Phi(c_0) = 0$, т.е. такому, что

$$(det\frac{\partial\Phi(c_0)}{\partial c_0})_{c_0=c_0^*}$$

соответствует при достаточно малых ε - периодическое решение $y = y(t, \varepsilon)$ системы $\frac{dy}{dt} = Ay + \varepsilon[\int\limits_{-\infty}^{t} R(t-s)y(s)ds + \int\limits_{-\infty}^{t} R(t-s)x_0(s,c)ds + F(t, x_0(t,c)) + y]$, обращающееся в нуль при $\varepsilon = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хусанов Д.Х. Двухсторонние решения интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с бесконечным последствием. Автореф. канд. дисс. Киев, 1983.
2. Локшин А.А., Суворова Ю.В. Математическая теория распостранения волн в средах с памятью. М., Изд. Мос. ун-та, 1982, 152 с.
3. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. М., Наука, 1979, 431 с.
4. Дружинина Р.М. Метод Пуанкаре и исследование колебаний системы при резонансе. Вопросы прикладной математики и механики. Труды ТашПИ, 1978, вып. 249, с. 62-67.

Об одной математической модели задачи теории фильтрации структурированных флюдов в двухслойном пласте

Каюмов Ш.[1], Марданов А. П.[2], Хаитов Т. О.[3], Каюмов А. Б.[4]
Ташкентский Государственный Технический Университет, Ташкент, Узбекистан,
[1]kayumovmatemic@gmail.com; [2]apardayevich@mail.ru; [3]tojiboy.xaitov.77@gmail.ru;
[4]Университет Инха, Ташкент, Узбекистан, AkayumovB@gmail.ru.

Известно что пористые среды где происходит процесс фильтрации флюидов (вода, газ, нефть конденсат, и.т.д) в реальном случае является многослойными. Исследователи изучающие характеристики таких сред часто прибегает к условным критериям относительно геометрии выражающее объема и контура (границы) области фильтрации позволяющие воспринимать его либо как один единый пласт, либо многослойный с четко гидродинамически разделенными или связанными, пластами.

Изучение таких проблем посвящены работы [1-3] и в научной литературе их называют моделями Хантуша, Мятиева-Гринского и Шелкачева – Гусейнзаде. Каждое из этих моделей делает свои допущения относительно характеристик среды и содержащего в них флюида и строит соответствующие математические модели. В начальном этапе эти модели строились относительно ньютоновских флюидов а в дальнейшем по мере обнаружение новых свойств флюидов в тех или иных месторождениях стали строит математические модели для неньютоновских флюидов [4].

В дальнейшем строилось модели и изучались задачи фильтрации и для структурированных флюидов отличающейся наличием трех зон [5] фильтрации от неструктурированных. Эти исследование в многослойных средах проведены в работах [6,7].

Пусть задан двухслойный область D_1и D_2 где D_1 плохо проницаемый и содержит флюид обладающая вязкопластическими свойствами а D_2 плохо проницаемый где пластовые характеристики и характеристики флюида в нем позволяет говорить что там есть структурированный флюид.
Если в пласте с началом времени $t > 0$ производиться отбор из скважинный расположенной в начале координат то задачи фильтрации флюида описывается следующими математическими моделями. Необходимо найти непрерывные функции $u\,(x,\,t)$

и $v\left(x,\,z,\,t\right)$ а также неизвестные границы возмущения $\Gamma\left(x,\,t\right)$, $R_1\left(z,\,t\right)$, $R_2\left(z,\,t\right)$ из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(X_1\left(\left|\nabla u\right|,\,\beta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\Phi_1\left(\left|\nabla v\right|,\,\beta\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=h_1}=M_1\frac{\partial u}{\partial t},\quad x\in\left(0;\,\Gamma\left(t\right)\right),\quad t>0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(X_2\left(\left|\nabla u\right|,\,\beta\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\Phi_1\left(\left|\nabla v\right|,\,\beta_1\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=h_1}=M_2\frac{\partial u}{\partial t},\quad x\in\left(\Gamma\left(t\right);\,L\right),\quad t>0. \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_1\left(\left|\nabla v\right|,\,\beta_1\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right)=M_1\frac{\partial v}{\partial t},\ z\in\left(h_1;\,R_1\left(t\right)\right),\ t>0. \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_2\left(\left|\nabla v\right|,\,\beta_2\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right)=M_2\frac{\partial v}{\partial t},\ z\in\left(R_1\left(t\right);\,R_2\left(t\right)\right),\ t>0, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi_3\left(\left|\nabla v\right|,\,\beta_3\right)\frac{\partial v}{\partial z}\right)=M_3\frac{\partial v}{\partial t},\ z\in\left(R_2\left(t\right);\,h_2\right),\ t>0. \qquad (5)$$

с начальными

$$u\left(x,\,0\right)=v\left(x,\,z,\,0\right)=u_0\left(x,\,z\right),R_1\left(z;\,0\right)=R_2\left(z;\,0\right)=h_1,\quad \Gamma\left(x,\,0\right)=0. \qquad (6)$$

и граничными

$$X_1\left(\left|\nabla u\right|,\,\beta\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\Gamma-0}=X_2\left(\left|\nabla u\right|,\,\beta\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\Gamma+0}, \qquad (7)$$

$$\Phi_1\left(\left|\nabla v\right|,\,\beta_1\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=R_1-0}=\Phi_2\left(\left|\nabla v\right|,\,\beta_2\right)\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=R_1+0},$$

$$\Phi_2\left(\left|\nabla v\right|,\,\beta_2\right)\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=R_2-0}=\Phi_3\left(\left|\nabla v\right|,\,\beta_3\right)\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=R_2+0} \qquad (8)$$

а также краевыми условиями

$$a_1X_1\left(\left|\nabla u\right|,\,\beta\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ z=h_1}}=\varphi_1\left(t\right),\quad t>0.$$

$$a_2X_2\left(\left|\nabla u\right|,\,\beta\right)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=L\\ z=h_1}}=\varphi_2\left(t\right),\quad t>0. \qquad (9)$$

$$a_3\Phi_3\left(\left|\nabla u\right|,\,\beta_3\right)\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=h_2}=0,\quad t>0. \qquad (10)$$

Здесь: функции $X_i,\ \ i=\overline{1,\,2}$ выражает нелинейности движение аномальных флюидов согласно криволинейного закона фильтрации[8].
Функция $\Phi_i\ \left(i=\overline{1,\,3}\right)$ описывает характеристики аппроксимации структурных флюидов соответствующих зонах фильтрации [7], u_0, $\varphi_i\left(t\right)$ - заданные функции, остальные параметры и коэффициенты аналогично работы [8]. Задача (1)-(**??**) является нелинейной и поэтому для его решения применяется численные методы [8, 9]. В частности метод итерации, метод прямых и разностный вариант потоковой прогонки. Результаты работы можно применять для моделирования месторождений физические характеристики которых совпадает с данной работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хантуш М. С. Новое в теории перетекания. Сб.: кВопросы гидрогеологических расчетовњ. М. кМирњ. 1964.
2. Гиринский Н. К. Некоторые вопросы динамики подземных вод. кВопросы гидрогеологии и инженерной геологиињ, 1947, є 9.
3. Гусейнзаде М. А., Колосовская А. К. Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах. М. кНедрањ. 1972.
4. Мухидинов Н. М., Мукимов Н. Об одной приближенной модели теории линейной и нелинейной фильтрации в многослойных пластах, кЧисленные методы механики сплошной средыњ, т.9, є 1, Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1978, с. 125-130.
5. Каюмов Ш. К вопросу о математическом моделировании структурированных флюидов. Труды международной конференции RDAAM-2001. т. 6., ч. 2. 2001 г. Новосибирск. с. 183-190.
6. Каюмов Ш., Исканаджиев И. Математическое моделирование структурированных флюидов в многослойных средах. Тезисы докладов Всероссийский конференции кПроблемы механики сплошных сред и физика взрыва.њ Новосибирск. 2007 г. с. 98-99.
7. Каюмов Ш., Марданов А.П., Хаитов Т.О., Каюмов А.Б. Математическая моделирования структурированных флюидов в связанных пластах. Сборник трудов международной научной конференции к Актуальные проблемы прикладной математика, информатики и механикињ. Воронеж 2020г. с.934-942.
8. Самарский А. А., Гулин А.В. Численные методы. М. Наука. 1989. 484 с.
9. Каюмов Ш. Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами. Ташкент. ТГТУ, 2017 г. 274 с.

Формулы разложения для некоторых гипергеометрических функций двух переменных

Кобилов Х.М.

Ферганский госуниверситет, Фергана, Узбекистан,
khoji1997@mail.ru

Рассмотрим гипергеометрические функции двух переменных

$$G_1\left(a,b,c;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{n-m}(c)_{m-n}}{m!n!}x^m y^n, \tag{1}$$

$$G_2\left(a,b,c,d;x,y\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m\,(b)_n\,(c)_{n-m}(d)_{m-n}}{m!n!}x^m y^n, \tag{2}$$

где $(\lambda)_k$ – символ Похгаммера:

$$(\lambda)_0=1,\ (\lambda)_k=\lambda(\lambda+1)...(\lambda+k-1),\ k=1,2,3,....$$

Для исследования гипергеометрической функции многих переменных очень важны формулы разложения, которые позволяют представить гипергеометрическую функцию многих переменных через бесконечную сумму произведений нескольких гипергеометрических функций одного переменного, а это, в свою очередь, облегчает процесс изучения свойств функций многих переменных.

С целью нахождения формул разложения для гипергеометрических функций двух переменных, впервые Берчнелл и Ченди [1,2] ввели специальные операторы и изучали их свойства. В исследованиях Берчнелла и Ченди важную роль играла известная формула Пула (Poole), воспользовавшись которой они разложили 11 гипергеометрические функции двух переменных в бесконечную сумму произведений двух гипергеометрических функций Гаусса, однако для разложения всех функций из списка Горна этой одной формулы было недостаточно. Поэтому до недавного времени остались не разложенными другие гипергеометрические функции двух переменных из списка Горна.

Следуя работам Берчнелла и Ченди введем в рассмотрение следующие символические операторы

$$\tilde{\nabla}_{\alpha x;\beta y}(h) := \frac{\Gamma(h)\,\Gamma(h+\alpha\delta+\beta\sigma)}{\Gamma(h+\alpha\delta)\,\Gamma(h+\beta\sigma)}, \tag{3}$$

$$\tilde{\Delta}_{\alpha x;\beta y}(h) := \frac{\Gamma(\alpha\delta+h)\,\Gamma(\beta\sigma+h)}{\Gamma(h)\,\Gamma(\alpha\delta+\beta\sigma+h)}, \tag{4}$$

где

$$\delta \equiv x\frac{\partial}{\partial x},\ \ \sigma \equiv y\frac{\partial}{\partial y},$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция, а α и β – целые числа, отличные от нуля, т.е. $\alpha, \beta = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Нетрудно заметить, что в случае $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ операторы, определенные формулами (3) и (4) совпадают с операторами Берчнелла-Ченди [1,2].

С помощью оператора (3) можно представить функции, определенные формулами (1) и (2), в виде

$$G_1(a,b,c;x,y) = \tilde{\nabla}_{x;y}(a)\,\tilde{\nabla}_{-x;y}(b)\,\tilde{\nabla}_{x;-y}(c)\,F(a,c;1-b;-x)\,F(a,b;1-c;-y), \tag{5}$$

$$G_2(a,b,c,d;x,y) = \tilde{\nabla}_{-x;y}(c)\,\tilde{\nabla}_{x;-y}(d)\,F(a,d;1-c;-x)\,F(b,c;1-d;-y), \tag{6}$$

По определению (3) имеем

$$\tilde{\nabla}_{x;y}(a) := \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a+\delta+\sigma)}{\Gamma(a+\delta)\,\Gamma(a+\sigma)} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\delta)_i(-\sigma)_i}{i!(a)_i}, \tag{7}$$

$$\tilde{\nabla}_{-x;y}(b) := \frac{\Gamma(b)\,\Gamma(b-\delta+\sigma)}{\Gamma(b-\delta)\,\Gamma(b+\sigma)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\delta)_j(-\sigma)_j}{j!(b)_j}, \tag{8}$$

$$\tilde{\nabla}_{x;-y}(c) := \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c+\delta-\sigma)}{\Gamma(c+\delta)\,\Gamma(c-\sigma)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\delta)_k(\sigma)_k}{k!(c)_k}. \tag{7}$$

Подставив готовые формулы (7) – (9) в (5) и (6), окончательно получим разложение для G_1 и G_2 в виде

$$G_1\left(a,b,c;x,y\right)=\sum_{i,j,k=0}^{\infty}\sum_{m,n=0}^{k}\sum_{p,q=0}^{j}(-1)^{n+p}\binom{k}{m}\binom{k}{n}\binom{j}{p}\binom{j}{q}\times$$
$$\times\frac{(-i)_{k-m}(-i)_{j-q}(i+m+p)_{j-p}(i+n+q)_{k-n}(a)_{i+m+p}(c)_{i+m+p}(a)_{i+n+q}(b)_{i+n+q}}{(a)_i(b)_j(1-b)_{i+m+p}(c)_k(1-c)_{i+n+q}i!j!k!}\times$$
$$\times x^{i+m+p}F\left(a+i+m+p,c+i+m+p;1-b+i+m+p;-x\right)\times$$
$$\times y^{i+n+q}F\left(a+i+n+q,b+i+n+q;1-c+i+n+q;-y\right),$$

$$G_2\left(a,b,c,d;x,y\right)=\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{p,q=0}^{i,j}\binom{i}{p}\binom{j}{q}\times$$
$$\times\frac{(-1)^{p+q}(j+p)_{i-p}(i+q)_{j-q}(a)_{j+p}(b)_{i+q}(c)_{i+q}(d)_{j+p}}{i!j!(c)_i(1-c)_{j+p}(d)_j(1-d)_{i+q}}\times$$
$$\times x^{j+p}F\left(a+j+p,d+j+p;1-c+j+p;-x\right)\times$$
$$\times y^{i+q}F\left(b+i+q,c+i+q;1-d+i+q;-y\right).$$

В заключении отметим, что с помощью оператора (4) можно нетрудно найти обратные формулы разложения для функций (1) и (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Burchnall J.L., Chaundy T.W.** Expansions of Appell's double hypergeometric functions //The Quarterly J. of Math., Oxford. — 1940. Ser.11. — P. 249–270.

2. **Burchnall J.L., Chaundy T.W.** Expansions of Appell's double hypergeometric functions(II) // The Quarterly J. of Math., Oxford. — 1941. Ser.12. — P. 112–128.

Дифференцирования конечномерных разрешимых 4−лиевых алгебр

Кунградбаева А.К.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан,
r_gaybullaev@mail.ru;

Настоящая работа посвящена описанию дифференцирования 4-лиевых алгебр с максимальным гипо-нильпотентным идеалом.

4-лиевые алгебры[1] тесно связаны со многими областями математики, математической физики и теории струн. В работе [2] построен класс разрешимых 3-лиевых алгебр с максимальным гипо-нильпотентным идеалом, который является филиформной 3-лиевой алгеброй. Фактически, такие алгебры полностью классифицированы. В этой работе получено описание разрешимых 4-лиевых алгебр, максимальный гипо-нильпотентный идеал которых является филиформным. Кроме того, описаны дифференцирования этих разрешимых 4-лиевых алгебр.

Определение 1. 4-*лиевой алгеброй* называется векторное пространство L над полем $\mathbb{F}$, наделенное произвольной полилинейной кососимметричной операцией $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, удовлетворяющей следующему тождеству:

$$[[x_1, x_2, x_3, x_4], y_2, y_3, y_4] = \sum_{i=1}^{4}[x_1, \dots, [x_i, y_2, y_3, y_4], \dots, x_4], \forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in L.$$

Определение 2. *Дифференцированием* 4-лиевой алгебры L называется линейное отображение $D : L \to L$ такое, что для произвольных элементов x_1, x_2, x_3, x_4 из L следующее равенство будет верным:

$$D([x_1, x_2, x_3, x_4]) = \sum_{t=1}^{4}[x_1, \dots, D(x_i), \dots, x_4].$$

Множество всех дифференцирований L относительно коммутатора образует подалгебру лиевой алгебры $gl(L)$. Эта подалгебра называется алгеброй дифференцирований L и обозначается через $Der(L)$. Для произвольной 4-лиевой алгебры L определим, соответственно, нижний центральный и производный ряды:

$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L, L], \; k \geq 1,$$

и

$$L^{(1)} = L, \quad L^{(s+1)} = [L^{(s)}, L^{(s)}, L, L], \; s \geq 1.$$

Подпространство I 4-лиевой алгебры L называется идеалом, если выполняется соотношение $[I, L, L, L] \subseteq I$. Идеал 4-лиевой алгебры L называется разрешимым идеалом, если $I^{(r)} = 0$ для некоторого $r \geq 1$. Когда $L = I$, тогда L называется разрешимой 4-лиевой алгеброй. Идеал называется нильпотентным идеалом, если $I^r = 0$ для некоторого ≥ 1. Если $I = L$, тогда I называется нильпотентной 4-лиевой алгеброй.

Пусть L 4-лиевая алгебра и I идеал в L. Если I нильпотентная подалгебра, но не нильпотентный идеал, то I называется гипо-нильпотентным идеалом L. Если I не является собственным подмножеством никакого другого гипо-нильпотентного идеала, то I называется максимальным гипо-нильпотентным идеалом L.

Определение 3. 4-лиевая алгебра L размерности m называется *филиформной*, если $dimA^i = m - (3 + i)$ для $i \geq 1$.

Обозначим через N филиформную 4-лиевую алгебру с ненулевыми произведениями в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, имеющую следующий вид:

$$[e_1, e_2, e_3, e_i] = e_{i+1}, \quad 4 \leq i \leq m - 1.$$

В работе [3] приведено классификация максимальных разрешимых 4-лиевых алгебр с заданным максимальным филиформным гипо-нильпотентным идеалом.

Теорема 1.[3] Пусть $R_{m,4}$ разрешимая $(m+2)-$ мерная 4-лиевая алгебра с максимальным гипо-нильпотеным идеалом N. Тогда в L существует базис $\{x, y, e_1, \dots, e_m\}$ такой, что таблица умножения в L имеет следующий вид:

$$R_{m,4} : \begin{cases} [e_1, e_2, e_3, e_i] = e_{i+1}, \; 4 \leq i \leq m - 1, \\ [x, e_1, e_2, e_3] = e_3, \\ [x, e_1, e_2, e_i] = (i - 4)e_i, \quad 4 \leq i \leq m \\ [y, e_1, e_2, e_i] = e_i, \quad 4 \leq i \leq m \end{cases}$$

где отсутствующие скобки равны нулю.

В следующей теореме дадим описание пространство дифференцирования алгебры $R_{m,4}$.

Теорема 2. Следующие отображения образуют базис в пространстве дифференцирований алгебры $(m+2)$-мерной разрешимой 4-лиевой алгебры $R_{m,4}$:

$$Der(R_{m,4}):\begin{cases} d_{i,j}(e_i)=e_j, & 1\le i\le 3, \quad 1\le j\le m,\\ d_{i,i}(e_k)=(k-4)e_k, & 1\le i\le 3, \quad 5\le k\le m,\\ d_{i,i}(x)=-x, & d_{i,i}(y)=-y, \quad 1\le i\le 2,\\ d_{3,j+1}(x)=(j-4)e_j, & 5\le j\le m-1,\\ d_{3,j+1}(y)=e_j, & 4\le j\le m-1,\\ d_{i,m+1}(e_i)=x, & d_{i,m+2}(e_i)=y, \quad 1\le i\le 2,\\ d_{4,4}(e_k)=e_k, & 4\le k\le m,\\ d_{4,5}(e_k)=e_{k+1}, & 4\le k\le m-1,\\ d_{4,5}(x)=-e_3, & \\ d_5(x)=e_m, & d_6(y)=e_m. \end{cases}$$

Из Теоремы 2, нетрудно получить, подпространство внутренних дифференцировании разрешимую 4−лиевую алгебр $R_{m,4}$. Верно следующие следствие

Следствие. Следующее дифференцирование является базисом пространства внутренних дифференцирования алгебры $Der(R_{m,4})$.

$$Ad(R_{m,4}):\begin{cases} d_{i,j}(e_i)=e_j, & 1\le i\le 3, \quad 3\le j\le m,\\ d_{3,3}(e_k)=(k-4)e_k, & 5\le k\le m,\\ d_{3,j+1}(x)=(j-4)e_j, & 5\le j\le m-1,\\ d_{3,j+1}(y)=e_j, & 4\le j\le m-1,\\ d_{4,4}(e_k)=e_k, & 4\le k\le m,\\ d_{4,5}(e_k)=e_{k+1}, & 4\le k\le m-1,\\ d_{4,5}(x)=-e_3, & \\ d_5(x)=e_m, & d_6(y)=e_m. \end{cases}$$

Так как $dimDer(R_{m,4})=3m+8$ и $dimad(R_{m,4})=3m-2$, мы получим, что при $n>2$ алгебра $R_{m,4}$ имеет внешние дифференцирования. Тогда пространство $Der(R_{m,4})$ можно представить как прямую сумму $Der(R_{m,4})=ad(R_{m,4})\oplus V$, где $dimV=10$, а базисом пространства V являются дифференцирования $d_{i,j}, 1\le i\le 3, 1\le j\le 2$ и $d_{i,m+1}$, $d_{i,m+2}$, $1\le i\le 2$ такое, что

$$V:\begin{cases} d_{i,j}(e_i)=e_j, & 1\le j\le 2, \quad 1\le i\le 3,\\ d_{i,i}(e_k)=(k-4)e_k, & 5\le k\le m, \quad 1\le i\le 3,\\ d_{i,i}(x)=-x, & 1\le i\le 3,\\ d_{i,i}(y)=-y, & 1\le i\le 3,\\ d_{i,m+1}(e_i)=x, & 1\le i\le 2,\\ d_{i,m+2}(e_i)=y, & 1\le i\le 2. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Filippov V. n-Lie algebras // Sib. Mat. J., 26(6), 1985, p. 126-140.

2. Bai R., Shen C., Zhang Y. Solvable 3-Lie algebras with a maximal hypo-nilpotent ideal N* // Electronic Journal of Linear Algebra, 21, 2010, p. 43-62.

3. Гайбуллаев Р.К., Кунградбаева А.К. Описание разрешимых 4-лиевых алгебр // Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари номли Республика илмий анжумани, Ташкент, 1-2 июнь 2021 й. с. 30-32.

О внутренних неподвижных точках стохоческого оператора вольтьерровского типа четвертой степени

Курганов К.А. , Каримова Ф. А.

Натциональный Университет Узбекистан, Ташкент, Узбекистан;
iska2091@gmail.ru

В симплексе $S^2 = \{u = (x, y, z) \in [0,1]^3 : x + y + z = 1\}$ стохастические операторы вольтерровского типа четвертой степени имеет вид:

$$V_{4.2} = \begin{cases} x' = x^4 + 4ax^3y + 4dx^3z + 4(1-b)xy^3 + 4(1-c)xz^3 + 6kx^2y^2 + 6(1-l)x^2z^2 + 12[h_1x^2yz + s_2xy^2z + g_3xyz^2] \\ y' = y^4 + 4bxy^3 + 4ey^3z + 4(1-a)x^3y + 4(1-f)yz^3 + 6my^2z^2 + 6(1-k)x^2y^2 + 12[s_1xy^2z + h_2x^2yz + g_2xyz^2] \\ z' = z^4 + 4cxz^3 + 4fyz^3 + 4(1-d)x^3z + 4(1-e)y^3z + 6lx^2z^2 + 6(1-m)y^2z^2 + 12[g_1xyz^2 + h_3x^2yz + s_3xy^2z] \end{cases}$$

где $a, b, c, d, e, f, k, l, m, h_i, s_i, g_i \in [0,1], i = \overline{1,3}$

Вершины симплекса $M_1(1,0,0), M_2(0,1,0), M_3(0,0,1)$, являются неподвижными точками. Поскольку собственные числа относительно вершин симплекса являются числа

$$4(1-a), 4(1-b), 4(1-c), 4(1-d), 4(1-e), 4(1-f),$$

можем считать $k = l = m = \frac{1}{2}$, $s_i = g_i = h_i = \frac{1}{3}$.

Если $x = y$ имеем

$$(2b - 2a)x^3 + (e - d)x^2z + (c - f)z^3 = 0$$

Пусть $\frac{x}{z} = t$, тогда

$$(2b - 2a)t^3 + (e - d)t^2 + (c - f) = 0$$

$$t = \tfrac{1}{-6b+6a}\Bigg((-6b+6a)\Bigg(\Bigg(-\tfrac{1}{27}\tfrac{(e-d)^3}{(2b-2a)^3} - \tfrac{1}{2}\tfrac{c-f}{2b-2a} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\Big(\tfrac{2}{27}\tfrac{(e-d)^3}{(2b-2a)^3} - \tfrac{1}{2}\tfrac{c-f}{2b-2a}\Big)^2 - \tfrac{1}{729}\tfrac{(e-d)^6}{(2b-2a)^6}}\Bigg)^{\frac{1}{3}} +$$
$$+\Bigg(-\tfrac{1}{27}\tfrac{(e-d)^3}{(2b-2a)^3} - \tfrac{1}{2}\tfrac{c-f}{2b-2a} - \sqrt{\tfrac{1}{4}\Big(\tfrac{2}{27}\tfrac{(e-d)^3}{(2b-2a)^3} - \tfrac{1}{2}\tfrac{c-f}{2b-2a}\Big)^2 - \tfrac{1}{729}\tfrac{(e-d)^6}{(2b-2a)^6}}\Bigg)^{\frac{1}{3}}\Bigg)$$

Тогда внутренняя неподвижная точка имеет вид:

$$C_0(\frac{t}{1+2t}; \frac{t}{1+2t}; \frac{1}{1+2t})$$

a) При $c = f$ внутренняя неподвижная точка

$$C_0(\frac{e-d}{2(b+c-a-d)}, \frac{e-d}{2(b+c-a-d)}, \frac{b-a}{2(b+c-a-d)})$$

b) При $e = d$ внутренняя неподвижная точка

$$C_0\left(\frac{\sqrt[3]{c-f}}{2\sqrt[3]{c-f}+\sqrt[3]{2(b-a)}}, \frac{\sqrt[3]{c-f}}{2\sqrt[3]{c-f}+\sqrt[3]{2(b-a)}}, \frac{\sqrt[3]{b-a}}{2\sqrt[3]{c-f}+\sqrt[3]{2(b-a)}}\right)$$

Мы нашли внутренние неподвижные точки, когда $x = y$. Аналогично, можно найти такие точки при $x = z$, $y = z$

Литература

1. Jamilov U.U., Kurganov K.A. On-nonergodicity of volterra cubik stochastic operator. Доклады А.Н Республики Узбекистаан 2017. 3 стр.8-11.

Граничная теорема Мореры на матричном шаре для интегрируемых функций

Кутлымуратов Б.Ж.

Докторант (Phd) кафедры "Методика преподавания математики"
НГПИ. им. Ажинияза, Нукус, Узбекистан,
bayko-2020@mail.ru

В данной работе доказана граничная теорема Морера для функций интегрируемых на шаре.

Пусть $Z = (Z_1, ..., Z_n)$ - вектор, составленный из квадратных матриц Z_j порядка m, рассматриваемых над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Можно считать, что Z-элемент пространства $\mathbb{C}^n[m \times m] \cong \mathbb{C}^{nm^2}$. Матричное "скалярное"произведение:

$$\langle Z, W\rangle = Z_1W_1^* + Z_2W_2^* + ... + Z_nW_n^*,$$

где W_j^* есть матрица, сопряженная и транспонированная для матрицы W_j.

Область $B_{m,n}$ пространства $\mathbb{C}^n[m \times m]$:

$$B_{m,n} = \{Z : I - \langle Z, Z\rangle > 0\},$$

где I, как обычно, единичная матрица порядка m, матричный шар.

Остов этой области есть многообразие вида:

$$X_{m,n} = \{Z :\ \langle Z, Z\rangle = I\}.$$

Очевидно, размерность остова равна $m^2(2n - 1)$ и при $m > 1$ не совпадает с размерностью границы матричного шара. В частности, при $n = 1 \Rightarrow B_{m,1}$ - матричный круг из $\mathbb{C}^n[m \times m]$, а $X_{m,1}$ - множество всех унитарных матриц.

При $m = 1 \Rightarrow B_{1,n}$ - шар из $\mathbb{C}^n$, а $X_{1,n}$ - единичная сфера.

При $m = n = 1 \Rightarrow B_{1,1}$ - единичный круг из $\mathbb{C}$, а $X_{1,1}$ - единичная окружность.

Пусть точка $A = (A_1, ..., A_n)$ и $R, Q_{s,k}$ $s, k = 1, ..., n$, матрицы порядка m.

Рассмотрим отображение вида

$$W_k = R^{-1}\big(I^{(m)} - \langle Z, A\rangle\big)^{-1}\sum_{s=1}^{n}(Z_s - A_s)\,Q_{sk}, \quad k = 1, ..., n, \tag{1}$$

переводящее точку A в 0.

Для любой точки $A \in B_{m,n}$ существует автоморфизм матричного шара $B_{m,n}$ вида (1), переводящий точку A в 0. При этом матрицы R и $Q_{sk}, \quad s,k = 1,...,n$ определяются из следующих соотношений: (см [1])

$$R^* \left(I^{(m)} - \langle A, A\rangle\right) R = I^{(m)},$$

$$Q^* \left(I^{(mn)} - A^* A\right) Q = I^{(mn)},$$

где Q – блочная матрица, а A^*A - прямое произведение блочных матриц.

Далее, любой автоморфизм матричного шара $B_{m,n}$ является композицией автоморфизма вида (1) и обобщенного унитарного преобразования.

Пусть $\Phi_A(Z)$ автоморфизм матричного шара ($\Phi_A(A) = 0$). Тогда вещественный якобиан I_R автоморфизма ϕ_A вычисляется по формуле:

$$I_{R\Phi_A} = \left(\frac{\det\left(I^{(m)} - \langle A, A\rangle\right)}{\left|\det\left(I^{(m)} - \langle Z, A\rangle\right)\right|^2}\right)^{mn+m}.$$

Одним из актуальных вопросов многомерного комплексного анализа являются задачи голоморфного продолжения с границы. В этом плане интерес специалистов привлекают многомерные граничные аналоги теоремы Морера.

Следующий результат Нагеля и Рудина (см. [2]) является одним из первых многомерных аналогов теоремы Морера.

Теорема 1 (Нагель - Рудин). Если функция f - непрерывна на границе шара $B \subset \mathbb{C}^n$ и интеграл

$$\int_0^{2\pi} f\left(\psi\left(e^{i\phi},\, 0,\, ...,\, 0\right)\right) e^{i\phi} d\phi = 0$$

для всех (голоморфных) автоморфизмов ψ шара, то функция f голоморфно продолжается в шар.

Граничная теорема Мореры на матричном шаре для непрерывных функций (см. [3]), который является аналогом теоремы Нагеля - Рудина доказана с помощью автоморфизма шара $B_{m,n}$.

Пусть $\Lambda^0 \in X_{m,n} \quad (\Lambda^0 = (\Lambda_1^0, ..., \Lambda_n^0))$. Рассмотрим следующее вложение единичного диска Δ в область $B_{m,n}$:

$$\left\{W \in \mathbb{C}^{nm^2} : W_j = t\Lambda_j^0,\, j = 1, ..., n,\, |t| < 1\right\} \tag{2}$$

Граница T диска Δ при этом вложении перейдет в окружность, лежащую в $X_{m,n}$. Если Φ-произвольный (голоморфный) автоморфизм области $B_{m,n}$, то множество вида (2) под действием этого автоморфизма перейдет в некоторый аналитический диск с границей на $X_{m,n}$.

Теорема 2. Если функция $f \in L^p(X_{m,n})$ удовлетворяет условию $\int\limits_T f\left(\Phi\left(t\Lambda^0\right)\right) dt = 0$ для всех автоморфизмов Φ области $B_{m,n}$, то функция f голоморфно продолжается в $B_{m,n}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984 г.

2. Nagel A., Rudin W. Moebius-invariant function spaces on balls and spheres // Duke Math. J. 1976. V.43,N4.P. 841-865.

3. Косбергенов С. О граничной теореме Мореры для матричного шара // Известия вузов. Математика. 2001. N 4(467).С. 28-32.

4. Курбанов Б.Т. Теорема Морера для-некоторых неограниченных областей. // ДАН Руз. 2001. N 8-9. ст.9-11.

5. Отемуратов Б.П.,Кутлымуратов Б.Ж. Граничная теорема Мореры на сфере Пуанкаре для интегрируемых функции. // Узбекский матем. журнал. 2010, N 4. ст. 185-195.

Разрешимость частично интегральных уравнений типа фредгольма

Кучаров Р.Р.[1], Мирзаева Т.М.[2]

Национальный университет Узбекистана, Ташкент;
[1]ramz3364647@yahoo.com [2]mirzayevatilloxon@gmail.com

Частично интегральные операторы представляют собой сравнительно новую область в теории интегральных операторов, хотя, частично интегральные операторы являются главным объектом изучения в квантовой теории поля, статистической физике и механике.

В 1932 году В.И. Романовский [1] в своей статье при изучении задачи теории марковских цепей исследовал разрешимость частично интегральных уравнений типа Фредгольма в пространстве непрерывных функций. Однако, надо подчеркнуть, что во многих литературных источниках работа Абдус Салама [2] приводится как первый источник по теории частично интегральных операторов типа Фредгольма [3].

Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{\nu_1}$ и $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{\nu_2}$ – компактные множества с положительными лебеговыми мерами $\mu_1(\Omega_1)$ и $\mu_2(\Omega_2)$. X – идеальное банахово пространство (ИБП) фунций из $L_0(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

В (ИБП) X рассмотрим следующие операторы

$$T_1 f(x,y) = \int\limits_{\Omega_1} k_1(x,s) f(s,y) d\mu_1(s), \qquad (1)$$

$$T_2 f(x,y) = \int\limits_{\Omega_2} k_2(t,y) f(x,t) d\mu_2(t). \qquad (2)$$

Здесь фунции $k_1(x,s)$ и $k_2(t,y)$ являются измеримыми функциями, соответственно, Ω_1^2 и Ω_2^2 и интегралы в (1) и (2) понимаются в смысле Лебега.

Обозначим через $L_0^\sharp[L_2(\Omega_1)]$ совокупность комплекснозначных измеримых функций $h(x,s)$ на Ω_1^2, удовлетворяющих условию: интеграл

$$\varphi(x) = \int\limits_{\Omega_1} \mid h(x,s) \mid^2 d\mu_1(s)$$

существует при почти всех $x \in \Omega_1$ и $\varphi(x) \in L_0(\Omega_1)$. Пространство $L_0^\sharp\left[L_2(\Omega_1)\right]$ является модулем Капланского-Гильберта над $L_0(\Omega_1)$ относительно внутреннего произведения:

$$< h_1, h_2 >= \int\limits_{\Omega_1} h_1(x,s)\overline{h_2(x,s)}d\mu_1(s), \;\; h_1, h_2 \in L_0^\sharp\left[L_2(\Omega_1)\right].$$

Пусть T_1 – ЧИО с ядром $k_1(x,s) \in L^\infty\left(\Omega_1^2\right)$. ЧИО T_1 (1) отображает пространство $L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right)$ в себя и T_1 является непрерывным оператором на $L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right)$.

В пространстве $L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right)$ изучим разрешимость частично интегральных уравнений (ЧИУ)

$$f(x,y) - \tau T_1 f(x,y) = g(x,y). \tag{3}$$

В пространстве $L_0\left[L_2(\Omega_1)\right]$ определим ЧИО

$$(S_1 f)(x,y) = \int\limits_{\Omega_1} \frac{M_1(x,s;\tau_0)}{D_1(y;\tau_0)} f(s,y) d(\mu_1(s)), \tag{4}$$

где функции $M_1(x,s;\tau_0), D_1(y;\tau_0)$, соответственно минор и детерминант Фредгольма.

Теорема 1. Пусть $\tau_0 \in \mathcal{C}$ и $D_1(y,\tau_0) \neq 0$ для п.в. $y \in \Omega_2$. Тогда (3) при любом $g \in L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right)$ в пространстве $L_0\left[L_2\left(\Omega_1\right)\right]$ имеет единственное решение $f_0(x,y)$, при этом решение $f_0(x,y)$ имеем вид

$$f_0(x,y) = \left(E + \tau_0 S_1\right) g(x,y).$$

Теорема 2. Пусть $\tau_0 \in \mathcal{C}$ и $D_1(y,\tau_0) \neq 0$ для п.в. $y \in \Omega_2$. Тогда оператор $E - \tau_0 T_1$ обратим и $(E-\tau_0 T_1)^{-1} : L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right) \to L_0\left[L_2\left(\Omega_1\right)\right]$, при этом $(E-\tau_0 T_1)^{-1} = E + \tau_0 S_1$, где оператор S_1 определен в (4). Если для измеримых функций

$$w_1(x,s,y;\tau_0) = \frac{M_1(x,s;\tau_0)}{D_1(y;\tau_0)}$$

существует положительное число C такое, что

$$w_0(t) = \int\limits_{\Omega 1} \int\limits_{\Omega_1} \mid w_1(x,s,t;\tau_0) \mid^2 d\mu_1(x) d\mu_1(s) \leq C \text{ п.в. } t \in \Omega_2,$$

то $(E - \tau_0 T_1)^{-1} : L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right) \to L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right)$ и оператор $(E - \tau_0 T_1)^{-1}$ является ограниченным на $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Romanovsky V. Sur une d'equation integrals linears // Acta Mathematica - 1932, vol . 59. - P. 99-108.

2. Salam A. Fredholm solution of partial integral equations //Proc. Cambridge Philos. Soc. - 1952, 49, - P. 213-217.

3. Ilhan O.A. Solvability of some partial integral equations in Hilbert space // Communications on Pure and Applied Analysis. - 2008, №4(7). - P. 837-844.

Геометрия в подпространствах псевдоевклидова пространства ${}^2R_5$

Мамадалиев Ботиржон Муллааминович

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан;
mamadaliyev_botirjon@mail.ru

Под псевдоевклидовым пространством ${}^2R_5$–понимается аффинное пятимерное пространство [1], со скалярной произведением векторов $\vec{X}\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ и $\vec{Y}\,(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5)$

$$\left(\vec{X}\cdot\vec{Y}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5.$$

Норма вектора $\left|\vec{X}\right|$–вычисляется как корень от скалярного квадрата вектора

$$\left|\vec{X}\right| = \sqrt{\left(\vec{X},\ \vec{X}\right)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2}.$$

Расстояние между точками определяется как норма вектора соединяющие эти точки. Если $A\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)$ и $B\,(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5)$, то

$$AB = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2 - (y_4-x_4)^2 - (y_5-x_5)^2}.$$

В работе [2] дано, классификация Тёрстона геометрии трехмерных многообразий. Приведено восемь различных геометрий описывающие геометрию компактных трехмерных многообразий.

Изученные геометрию ${}^2R_5$–дает возможность реализовать некоторых геометрий из классификаций Тёрстона, в пространстве ${}^2R_5$.

Теорема. В ${}^2R_5$–существует подпространства изоморфная геометрию пространства $\widetilde{SL}_2$ и Nil.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. - 548с.
2. Скотт П. Геометрии на трёхмерных многообразиях. М.: Мир, 1986. -168 с.

Консервативные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в прямоугольнике

Мамадалиев Н. А.[1], Хайиткулов Б. Х.[2]

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан;
[1]m_numana59@mail.ru, [2]b.hayitqulov@mail.ru

В данной работе разработаны метод и алгоритм решения задачи об оптимальном выборе плотности источников тепла на прямоугольнике таким образом, чтобы температура внутри рассматриваемой области находилась в заданных пределах. При этом источники тепла должны обеспечить заданный температурный режим минимальной суммарной мощности и температуру в заданном коридоре.

В параллелепипеде $D = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ 0 \le t \le T\}$ требуется определить функцию $f(x, y, t) \ge 0$, доставляющую при каждом $t \in [0, T]$ минимум линейному функционалу [1]

$$J\{f\} = \int_a^b \int_c^d f(x, y, t)dydx \to \min, \tag{1}$$

при следующих условия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\chi(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\chi(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + f(x, y, t),\\
&a < x < b,\ c < y < d,\ 0 < t \le T,\\
&u(x, y, 0) = u_0(x, y),\ a \le x \le b,\ c \le y \le d,\\
&u(a, y, t) = \mu_1(y, t),\ u(b, y, t) = \mu_2(y, t),\ c \le y \le d,\ 0 < t \le T,\\
&u(x, c, t) = \mu_3(x, t),\ u(x, d, t) = \mu_4(x, t),\ a \le x \le b,\ 0 < t \le T,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$m(x, y, t) \le u(x, y, t) \le M(x, y, t), \quad (x, y, t) \in D. \tag{3}$$

Здесь $u = u(x, y, t)$ – температура в точке (x, y) прямоугольника в момент времени t; $\chi(x, y) > 0$ – коэффициент теплопроводности; $u_0(x, y)$, $\mu_1(y, t)$, $\mu_2(y, t)$, $\mu_3(x, t)$, $\mu_4(x, t)$, $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ – заданные функции. Функции $m(x, y, t)$, $M(x, y, t)$ имеют смысл функций минимального и максимального профиля температуры в области D соответственно. Источник тепла описывается квадратично интегрируемой функций $f(x, y, t)$ в пространстве $L_2(D)$.

Оператор $Lu = \dfrac{\partial u}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\chi(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\chi(x, y)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$ с начальным и краевым условием будет самосопряженным, положительно определенным в $L_2(D)$, а значит, он имеет ограниченный обратный оператор, которого обозначим через $G = L^{-1}$. С его помощью можно переформулировать задачу (1)–(3) как задачу на минимум функционала (1) при следующих условиях на плотность источников:

$$f(x, y, t) \in L_2(D),\ f(x, y, t) \ge 0,\ m(x, y, t) \le (Gf)(x, y, t) \le M(x, y, t). \tag{4}$$

Введем в D равномерную по трем переменным разностную сетку $\overline{\omega}^{\tau}_{h_1h_2} = \overline{\omega}_{h_1} \times \overline{\omega}_{h_2} \times \overline{\omega}^{\tau} = \{(x_i = ih_1,\, y_j = jh_2,\, t_k = k\tau),\ i = \overline{0, N_1},\ \ j = \overline{0, N_2},\ \ k = \overline{0, N_3}\}$ с шагами $h_1 = (b - a)/N_1$, $h_2 = (d - c)/N_2$, $\tau = T/N_3$.

Для получения консервативных разностных схем воспользуемся интегро-интерполяционным методом. Неявная консервативная разностная схема для условия (2) имеет вид [2]:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k}}{\tau} = \left[\chi_{i+0.5j}\frac{u_{i+1j}^{k+1} - u_{ij}^{k+1}}{h_1^2} - \chi_{i-0.5j}\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{i-1j}^{k+1}}{h_1^2}\right]\\
&+ \left[\chi_{ij+0.5}\frac{u_{ij+1}^{k+1} - u_{ij}^{k+1}}{h_2^2} - \chi_{ij-0.5}\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij-1}^{k+1}}{h_2^2}\right] + f_{ij}^{k+1},\\
&i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1},\ k = \overline{0, N_3 - 1},\\
&u_{ij}^{0} = u_0(x_i, y_j),\\
&u_{0j}^{k+1} = \mu_1(y_j, t_{k+1}),\ u_{N_1j}^{k+1} = \mu_2(y_j, t_{k+1}),\\
&u_{i0}^{k+1} = \mu_3(x_i, t_{k+1}),\ u_{iN_2}^{k+1} = \mu_4(x_i, t_{k+1}),\\
&i = \overline{0, N_1},\ j = \overline{0, N_2},\ k = \overline{0, N_3 - 1}.
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Здесь $\chi_{i\pm0.5j}$, $\chi_{ij\pm0.5}$ и f_{ij}^{k+1} определяются равенствами

$$\chi_{i-0.5j} = \chi\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}, y_j\right),\ \chi_{ij-0.5} = \chi\left(x_i, \frac{y_j + y_{j-1}}{2}\right),\ f_{ij}^{k+1} = f(x_i, y_j, t_{k+1}).$$

Получаем

$$G = A^{-1}$$

где A – матрица составленная из коэффициентов перед неизвестными в системе (5). Построим консервативную конечномерную аппроксимацию (1)–(5) в виде задачи линейного программирования. Получим задачу линейного программирования:

$$\begin{gathered} J_k\{f\} = \sum_{i=1}^{N_1-1}\sum_{j=1}^{N_2-1}(\mathrm{mes}D_{ij}^k)f_{ij}^k \to \min, \quad k = 1, 2, ..., N_3, \\ m_{ij}^k \le \sum_{q=1}^{N} g_{pq}\tilde{f}_q^k \le M_{ij}^k,\ p = \overline{1, N},\ i = \overline{1, N_1 - 1},\ j = \overline{1, N_2 - 1},\ k = \overline{1, N_3}, \\ \tilde{f}_q^k 0, \quad q = 1, 2, ..., N,\ k = 1, 2, ..., N_3. \end{gathered} \tag{6}$$

Решением задачи (6) численными методами находится функция $u_{ij}^k = \sum_{q=1}^{N} g_{pq}\tilde{f}_q^k$, $(i = (p-1) \div (N_1 - 1) + 1,\ j = (q-1) \bmod (N_2 - 1) + 1)$ которая является решением краевой задачи (2) с $\tilde{f}_q^k$, где обозначение $\div$ есть символ целочисленного деления, а mod есть символ остатка от деления. При этом задача (6) решается М-методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайиткулов Б.Х. Консервативные схемы решения нестационарных задач управления теплопроводности с переменными коэффициентами в прямоугольнике // Материалы III Международный семинар "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби"(CGS'2020). г. Екатеринбург, 2020. С. 322–327.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.

Численное решения задачи Римана в сжимаемых двухжидкостных средах

Мамасолиев Б.Ж.[1], Васильев Г.С.[2], Имомназаров Х.Х.[3]

[1]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, г. Ташкент;
[2]Институт геологии и минералогии СО РАН, г. Новосибирск, Россия;
[3]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия;
imom@omzg.sscc.ru

Математические модели гетерофазных многокомпонентных сред широко используются при описании нестационарных процессов в технологических и природных системах. Модели двухскоростных сред позволяют исследовать механику пористых материалов, гранулированных сред, смесей из несмешивающихся жидкостей, пузырьковых и кипящих жидкостей, гидротермальные потоки, неконсолидированные смеси, флюидо-магматические потоки, содержащие ксенолиты. Для реализации таких задач предложены различные способы решения систем нелинейных дифференциальных уравнений: билинейной метод Хироты, метод обратной задачи рассеяния, с использованием преобразования Бэклунда или преобразования Дарбу, усеченное разложение Пенлеве, метод группового анализа, метод баланса, вариационный метод итераций, полуобратный метод. В случае, когда гиперболическая система уравнений приводится к симметрическому виду, представляется возможным исследовать поведения системы на разрывных решениях, в том числе для задач с ударными волнами и контактными разрывами. Точное решение задачи распада разрыва для гетерофазных сред может приводить к трудоемким вычислениям, в связи с этим широкое распространение получили методы на основе приближенного решения задачи Римана. В работе [1] проведен энтропийный анализ схем данного класса, таких как LxF [2], Русанова [3], HLL [4], Roe [5], EO [6], HLLC [7]. В работе [8] HLL-метод применялся при решении задачи Римана о распаде произвольного разрыва для системы дифференциальных уравнений движения однофазной идеальной жидкости. Для исследования движения двухфазных сред HLL-метод применялся в работах [9–11].

Под гетерофазной средой понимается сплошная среда, элементарный объем которой состоит из нескольких (в данном случае двух) фаз с различными физическими параметрами. Система нелинейных уравнений движения двухфазной среды с одним давлением получена в работе [12], следуя общим принципам механики сплошных сред. В диссипативном случае, в пренебрежении процессами тепопроводности и объемной вязкости, система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\partial_i\left(\rho_1 u_{1,i}\right)=0,\quad \frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\partial_i\left(\rho_2 u_{2,i}\right)=0,\quad \frac{\partial S}{\partial t}+\partial_i\left(\frac{S}{\rho}\left(\rho_1 u_{1,i}+\rho_2 u_{2,i}\right)\right)=\frac{R}{T},\tag{1}$$

$$\frac{\partial u_{1,i}}{\partial t}+u_{1,k}\partial_k u_{1,i}=-\frac{1}{\rho}\partial_i p-\frac{\rho_2}{2\rho}\partial_i\left(u_{1,k}-u_{2,k}\right)^2-b\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(u_{1,i}-u_{2,i}\right)+\frac{\eta_1}{\rho_1}\Delta u_{1,i}.\tag{2}$$

$$\frac{\partial u_{2,i}}{\partial t}+u_{2,k}\partial_k u_{2,i}=-\frac{1}{\rho}\partial_i p+\frac{\rho_1}{2\rho}\partial_i\left(u_{1,k}-u_{2,k}\right)^2+b\left(u_{1,i}-u_{2,i}\right)+\frac{\eta_2}{\rho_2}\Delta u_{2,i},\tag{3}$$

где ρ_1, ρ_2 — парциальные плотности фаз двухфазной среды, $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ — поля скоростей фаз двухфазной среды, S — энтропия двухфазной среды на единицу объема, p — давление, T — температура, b — коэффициент межфазного трения, η_1, η_2 — сдвиговые вязкости фаз двухфазной среды. Диссипативная функция R имеет вид

$$R=b\rho_2\left(u_{1,i}-u_{2,i}\right)^2+\eta_1\left(\partial_k u_{1,i}\right)^2+\eta_2\left(\partial_k u_{2,i}\right)^2.$$

Система уравнений (1)–(3) замыкается уравнениями состояния, которые в предположении о равновесии фаз по давлению и температуре имеют вид:

$$p=p\left(\rho,\left(\mathbf{u_1}-\mathbf{u_2}\right)^2,S\right),\quad T=T\left(\rho,\left(\mathbf{u_1}-\mathbf{u_2}\right)^2,S\right).$$

В работе рассмотрена система уравнений движения двухфазной среды с равновесием фаз по давлению и температуре. В одномерном бездиссипативном случае система приводится к дивергентному виду. Найдены характеристические значения, позволяющие применить численный метод HLL для исследования поведения двухфазной системы на примере задачи о распаде разрыва. Сравнение полученных приближенных решений с уравнениями движения идеальной жидкости показывает их хорошую согласованность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 21-51-15002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Липницкий Ю.М., Сафронов А.В. Модификация численного метода Годунова для уравнений газодинамики // Ученые записки ЦАГИ, том XLIII, 2012, No. 4, с. 20–29.

2. Lax P.D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Communications on Pure and Applied Mathematics, 1954, v. 7, pp. 159–193.

3. Русанов В. В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями // ЖВМ и МФ, 1961, Т. 1, No. 2, с. 267–279.

4. Amiram Harten, Peter D. Lax, Bram Van Leer. On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Law // SIAM Review, 1983, v. 25, No. 1, pp. 35–61.

5. Roe P.L. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phis., 1981, v. 43, No. 2, pp. 357–372.

6. Enguist B., Osher S. One-sided difference approximation for nonlinear conservation laws // Math. Comp. 1981, v. 36, pp. 321–351.

7. Toro E. F., Spruce M., Speares S. Restoration of the contact surface in the HLL Riemann solver // Shock Saves, 1994, 4, pp. 25–34.

8. Eleuterio F. Toro. Riemann Solvers and Numerical Methods Fluid Dynamics. Springer, 2009.

9. Иванов И.Э., Крюков И.А. Численный алгоритм моделирования двухфазных течений, содержащих границы раздела фаз // Физико-химическая кинетика в газовой динамике, 2012, том 13, No. 4, с. 3.

10. Тухватуллина Р.Р., Фролов С.М. Корректность неизотермической модели Эйлера для двухфазных течений // Горение и взрыв, 2016, том 9, є 4, с. 36–46.

11. Уткин П.С. Математическое моделирование взаимодействия ударной волны с плотной засыпкой частиц в рамках двухжидкостного подхода // Химическая физика, 2017, том 36, No. 11, с. 61–71.

12. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика, 1989, No. 9, с. 56–64.

Об одной переопределенной стационарной системе двухскоростной гидродинамики с сингулярным источником

Маматкулов М.М.[1], Имомназаров Б.Х.[2], Имомназаров Ш.Х.[3], Худайназаров Б.Б.[4]

[1,4]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент;
[2]Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия;
[3]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия;
bbimoml@mail.ru

Изучение физико-технических процессов в механике сплошных сред начинается с построения математической модели. Присутствие в верхних слоях мантии частичных расплавов приобрела в геофизической литературе важную роль. Предположение о формировании частичного расплава путем фазового перехода первого рода позволило В.Н. Доровскому объяснить локализацию в пространстве значительных масс такой субстанции в динамических условиях [1]. При этом эффекты объемной генерации магмы не были учтены. Учет генерации магмы в условиях сдвиговой деформации мантийных толщ была учтена в [2]. В этих работах сплошная среда в геологическом временном масштабе представляла собой вязкую жидкость-1, за счет собственной вязкости, либо по другим причинам, достигает необходимых термодинамических условий протекания фазового перехода. По границам зерен и межзеренным узлам начнет скапливаться магма - жидкость-2 с вязкостью, присущей известным в геологии расплавам. Такой расплав включается в процесс совместного тепломассопереноса и фильтруется сквозь систему, его породившую. Другими словами, эта теория представляет собой динамику тепломассопереноса взаимного проникновения одной менее вязкой жидкости сквозь более вязкую среду, как своеобразный процесс фильтрации. Или по аналогии с уравнением Навье-Стокса, можно называть как двухскоростная система уравнений Навье-Стокса, либо как уравнения двухскоростной гидродинамики.

Изучение течений вязких сжимаемых / несжимаемых жидкостей на основе решения полной системы уравнений двухскоростной гидродинамики представляется актуальным. В литературе известно очень ограниченное число случаев, допускающих аналитическое интегрирование уравнений Навье-Стокса [3-5]. Задача настоящей работы состоит в построении фундаментальных решений для стационарной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению в диссипативном приближении обусловленными коэффициентами вязкости фаз и коэффициентом межкомпонентного трения. Эти решения могут быть полезными для тестирования численных методов решения уравнений двухскоростной гидродинамики.

В данной работе при описании исследуемого процесса будем считать, что изменение температурного поля среды не будет влиять на характеристики системы, которые определяются вязкостями подсистем двухжидкостной среды. Также не будем учитывать эффекты, обусловленные сжимаемостями подсистем и конвективными процессами рассматриваемой двухжидкостной среды.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 21-51-15002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Доровский В.Н. Образование диссипативных структур в процессе необратимой передачи импульса литосферы // Геология и геофизика. 1987. No. 6, C. 108–117.
2. Доровский В.Н., Перепечко Ю.В. Теория частичного плавления // Геология и геофизика. 1989. No.9. C.56–64.
3. Лойцянский Л.Г., Механика жидкости и газа. М.: Наука. 1978. 736 с.
4. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука. 1974. 712 с.
5. Drazin P., Riley N. The Navier-Stokes equations. A classification of flows and exact solutions. Cambidge Univ. Press: Cambridge, 2006

Об одном квадратичном стохастическом операторе в S^2

Мамуров Б.Ж. [1]., Шарипова М. Ш.[2]

Бухарский государственный университет,Бухара,Республика Узбекистан.
bmamurov.51@mail.ru;

Изучения эволюции состояния системы является одно из основных задачи динамической системы.
Квадратичные и кубические стохастические операторы используются для решения задач, возникающих в математической генетике, физике и химии.
Решение ряд задачи прикладного характера приводят к необходимости изучения асимптотического поведения траекторий нелинейных стохастических операторов . Квадратичные операторы привлекают внимание специалистов в различных областях математики и ее приложений (см. например,[1]-[4]). Мы будем придерживается определения и обозначения работы [4]. В данной работе с целью дальнейшего рассмотрения выпуклых комбинаций с другими квадратичными операторами, изучается регулярность одного квадратичного стохастического оператора. Пусть $E = \{1, 2, ..., n\}$. Множество

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

называется $n-1$ -мерным симплексом.
Каждый элемент является вероятностной мерой на E , и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической и т.п.) системы, состоящей из n элементов.

Квадратичный стохастический оператор
$V : S^{n-1} \to S^{n-1}$ имеет вид

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k} x_i x_j$$

$$p_{ij,k} \geq 0, p_{ij,k} = p_{ji,k}, \sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = 1.$$

В S^2 рассмотрим квадратичный стохастический оператор V :

$$\begin{aligned} x_1^1 &= 1/3x_1^2 + 1/3x_2^2 + 1/3x_3^2 + 2x_1x_2 \\ x_2^1 &= 1/3x_1^2 + 1/3x_2^2 + 1/3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ x_3^1 &= 1/3x_1^2 + 1/3x_2^2 + 1/3x_3^2 + 2x_1x_3. \end{aligned}$$

Теорема.
а) Квадратичный стохастический оператор V имеет единственную неподвижную точку $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (1/3, 1/3, 1/3)$.
б) Неподвижная точка (1/3,1/3,1/3) - притягивающая .
в) Для любого $x^{(0)} \in S^2$ траектория $x^{(n)}$ стремится к неподвижной точке (1/3,1/3,1/3), т.е. оператор V регулярен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганиходжаев Р,Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры . Матем.сб., 183:8 (1992), 119-140.
2. Любич Ю.И. Математические структуры в популяционной генетике, Наукова дум-ка, Киев, 1983.
3. Розиков У.А.,Жамилов У.У. F - квадратичные стохастические операторы . Матем. заметки, 83:4 (2008), 606-612.
4. Жамилов У.У, Розиков У.А. О динамике строго невольтерровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе . Матем. сб., 200:9 (2009), 81-94.

Об устойчивости членов вариационного ряда при случайном объеме выборки

Мамуров И.Н.

Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан
imamurov58@gmail.com

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – последовательность независимых сл.вел. с общей ф.р. $F(x) = P(X_1 < x)$ и $\xi_1^{(n)} \leq \xi_2^{(n)} \leq ... \leq \xi_n^{(n)}$ – вариационный ряд (в.р.) построенный по сл. вел.$X_1, X_2, ..., X_n$.

Отношение $\frac{k}{n}$ называется рангом члена $\xi_k^{(n)}$. Если при $n \to \infty$, $\frac{k}{n} \to \lambda$ то λ называется предельном рангом последовательности $\xi_k^{(n)}$.

Члены $\xi_k^{(n)}$, для которых λ отличен от нуля и единицы называются центральными членами в.р., а члены $\xi_k^{(n)}$ для которых предельный ранг $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$ называются крайними членами в.р.

Определение. Последовательность членов в.р. с предельном рангом λ называ-ется "устойчивой", если существует последовательность констант $A_k^{(n)}$, таких , что для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\xi_k^{(n)} - A_k^{(n)}\right| < \varepsilon\right\} \to 1$$

Настоящая работа посвящена вопросам устойчивости последовательностей членов вариационного ряда (ч. в.р.) $\xi_1^{(\nu_n)} \leq \xi_2^{(\nu_n)} \leq ... \leq \xi_{\nu_n}^{(\nu_n)}$, построенного по случайному объему выборки $X_1, X_2, ..., X_{\nu_n}$ из генеральной совокупности с ф.р. $F(x)$. Здесь и далее $\{\nu_n\}$ – последовательность положительных целочисленных сл.вел.

Во всех излагаемых результатах этой заметки не предполагается независимость последовательностей сл.вел. $\{X_n\}$ и $\{\nu_n\}$. Относительно $\{\nu_n\}$ предположим, что су-ществует ф.р. $G(x)$ такая, что для любого x, являющейся точкой непрерывности $G(x)$, при $n \to \infty$

$$P\left\{\frac{\nu_n}{n} < x\right\} \to G(x), \; G(+0) = 0. \quad (1)$$

Для крайних ч.в.р. $\xi_k^{(n)}$ с постоянным ранговым номером k и для центральных членов справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполнено (1) и для $\xi_k^{(n)}$ с постоянным k существует последовательность чисел $A_k^{(n)}$ такая, что при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\xi_k^{(n)} - A_k^{(n)}\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\xi_k^{(\nu_n)} - A_k^{(n)}\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Теорема 2. Пусть имеет место (1) и для $\xi_k^{(n)}$ с постоянным k существует последовательность чисел B_k^n такая, что при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{\xi_k^{(n)}}{B_k^{(n)}} - 1\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\frac{\xi_k^{(\nu_n)}}{B_k^{(n)}} - 1\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Замечание. Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 можно сформулировать и для правых членов $\xi_{\nu_n-k+1}^{(\nu_n)}$ с постоянным ранговым номером k.

Пусть для $0 < \lambda < 1$ величины $\overline{a}_\lambda$ и $\underline{a}_\lambda$ определены следующим образом:

$$\overline{a}_\lambda = \inf\left\{x : F(x) > \lambda\right\}, \ \underline{a}_\lambda = \sup\left\{x : F(x) < \lambda\right\}$$

Очевидно,что $\overline{a}_\lambda \underline{a}_\lambda$.

Теорема 3. Пусть для последовательности $\xi_{k(n)}^{(n)}$ при $n \to \infty$, $\dfrac{k(n)}{n} \to \lambda$, $0 < \lambda < 1$, $\underline{a}_\lambda = \overline{a}_\lambda = a_\lambda$ и для $\{\nu_n\}$ выполнено условие (1).Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$

$$P\left\{\left|\xi_{k(\nu_n)}^{(\nu_n)} - a_\lambda\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Представляет интерес также следующий своеобразный результат, который показывает влияние ф.р. $F(x)$, случайного объема выборки и предельного ранга λ на асимптотическое распределение ч.в.р.

Теорема 4. Пусть выполнено (1). Если при $n \to \infty$, $k(n) \to \infty$ и $\dfrac{k(n)}{n} \to \lambda, \ 0 \leq \lambda \leq 1$ то при $n \to \infty$

$$P\left\{\xi_{k(n)}^{(\nu_n)} < x \Big/ \nu_n k(n)\right\} \to \Psi(x) = \left\{1 - G\left(\frac{\lambda}{F(x)}\right)\right\} \Big/ \left\{1 - G(\lambda)\right\},$$

где при $0 \leq \lambda \leq 1$, $F(x) = 0$ положим $G\left(\frac{\lambda}{F(x)}\right) = 1$ и при $G(\lambda) = 1$ положим $\Psi(x) = 0$.

Из этой теоремы непосредственно следует следующее.

Следствие. Если $P\left\{\nu_n = n\right\} = 1$, то при $n \to \infty$

$$P\left\{\xi_{k(n)}^{(\nu_n)} < x \Big/ \nu_n k(n)\right\} \to 1 - G\left(\frac{\lambda}{F(x)}\right) = \left\{\begin{array}{c} 0, x \in \left\{x : F(x) < \lambda\right\}, \\ 1, x \in \left\{x : F(x)\lambda\right\}. \end{array}\right.$$

С доказательствами выше приведенных утверждений, а также другими вопросами касающимися k членам вариационного ряда построенного по случайному объему выборки без предположения независимости объема выборки от самих наблюдаемых величин, можно ознакомиться в монографии [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Джамирзаев А.А., Мамуров И.Н. Теоремы переноса. //Монография. Ташкент, Иктисод-молия ,2019,148 стр.

Детерминант и минор для частично интегральных операторов типа фредгольма

Мирзаева Т.М.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент;
mirzayevatilloxon@gmail.com

Формулы для детерминанта (определителя) $D(\lambda)$ и минора $M(x, s; \lambda)$ для операторов вида $E - \lambda K$, где K – интегральный оператор с непрерывным ядром, действующим в пространстве непрерывных функций, впервые введены в начале XX века шведским математиком Иваром Фредгольмом [1,2]. Работы И. Фредгольма [1,2] являются выдающимися открытиями XX века в области анализа, после которых начала быстро развиваться теория интегральных уравнений. В 1904 г. И.Фредгольм полностью решил проблемы о разрешимости интегральных уравнений

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)ds = \phi(t)$$

с непрерывным ядром $K(t, s)$ со свободным членом при всех значениях параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. В работах Т.Карлемана [3] и С.Г.Михлина [4] исследовано интегральное уравнение Фредгольма в пространстве L_2 с ядром, интегрируемым с квадратом.

В этой работе, пользуясь понятием детерминанта и минора Фредгольма оператора $E-\lambda K$, мы введем понятие детерминанта и минора для операторов вида $E-\tau T$,$\tau \in \mathbb{C}$, где T – частично интегральный оператор.

Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{\nu_1}, \nu_1 \in \mathbb{N}$ и $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{\nu_2}, \nu_2 \in \mathbb{N}$ – произвольные ограниченные замкнутые подмножества с конечной положительной мерой Лебега, т. е. Ω_1 и Ω_2 – компактные множества, $\mu_1(\circ)$ и $\mu_2(\circ)$ – лебеговы меры, соответственно, на Ω_1 и Ω_2.

В пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ рассмотрим ЧИО T_1 и T_2, заданные по правилам

$$T_1 f(x,y) = \int_{\Omega_1} k_1(x,s) f(s,y) d\mu_1(s), T_2 f(x,y) = \int_{\Omega_2} k_2(t,y) f(x,t) d\mu_2(t),$$

где ядра k_1 и k_2 непрерывны по совокупности аргументов, т.е. $k_1(x,s) \in C(\Omega_1^2)$ и $k_2(t,y) \in C(\Omega_2^2)$.

Определим семейства компактных операторов $\{\mathrm{K}_\alpha\}_{\alpha \in \Omega_2}$ в $L_2(\Omega_1)$

$$\mathrm{K}_\alpha \varphi(x) = \int_{\Omega_1} k_1(x,s) \varphi(s) d\mu_1(s), \ \ \varphi \in L_2(\Omega_1).$$

Аналогично определим семейство компактных операторов $\{Q_\beta\}_{\beta\in\Omega_1}$, действующих в $L_2(\Omega_2)$, по формуле

$$Q_\beta\psi(y)=\int_{\Omega_2}k_2(t,y)\,\psi(t)\,d\mu_2(t)\,,\ \ \psi\in L_2(\Omega_2)\,.$$

Для каждого $\alpha\in\Omega_2$ обозначим через $\Delta_\alpha^{(1)}(\tau)$ детерминант Фредгольма [5] оператора $\mathrm{E}-\tau\mathrm{K}_\alpha$, $\tau\in\mathbb{C}$, где E – тождественный оператор. Тогда при каждом $\tau\in\mathbb{C}$ детерминант Фредгольма $\Delta_\alpha^{(1)}(\tau)$ представляется в виде следующего ряда [5]

$$\triangle_\alpha^{(1)}(\tau)=1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-\tau)^n}{n!}d_n^{(1)},\alpha\in\Omega_2,$$

где

$$d_\kappa^{(1)}=\int_{\Omega_1}\dots\int_{\Omega_1}\Pi_1^{(\kappa)}(\xi_1,\dots,\xi_\kappa;\xi_1,\dots\xi_\kappa)\,d\xi_1\dots d\xi_\kappa,$$

$$\Pi_1^{(\kappa)}(\xi_1,\dots,\xi_\kappa;\eta_1,\dots\eta_\kappa)=\begin{vmatrix}k_1(\xi_1,\eta_1)\dots k_1(\xi_1,\eta_\kappa)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_1(\xi_\kappa,\eta_1)\dots k_1(\xi_\kappa,\eta_\kappa)\end{vmatrix}. \tag{1}$$

Для каждого $\beta\in\Omega_1$ обозначим через $\Delta_\beta^{(2)}(\tau)$ детерминант Фредгольма оператора $\mathrm{E}-\tau Q_\beta$, $\tau\in\mathbb{C}$. Тогда для каждого $\tau\in\mathbb{C}$ имеем

$$\triangle_\beta^{(2)}(\tau)=1+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-\tau)^n}{n!}d_n^{(2)}\ ,\ \ \beta\in\Omega_1\ ,$$

где $d_\kappa^{(2)}=\int_{\Omega_2}\dots\int_{\Omega_2}\Pi_2^{(\kappa)}(\xi_1,\dots,\xi_\kappa;\xi_1,\dots\xi_\kappa)\,d\xi_1\dots d\xi_\kappa$,

$$\Pi_2^{(\kappa)}(\xi_1,\dots,\xi_\kappa;\eta_1,\dots\eta_\kappa)=\begin{vmatrix}k_2(\xi_1,\eta_1)\dots k_2(\xi_1,\eta_\kappa)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ k_2(\xi_\kappa,\eta_1)\dots k_2(\xi_\kappa,\eta_\kappa)\end{vmatrix}. \tag{2}$$

Лемма 1. При каждом $\tau\in\mathbb{C}$ функции

$$\text{а) } D_1(y;\tau)=\Delta_y^{(1)}(\tau),y\in\Omega_2;\ \text{б) } D_2(x;\tau)=\Delta_x^{(2)}(\tau),x\in\Omega_1$$

являются непрерывными, соответственно, на Ω_2 и Ω_1.

Определение 1. Непрерывные функции

$$D_1(y)=D_1(y;\tau)\ \text{и}\ D_2(x)=D_2(x;\tau)$$

называются *детерминантами* операторов $\mathrm{E}-\tau T_1$ и $\mathrm{E}-\tau T_2$, $\tau\in\mathbb{C}$, где T_1 и T_2 – частично интегральные операторы с непрерывными ядрами $k_1(x,s)\in C(\Omega_1^2)$ и $k_2(t,y)\in C(\Omega_2^2)$.

Для каждого $\alpha\in\Omega_2$ и $\beta\in\Omega_1$ обозначим через $M_\alpha^{(1)}(x,s;\tau)$ и $M_\beta^{(2)}(y,t;\tau)$ миноры Фредгольма операторов $\mathrm{E}-\tau\mathrm{K}_\alpha$, $\tau\in\mathbb{C}$ и $\mathrm{E}-\tau Q_\beta$, $\tau\in\mathbb{C}$, соответственно.

Тогда при каждом $\tau\in\mathbb{C}$ имеем [5]

$$M_\alpha^{(1)}(x,s;\tau)=k_1(x,s)+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-\tau)^n}{n!}q_n^{(1)}(x,s)\,,\ \ (x,s)\in\Omega_1^2,$$

$$M_{\beta}^{(2)}(y,t;\tau) = k_2(t,y) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-\tau)^n}{n!} q_n^{(2)}(t,y)\,,\ \ (t,y)\in\Omega_2^2,$$

где

$$q_{\kappa}^{(1)}(x,s) = \int_{\Omega_1} \cdots \int_{\Omega_1} \Pi_1^{(\kappa+1)}(x,\xi_1,...,\xi_\kappa;s,\xi_1,...\xi_\kappa)\,d\xi_1...d\xi_\kappa,$$

$$q_{\kappa}^{(2)}(t,y) = \int_{\Omega_2} \cdots \int_{\Omega_2} \Pi_2^{(\kappa+1)}(t,\xi_1,...,\xi_\kappa;y,\xi_1,...\xi_\kappa)\,d\xi_1...d\xi_\kappa$$

и функции $\Pi_1^{(n)}(\xi_1,...,\xi_n;\eta_1,...\eta_n)$, $\Pi_2^{(n)}(\xi_1,...,\xi_n;\eta_1,...\eta_n)$ определены соответственно равенствами (1) и (2).

Лемма 2. При каждом $\tau\in\mathbb{C}$ функции

$$\text{а) } M_1(x,s,y;\tau) = M_y^{(1)}(x,s;\tau)\,;\ \text{б) } M_2(x,t,y;\tau) = M_\beta^{(2)}(y,t;\tau)$$

являются непрерывными соответственно на $\Omega_1^2\times\Omega_2$ и $\Omega_1\times\Omega_2^2$.

Определение 2. Непрерывные функции

$$M_1(x,s,y) = M_1(x,s,y;\tau) \text{ и } M_2(x,t,y) = M_2(x,t,y;\tau)$$

называются *минорами* операторов $\mathrm{E}-\tau\mathrm{T}_1$ и $\mathrm{E}-\tau\mathrm{T}_2$, $\tau\in\mathbb{C}$, соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fredholm I. Sur une nonvelle me'thode pour la re'solution du proble'me de Dirichlet, - Kong. Vetenskaps-Akademiens Fro'h. Stockholm, 1900. - P. 34-46.

2. Fredholm I. Sur une class de'quations fonctionelless // Acta. Math. - 1903, 27. - P. 365-390.

3. Carleman T. Zur Theorie der linearen Integralgleichungen // Math. Zeitschr. - 1921, 9. - P. 196-217.

4. Михлин С.Г. О сходимости рядов Фредгольма // ДАН СССР. – 1944, №9 (XLII). - С. 387-390.

5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 5-х т. Том 4, часть I. - М.: Наука, 1974.

Моделирование распространения и взаимодействия акусто-гравитационных и сейсмических волн на границе раздела земля-атмосфера от различного типа сингулярных источников

Михайлов А. А.[1]

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;
alex_mikh@omzg.sscc.ru

В данной работе рассматриваются результаты численного моделирования распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для пространственно-неоднородной модели "Атмосфера-Земля". Данные исследования являются продолжением исследований, приведчнных в работах [1, 2], но для разных типов источников. Проведенные расччты позволяют исследовать взаимосвязь между волнами в литосфере и атмосфере. Например, смоделировать эффект акусто-сейсмической индукции.

Распространение акусто-гравитационных волн в изотермической атмосфере описывается линеаризованной системой уравнений Навье-Стокса в виде гиперболической системы первого порядка для Декартовой системы координат в виде:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\rho g}{\rho_0}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c_0^2\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_z\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right] - u_z\frac{\partial P_0}{\partial z} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0\left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right] - u_z\frac{\partial \rho_0}{\partial z}. \tag{5}$$

Здесь g - ускорение силы тяжести, $\rho_0(z)$ - плотность невозмущчнной атмосферы, $c_0(z)$- скорость звука, $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ - вектор скорости смещения частиц воздуха, P и ρ- соответственно возмущения давления и плотности под действием распространения волны. Нулевые подиндексы для физических параметров среды означают, что их значения задаются для невозмущенного состояния атмосферы.

Распространение сейсмических волн в литосфере описывается известной системой уравнений первого порядка теории упругости в виде:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + F_i f(t), \tag{6}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) + \lambda\delta_{ik} div\vec{u}, \qquad i = 1,2,3 \quad k = 1,2,3. \tag{7}$$

Здесь δ_{ij}- символ Кронекера, λ, μ - упругие параметры среды, ρ_0- плотность среды, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ - вектор скорости смещений, σ_{ij} - компоненты тензора напряжений. $\vec{F} = F_1\vec{e}_x + F_2\vec{e}_y + F_3\vec{e}_z$ описывает распределение локализованного в пространстве источника, а $f(t)$- заданный временной сигнал в источнике.

Полагается, что граница раздела сред атмосфера и упругое полупространство проходит по плоскости $z = 0$. В этом случае условие контакта двух сред при $z = 0$ записывается как:

$$u_z|_{z=-0} = u_z|_{z=+0}\,; \quad \left.\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t}\right|_{z=-0} = \left.\left(\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} + \rho_0 g u_z\right)\right|_{z=+0}; \quad \sigma_{xz}|_{z=-0} = \sigma_{yz}|_{z=-0} = 0. \tag{8}$$

Задача решается при нулевых начальных данных

$$u_i|_{t=0} = \sigma_{ij}|_{t=0} = P|_{t=0} = \rho|_{t=0} = 0, \qquad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3. \tag{9}$$

Предлагаемый алгоритм решения основан на применении интегрального преобразования Лагерра по временной координате. Этот метод можно рассматривать как аналог известного спектрального метода на основе Фурье преобразования. Следуя работам [3], [4], применим к поставленной задаче (1)-(9) интегральное преобразование Лагерра по времени вида:

$$\overrightarrow{W}_n(x,y,z) = \int_0^\infty \overrightarrow{W}(x,y,z,t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht) d(ht), \qquad (10)$$

где $l_n^\alpha(ht)$ - ортогональные функции Лагерра.
Для удовлетворения начальных условий (9) необходимо и достаточно положить $\alpha 1$. Кроме того, введен параметр сдвига $h > 0$, смысл и эффективность применения которого подробно обсуждается в работах [3], [4].
По горизонтальным пространственным координатам применяется конечное преобразование Фурье, а по вертикальной координате используется разностный метод. В результате сделанных преобразований получается система линейных алгебраических уравнений.
Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 21-51-15002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайленко Б.Г., Михайлов А.А. Численное моделирование распространения сейсмических и акусто-гравитационных волн для модели "Земля-Атмосфера"при наличии ветра в атмосфере // СибЖВМ, 2014. Т. 17, No. 2, с. 149-162.

2. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Modeling the Wind Influence on Acoustic-Gravity Propagation Waves in a Heterogeneous Earth-Atmosphere Model // Finite Difference Methods, Theory and Applications. Lecture Notes in Computer Science. 2015, vol. 9045. P. 290-298.

3. Mikhailenko B.G. Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Applied Mathematics Letters. 1999. No. 12. P. 105-110.

4. Mikhailenko B.G., Mikhailov A.A., Reshetova G.V. Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophysical Prospecting. 2003. No. 51. P. 37-48.

О разрешимой расширении одной филиформной супералгебры лейбница

Муратова Х.А.[1], Бекниязов А.Е.[2]

Институт математики им. В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан,
xalkulova@gmail.com
Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
bekniyazov.asan@mail.ru

Теория супералгебр Ли и Лейбница играет важную роль в современной математике, поскольку она возникла из свойств суперсимметрии в математической физике. Множество работ посвящено изучению супералгебр Лейбница и упомянем только статьи [2], [3] (и ссылку в них), в которых получено описание нильпотентных супералгебр Лейбница с нилиндексом, равным размерности супералгебры.

Напомним, что разрешимые алгебры Лейбница строятся методом Г.Мубарякзянова с помощью дифференцирований и ниль-независимых дифференцирований. Для построения разрешимых супералгебр Лейбница такой метод имеет свое применение только путем дифференцирования четной степени нильрадикала.

В этой работе классифицируем разрешимые суперaлгебры Лейбница $L = L_0 + L_1$ с нильрадикалом $N = N_0 + N_1$ при условии, что $\dim N_0 = 2$ и нильиндекс N равен $m + 2$ (где $m = \dim N_1$).

Определение 1. [1] Z_2-градуированное векторное пространство $L = L_0 \oplus L_1$ называется суперaлгеброй Лейбница, если она снабжена произведением $[-,-]$ которое удовлетворяет следующему условию:

$$\big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] - (-1)^{\alpha\beta}\big[[x,z],y\big] \text{ – супертождество Лейбница}$$

для любых $x \in L, y \in L_\alpha, z \in L_\beta$.

Чтобы ввести понятия нильпотентности и разрешимости суперaлгебры Лейбница определим следующие *нижний центральный* и *производный* ряды:

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1, \qquad L^{[1]} = L,\ L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}],\ s \geq 1,$$

соответственно.

Определение 2. Алгебра Лейбница L называется *нильпотентной* (соответственно *разрешимой*), если существует $k \in N$ $(s \in N)$ такое, что $L^k = \{0\}$ (соответственно $L^{[s]} = \{0\}$).

Минимальное число k с таким свойством называется *индексом нильпотентности* алгебры L.

Отметим, что понятие дифференцирования суперaлгебр отличается от обычного дифференцирования алгебр, и как в Z_2-градуированной алгебре пространство дифференцирований состоит также из четной и нечетной подпространств.

Определение 3. Дифференцированием суперaлгебры L степени $s,\ s \in Z_2$ называется линейное преобразование $D : L \to L$ удовлетворяющее следующему условию:

$$D([x,y]) = [x, D(y)] + (-1)^{s\cdot\beta}[D(x), y],$$

где $x \in L, y \in L_\beta$.

В работе [3] приведены нильпотентные суперaлгебры Лейбница с нильиндексом $n+m$, где n и m размерности четной и нечетной частей суперaлгебры. В случае когда $n = 2$, $m > 2$ показано, что такие нильпотентные суперaлгебры Лейбница существует только при нечетном m и имеют характеристическую последовательность $(2 \mid m)$, которая приведена в следующей теореме.

Теорема 1. [3] Пусть L суперaлгебра Лейбница нильиндекса $n + m$ с характеристической последовательностью $(n \mid m)$, тогда $n = 2$, m – нечетно и существует базис $\{e_1, e_2, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ в суперaлгебре L такой, что ее умножение в этом базисе имеет следующий вид:

$$F_{2,m} : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_2, & \\ [y_k, e_1] = y_{k+1}, & 1 \leq k \leq m-1, \\ [e_1, y_k] = -y_{k+1}, & 1 \leq k \leq m-1, \\ [y_i, y_{m+1-k} = (-1)^{k+1} e_2, & 1 \leq k \leq m. \end{cases}$$

Далее приведем описание дифференцирования нулевой степени суперaлгебры $F_{2,m}$, которая получена посредством проверки свойства дифференцирования из Определения 3.

Предложение 1. Дифференцирование нулевой степени супералгебры $F_{2,m}$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} d(e_1) = a_1e_1 + a_2e_2, \qquad d(e_2) = 2a_1e_2, \\ d(y_k) = (k - \frac{m-1}{2})a_1y_k + b_2y_{k+1} + b_4y_{k+3} + \cdots + b_{m-k+1}y_m, \quad 1 \leq k \leq m, \end{cases}$$

где $b_{2k+1} = 0, \quad 1 \leq k \leq \frac{m-1}{2}$.

С помощью описания дифференцирования супералгебры $F_{2,m}$ докажем следующую теорему.

Теорема 2. Не существует разрешимой супералгебры Лейбница L с нильрадикалом $F_{2,m}$.

Литература

1. Albeverio S., Ayupov Sh.A., Omirov B.A. *On nilpotent and simple Leibniz algebras.* Comm. in Algebra, 33(1), 2005, 159–172.

2. Ayupov Sh. A., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. *The classification of filiform Leibniz superalgebras of nilindex $n + m$.* Acta Math. Sinica (English Series), 25(1), 2009, 171–190.

3. Camacho L., Gomez J.R., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. *On the description of Leibniz superalgebras of nilindex $n + m$.* Forum Mathematicum, 24 (4), 2012, 809-826.

Об одной задаче при геометрическом ограничении на управления

Мустапокулов Х. Я.[1]

Ташкентский государственный технический университет, Ташкент, Узбекистан;
m_hamdam@mail.ru

В данной работе указаны оптимальный переход в управляемой задаче, описываемой бесконечной системой дифференциальных уравнений.

Рассмотрим следующую задачу

$$\dot{z}_k = -\lambda_k z_k - u_k, \; z_k(0) = z_{k0}, \; k = 1, 2, ... \tag{1}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ...$ некоторые последовательности постоянных чисел, $z_k, u_k, z_{k0} \in R^1$, $z_0 = (z_{10}, z_{20}, ...) \neq 0$, $u \in \{u| \|u(t)\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^2(t)} \leq \rho, \; 0 \leq t \leq T\}$– допустимые управления.

Известно [1], что задача (1), для любого заданного положительного числа T, имеет единственное решение $z(t) = (z_1(t), z_2(t), ...)$, $0 \leq t \leq T$, координаты которого определяются формулами

$$z_k(t) = z_{k0}e^{-\lambda_k t} - \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}u_k(\tau)d\tau, \; t \in [0; T], \; k = 1, 2, ...$$

Определение. Будем говорить, что в задаче (1) возможен переход из начальной точки $z_0 \neq 0$ в конечную точку 0, если существует положительное число $T = T(z_0)$ и допустимые управление $u(t), t \in [0, T]$, такое, что соответствующее траектории $z(t), 0 \leq t \leq T$ удовлетворяет условиям: $z(0) = z_0$, $z(T) = 0$.

Теорема. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |z_{k0}|^2 < \rho^2$ *, то в задаче (1) возможен оптимальный переход из любой начальной точки* $z_0 \neq 0$ *в ноль.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л. Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1992. Т.56. С. 810-826.

Разрешимость задачи преследования для одной дифференциальной игры параболического типа

Мухсинов Е.М.

Таджикский государственный университет право, бизнеса и политики, Худжанд, Таджикистан;
yodgor.mukhsinov@gmail.com

Рассматривается дифференциальная игра описываемая параболическим уравнением нейтрального типа

$$\frac{\partial}{\partial t} z\left(t, s\right) - \frac{\partial}{\partial t} z\left(t-1, s\right) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} z\left(t, s\right) + \overline{u}\left(t, s\right) - \overline{v}(t, s), \tag{1}$$

где $t0, \quad s \in [0, \pi]\,,$ при каждом t функции

$$z\left(t,\ \cdot\right),\ \frac{\partial}{\partial t} z\left(t, \cdot\right),\ \frac{\partial}{\partial s} z\left(t, \cdot\right),\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} z\left(t, \cdot\right),\ \overline{u}\left(t, \cdot\right), \overline{v}\left(t, \cdot\right)$$

принадлежат пространству $L_2\left[0,\ \pi\right]$ с начальным положением $z\left(\mu, \cdot\right) = x_0, -1 \leq \mu \leq 0$ и краевым условием $z\left(t, 0\right) = z\left(t, \pi\right) = 0$. На управления игроков наложены следующие ограничения

$$\int_0^{\pi} \left|\overline{u}\left(t, s\right)\right|^2 ds \leq \rho^2\ ,\ \int_0^{\pi} \left|\overline{v}\left(t, s\right)\right|^2 ds \leq \sigma^2\ \ ,\ \rho > \sigma > 0$$

Положив $X = L_2\left[0,\ \pi\right],\ x\left(t\right) = z\left(t, \cdot\right),\ u\left(t\right) = \overline{u}\left(t, \cdot\right),\ v\left(t\right) = \overline{v}(t, \cdot)$ перепишем игру (1) в абстрактной форме

$$\dot{x}\left(t\right) - \dot{x}\left(t-1\right) = Ax\left(t\right) + u\left(t\right) - v\left(t\right) \tag{2}$$

с начальным положением $x\left(\mu\right) = x_0,\ -1 \leq \mu \leq 0$,
где линейный замкнутый оператор $A = \frac{\partial^2}{\partial s^2}$ имеющий плотную в X область определения $D = \{y : y' -$ абсолютно непрерывна$, y'' \in\ L_2\left[0,\ \pi\right],\ y\left(0\right) = y\left(\pi\right) = 0\}$ порождает сильно непрерывную полугруппу $T\left(t\right)$, что
$T\left(t\right) x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \varphi_n,$ где $a_n =< x, \varphi_n >,\ \varphi_n\left(s\right) = \sqrt{2}\sin ns\ ,\ 0 \leq s \leq \pi,$ а последовательность $\{\varphi_n(s)\}$ образует ортогональный базис [1, с. 266].

Следующая теорема обеспечивает разрешимость задачи преследования в смысле Понтрягина [2, с.308, 3, с.254.] для игры (2), когда терминальным множеством является $M = \{x : \|x\| \le l\}$.

Теорема

Если имеет место включение

$$[\Phi(\tau) - \Phi(\tau - 1)]\, x_0 \in M - \int_0^{\tau} \Phi(\tau - t)\, S_{\rho-\sigma}\, dt, \tag{3}$$

где

$$S_{\rho-\sigma} = \{x : ||x|| \le \rho - \sigma, \}$$

а

$$\Phi(t) = T(t) + \chi(t-1)\, \Phi(t-1) + \int_0^t T(t-\tau)\chi(\tau-1)A\Phi(\tau-1)d\tau$$

-*фундаментальное решение,*

$$\chi(s) = \begin{cases} 0, & s \le 0 \\ 1, & s > 0 \end{cases}$$

- *характеристическая функция [4, с.267], то :*

1. *из начального положения x_0 возможно завершение преследования. При этом число $\tau(x_0)$ – точная нижняя грань тех τ, для каждого из которых имеет место включение (3), является оптимальным временем преследования;*

2. *в частности из точки x_0, для которого*

$$T(1)\, x_0 = \sqrt{\frac{3}{\pi}}(\frac{ls}{\pi} - 2(\rho - \sigma)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1} \cdot (1 - e^{-n^2}) cos n\pi \cdot sin n s}{n^3})$$

возможно завершение преследования за время $\tau(x_0) = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. М.: Наука, 1980.384с.
2. Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры преследования //Математический сборник. 1980. т.112(154). №3(7). с.307-331.
3. Мухсинов Е.М. Разрешимость задачи преследования для одной линейной дифференциальной игры нейтрального типа //Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.60. Материалы Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии. Казань. 2021. 253-255с.
4. Datko R. Linear Autonomous Neutral Differential Equations is a Banach Space // Journal of Differential equations. 1977. №25. p.258-274.

О геометрии субмерсий

Нарманов А. Я.[1], Шарипов Х. Ф.[2]

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
narmanov@yandex.ru;
Самаркандский государственный университет, Самарканд,Узбекистан,
shxurshid@yahoo.com

Дифференцируемые отображения максимального ранга играют важную роль во всех разделах математики, в частности в римановой геометрии. Один из важных классов дифференцируемых отображений максимального рангаЏ погружения.

Двойственное понятие субмерсии сформировалось относительно недавно, во второй половине XX века [1]. Изучение геометрии субмерсий, в частности геометрии римановых субмерсий, оказалось очень плодотворным благодаря тому факту, что римановы субмерсии имеют приложения во всех разделах современной римановой геометрии. Изучение геометрии субмерсий тесно связано с изучением геометрии слоений, которая является важным разделом современной геометрии [2],[3].

Пусть $M-$ гладкое связное риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g.

Определение-1. *Дифференцируемое отображение максимального ранга $\pi : M \to B$, где $B-$ гладкое риманово многообразие размерности m, называется субмерсией при $n > m$.*

По теореме о ранге дифференцируемой функции полный прообраз $\pi^{-1}(p)$ каждой точки $p \in B$ является подмногообразием размерности $k = n - m$. Таким образом, субмерсия $\pi : M \to B$, порождает слоение F размерности $k = n - m$ на многообразии M, слои которого являются компонентами связности прообразов точек $p \in B$.

Касательное пространство T_qF подмногообразия $L_p = f^{-1}(p)$ в точке $q \in L(p)$ совпадает с подпространством $Kerdf_q$ касательного пространства T_qM, где df_q-дифференциал отображения в точке q.

Обозначим через $H(q)$ - ортогональное дополнение подпространства T_qF. В результате возникают подрасслоения $TF = \{T_qF\}$, $TH = \{H(q)\}$ касательного расслоения TM и имеем ортогональное разложение $TM = TF \bigoplus H$. Таким образом каждое векторное поле X разложимо в виде: $X = X^h + X^v$, где $X^h \in TH, X^v \in TF$. Если $X^h = 0$ (соответственно $X^v = 0$), то поле X называется вертикальным (горизонтальным) векторным полем.

Определение-2. *Дифференцируемое отображение максимального ранга $\pi : M \to B$ назвыается римановой субмерсией, если дифференциал $d\pi$ отображения π сохраняет длину горизонтальных векторов.*

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема-1. *Пусть $M-$ гладкое связное полное риманово многооб- разие. Если субмерсия $\pi : M \to B$ является римановой, то она является расслоением. Кроме того если слоение F является вполне геодезическим римановым слоением, то все слои изометричны.*

Имеет место следующая теорема.

Теорема-2. *Пусть $M-$ гладкое связное полное риманово многооб- разие нулевой секционной кривизны. Если субмерсия $\pi : M \to R$ является римановой, то слоение F является вполне геодезическим римановым слоением с изометричными слоями.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Hermann R. *A Sufficient Condition that a Mapping of Riemannian Manifolds to be a Fiber Bundle//* Proc. Amer. Math. Soc. –1960 –V. – 11 – P. 236–242.
2. Narmanov A. *On the Geometry of Totally Geodesic Riemannian Foliations//* Siberian Adv. Math. – 2000 –V. –10 –P. 104–111.
3. Tondeur Ph., *Foliations on Riemannian Manifolds* – New York.: Springer-Verlag, 1988. – 206 c.

Теорема Гурвитц для $A(z)-$аналитических функций

Неъматуллаева М. Д.

Национальний Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
muhayyo.rn@gmail.com

Настоящая работа посвящена аналитической теории решения уравнения Бельтрами

$$f_{\bar{z}}(z) = A(z) f_z(z), \quad (1)$$

имеющего непосредственное отношение к квазиконформным отображениям. Относительно функции $A(z)$, в общем случае предполагается, что она измерима и $|A(z)| \leq C < 1$ почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. В литературе решения уравнения (1) принято говорить $A(z)-$*аналитическими функциями.*

Пусть $A(z)-$антианалитическая, $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ в области $D \subset \mathbb{C}$ такая, что $|A(z)| \leq C < 1, \forall z \in D$. Положим

$$D_A = \frac{\partial}{\partial z} - \bar{A}(z)\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{D}_A = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда согласно (1) класс $A(z)-$аналитических функций $f \in O_A(D)$ характеризуется тем, что $\bar{D}_A f = 0$.

Множество $L\,(a;R) = \left\{ |\psi\,(z;a)\,| = \left| z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(z;a)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right| < r \right\}$ для достаточно маленьких R компактно принадлежить D и содержит точку a, где $\gamma(z;a)-$ гладкая кривая, соединяющая точки $z;a$. Это множество называется $A(z)-$ лемнискатой с центром в точке a и обозначется как $L(a;R)$. Она является односвязной областью. Пусть функция $f \in O_A(L(a;R))$ и в некоторой проколотой окрестности a и не обращается нулю. Мы назовем $A(z)$ логарифмическим вычетом в точке a $A(z)-$аналитический функции $f(z)$ вычет логарифмической производной

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}(dz + A(z)d\bar{z}) = dLnf(z) \quad (2)$$

в точке a.

Можно показать, что

$$d(Lnf(z)) = \frac{1}{f(z)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) = \frac{1}{f(z)}\left(\frac{\partial f}{\partial z}dz + A(z)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}\right) = \frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}(dz + A(z)d\bar{z}).$$

Пусть $a \in \mathbb{C}$ является нулем порядка n $A(z)-$аналитической функции $f(z)$. Тогда в некоторой окрестности $A(z)-$лемнискаты $L(a;R)$ имеем $f(z) = \psi(z;a)^n h(z)$, где $h(z) \in O_A(D), h(a) \neq 0$. Поэтому в $A(z)-$лемнискате $L(a;R)$

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)} = \frac{n}{\psi(z;a)} + \frac{\frac{\partial h(z)}{\partial z}}{h(z)}. \quad (3)$$

Если $b \in \mathbb{C}$ полюс функции $f(z)$ порядка m, то имеем $f(z) = \frac{g(z)}{\psi^n(z;b)}$, где $g(z) \in O_A(D), g(b) \neq \infty$. Поэтому в $A(z)-$лемнискате $L(b;R)$

$$\frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)} = \frac{\frac{\partial g(z)}{\partial z}}{g(z)} - \frac{m}{\psi(z;b)} \quad (4)$$

Теорема 1. [1] Пусть функция $f(z)$ $A(z)-$мероморфна в области $D \subset \mathbb{C}$ и $G \subset\subset D-$область, граница ∂G которой является непрерывной кривой, пусть еще ∂G не содержит ни нулей, ни полюсов $A(z)-$аналитической функции $f(z)$. Тогда имеет место равенство

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial G} \frac{\frac{\partial f(z)}{\partial z}}{f(z)}(dz + A(z)d\bar{z}), \quad (5)$$

где N и P соответственно число нулей и число полюсов функции $f(z)$ в области G и $\partial G-$ориентированная граница.

Теорема 2. [1] (аналог принципа аргумента) Пусть функция $f(z)$ $A(z)-$мероморфна в области $D \subset \mathbb{C}$ и $G \subset\subset D-$область, граница ∂G которой является непрерывной кривой, пусть еще не содержит ни нулей, ни полюсов $A(z)-$аналитической функции $f(z)$. Тогда

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G} f(z),$$

$\partial G-$ориентированная граница.

Используя доказанный принцип аргумента аналогично классическому случае получается следующее утверждение.

Теорема 3. [6] (аналог теоремы Руше) Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ голоморфны в замкнутой области $\bar{G}$ с непрерывной границей ∂G и пусть

$$|f(z)| > |g(z)| \text{ для всех } z \in \partial G. \quad (6)$$

Тогда функции $f(z)$ и $f(z) + g(z)$ имеют в G одинаковое число нулей.

Для простоты будем предполагать, что коэффициенты исследуемого многочлена

$$f(Z) = a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + ...a_n, \quad (7)$$

где $Z = z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(z;a)} \overline{A(\tau)}d\tau}$. Действительные числа и что. Имеет место

Теорема 4. (аналог теоремы Гурвитц) Для того чтобы все корни многочлена (7) с действительные коэффициентами $a_k (a_0 > 0)$ имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$D_1 = a_1 > 0, D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,\ ...,\ D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & \dots\dots & 0 \\ a_3 & a_2 & \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots\dots & a_1 & a_0 & 0 \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots\dots & a_n \end{vmatrix} > 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Sadullayev A., Jabborov N. M. On a class of A-analytic functions//J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2016. Volume 9, Issue 3. 374-383 p.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва.: Физматгиз, 1958.
3. Ahlfors L. Lectures on quasiconformal mappings. Toronto-New York-London, 1966.
4. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. Москва.: Наука, 1988.
5. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Москва.: Наука, 1966.
6. Тишабоев Ж. К., Отабоев Т. У., Хурсанов Ш. Вычет и принцип аргумента для $A(z)-$аналитической функции//Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. Т.144. С. 55-64.

Некоторые аспекты численного анализа для модельного нелинейного уравнения дробного переменного порядка

Паровик Р. И.[1], Твердый Д. А.[2]
[1,2]*Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия;*
[1]*Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия*
[1]*romanparovik@gmail.com,* [2] *dimsolid95@gmail.com*

Аннотация. В статье предложена нелокальная явная конечно-разностная схема для численного решения нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с производной дробного переменного порядка типа Герасимова-Капуто. Изучены вопросы аппроксимации, сходимости и устойчивости этой схемы. Показано, что нелокальная конечно-разностная схема условно устойчива и сходится с первым порядком. На примере дробного уравнения Риккати проведен анализ вычислительной точности численного метода. Показано, что при увеличении узлов расчетной сетки порядок вычислительной точности стремится к единице, т.е. к теоретическому значению порядка точности.

Определение 1. Оператор дробного переменного порядка $0 < \alpha(t) < 1$, действующий на функцию $u(t) \in C[0, T]$:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\sigma) d\sigma}{(t-\sigma)^{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

где $\Gamma(.)$ – гамма-функция Эйлера, а $\dot{u}(t) = \frac{du}{dt}$ будем называть производной дробного переменного порядка типа Герасимова-Капуто. Некоторые свойства дробного оператора (1) можно найти в работе [1].

Определение 2. Уравнения, содержащие производные дробного переменного порядка типа Герасимова-Капуто (1), будем называть дробными уравнениями.

Рассмотрим следующую задачу Коши для нелинейного дробного уравнения:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\sigma) - b(t)u(t) = f(u,t), \qquad u(0) = u_0, \tag{2}$$

где $u(t) \in C[0,T]$ – функция решения, $t \in [0,T]$ – - время, T – модельное время, u_0 – заданная константа, $b(t) > 0$ – непрерывная функция, $f(u,t)$ – а нелинейная функция, удовлетворяющая условию Липшица $||f(u_1,t) - f(u_2,t)|| < L|u_1 - u_2|$ с константой L по переменной $u(t)$.

Замечание 1. Задача Коши (1) описывает широкий класс динамических процессов с переменной памятью [4].

В силу нелинейности задачи Коши (2), решение будем искать с помощью численного метода конечно-разностных схем на равномерной сетке. Разобьчм отрезок $[0,T]$ на N равных частей -Џ узлов сетки с шагом $\tau = T/N$. Будем считать, что функция $u(t)$ удовлетворяет необходимой гладкостью для построения конечно-разностной схемы, т.е. $u(t) \in C^2[0,T]$. Тогда функция решения $u(t)$ перейдет в сеточную функцию решения $u(t_k)$ или u_k, где $k = 0, ..., N-1$. Приходим к дискретному аналогу задачи Коши [2,3]:

$$\begin{gathered} A_k \sum_{j=0}^{k} w_j^k \left(u_{k-j+1} - u_{k-j}\right) + b(t)u(t) = f_k, \qquad u_0 = C, \\ A_k = \frac{\tau^{-\alpha_k}}{\Gamma(2-\alpha_k)}, \qquad w_j^k = (j+1)^{1-\alpha_k} - j^{1-\alpha_k}. \end{gathered} \tag{3}$$

где C – известная константа, а $f_k = f(u_k, t_k)$, $b_k = b(t_k)$. Будет справедлива:

Лемма 2. Аппроксимация $\bar{\partial}_{0t}^{\alpha(t)} u(\sigma) = A_k \sum_{j=0}^{k} w_j^k \left(u_{k-j+1} - u_{k-j}\right)$ оператора типа Герасимова-Капуто (1) удовлетворяет следующей оценке:

$$\left|\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\sigma) - \bar{\partial}_{0t}^{\alpha(t)} u(\sigma)\right| \le C\tau, \tag{4}$$

Лемма 3. Дискретная задача Коши (3) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу (2) с первым порядком, т.е. имеет ошибку:

$$\max_{1 \le j \le k} |u(t_j) - u_j| = O(\tau) \tag{5}$$

Задачу Коши (3) запишем в виде нелокальной явной конечно-разностной схемы:

$$u_{k+1} = \frac{1}{A_k}\left(\left(A_k + b_k\right)u_k - A_k \sum_{j=1}^{k-1} w_j^k \left(u_{k-j+1} - u_{k-j}\right) + f_k\right), k = 1, ..., N-1, u_0 = C. \tag{6}$$

Теорема 1. Нелокальная явная конечно-разностная схема (6) сходится с первым порядком $|u_k - \bar{u}_k| = O(\tau)$, если выполнено условие для любого k

$$\tau \le \frac{1}{\left(b_k \Gamma(2-\alpha_k)\right)^{1/\alpha_k}}. \tag{7}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ortigueira M.D., Valerio D., Machado J.T. Variable order fractional systems // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. Vol. 71, є 2019. C. 231–243.
2. Tvyordyj D.A. Hereditary Riccati equation with fractional derivative of variable order // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 253. є. 4. C. 564–572.
3. Parovik R.I., Tverdyi D.A. Some Aspects of Numerical Analysis for a Model Nonlinear Fractional Variable Order Equation // Math. Comput. Appl. 2021. Vol. 26, є 3. C. 55.
4. Parovik R.I., Mathematical models of oscillators with memory // Oscillators-Recent Developments. 2019. C. 3-21. //

Задача со свободной границей для систем уравнений типа реакция-диффузия

Расулов М. С.[1], Норов А. К.[2]
Институт математики, Ташкент, Узбекистан,
[1]rasulov@mathinst.uz; [2]norov@mathinst.uz

В настоящей заметке рассматривается задача со свободной границей для системы параболических уравнений реакции-диффузии:

$$u_t - d_1 u_{xx} - m_1 u_x = u(a - bu - c_1 v), \qquad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$v_t - d_2 v_{xx} - m_2 v_x = -c_2 uv, \quad (t,x) \in Q, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \le x \le s_0 = s(0) < l, \tag{3}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

$$u_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$v_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$v_x(t,l) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$u(t,x) = 0, \quad s(t) \le x \le l, \tag{9}$$

$$\dot{s}(t) = -\mu u_x(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{10}$$

где $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$, $Q = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < l\}$; $s(t)-$ свободная (неизвестная) граница, которая представляет фронт распространения, определяется вместе с функциями $u(t,x)$, $v(t,x)$. Здесь $u(t,x)$, $v(t,x)$ – концентрация биохимических препаратов [1], d_i, a, m_i, b, c_i, $\mu-$ положительные постоянные а начальные функции u_0 и v_0 удовлетворяют

$$\begin{cases} u_0 \in C^2([0,s_0]),\ u_0'(0) = u_0(s_0) = 0, \quad u_0 > 0 \ \text{ в } \ [0,s_0), \\ v_0 \in C^2([0,l]),\ v_0'(0) = v_0'(l) = 0, \quad v_0 > 0 \ \text{ в } \ [0,l). \end{cases}$$

Исследования проводятся по следующей схеме. Сначала устанавливаются двусторонние оценки для $u(t,x)$, $v(t,x)$ и $\dot{s}(t)$, а затем оценки для $|u|_{1+\alpha}$, $|v|_{1+\alpha}$, $|u|_{2+\alpha}$, $|v|_{2+\alpha}$.

Теорема 1. Пусть функции $(s(t), u(t,x), v(t,x))$ являются решением задачи (1)-(10). Тогда существуют положительные постоянные M_1, M_2, M_3 не зависящие от T, для которых справедливы оценки

$$0 \le u(t,x) \le M_1\big(\|u_0\|, \frac{a}{b}\big), \quad (t,x) \in D,$$

$$0 \le v(t,x) \le M_2\big(\|v_0\|\big), \quad (t,x) \in Q,$$

$$0 < \dot{s}(t) \le M_3, \quad 0 \le t \le T.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Pao C.V. Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York.: Plenum Press , 1992.

Метод функции Грина для начально-краевой задачи уравнении субдиффузии на звездообразном метрическом графе

Рахимов К. У.

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
kamoliddin_ru@inbox.ru;

В этой работе мы рассматриваем начально-краевую задачу для уравнение диффузии с дробной производной по времени на звездообразном метрическом графе. Решение было построено методом функции Грина и единственность решении была доказана с помощью аналога неравенство Гронуалла-Беллмана.

В последние годы заметно возрос интерес к уравнениям с дробной производной. Это связано с тем, что дифференциальные уравнения дробного порядка используется в многих областях физики, механики, биомедицины, прикладной математики и т.д. Дробное исчисление является мощным инструментом для получения динамических моделей. Оператор, определенной выражением

$$D^{\alpha}_{\eta,t}g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\eta}^{t}\frac{g(\xi)}{|t-\xi|^{\alpha}}d\xi, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где $\Gamma(x)$ — Гамма функция, называется дробной производной (производной Римана-Лиувилля) [см. 1].

Рассмотрим граф, имеющий m ребер, координаты которого определяются от 0 до L. Все ребра графа соединяются в точке 0. Ребра обозначим через $B_j, j = \overline{1,m}$. На каждом ребре графа мы исследуем уравнение

$$D^{\alpha}_{0,t}u_j(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u_j(x,t) - f_j(x,t), \quad 0 < x < L,\ 0 < t < T,\ \ j = \overline{1,m} \tag{1}$$

со следующими начальными условиями

$$\lim_{t\to 0} D^{\alpha-1}_{0,t}u_j(x,t) = \varphi_j(x), \quad 0 \le x \le L, \ \ j = \overline{1,m}. \tag{2}$$

В точке соединение требуем условия склеивание (условия Кирхгофа)

$$u_1(0,t) = u_2(0,t) = ... = u_m(0,t), \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x}u_i(x,t)\right) = 0. \tag{4}$$

для всех $t \in [0,T]$. Вводим следующие краевые условии

$$u_i(L,t) = \psi_i(t), \qquad i = \overline{1,m}. \tag{5}$$

Задача. Найти регулярное решения уравнений (1), удовлетворяющие условиям (2)–(5).

Пусть $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$, $\|u(\cdot,t)\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\int_0^L u_i^2(x,t)dx$.

Лемма 1. *Рассматриваемая задача имеет не более одного решения. Кроме того, если $\psi_i(t) \equiv 0, i = \overline{1,m}$, тогда решения удовлетворяют следующую априорную оценку*

$$D_{0,t}^{\alpha-1}||u||^2 \le E_\alpha(t^\alpha)\cdot D_{0,t}^{\alpha-1}||\varphi|| + \Gamma(\alpha)E_{\alpha,\alpha}\cdot D_{0,t}^{-\alpha}||f||^2,$$

где $E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\alpha n+1)$ and $E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/\Gamma(\alpha n+\mu)$ – функции Миттага-Леффлера. [см. 2].

Учитывая теорему **4.3.1.** [см. 1], поищем решения уравнений в следующем виде

$$u(x,t) = \int_0^t (G(x,t;L,\tau)u_\xi(L,\tau) - G(x,t;0,\tau)u_\xi(0,\tau) - G_\xi(x,t;L,\tau)u(L,\tau)+$$

$$+G_\xi(x,t;0,\tau)u(0,\tau))d\tau - \int_0^L \varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi - \int_0^t\int_0^L G(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau, \tag{6}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t),...,u_m(x,t))^T$ и G матричная функции Грина. Функция Грина удовлетворяет уравнение $G_{\xi\xi} - D_{t,\tau}^{\alpha}G = 0$, для всех $\xi \ne x, 0 < \tau < t$.
Мы ищем функцию Грина следующем виде

$$G = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(A_n\Gamma(x-\xi+2nL,t-\tau) + B_n\Gamma(x+\xi+2nL,t-\tau)\right),$$

где A_n и B_n постоянные матрицы размерности $m\times m$ и $\Gamma(s,t)$ определяется выражением

$$\Gamma(s,t) = \frac{1}{2}t^{\alpha/2-1}e_{1,\alpha/2}^{1,\alpha/2}(-\frac{|s|}{t^{\alpha/2}}).$$

Нам надо найти матрицы A_n и B_n. Используя условий (2)-(5) находим неизвестные матрицы. После чего, решение (6) можем написать.

Теорема. Пусть $\phi_i(t), \varphi_i(t) \in C[0,T]$ $(i = \overline{1,m}, T > 0)$, и $f(x,t) \in C^{0,1}\{(x,t) : 0 \le x \le L, 0 < t < T\}$. Тогда **задача** иммет единственное решение в виде

$$u(x,t) = -\int_0^t (G_\xi(x,t;L,\tau)u(L,\tau)+)d\tau - \int_0^L \varphi(t)G(x,t;\xi,\tau)d\xi-$$

$$-\int_0^t \int_0^L G(x,t;\xi,\tau)F(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

где $u=(u_1,...,u_m)^T$, $F=(f_1,...,f_m)^T$ и $G(x,t;\xi,\tau)$ определяется формулой

$$G=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n M^n\left(\Gamma(x-\xi+2nL,t-\tau)+M\Gamma(x+\xi+2nL,t-\tau)\right).$$

Здесь M известная матрицы размерности $m\times m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Псху А.В. Уравнение дробного порядка. Москва.: Наука, 2005.

2. Alikhanov A. A. A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations. // Differential equations. 2010. T.46, №5. pp. 658–664.

О конечномерных многообразиях подпространств пространства $P_n(X)$ вероятностных мер конечными носителями определенных на бесконечном нульмерном компакте X

Рахматуллаев А.Х.[1], Жувонов К.Р.[2]

Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан

[1]olimboy56@gmail.com; [2]qamariddin.j@mail.ru

В данной заметке доказывается подпространства $P_{n,n-1}(X)$ всех вероятностных мер $P(X)$ носители которых состоит ровно из n точек является $(n-1)-$ мерным топологическим многообразием.

Для компактов X имеется простая топологическая классификация пространств $P(X)$ всех вероятностных мер. В случае конечного $n-$ точечного пространства $X=\{n\}$ точки μ пространства $P(n)=P_n(n)$ являются выпуклыми линейными комбинациями мер Дирака:

$$\mu=m_0\delta(0)+m_1\delta(1)+...+m_{n-1}\delta(n-1)$$

Поэтому они естественно отождествляются с точками $(n-1)-$ мерного симплекса σ^{n-1}. При этом меры Дирака $\delta(i)$ образуют вершины симплекса, *а* массы m_i, помещенные в точки i, являются барицентрическими координатами меры μ. Таким, образом, компакт $P(n)$ аффинно гомеоморфен симплексу σ^{n-1}[1].

В случае бесконечного компакта X пространство $P(X)$ также является компактом (P сохраняет вес). Далее оно, содержа симплексы сколь угодно большого числа измерений, бесконечномерны. По теореме Кэли выпуклый компакт $P(X)\subset R^{C(X)}$ аффинно вкладывается в ℓ_2. Следовательно, по теореме Келлера компакт $P(X)$, как бесконечномерный выпуклый компакт, лежащий в ℓ_2, гомеоморфен гильбертову кубу $Q=I^{\chi_0}$. С другой стороны пространство $P(X)$ всех вероятностных мер на компакте X называется множеством всех регулярных борелевских вероятностных мер на X, снабженное слабейшей из топологий, для которых непрерывен каждый функционал $f_u : C(X) \to R$, переводящей меру μ в $\mu(U)$ (U открытое в X множество).

Для произвольного компакта X и меры $\mu \in P(X)$ определен ее носитель $\mathrm{supp}(\mu)$- это наименьшее из замкнутых множеств $F \subset X$, для которых $\mu(F) = \mu(X)$, т.е. $\mathrm{supp}(\mu) = \bigcap\{A : A = \bar{A}, \mu \in P(A)\}$; $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\mathrm{supp}\,\mu| \leq n\}$-множество всех мер μ с не более чем n носителями.

Определение [2]. Топологическое пространство X называется многообразием, моделированным на пространстве Y, или $Y-$ многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y.

Определение [2]. Подмножество $A \subset X$ пространства X называется гомотопически плотным в X, если существует гомотопия $h(x,t) : X \times [0,1] \to X$ такое, что $h(x,0) = id_X$ и $h(x,(0,1]) \subset A$.

Для бесконечного (любого) компакта X, любого $n \in N$ и функтора P_n положим $P_{n,n-1}(X) = P_n(X) \backslash P_{n-1}(X)$.

Теорема. Для любого нульмерного бесконечного компакта X подпространство $P_{n,n-1}(X)$ пространства $P_n(X)$ является $(n-1)-$ мерным многообразием и гомотопически плотным в $P_n(X)$.

Доказательство. Пусть X произвольный компакт. Возможны две случай.

1^0. X конечное множество. Для определенности пусть X состоит из n точек. Тогда $P_n(X) = P_n(\tilde{n}) = \sigma^{n-1}-(n-1)-$ мерный стандартный симплекс.т.е. $T(x_1, x_2, ..., x_n) = \sigma^{n-1}$ симплекс с вершинамы в точках x_i. А подпространство
$P_{n,n-1}(\tilde{n}) = T(x_1, x_2, ..., x_n) \backslash F_r(T(x_1, x_2, ..., x_n) = intT(x_1, x_2, ..., x_n)$. т.е. $P_{n,n-1}(\bar{n}) = T^0(x_1, x_2, ..., x_n)-$ внутренность симплекса. Внутренность $T^0(x_1, x_2, ..., x_n)-$ гомеоморфно пространству R^{n-1} [3] т.е. $P_{n,n-1}(\bar{n})$ есть $(n-1)$ мерное многообразия R^{n-1}.

2^0. X бесконечный нульмерный компакт. Известно, что пространство $P_n(X)$ состоит из линейной комбинации мер Дирака вида:

$$\mu = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + ... + m_n\delta_n$$

где $\delta_{x_i}-$ меры Дирака, $x_i \in X$, $0 \leq m_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} m_i = 1$.

Рассмотрим подпространство $P_{n,n-1}(X)$ пространства $P_n(X)$. Очевидно, что $P_{n,n-1}(X)$ открыто в $P_n(X)$. Возьмем произвольную точку $\mu \in P_{n,n-1}(X)$, то

$$\mu = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + ... + m_n\delta_n,$$

$x_1, x_2, ...x_n-$ взаимно различны. т.е. $|x_1, x_2, ...x_n| = n$ и $m_i > 0$, $m_i < 1$. Отсюда $\mu \in T^0(x_1, x_2, ..., x_n) = intT(x_1, ..., x_n)-$ внутренность симплекса. Известно, что $T^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ гомеоморфно простраснтву R^{n-1}. В качестве $O(\mu)$ отождествляем множеству $T^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ т.е. Каждая точка пространства $P_{n,n-1}(X)$ имеет окрестность гомеоморфную R^{n-1}. Значит, пространство $P_{n,n-1}(X)$ есть $(n-1)$–мерное многообразия.

Теперь покажем, что подпространство $P_{n,n-1}(X)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$. Исскомую гомотопию $h(\mu,t) : P_n(X) \times [0,1] \to P_n(X)$ построим пологая $h(\mu,t) = (1-t)\mu + t \cdot r(\mu)$, где $t \in [0,1]$, $\mu \in P_n(X)$ и $r(\mu) : P(X) \to P(\sup p\mu)$ барицентрически открытое отображения [3]. Если $t = 0$, то $h(\mu,0) = (1-0)\mu + 0 \cdot r(\mu) = \mu$ т.е. $h(\mu,0) = id_{P_n(X)}$.

Если $t \in (0,1]$, то $h(\mu,t) = (1-t)\mu + t \cdot r(\mu) \in P_n(X)$ $\sup ph(\mu,t)$ состоит ровно из $n-$ различных точек. т.е. $h(\mu,t) \in P_{n,n-1}(X)$. Это означает, что $P_{n,n-1}(X)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жураев Т.Ф., Турсунова З.О. О Некоторые геометрические и топологические свойства вероятностных мер, определенные в бесконечном компакте // Uzbek Mathematical journal, 2016, №1б pp.39-48.

2. Banakh T., Radul T., Zarichny M. Absorbing sets in infinite – dimensional Manifolds // Math Studies Monogh. Ser. V.1. VNTL Publishers, 1996.

3. Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии // Успех.мат.наук, 1991, Т.46, вып. 1(277), с.41-80.

О (k_0) - трансляционно-инвариантных мерах Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли порядка три

Рахматуллаев М. М.[1], Дехконов Ж. Д.[2]

Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан, mrahmatullaev@rambler.ru;

Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан, dehqonovjasur@bk.ru

Пусть $\tau^k = (V, L)$ — есть дерево Кэли порядка k, $k \geq 1$, т.е бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит равно $k+1$ ребер, где V — множество вершин, L — множество ребер τ^k.

Известно, что τ^k можно представить как G_k — свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка (см.[1]).

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим $W_n = \{x \in V | d(x^0, x) = n\}$, $V_n = \bigcup\limits_{m=0}^{n} W_m$, где $d(x,y)$ — расстояние между x и y на дереве Кэли, т.е. число ребер пути, соединяющего x и y .

Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \ldots, q\}$, $q \geq 2$ и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$. Пусть $\Omega_n = \Phi^{V_n}$ обозначает пространство конфигураций, определенных на V_n.

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{R}$, $\langle x,y \rangle$ — ближайшие соседи и δ_{ij} — символ Кронекера. Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_x \sigma(x)\right\}, \tag{2}$$

где $\sigma_n \in \Omega_n, \beta = 1/T$, $T > 0$ — температура, $h_x \in \mathbb{R}^{q-1}$, Z_n^{-1} — нормировочный множитель,

Теорема 1. [1] *Меры (2) удовлетворяют условию согласования тогда и только тогда, когда для всех $x \in V \setminus \{x^0\}$ имеет место следующее:*

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \tag{3}$$

где функция $F : h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \to F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ определяется формулами

$$F_i = \ln\left(\frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}}\right), \qquad \theta = \exp(J\beta).$$

Каждому решению h_x функционального уравнение (3) соответствует одна мера Гиббса и наоборот.

При произвольных k и q трансляционно-инвариантные меры Гиббса для модели Поттса изучены в работе [2].

В случае $k = 3$, $q = 3$ для трансляционно-инвариантной совокупности векторов из (3), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1 = \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{\theta e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}, \\ h_2 = \sum_{y \in S(x)} \ln \frac{\theta e^{h_2} + e^{h_1} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}. \end{cases} \tag{4}$$

Учитывая, что $k = 3$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} h_1 = 3 \ln \frac{\theta e^{h_1} + e^{h_2} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}, \\ h_2 = 3 \ln \frac{\theta e^{h_2} + e^{h_1} + 1}{\theta + e^{h_1} + e^{h_2}}. \end{cases}$$

Известно, что эта система имеет следующие решения (см.[2]):

$$(h_1^{(i)}, 0), (0, h_1^{(i)}), (-h_1^{(i)}, -h_1^{(i)}), (0, 0), i = 1, 2,$$

где

$$h_1^{(i)} = 3 \ln x_i, x_1 = \frac{2\sqrt{\theta^2 + \theta - 2}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan \frac{3\sqrt{3\theta^4 + 24\theta^3 + 18\theta^2 - 120\theta - 249}}{2\theta^3 + 3\theta^2 - 12\theta - 47} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\theta - 1}{3},$$

$$x_2 = \frac{2\sqrt{\theta^2 + \theta - 2}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arctan \frac{3\sqrt{3\theta^4 + 24\theta^3 + 18\theta^2 - 120\theta - 249}}{2\theta^3 + 3\theta^2 - 12\theta - 47} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\theta - 1}{3}. \tag{5}$$

В этой работе для модели Поттса с помощью трансляционно-инвариантной меры Гиббса на дереве Кэли порядка три ($k_0 = 3$) по аналогию с конструкциями из [3], [4] докажем существование новых мер Гиббса на дереве Кэли седьмого порядка, которых также назовем (3)-трансляционно-инвариантными мерами Гиббса.

Доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для модели Поттса на дереве Кэли седьмого порядка при $q = 3$ и $\theta \approx 2.809107468$ существуют не менее восемь* (3)*-трансляционно-инвариантных мер Гиббса.*

В работе [5] доказана существование (2)-трансляционно-инвариантных мер Гиббса на дерево Кэли пятого порядка .

ЛИТЕРАТУРА

1. U.A.Rozikov. Gibbs measures on Cayley trees.Singapore.: World scientific.-2013.
2. Р. М. Хакимов, Ф. Х. Хайдаров, Трансляционноинвариантные и периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли.ТМФ, 2016, том 189, номер 2.
3. М.М.Рахматуллаев (k_0)-периодические меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли. Доклады АН РУз, 2016.3. с.9-12
4. M.M.Rahmatullaev. Ising model on trees: (k_0)-non translation-invariant Gibbs measures. Journal of Physics: Conference Series. 819 (2017) 012019
5. M.M.Rahmatullaev, F.K.Rafikov , Sh.Kh.Azamov On constructive description of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree. Укр. мат. журн.,2021, т.73,No 7.

Слабо периодические основные состояния модели Поттс- Изинга на дереве Кэли порядка два

Рахматуллаев М. М.[1], Исаков Б. М.[2]

Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан, mrahmatullaev@rambler.ru;

Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан, isakov@mail.ru

Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Если существует более чем одна мера Гиббса, то говорят, что существуют фазовые переходы. Основная проблема для данного гамильтониана – это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. Известно, что фазовая диаграмма Гиббсовых мер для данного гамильтониана близко к фазовой диаграмме основных изолированных (устойчивых) состояний этого гамильтониана. При низких температурах основному состоянию соответствует предельная мера Гиббса (см.[1]). Поэтому, естественно возникает задача описания всех основных состояний. Известно, что дерево Кэли можно представить как свободное произведение k + 1 циклических групп второго порядка (см., например, [1]). Обозначим эту группу как G_k. Две вершины $x, y \in V$ называются соседними, если они представляют собой концевые точки некоторого ребра $l \in L$, и в этом случае мы будем писать $l = \langle x, y\rangle$.

Мы рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{-1, 0, 1\}$. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$– фактор группа, где G_k^*–нормальний делитель индекса $r \geq 1$. Обозначим через $S(x)$ множество "прямых потомков"точки $x \in V$, т.е,если $x \in W_n$, то $S(x) = \{y \in W_{n+1} : \langle x, y\rangle\}$. Через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседе точки $x \in G_k$, т.е. $S_1(x) = \{y \in V :< x, y >\}$ и $x_\downarrow = S_1(x) \setminus S(x)$.
Определения 1. $\sigma(x)$ называется G_k^* - периодической(слабо периодической), если $\sigma(x) = \sigma_i($ $\sigma(x) = \sigma_{i,j})$ при $x_i \in H_j, \forall x \in G_k(x_i \in H_i, \forall x_\downarrow \in H_j$,то есть значения $\sigma(x)$ зависит от классов принадлежности x и $x_\downarrow$.). G_k-периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.

Для данной периодической конфигурации индекс нормального делителя называется периодом конфигурации.

В работе рассмотрим модель Поттс-Изинга на дереве Кэли. Гамильтониан рассматриваемая модели имеет вид

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in\ L} \sigma(x)\sigma(y) - J_2 \sum_{\langle x,y\rangle \in\ L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \tag{1}$$

где $J = (J_1, J_2) \in R^2$, δ_{ij-} символ Кронкера.

Пусть M множество единичных шаров с вершинами в V. Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ ограниченной конфигурацией σ_b. Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b) = -\frac{1}{2} J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) - \frac{1}{2} J_2 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \tag{3}$$

Рассмотрим случай $k = 2$. Легко видеть, что $U(\sigma_b) \in \{U_1, U_2, U_3, ..., U_{12}\}$ для любого σ_b, где

$$U_1 = 0, U_2 = -\frac{3}{2}J_1 - \frac{3}{2}J_2, U_3 = \frac{3}{2}J_1, U_4 = -J_1 - J_2, U_5 = -\frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2, U_6 = -\frac{1}{2}J_1 - J_2,$$

$$U_7 = \frac{1}{2}J_1 - \frac{1}{2}J_2, U_8 = J_1, U_9 = \frac{1}{2}J_1, U_{10} = -\frac{1}{2}J_2, U_{11} = -\frac{3}{2}J_2, U_{12} = -J_2.$$

периодическим(слабо периодически трансляционно-инвариантным) основным состоянием. Нетрудный но гроздкий анализ показывает, что A_i имеет вид:

$$A_1 = \{(J_1, J_2) \in R^2 | J_1 \geq 0; J_2 \leq -J_1\},\ A_2 = \{(J_1, J_2) \in R^2 | J_1 \geq 0; J_2 \geq -J_1\},$$

$$A_3 = \{(J_1, J_2) \in R^2 | J_1 \leq 0; J_2 \leq -J_1\},\ A_4 = A_5 = \{(J_1, J_2) \in R^2 | J_1 = -J_2; J_2 \leq 0\},$$

$$A_6 = A_7 = A_{10} = \{(J_1, J_2) \in R^2 | J_1 = 0; J_2 = 0\},\ A_{12} = \{(J_1, J_2) \in R^2 | J_1 \leq 0; J_2 = 0\}$$

$$A_8 = A_9 = \{(J_1, J_2) \in R^2 | J_1 = 0; J_2 \leq 0\},\ A_{11} = \{(J_1, J_2) \in R^2 | J_1 \geq -J_2; J_2 \geq 0\}$$

Заметим, что $R^2 = \bigcup_{i=1}^{12} A_i$.

Пусть $A \in \{1, 2, , k+1\}$ Известно(см[4]), что нормальный делитель индекса два имеет следуюший вид

$$H_A = \{x \in G_k :\ \sum_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{четно}\}$$

.

Рассмотрим фактор группу $G_k \setminus H_A = \{H_0, H_1\}$, где $|A| = 1, H_0 = H_A, H_1 = G_k \setminus H_0$. Изучим H_A слабо периодическое основное состояние. H_A-слабо периодическая конфигурация имеет следующий вид

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_{00}, \text{ если } x\downarrow \in H_0, x \in H_0 \\ \sigma_{01}, \text{ если } x\downarrow \in H_0, x \in H_1 \\ \sigma_{10}, \text{ если } x\downarrow \in H_1, x \in H_0 \\ \sigma_{11}, \text{ если } x\downarrow \in H_1, x \in H_1 \end{cases} \tag{4}$$

где $\sigma_{ij} \in \Phi\{-1, 0, 1\},\ i, j = \overline{0, 1}$. Для удобства слабо периодическую конфигурацию $\sigma(x)$ напишем в виде $(\sigma_{00}, \sigma_{01}, \sigma_{10}, \sigma_{11})$

Доказано следующая теорема

Теорема1. Пусть k=2, |A|=1.

1. На множестве A_4=A_5=$\{(J_1, J_2) \in R^2 | J_1 = -J_2; J_2 \leq 0\}$ существуют шесть H_A-слабо периодические (не периодических) основных состояний и они имеют следующий вид:

$$\sigma_{1,2}(x) = \pm(1,1,0,1),\ \sigma_{3,4}(x) = \pm(1,0,1,1),\ \sigma_{5,6}(x) = \pm(-1,0,0,1),$$

2. Всякие H_A-слабо периодические основные состояния кроме конфигурации указанных в пункте 1 являются трансляционно-инвариянтными.

ЛИТЕРАТУРА

1. U.A.Rozikov Gibbs Measures on Cayley Trees, orld Scientific, Haversack, 2013.

2. Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли, Теоретическая и математическая физика, том 111, номер 1, 1997, стр.109-117.

Слабо периодические основные состояния для модели Поттс-Sos на дереве кэли

Рахматуллаев М. М.[1], Расулова М. А.[2]

Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Наманган, Узбекистан, mrahmatullaev@rambler.ru;

Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан, m_rasulova_a@rambler.ru

Пусть $\tau^k = (V, L), k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, где $V-$ множество вершин, $L-$ множество ребер τ^k. Известно, что τ^k можно представить как G_k- свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка(см.[1], [2]).

Обозначим через $S(x)$ множество "прямых потомков" точки $x \in G_k$. Через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседей точки $x \in G_k$, т.е. $S_1(x) = \{y \in G_k :< x, y >\}$ и $\{x_\downarrow\} = S_1(x) \setminus S(x)$.

Мы рассмотрим модель, где спин принимает значения из множества $\Phi = \{0, 1, 2\}$. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$.

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ фактор группа, где G_k^*- нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 1. *Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^*-периодической, если $\sigma(x) = \sigma_i$ при $x \in H_i, \forall x \in G_k$. G_k-периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.*

Для данной периодической конфигурации индекс нормального делителя называется периодом конфигурации.

Определение 2. *Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^*-слабо периодической, если $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ при $x_\downarrow \in H_i$, $x \in H_j$, $\forall x \in G_k$.*

Гамильтониан модели Поттс-SOS имеет вид

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| + J_p \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{1}$$

где $J, J_p \in R-$ константы не равны нулю.

Пусть $M-$ множество единичных шаров с вершинами в V. Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ ограниченной конфигурацией σ_b. Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2}(J \sum_{\substack{\langle x,y\rangle: \\ x,y\in b}} |\sigma(x) - \sigma(y)| + J_p \sum_{\substack{\langle x,y\rangle: \\ x,y\in b}} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}). \tag{2}$$

Мы доказали следующую лемму.

Лемма. *Для каждой конфигурации φ_b мы имеем*

$$U(\varphi_b) \in \{U_{i,n} : i = 0, 1, 2, ..., k+1, n = 0, ..., k+1-i\},$$

где

$$U_{i,n} = \frac{J}{2}(k+1+n-i) + \frac{J_p}{2}i. \tag{3}$$

Определение 3. Конфигурация φ называется основным состоянием для гамильтониана H, если

$$U(\varphi_b) = \min\{U_{i,n} : i = 0, 1, 2, ..., k+1, n = 0, ..., k+1-i\}$$

для любого $b \in M$.

Обозначим

$$A_{\xi,\eta} = \{(J, J_p) \in R^2 : U_{\xi,\eta} = \min\{U_{i,n} : i = 0, 1, 2, ..., k+1, n = 0, ..., k+1-i\}\}. \tag{4}$$

Пусть $k \geq 2$. С помощью (4) найдем следующие множества:

$$A_{k,0} = \{(J, J_p) \in R^2 : J_p = J \geq 0\}, \ A_{k,1} = \{(J, J_p) \in R^2 : J_p = 2J, J \leq 0\}.$$

Пусть $A \subset \{1, 2, ..., k+1\}$, $H_A = \{x \in G_k : \sum_{j\in A} w_j(x) -$четно$\}$, где $w_j(x)$-число a_j в слове x. H_A- является нормальным делителем индекса 2 в G_k.

Рассмотрим фактор группу $G_k/H_A = \{H_0, H_1\}$, где $H_0 = H_A$, $H_1 = G_k \setminus H_A$.

H_A-слабо периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{00}, & \text{если } \ x_\downarrow \in H_0, \ x \in H_0, \\ a_{01}, & \text{если } \ x_\downarrow \in H_0, \ x \in H_1, \\ a_{10}, & \text{если } \ x_\downarrow \in H_1, \ x \in H_0, \\ a_{11}, & \text{если } \ x_\downarrow \in H_1, \ x \in H_1, \end{cases} \tag{5}$$

где $a_{ij} \in \Phi$, $i, j \in \{0, 1\}$. Далее для удобства H_A-слабо периодическую конфигурацию (5) напишем в виде $\varphi = (a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11})$.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема. *Пусть $k \geq 2$ и $|A| = 1$. Тогда верны следующие утверждения:*
I. a) на множестве $A_{k,0}$ существуют тридцать два H_A-слабо периодического основного состояния, которые не являются трансляционно-инвариантными и они имеют следующий вид: (i, i, i, j), (i, i, j, i), (i, j, i, i), (i, j, j, j), (i, i, j, j), (i, j, i, j),

(i,j,j,i), $(l,1,1,m)$, $(1,l,m,1)$, *где* $i,j,l,m \in \Phi$ *и* $|i-j|=1$, $|l-m|=2$;
b) на множестве $A_{k,1}$ *существуют четырнадцать* H_A*-слабо периодических основных состояний, которые не являются трансляционно-инвариантными и они имеют следующий вид:* (i,i,i,j), (i,i,j,i), (i,j,i,i), (i,j,j,j), (i,i,j,j), (i,j,i,j), (i,j,j,i), *где* $i,j \in \Phi$ *и* $|i-j|=2$;
II. Всякие H_A*-слабо периодические основные состояния, кроме конфигураций указанных в пункте I, являются трансляционно-инвариантными.*

Замечание. (i,j,i,j) из основных состояний, найденные в пункте I теоремы, являются H_A-периодическими основными состояниями. Все остальные H_A-слабо периодические основные состояния не являются H_A-периодическими основными состояниями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World scientific, 2013.
2. Rahmatullaev M.M., Rasulova M.A. Periodic and Weakly Periodic Ground States for the Potts Model with Competing Interactions on the Cayley Tree. //Siberian Advances in Mathematics. 2016. Vol. 26. №.3. pp.215–229.

О рекуррентной форме решения уравнения Колмогорова для обобщенной модели Даунтона

Седов С.С.[1], Саиджалолов С.С.[2]

[1]Национальный исследовательский технологический университет МИСиС в городе Алмалык, Алмалык, Узбекистан,
kadabrasss@mail.ru;
[2]Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан,
ssaidavaz@mail.ru

Найдено явное решение уравнения Колмогорова для марковской модели эпидемии Даунтона в рекуррентной форме для производящей функции вероятностей состояний марковского процесса, задающего динамику рассматриваемой эпидемии.

Пусть $\xi(t) = (R(t), S(t))$- состояние популяции в момент $t > 0$, где $R(t)$ - число восприимчивых, а $S(t)$ - число носителей или источников инфекции, причем $\xi(0) = (n, a)$. Популяция предполагается замкнутой, т.е.$R(t) + S(t) + Z(t) = n + a$, где $Z(t)$ - число устраненных носителей к моменту t.

В качестве модели развития эпидемии рассматривается однородный во времени марковский процесс, заданный с помощью следующих вероятностей возможных переходов в интервале $(t, t + \Delta t)$:

$$\begin{cases} P(\xi(t+\Delta t) = (r-1, s+1)/\xi(t) = (r,s)) = \lambda rs\Delta t + o(\Delta t), \\ P(\xi(t+\Delta t) = (r, s-1)/\xi(t) = (r,s)) = \mu s\Delta t + o(\Delta t), \\ P(\xi(t+\Delta t) = (r-1, s)/\xi(t) = (r,s)) = \theta rs\Delta t + o(\Delta t), \\ P(\xi(t+\Delta t) = (r, s)/\xi(t) = (r,s)) = 1 - ((\lambda+\theta)r + \mu)s\Delta t + o(\Delta t). \end{cases} \tag{1}$$

В соответствии с моделью Даунтона 1-й переход отражает появление нового носителя из числа восприимчивых в результате их контакта, 2-й переход вероятность устранения носителя и 3-й переход отражает возможность устранения восприимчивого после его заболевания ввиду явных симптомов болезни. Такая модель пригодна для описания инфекций типа дизентерии.

Целью данной работы является анализ точного решения модели с использованием специального вида производящей функции. Стоит отметить, что аналогичный подход к решению уравнения, соответствующего подобной модели был осуществлчн в работе [1]. Отметим также, что к решению данных моделей можно подходить с точки зрения асимптотического анализа, как, например, в работе [2].

Пусть $P_t(z,w) = P((\xi(t) = (r,s)/\xi(0) = (n,a))$ - переходная вероятность для марковской модели (1) и, как и ранее,

$$\Pi_t(z,w) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{m+a-r} P_t(r,s) z^r w^s, (|z| \leq 1, |w| \leq 1) \ , \tag{2}$$

где $\Pi_t(z,w)$ -производящая функция переходных вероятностей.
Лемма 1. *Функция $\Pi_t(z,w)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\frac{\partial \Pi_t}{\partial t} = (\lambda + \theta - (\lambda + \theta)z)\omega \frac{\partial^2 \Pi_t}{\partial z \partial \omega} + \mu(1-\omega)\frac{\partial \Pi_t}{\partial t} \ , \tag{3}$$

с начальным условием $\Pi_0(z,w) = z^n w^a$.

Получение нужного решения начнем с нахождения - преобразования Лапласа которое удовлетворяет более простой системе уравнений:

$$\begin{cases} \alpha F_r(w,a) =& (\theta + \lambda w)w(r+1)\dfrac{\partial F_{r+1}}{\partial w} - K_r(w-\theta_r)\dfrac{\partial f_r}{\partial w}, \ 0 \leq r \leq n-1, \\ \alpha F_r(w,a) =& - K_n(w-\theta_n)\dfrac{\partial F_n}{\partial w} + w^a. \end{cases} \tag{4}$$

с начальным условием $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \alpha F_r(w,a) = \delta_{r,n} w^a$.

Лемма 2. *Функции $f_r(w,t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_r}{\partial t} =& (\theta + \lambda w)w(r+1)\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial w} - K_r(w-\theta_r)\dfrac{\partial f_r}{\partial w}, \ 0 \leq r \leq n-1, \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial t} =& - K_n(w-\theta_n)\dfrac{\partial f_n}{\partial w}. \end{cases}$$

со следующими начальными условиями:$f_r(w,0) = \Delta_{r,n} w^a$, где δ_{ij} - символ Кронекера
Решение системы (4) для $F_r(w,\alpha)$ начнем с простого случая $r = n-1$
Лемма 3. *Решение последнего уравнения из системы (4) при начальном условии $\lim\limits_{\alpha \to \infty} \alpha F_r(w,a) = w^a$. имеет вид:*

$$F_n(w,a) = \sum_{j=0}^{a} (w-\theta_n) F_n^{(j)}(\theta_n; a)/j!, \tag{5}$$

где $F_n^{(j)}(\theta_n, s) = \dfrac{a!}{(a-j)!}\theta_n^{a-j}(s+jk_n)^{-1}$.

Следствие 1. *Вероятности* $P_t(n,j)$ *имеют вид:*

$$P_t(n,j) = C_a^J(1-e^{-K_nt})^{a-j}e^{-K_njt}\theta_n^{a-j}, 0 \le j \le a.$$

Следствие 2. *Если* ν *- размер эпидемии в модели (1), то*

$$P(\nu = 0) = \lim_{t\to\infty} P_t(n,0) = \theta_n^a = \left(\frac{\mu}{\mu + (\lambda+\theta)n}\right)^a.$$

Утверждение следствия 1 легко вытекает из формулы:

$$f_n(w,t) = ((w-\theta_n)e^{-K_nt} + \theta_n)^a = \sum_{j=0}^{a} C_a^j(1-e^{-K_nt})^{a-j}\theta^{a-j}e^{-K_njt}w^j,$$

которая получается путем обращения преобразования Лапласа для $F_n(w,a)$ из (4), т.к. оригиналом для $(a+jK_n)^{-1}$ является функции e^{-jK_nt} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Фамилия И.О. Название книги. Город.: Издательство, год.
2. Фамилия И.О. Название статьи //Название журнала. Год. Т.1, №1. С. 1–5.

Развертка замкнутого многогранника в Галилеевом пространстве

Собиров Ж. А.

Навоинский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан;
jasur.sobirovgeometrik@mail.ru

Движение галилеева пространства R_3^1 во многом отличается от движении евклидова пространства R_3.

Под разверткой многогранника в галилеевом пространстве R_3^1, понимаем разложение граней многогранника на плоскость, с помощью движения этого пространства. При этом склеивающаяся ребры многогранника отмечаются одинаковыми буквами. Кроме того сохраняется расстояние между точками на многогранники то есть растояния между точками многограннике и на развертке сохраняются.

Рассмотрим выпуклые замкнутые многогранники W с опорными особыми плоскостями $x = a$ и $x = b$. Величина d=|b-a| называется шириной многогранника [1]. причем рассматриваем многогранники из W у которых на одной особой плоскости принадлежать не более одной вершин.

Пусть A и B вершины многогранника $F \in W$ на крайних плоскостях и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ее другие вершины. Обозначим через ω_A, ω_B, ω_i - полных углов вокруг вершин A_i.

Теорема: Сумму кривизны внутренних вершин равно сумме кривизны крайних вершин

$$\omega_A + \omega_B = \sum_{i=1}^{n} \omega_i$$

Внешняя кривизна вершины многогранника определяется как полный угол вокруг соответствующих вершин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александиров А.Д., Выпуклые многогранники, - Государственной. Издат. Техн.-Теор. Лит., Москов-Ленинград, 1950. 428 ст

2. Султанов Б.М., изометрия поверхностей в галилеевом пространсве . дан.Р.Уз.є4,2020.с.3-6

Аналог задачи Геллерстедта для уравнения параболо-гиперболического типа 3-го порядка с вырождением в гиперболической части смешанной области

Турсунов М. Х.

Наманганский государственный университет, г. Наманган,Узбекистан; Maqsadjon6290126@gmail.com

Аналоги задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка вырождающегося внутри области изучены в работах[1-2].

В данной работе изучается аналог задачи Геллерстедта для уравнения параболо-гиперболического типа 3-го порядка с вырождением в гиперболической части смешан-ной области.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu)=0, \tag{1}$$

где

$$Lu\equiv\left\{\begin{array}{ll} u_{xx}-u_y\,, & (x;y)\in D_1,\\ xu_{xx}+(-x)^n u_{yy}+\alpha u_x\,, & (x;y)\in D_2, \end{array}\right. \tag{2}$$

здесь α, $n=const$, причем

$$n>1,\quad (1-n)/2<\alpha<1, \tag{3}$$

а D_1 – область, ограниченная отрезками AB AB_0 B_0A A_0A прямых $y=0,\ x=1,$ $y=1,\ \ x=0$ соответственно; D_2 – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AA_0 оси $y-$ ов и двумя характеристиками

$$AC: y-\frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}}=0,\qquad A_0C: y+\frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}}=1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $A_0(0,1)$, пересекающимися в точке $C\left(-((n+1)/2)^{2/(n+1)};\ 0,5\right)$.

Введем обозначения: $D=D_1\cup D_2\cup J,\quad D_1=D\cap(x>0,\,y>0),$

$$D_2=D\cap(x<0,\,y>0),\ J=\{(x,y):x=0,\ 0<y<1\},\ E(0,y_0)\in J,$$

$$EC_1: y+\frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}}=y_0,\quad EC_2: y-\frac{2}{n+1}(-x)^{\frac{n+1}{2}}=y_0,\ C_1\in AC,\ C_2\in A_0C.$$

В области D для уравнения (1) изучим следующую задачу .

Задача Γ_1. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_1) \cap C^2(D_2)$; 2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях D_1 и D_2; 3) u_x, u_y непрерывны вплоть до AC;
4) на J выполняется условие склеивания $\lim\limits_{x\to -0}(-x)^{\alpha}u_x(x,y) = \lim\limits_{x\to +0}u_x(x,y)$ равномерно при $0<y<1$; 5) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{AB} = \varphi_1(x), \quad u(x,y)|_{A_0B_0} = \varphi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1;$$

$$u(x,y)|_{BB_0} = \varphi_3(y), \;\; 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad u(x,y)|_{AC_1} = \psi_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{y_0}{2};$$

$$u(x,y)|_{EC_2} = \psi_2(y), \quad y_0 \leqslant y \leqslant \frac{y_0+1}{2}, \quad \left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_3(y), \;\; 0 \le y \le \frac{1}{2};$$

где $n-$ внутренняя нормаль, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(y)$, $\psi_i(y)$ $(i=\overline{1,3})$ – заданные функции, причем $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\varphi_3(0) = \psi_1(1)$, $\varphi_3(1) = \psi_2(1)$,

$$\psi_1(y) \in C^2\left[0;\frac{y_0}{2}\right] \cap C^4\left(0;\frac{y_0}{2}\right), \quad \psi_2(y) \in C^2\left[y_0;\frac{y_0+1}{2}\right] \cap C^4\left(y_0;\frac{y_0+1}{2}\right), \qquad (4)$$

$$\psi_3(x) \in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0;\frac{1}{2}\right), \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), \qquad (5)$$

$$\varphi_3(y) \in C\left(\bar{J}\right) \cap C^1(J). \qquad (6)$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. Если выполнены условия (3), (4),(5) и (6), то в области D существует единственное регулярное решение задачи Γ_1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исломов Б.И., Мадрахимова З.С. Об однозначной разрешимости краевой задачи для уравнения третьего порядка вырождающегося внутри области // Доклады АН РУз. Ташкент, 2009. № 5. С. 15-18.

2. Исломов Б.И., Мадрахимова З.С. Краевая задача со смещением для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором // Узбекский математический журнал. Ташкент, 2009. № 4. С.76-81.

Об аналоге леммы Гартогса для R-аналитических функций

Туйчиев Т. Т.[1], Тишабаев Ж. К.[1], Атамуратов А. А.[2]

[1]Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
jura63@rambler.ru

[2]Ургенчский государственный университет,Ургенч, Узбекистан,
alimardon01@mail.ru

В работе мы рассмотрим R-аналитическое продолжение функций многих действительных переменных, допускающих R-аналитическое продолжение на параллельные сечения. Относительно голоморфных функций первый результат в этом направлении принадлежит Гартогсу [1]: если голоморфная в области $'U \times \{|z_n| < r\} \subset \mathbb{C}^n_{'z} \times \mathbb{C}_{z_n}$, где $'z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$, функция $f('z, z_n)$ при каждом фиксированном $'z \in' U$

голоморфно продолжается в круг $|z_n| < R,\ \ R > r > 0$, то она голоморфна по совокупности переменных в области $'U \times \{|z_n| < R\}$.

С теоремой Гартогса также непосредственно связана следующая теорема Форелли [2]: если $f-$ бесконечно гладкая в точке $0 \in \mathbb{C}^n,\ \ f \in C^\infty\{0\}$, и сужения $f|_l-$ голоморфны в круге $U(0,1) = l \bigcap B(0,1)$ для всех комплексных прямых $l \ni 0$, то f голоморфно продолжается в шар $B(0,1) \subset \mathbb{C}^n$.

В недавней работе [3] А.Садуллаев доказал следующий аналог теоремы Форелли для R-аналитических функций.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x), x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, бесконечно гладкая в некоторой окрестности $0 \in \mathbb{R}^n, f(x) \in C^\infty\{0\}$ и пусть для любой вещественной прямой $l : x = \lambda t, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in S(0,1) \subset \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}-$ параметр, сужение $f|_l = f(\lambda t)$ является вещественно-аналитической R-аналитической в интервале $t \in (-1,1)$. Тогда существует замкнутое плюриполярное множество $S \subset B(0,1)$ такое, что $f(x)$ является R-аналитической в $B(0,1) \setminus S$, где $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n-$ единичный шар, а$S(0,1) = \partial B(0,1) -$ единичная сфера.*

Пример функции $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^{k+1}}{(x_2-1)^2 + x_1^2}$ показывает, что точные аналоги Теоремы Форелли, а также Теоремы Гартогса для R-аналитических функций не верны. Функция $f(x_1, x_2)$ вещественно-аналитическая в области $\mathbb{R} \times \left\{|x_2| < \frac{1}{2}\right\}$, сужение $f(x_1^0, x_2)$ вещественно аналитическая на всей прямой $\mathbb{R}$. Однако f не является вещественно-аналитической в точке $(0,1)$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. *Пусть функция $f(x) = f('x,\ x_n)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1. функция $f('x, x_n)$ R -аналитическая в полицилиндре $U = ('U) \times \{|x_n| < r_n\}, r_n > 0$, где $'x = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$и $'U = \{'x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x_1| < r_1, |x_2| < r_2, ..., |x_{n-1}| < r_{n-1}\} =$

$$= \{'x \in \mathbb{R}^{n-1} : -r_1 < x_1 < r_1, -r_2 < x_2 < r_2, ..., -r_{n-1} < x_{n-1} < r_{n-1}\};$$

2. при каждом фиксированном $'x^0 \in ('U)$ функция $f('x^0, x_n)$ R-аналитическая в интервале $|x_n| < r_n$, R -аналитически продолжается в больший интервал $|x_n| < R_n, R_n > r_n$.

Тогда существует плюриполярное замкнутое множество $'S \subset ('U)$ такое, что функция $f('x, x_n)$ R -аналитически продолжается по совокупности переменных $('x, x_n)$ в $('U \times \{|x_n| < R_n\}) \setminus ('S \times \{|x_n| r_n\})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hartogs F. Zur theorie der analytischen Funktionen mehrerer Veranderlichen // Math. Ann. 1906. V. 62. p. 1–88.

2. Forelly F. Plurisubharmonicity in terms of harmonic slices // Math. Scand. V. 41, 1977, p. 358–364.

3. Sadullaev A. Real analyticity of a C^∞–germ at a origin // Ann. Polon. Math. (В печате).

Новая смешанная вариационная задача и система стокса с сингулярным источником

Урев М. В.[1], Имомназаров Х. Х.[2]

[1,2]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;

[2]imom@omzg.sscc.ru

Пусть Ω — двумерная ограниченная односвязная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассматривается стационарная задача Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости

$$-\nu\mathbf{\Delta u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{на } \partial\Omega,$$

где $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega), 0 < \varepsilon < 1/2$, $\nu > 0$, $\mathbf{H}^s(\Omega) = (H^s(\Omega))^2$, $\mathrm{H}^s(\Omega)$ обозначает гильбертово пространство Соболева порядка s с нормой $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ и полунормой $|\cdot|_{s,\Omega}$ [1].

В случае, когда $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ и $s \geq -1$ вопрос существования, единственности и регулярности обобщенного решения задачи (1) вариационным смешанным методом изучен достаточно полно [2, 3]. Если $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)$, то обобщенное решение задачи (1) будем искать с помощью расширенного смешанного вариационного метода [4]. Пусть X_i, M_i, i=1,2 — четыре вещественных гильбертовых пространства, снабженных скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_{X_i}$, $(\cdot,\cdot)_{M_i}$. Введем три непрерывные билинейные формы [5]

$$a(\cdot,\cdot) : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}, \quad b_1(\cdot,\cdot) : X_2 \times M_2 \to \mathbb{R}, \quad b_2(\cdot,\cdot) : X_1 \times M_1 \to \mathbb{R},$$

для которых выполняются неравенства

$$a(u,v) \leq C\|u\|_{X_1}\|v\|_{X_2} \quad b_1(v,p) \leq C\|v\|_{X_2}\|p\|_{M_2}, \quad b_2(u,q) \leq C\|u\|_{X_1}\|q\|_{M_1}$$

$$\forall u \in X_1,\, \forall v \in X_2, \quad \forall v \in X_2,\, \forall p \in M_2, \quad \forall u \in X_1,\, \forall q \in M_1.$$

Вариационная задача. Даны $F \in X_2'$ и $G \in M_1'$. Требуется найти пару $(u,p) \in X_1 \times M_2$ такую, что

$$a(u,v) + b_1(v,p) =< F, v > \quad b_2(u,q) =< G, q > \quad \forall v \in X_2, \quad \forall q \in M_1. \tag{2}$$

Лемма 1. Пусть тройка гильбертовых пространств V, H, V' является оснащением пространства H. Тогда для каждого элемента $v \in V$ существует функционал $f \in V'$ такой, что

$$\|v\|_V = \|f\|_{V'} \quad \text{и} \quad (v,f)_H = \|v\|_V^2.$$

Следствие 1. Для каждой функции $u \in M_1$ существует функционал $f \in M_2$ такой, что

$$\|u\|_\varepsilon = \|f\|_{M_2} \quad \text{и} \quad \int_\Omega fu\,d\,\mathbf{x} = \|u\|_\varepsilon^2.$$

Реализация отношения двойственности между M_1 и M_2 через скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ позволяет сформулировать двойственное утверждение.

Следствие 2. Для каждого функционала $f \in M_2$ существует функция $u \in M_1$ такая, что

$$\|f\|_{M_2} = \|u\|_\varepsilon \quad \text{и} \quad \int_\Omega f u \, d\mathbf{x} = \|f\|^2_{M_2}.$$

Далее будем использовать следующую теорему 2.4 из [6], которая доказана с помощью построения левого обратного оператора для оператора градиента ∇ и привлечения теории интерполяции.

Теорема 1. Пусть область Ω является звездной относительно некоторого внутреннего шара, тогда оператор $\nabla^s := \nabla : H^s_\perp(\Omega) \to \mathbf{H}^{s-1}(\Omega)$, $s \in [0,1]$ является ограниченным и инъективным с замкнутой областью значений.

Лемма 2.

Пусть ограниченная открытая область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет условию конуса. Тогда

(i) оператор ∇^ε есть изоморфизм из $H^\varepsilon_\perp(\Omega)$ на V^0_ε;

(ii) оператор div^ε есть изоморфизм из $V^\perp_\varepsilon$ на M_2.

Отметим, что для $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)$ теория смешанных вариационных задач, содержащаяся, например, в [3], [7], [8] для задачи (1) неприменима. Пусть $X_1 = \mathbf{H}^{1-\varepsilon}_0(\Omega)$, $X_2 = \mathbf{H}^{1+\varepsilon}_0(\Omega)$. Требуется найти пару $(\mathbf{u}, p) \in X_1 \times M_2$:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, p) =< \mathbf{f}, \mathbf{v} >_{-1-\varepsilon, 1+\varepsilon} \quad b_2(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in X_2, \quad \forall q \in M_1, \qquad (3)$$

Теорема 2. Задача Стокса (1), когда $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1-\varepsilon}(\Omega)$ $(0 < \varepsilon < 1/2)$, имеет единственное обобщенное решение $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^{1-\varepsilon}_0(\Omega) \times \left(H^\varepsilon_\perp(\Omega)\right)'$ как решение смешанной вариационной задачи (3), и для него справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{1-\varepsilon,\Omega} + \|p\|_{-\varepsilon,\Omega} \le C\|\mathbf{f}\|_{-1-\varepsilon,\Omega},$$

где $C > 0$ — положительная постоянная, не зависящая от $\mathbf{f}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 21-51-15002).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

2. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса: Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

3. Girault V. and Raviart P.-A. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

4. Nicolaides R.A. Existence, uniqueness and approximation for generalized saddle point problems // SIAM J. Numer. Anal. 1982. V.19. є 2. P. 349–357.

5. Урев М.В. Новая смешанная вариационная задача и система Стокса с сингулярной правой частью // ЖФМиМФ, 2021, т.61, No. 11, с. 12-21.

6. Guermond J.-L. The LBB condition in fractional Sobolev spaces and applications // IMA J. Numer. Anal. 2009. V.29. P. 790–805.

7. Babuška I., Aziz A.K. The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations. A.K. Aziz, ed. Academic Press, New York and London, 1972.

8. Brenner S.C., Scott L.R. The mathematical theory of finite element methods. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Об одной задаче управления для уравнений дробного порядка в смысле капуто

Файзиев Ю. Э.[1]**, Машарипова Г. А.**[2]

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

[1]fayziev.yusuf@mail.ru, [2]gavharmasharipova25@gmail.com

Этот тезис посвящен изучению задачи управления граничными условиями для дифференциальных уравнений дробного порядка. Задача состоит в управлении процессом в стержне, один из концов которого поддерживается при заданных условиях, а второй - при нулевой функции. Методы решения дифференциальных уравнений целого и дробного порядков, удовлетворяющих краевым и начальным условиям, можно найти в книгах [1] - [3].

Пусть m - положительное целое число и $m-1<\alpha\leq m$. Дробное производное в смысле Капуто порядка α, от функции h, заданной на $[0,\infty)$, определяется по формуле (см. например, [3], стр. 14)

$$D_t^\alpha h(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t\frac{h^{(m)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}},\quad t>0, \tag{1}$$

при условии, что правая часть равенства существует. Здесь $\Gamma(t)$ - Гамма функция Эйлера. При $\alpha=m$ дробные производные совпадают с обычным классическим производным: $\partial_t^m h(t)=D_t^m h(t)=h^{(m)}(t)$.

Пусть $0<\alpha\leq 1$, и пусть функция $u(x,t)$ является решением уравнения дробного порядка

$$D_t^\alpha u=a^2u_{xx}+f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0, \tag{2}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0,t)=\mu(t),\ u(l,t)=0,\ t\geq 0, \tag{3}$$

$\mu(0)=0$, $|\mu(t)|\leq M$ и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ 0\leq x\leq l, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ - заданная функция, M - положительное число.

Задача. Пусть $B(t)$ заданная функция. Найти граничное условие $\mu(t)$ такое, что решение задачи (2) - (5) удовлетворяло равенству

$$\int\limits_0^l u(x,t)dx=B(t) \tag{5}$$

Теорема. Для того, что бы решение задачи (2) - (5) удовлетворяло условию (5), достаточно, что бы функция $\mu(t)$ удовлетворяла следующему уравнению

$$\int\limits_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=g(t), \tag{6}$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{2a^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-1)^n\right](t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_n a)^2(t-\tau)^{\alpha}),$$

$$g(t) = B(t) - \frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\left[\hat{f}_n(t) + \varphi_n E_{\alpha,1}(-(\lambda_n a)^2 t^{\alpha})\right],$$

$$\hat{f}_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{\pi n\xi}{l}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_n a)^2(t-\tau)^{\alpha})d\xi d\tau,$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}d\xi,$$

$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$, $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ - функция Миттаг-Леффлера.

Отметим, что в случае $\alpha = 1$, задача управления процессом теплообмена изучена в работах академика Ш.О. Алимова (см. [4] - [8]) и в неоднородном случае - в работах [9] - [11].

ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва, 1972.

[2]. Lions J.L., Control Optimal de Systems Governess par des Equations aux Derivees Partielles. Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1968.

[3]. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[4]. Алимов Ш.А., О задачи быстродействия в управлении процессом теплообмена//Уз. Мат. Жур. 2005 г. N 4, с. 13-21.

[5]. Алимов Ш.А., Об одной задаче управления процессом теплообмена, ДАН России, 2008 г. Т. 421, N 5, с. 583-585.

[6]. Alimov Sh.A., S. Albeverio, On a Time-Optimal Control Problem Associated with the Heat Exchange Process, Appl. Math. Optim. 2008, 57: 58-68.

[7]. Alimov Sh.A., On a control problem associated with the heat transfer process, Eurasian mathematical journal, Volume 1, N 2, 2010, 17 - 30.

[8]. Alimov Sh.A., On the null-controllability of the heat exchange process, Eurasian mathematical journal, Volume 2, N 3, 2011, 5 - 19.

[9]. Файзиев Ю.Э., Халилова Н., Об одной задаче управления процессом теплопроводности, Вестник НУУз, 2016, N2/1, 49-54.

[10]. Файзиев Ю.Э., Кучкаров А.Ф., Насирова Д., Об одной задаче управления процессом теплопроводности в прямоугольнике, Вестник НУУз, 2017, N2/2, 239-244.

[11]. Fayziev Yu. E., On the control of heat conduction, IIUM Engineering Journal, Vol. 19, No. 1, 2018.

Единственность и существование для уравнений дробного порядка в смысле Римана - Лиувилля

Файзиев Ю. Э.[1], Нуралиева Н. Ш.[2]

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
fayziev.yusuf@mail.ru, n.navbahor@mail.ru

Этот тезис посвящен изучению задачи единственности и существования для частных производных уравнений дробного порядка. Методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка, удовлетворяющих краевым и начальным условиям, можно найти в книгах [1].

Для того, чтобы определить дробную часть нашего дифференциального уравнения, введем сначала дробный интеграл в смысле Римана-Лиувилля порядка $\rho < 0$ от функции f, определенной на $[0, \infty)$, по формуле (см. например, [2], стр. 14)

$$\partial_t^\rho f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\rho)} \int\limits_0^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\rho+1}} d\xi, \quad t > 0, \tag{1}$$

при условии, что правая часть равенства существует. Пусть m –натуральное число и $m-1 < \rho \leq m$. Тогда дробное производное в смысле Римана-Лиувилля порядка ρ, от функции f, определяется по формуле

$$\partial_t^\rho f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \partial_t^{\rho - m} f(t). \tag{2}$$

Пусть $m-1 < \rho \leq m$ и Ω – произвольная N-мерная область (с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$). Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} \partial_t^\rho u(x,t) - \triangle u(x,t) = f(x), \ x \in \Omega, \quad 0 < t < T; \\ Bu(x,t) \equiv \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \ 0 < t < T; \\ \lim\limits_{t \to 0} \partial_t^{\rho - j} u(x,t) = \varphi_j(x), \quad x \in \overline{\Omega}, j = 1, 2, ..., m \end{cases} \tag{3}$$

здесь $f(x)$, $\varphi_j(x)$ - заданные функции, Δ – оператор Лапласа.

Применение метода Фурье к задаче (3) приводит нас к рассмотрению следующей спектральной задачи:

$$-\Delta v(x) = \lambda v(x) \quad x \in \Omega; \tag{4}$$

$$Bv(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{5}$$

В работе С. Агмона [3] найдены достаточные условия на границу $\partial\Omega$ области Ω, обеспечивающие компактность соответствующего обратного оператора, или, что тоже самое, существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций $\{v_n(x)\}$ и счетного множества положительных собственных значений λ_n задачи (6) - (7). Будем называть эти условия условием (A) и всюду далее предположим, что эти условия выполнены.

Обозначим через $E_{\rho,\mu}$ функцию Миттаг-Лиффлера

$$E_{\rho,\mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\rho k + \mu)},$$

и через φ_{jn} коэффициенты Фурье функций $\varphi_j(x)$.

Определение. Классическим решением смешанной задачи (3) назовем функцию $u(x,t)$ имеющую в замкнутом цилиндре $\overline{\Omega}\times[0,\infty)$ все производные, которые входят в первое уравнение (3), и удовлетворяющую всем условиям смешанной задачи (3) в обычном классическом смысле.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi_j(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

(a) $f(x)\in C(\overline{\Omega})$

(b) $\varphi_j(x)\in C^{\left[\frac{N}{2}\right]}(\Omega),\quad \partial_t^{\alpha}\varphi_j(x)\in L_2(\Omega),\quad |\alpha|=\left[\frac{N}{2}\right]+1,\ j=1,2,...,m;$

Теорема. Пусть выполнены условия (A) и (a)-(b). Тогда смешанная задача (3) имеет единственное решение и имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{j=1}^{m}\varphi_{jn}t^{\rho-j}E_{\rho,\rho-j+1}(-\lambda_n t^{\rho})+f_n\,t^{\rho}E_{\rho,\rho+1}(-\lambda_n t^{\rho})\right]v_n(x). \tag{6}$$

Отметим, что в случае $0<\rho\le 1$ изучено в работе [4].

ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Kilbas A. A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[2]. Псху А. В., Уравнения в частных производных дробного порядка. М., Наука. 2005.

[3]. Agmon S., On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. // Comm. Pure and Appl. Math. 1962. V. 15. Issue 2. P. 119-143. https://doi.org/10.1002/cpa.3160150203

[4]. Ашуров Р.Р., Мухиддинова А.Т., Обратная задача по определению плотности тепловых источников для уравнения субдиффузии. // Дифференциальные уравнения, 2020, т. 56, є 12, 1596-1609.

Единственность и существование для уравнений дробного порядка в смысле Хилфера

Файзиев Ю. Э.[1], Тухтаева Н. М.[2]

Национальный Университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан
fayziev.yusuf@mail.ru, nozimatoxtayeva3715@gmail.com

В данной работе исследуется существование решения прямой задачи для уравнения с дробным производным в смысле Хилфера, эллиптическая часть которого является эллиптический оператор любого порядка, определенный в произвольной ограниченной области Ω с достаточно гладкой границей. Методом Фурье доказаны теоремы о существовании и единственности классического решения начально - краевой задачи.

Пусть $A(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ - произвольный положительный формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка $m = 2l$, с постоянными коэффициентами a_α, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ - мультииндекс и $D = (D_1, D_2, ..., D_N)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Пусть n - положительное целое число и $n-1 < \beta \leq n$, $n-1 < \gamma \leq n$, $0 \leq \mu \leq 1$. Введем сначала дробный интеграл в смысле Римана-Лиувилля порядка ρ от функции f, определенной на $[0,\infty)$, по формуле (см. например, [1], [2], стр. 14)

$$I^\rho f(t) := \frac{1}{\Gamma(\rho)} \int_0^t (t-\tau)^{\rho-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, \tag{1}$$

при условии, что правая часть равенства существует и $I^0 f(t) := f(t)$. С помощью дробного интеграла определим дробную производную в смысле Хилфера

$$D^{(\beta,\gamma)\mu} f(t) = I^{\mu(n-\beta)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n I^{(1-\mu)(n-\gamma)} f(t). \tag{2}$$

Очевидно, если $\mu = 0$, то формула (2) определяет дробной производной в смысле Римана-Лиувилля, если $\mu = 1$ в смысле Капуто.

Пусть $0 < \beta \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$. Рассмотрим уравнение дробного порядка

$$D^{(\beta,\gamma)\mu} u(x,t) + A(x,D) u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \tag{3}$$

с граничными условиями

$$B_j u(x,t) = \sum_{|\alpha|\leq m_j} b_{\alpha,j}(x) D^\alpha u(x,t) = 0, \quad 0 \leq m_j \leq m-1, \quad j = 1,2,...,l; \quad x \in \partial\Omega; \tag{4}$$

и начальным условием

$$\lim_{t\to+0} \frac{d}{dt} I^{(1-\mu)(1-\gamma)} u(x,t) = \varphi(x). \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ и коэффициенты $b_{\alpha,j}(x)$ - заданные функции. В результате получим прямую начально-краевую задачу.

Применение метода Фурье к задаче (3)-(5) приводит нас к рассмотрению следующей спектральной задачи:

$$A(x,D) v(x) = \lambda v(x) \quad x \in \Omega; \tag{6}$$

$$B_j v(x) = 0, \quad j = 1,2,...,l; \quad x \in \partial\Omega. \tag{7}$$

В работе С. Агмона [3] найдены достаточные условия на границу $\partial\Omega$ области Ω и на коэффициенты операторов A и B_j, обеспечивающие компактность соответствующего обратного оператора, или, что тоже самое, существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций $\{v_k(x)\}$ и счетного множества положительных собственных значений λ_k задачи (6) - (7). Будем называть эти условия условием (A) и всюду далее предположим, что эти условия выполнены.

Пусть τ - произвольное действительное число. Введем степень оператора A^τ, действующий по правилу

$$A^\tau g = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau g_k v_k.$$

Очевидно, область определения данного оператора имеет вид

$$D(A^\tau) = \{g \in L_2 : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |g_k|^2 < \infty\}.$$

Обозначим через $E_{\rho,\mu}$ функцию Миттаг-Лиффлера

$$E_{\rho,\mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\rho k + \mu)},$$

и через φ_n коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$.

Определение. Классическим решением смешанной задачи (3)-(5) назовем функцию $u(x,t)$ имеющую в замкнутом цилиндре $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$ все производные, которые входят в уравнение (3), и удовлетворяющую всем условиям смешанной задачи (3)-(5).

Теорема. Пусть выполнены условия (A), $\tau > \frac{N}{2m}$ и $\varphi \in D(\hat{A}^\tau)$. Тогда смешанная задача (3)-(5) имеет единственное решение и имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varphi_n t^{(1-\gamma)(\beta-1)} E_{\beta,\beta+\gamma(1-\beta)}(-\lambda_n t^\beta)\right] v_n(x). \tag{8}$$

Отметим, что дифференциальные уравнения с дробной производной в смысле Хилфера изучены в работе [4].

ЛИТЕРАТУРЫ

[1]. Kilbas A. A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[2]. Псху А. В., Уравнения в частных производных дробного порядка. М., Наука. 2005.

[3]. Agmon S., On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. // Comm. Pure and Appl. Math. 1962. V. 15. Issue 2. P. 119-143. https://doi.org/10.1002/cpa.3160150203

[4]. R. Hilfer (ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London and Hong Kong, P.87-130, 2000.

Начально-внутренняя задача для уравнения смешанного типа второго порядка с двумя линиями вырождения

Фаязов К. С.[1], Худайберганов Я. К[2]

Туринский политехнический университет в г. Ташкенте, Ташкент, Узбекистан, kudratillo52@mail.ru;
Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан, komilyashin89@mail.ru

Пусть функция $u(x, y, t)$ является решением уравнения

$$u_{tt}(x, y, t) = sgn(x)u_{xx}(x, y, t) + sgn(y)u_{yy}(x, y, t), \tag{1}$$

в области $\Omega = \Omega_0 \times Q$, где $\Omega_0 = \left\{(x, y) : (-1; 1)^2,\ x \neq 0,\ y \neq 0\right\}, Q = \{0 < t < T, T < \infty\}$ и удовлетворяет следующим условиям:

начальным и внутренним

$$\begin{aligned} &u(x, y, t)|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in [-1; 1], \\ &u(x, y, t)|_{t=t_0} = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in [-1; 1],\ t_0 \in \overline{Q}, \end{aligned} \tag{2}$$

граничным

$$\begin{aligned} &u(x, y, t)|_{x=\pm 1} = 0,\ (y, t) \in [-1; 1] \times \overline{Q}, \\ &u(x, y, t)|_{y=\pm 1} = 0,\ (x, t) \in [-1; 1] \times \overline{Q}, \end{aligned} \tag{3}$$

а также условиям склеивания

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ (y, t) \in [-1; 1] \times \overline{Q}, \\ &\left.\frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} = \left.\frac{\partial^i u(x, y, t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ \ (x, t) \in [-1; 1] \times \overline{Q}\,, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\left(i = \overline{0, 1}\right)$ и $\varphi_i(x, y)$−заданные достаточно гладкие функции. Требуется найти функцию $u(x, y, t)$ удовлетворяющее условиям (1)-(4).

Теория внутренних задач для дифференциальных уравнений с частными производными относительно многих независимых переменных в настоящее время интенсивно развивается. Ряд теорем единственности и устойчивости для решения внутренних задач уравнений эллиптического типа получен в работах М.А. Лаврентьева и М.М. Лаврентьева, А. Абдукаримова, С.П. Шишатского и др. Внутренние задачи для параболических уравнений рассмотрены в работах М.М. Лаврентьева, Б.К. Амонова, С. П. Шишатского и др. Задачи продолжения решения гиперболических уравнений исследованы в работе Б.И. Пташника [3].

Некорректные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений были рассмотрены в работах М. М. Лаврентьева [1],[2] H. Levine, С.Г Крейна, А.Л. Бухгейма, К. С. Фаязова [4], а для уравнений смешанного и смешанно-составного типа в работах К. С. Фаязова, К. С. Фаязова и И.О. Хажиева [5], К. С. Фаязова и Я. К. Худайберганова [6].

В данной работе доказана некорректность рассматриваемой задачи, получено представление решения, выведена априорная оценка решения, получены теоремы доказывающие единственность и устойчивость на множестве корректности.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Лаврентьев., Л. Я. Савельев // Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. 941 с.
2. М. М. Лаврентьев // Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений: (Спецкурс для студентов-математиков НГУ) М-во высш. и сред. спец. образования РСФСР. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск : [НГУ], 1973. С. 71. 20 см.
3. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев:Наук. думка, 1984. 264 стр.
4. К. С. Фаязов // Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа фторого порядка. УзМЖ. 1995. є 2. С. 89-93.
5. К.С. Фаязов, И.О. Хажиев // Некорректная начально-краевая задача для системы уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени, Вычислительные технологии, РАН. 2017. Т. 22. є 3. С. 103-114.
6. Фаязов К. С., Худайберганов Я. К., Некорректная краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения, Сибирские электронные математические известия. 2020. Том 17. стр. 647-660.

Об одном свойстве вершинных процессов выпуклой оболочки порожденной пуассоновским точечным процессом в круге

Хамдамов И.М.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан
khamdamov.isakjan@gmail.com

Настоящая работа посвящена исследованию вершинных процессов от выпуклых оболочек, порожденных пуассоновскими точечными процессами в секторе единичного круга.

Рассмотрим выпуклую оболочку C_n порожденную реализацией (r_k, α_k), $k = 1, 2, ...$, неоднородного пуассоновского точечного процесса $\Pi_n(\cdot)$ (н.п.т.п.) с интенсивностью $\Lambda_n(\cdot)$, сужение в круге A, центр круга которого находится в точке (0,1), где интенсивная мера $\Lambda_n(\cdot)$ имеет следующий вид

$$\Lambda_n(D) = \frac{n}{2\pi} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (1-r)^\beta L\left(\frac{1}{1-r} \right) \right\} \right| d\alpha dr \tag{1}$$

при $D \subset A$,

$$\Lambda_n(D) = 0$$

при $D \not\subset A$,
здесь $L(x)$ - медленно меняющаяся функция в бесконечности в смысле Карамата и $\beta 1$.

Пусть b_n – наименьший корень уравнения

$$nx^{\left(\beta+\frac{1}{2}\right)} L(x) = 1. \tag{2}$$

Тогда если обозначим

$$r_i' = b_n r_i,$$

то (r_i', α_k), $k = 1, 2, ...$ является реализацией н.п.т.п. с интенсивностью

$$\Lambda_n(D) = \frac{1}{2\pi\sqrt{b_n}L(b_n)} \iint_D \left| \frac{\partial}{\partial r} \left\{ (b_n - r)^\beta L\left(\frac{b_n}{b_n - r}\right) \right\} \right| d\alpha dr$$

при $D \subset b_n A$,

$$\Lambda_n(D) = 0$$

при $D \not\subset b_n A$,
где $b_n A$ является окружностью с радиусом b_n с центром в $(0, b_n)$.

Пусть $X_i = r_i' \sin\alpha_i$, $Y_i = b_n - r_i' \cos\alpha_i$, обозначим через $\mathrm{Z_n}$ – множество вершин выпуклой оболочки , порожденной случайными точками $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ...$ и положим $W_n(a) = (X_n(a), Y_n(a))$ для любого $a \in R$ такая точка $(X_n(a), Y_n(a)) = (X_k, Y_k)$, для которой $Y_k - aX_k$ принимает минимальное значение. Отсюда нетрудно понять, что $W_n(a)$ образует скачкообразный стационарный марковский процесс.

Гроенебум в [1] удачно использовав свойство независимости приращения пуассоновского процесса, получил точное распределение для вершинного процесса $W_n(a)$ при фиксированном времени $a \in R$. Кроме того, это свойство независимости приращения пуассоновского процесса позволяет установить свойство сильного перемешивания вершинных процессов $W_n(a)$, с помощью которого легко доказывается центральная предельная теорема для основных функционалов, таких, как число вершин, площадь и периметр выпуклой оболочки.

Основываясь на вышесказанном, нам хотелось в настоящей работе исследовать свойства вершинного процесса выпуклой оболочки, порожденной неоднородным пуассоновским точечным процессом внутри сектора круга $b_n A$. Мера интенсивности пуассоновского закона связана с правильно меняющимися функциями вблизи границы носителя. Рассматриваемые в настоящей работе случаи включают и равномерную меру, которая рассмотрена Гроенебумом в [1].

Следуя [1-4], всю окружность делим на m_n отрезков длины $2\pi\sqrt{b_n}\log n$ (с центральным углом $2\pi\log n/\sqrt{b_n}$), где $m_n = \sqrt{b_n}/(\log n)$. Обозначим через $I_{k,n}$ часть окружности, соответствующую k - му участку деления

$$\left(2\pi\sqrt{b_n}\log n(2k-1), 2\pi\sqrt{b_n}\log n(2k+1)\right).$$

Рассмотрим сектор $I_{0,n}$ окружности $b_n A$.
Полагая

$$\Im_n^0 = \sigma\left\{W_n(c) : c \le 0\right\}, \quad \Im_n^{a+} = \sigma\left\{W_n(c) : ca\right\}.$$

Приведем основной результат работы

Теорема. Если $a_n = c_0 \log n \big/ \sqrt{b_n}$ и $a = c_0 k \big/ \sqrt{b_n}$ $(k = 0, 1, ...,$ $c_0 > 0$ произвольная константа), то существует такая $c_1 > 0$, что

$$|P\left(A\cap B\right)-P(A)P(B)|\leq \exp\left(-c_1k^{2\beta+1-\varepsilon}\right),$$

для любого

$$A\in\Im_n^0\ B\in\Im_n^{a+}\ \text{и}\ \varepsilon>0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Groeneboom P. Limit theorems for convex hulls. //Theory Related Fields. 1988. v.79, p. 327–368.

2. Khamdamov I.M. On Limit Theorem for the Number of Vertices of the Convex Hulls in a Unit Disk.// Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2020, v.13 Issue 3, p.275–284.

3. Khamdamov I.M. Properties of convex hull generated by inhomogeneous Poisson point process.// Ufimsk. Mat. Zh., 2020, v. 12, Issue 3, p.83–98.

4. FormanovSh.K., Khamdamov I.M. On joint probability distribution of the number of vertices and area of the convex hulls generated by a Poisson point process.// Statistics and Probability Letters, 2021, 169, 108966.

Моделирование переноса растворенного вещества в пороупругом глинстом сланце

Хайдаров И. К.[1], Имомназаров Б. Х.[2], Михайлов А. А.[3], Холмуродов А. Э.[4],

Чирчикский государственный педагогический институт ташкентский области, Узбекистан;

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Узбекистан;

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия;

imom@omzg.sscc.ru

Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан;

Следуя работе [1], для простоты, рассмотрим пористую жидкость, состоящую из одного незаряженного растворенного вещества с мольной фракцией $\Psi = x^s$ в растворителе (воде) с мольной фракцией $x^w = 1-\Psi$. Раствор считается идеальным. Химические потенциалы растворенного вещества μ^s и растворителя μ^w имеют вид

$$\mu^s = pV_s + RT\ln\Psi,$$

$$\mu^w = pV_w + RT\ln(1{-}\Psi),$$

где p– давление, R – газовая постоянная, T – температура, V_s, V_w – соответствующие парциальные молярные объемы растворенного вещества и растворителя.

В [2] рассмотрена химопороупругая модель для оценки профиля напряжений околоскважинного пространства, а в [3] решена система уравнений химотермопороупругости на основе неявного конечно-разностного метода. Далее, в предлагаемой работе предположим, также как в [1], что объемный модуль K раствора не зависит от Ψ, и ограничимся изотермическим случаем при постоянной температуре. В отличие от [1-3] в данной работе коэффициент диффузии является функцией пористости.

В двухкомпонентной пористой жидкости удобно использовать давление p и мольную фракцию Ψ, а не химические потенциалы μ^s, μ^w, соответственно. Используя законы сохранения массы и предпологая, что Ψ меняется достаточно мало [1], после простых преобразований получим систему уравнений параболического типа [4-6]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = A\nabla^2\Phi + H\nabla^2\Psi, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = C\nabla^2\Phi + E\nabla^2\Psi, \tag{2}$$

где $\Phi = \sigma_{kk} + \frac{3p}{B}$, σ_{kk}– след тензора напряжений,

$$A = \frac{2GB^2k(1-\nu)(1+\nu_u)^2}{9(1-\nu_u)(\nu_u-\nu)V_{soln}}\left[\gamma V_s x_0^s + V_w(1-x_0^s)\right], \quad H = \frac{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)(\gamma-1)RTk}{3(\nu_u-\nu)},$$

$$C = \frac{(\gamma-1)Bk(1-\nu)(1+\nu_u)V_sV_wx_0^s(1-x_0^s)}{3(1-\nu_u)(1+\nu)\alpha V_{\mathrm{soln}}}, \quad E = \frac{V_s}{\alpha V_{soln}}\left[\gamma D V_{soln} + (1-\gamma)RTkx_0^s\right],$$

γ- коэффициент пропускания, D – коэффициент диффузии.
Как показано в [7-10], коэффициенты ν и k можно связать с пористостью:

$$\nu = \frac{\tilde{\lambda}}{2\left(\tilde{\lambda}+G\right)}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda - (\alpha\rho^2)^{-1}K^2, \quad K = \lambda + \frac{2}{3}G, \quad k = \frac{\mu}{\chi\rho\rho_l},$$

где μ - вязкость воды, χ - коэффициент трения, ρ=ρ_l+ρ_s, ρ_s=$\rho_s^f(1-d_0)$ и ρ_l=$\rho_l^f d_0$, d_0 - пористость, ρ_s^f и ρ_l^f - физические плотности пористого тела и воды соответственно, λ, G, $\alpha\rho^2$ – упругие параметры пористой среды [11].

Рассмотрена химически инертная деформируемая горная порода, для которой учитываются только изменения напряжения и порового давления: химия пористой жидкости не оказывает прямого влияния на деформацию. Показано, что изменения химических эффектов приводит к изменению порового давления и деформации горных пород. Численно решена задача переноса растворителя и растворенного вещества через полупроницаемый глинистый сланец на основе предложенного алгоритма.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 21-51-15002).

ЛИТЕРАТУРА

1.Sherwood J.D. A model of hindered solute transport in a poroelastic shale // Proc. Roy. Soc. London, 1994, **445**, P. 679–692.

2. Roshan H., Rahman S. A fully coupled chemo-poroelastic analysis of pore pressure and stress distribution around a wellbore in water active rocks // Rock Mechanics and Rock Engineering, 2011, **44**, P. 199–210.

3. Rafieepour S., Zamiran S., Ostadhassan M. A cost-effective chemo-thermo-poroelastic wellbore stability model for mud weight design during drilling through shale formations // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2020, No. 12, P. 768–779.

4. Imomnazarov B.Kh., Khaydarov I.Q., Imomnazarov, Kh.Kh. On one thermodynamically consistent model of clay shale swelling // Mathematical Notes of NEFU, 2020, 27(2), P. 93–104.

5. Imomnazarov B.Kh., Khaydarov I.Q. About one model of solute transport in a porous elastic shale // Mathematical Notes of NEFU, 2020, 27(3), P. 77–87.

6. Imomnazarov B.Kh., Mikhailov A.A., Khaydarov I.Q., Kholmurodov A.E. Численное решение задачи переноса растворенного вещества в пороупругом глинистом сланце // Siberian Electronic Mathematical Reports, 2021, 18(1), C. 694–702.

7. Imomnazarov Kh.Kh. Concentrated force in a porous half-space // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Ser. Mathematical Modeling in Geophysics, 1998, No. 4, P. 71–77.

8. Grachev E.V., Zhabborov N.M., Imomnazarov Kh.Kh. A Concentrated Force in an Elastic Porous Half-Space // Doklady Physics, 2003, **48**:7, P. 376–378.

9. Grachev E., Imomnazarov Kh., Zhabborov N., One nonclassical problem for the statics equations of elastic-deformed porous media in a half-plane // Applied Matematics Letters, 2004, **17**:1, P. 31–34.

10. Imomnazarov Kh.Kh., Zhabborov N.M. Some initial boundary value problems of the mechanics of two-velocity media, Izd-vo NUUz im. Mirzo Ulugbek, 2012.

11. Blokhin A.M., Dorovsky V.N. Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum, Nova Science. New York. 1995.

Об асимптотике среднего времени достижения высокого уровня процессом с задерживающей границей

Ходжибаев В. Р.[1], Олимжонова М. И.[2]

Наманганский инженерно-строительный институт, Институт Математики АН РУз
e-mail1 vkhodjibayev@mail.ru1

Наманганский государтсвенный университет, Наманган, Узбекистан
e-mail2 rustamjonnajmiddinov97@gmail.com2

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, ...$ и $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n, ...$ взаимно независимые последовательности независимых случайных величин, одинаково распределённых внутри каждой последовательности, $P(\tau_1 > 0) = 1$. Обозначим

$$S_0 = 0\ ,\ S_n = \xi_1 +\ \xi_2 +\ \ldots +\ \xi_n,\ \tau(t) = \max\{k1 : \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_k < t\},\ \xi(t) = S_{\tau(t)}.$$

$\xi(t)$ называется обобщённым процессом восстановления. Если случайная величина τ_1 показательно распределена , то процесс $\xi(t)$ являет собой обобщённый пуассоновский процесс.

Введём случайный процесс $\eta(t, a)$, $a0$ с задержкой на границе полуинтервала $[-a, \infty)$:

$$\eta(0, a) = 0,\ \eta(t, a) = \xi(t) - a - \min\{-a; \inf_{s\le t}\xi(s)\}.$$

Такая схема случайных процессов присутствует в многих моделях задач теории хранения запасов, систем обслуживания и др. Для произвольного числа $b > 0$ введём случайную величину $\theta(a, b)$, равную моменту первого достижения уровня b траекториями случайного процесса $\eta(t, a)$:

$$\theta(a, b) = \inf\{t > 0 : \eta(t, a)b\}.$$

Наша цель состоит в получении асимтотических разложений для математического ожидания случайной величины $\theta(a,b)$ при $a+b\to\infty$, $t\to\infty$.

Литература, посвященная к изучению случайной величины $\theta\,(a,b)$, обширна. Приведем лишь некоторые работы , которые имеют непосредственное отношение к результатам настоящей работы. В случае $P(\tau_1=1)=1$, то есть когда $\xi(t)$ является случайным блужданием с дискретным временем , получены асимптотические разложения для $E\theta(0,b)$ в [1] , для характеристической функции распределения $\theta(a,b)$ в [2] при $a+b\to\infty$. В работах [1] , [2] на распределение ξ_1 накладываются, в основном, условия крамеровского типа. В [3] доказаны предельные теоремы для распределения походящим образом нормированной случайной величины $\theta(a,b)$ в случае, когда

$$P(\tau_1=1)=1,\ P(\xi_1=-1)+P(\xi_1=0)+P(\xi_1=1)=1.$$

В [4] для обобщённого пуассоновского процесса с положительными скачками и отрицательным сносом доказаны предельные теоремы для математического ожидания и преобразования Лапласа - Стилтьеса случайной величины $\theta(a,b)$ при $a+b\to\infty$. В случае, когда $\xi(t)$ является однородным процессом с независимыми приращениями в [5] установлены асимтотические разложения для $E\theta(a,b)$, а в [6] для преобразования Лапласа - Стилтьеса нормированной случайной величины $\theta(a,b)$ при $a+b\to\infty$, $t\to\infty$. В этих работах требуется существование у процесса $\xi(t)$ диффузионной компоненты или сноса. Тем самым из рассмотрения исключаются ступенчатые процессы. В связи с этим здесь рассматривается случай, когда $\xi(t)$ является обобщённым процессом восстановления. Библиографические сведения по данной задаче можно найти в [2] , [6]

Здесь приводим результат для случая $E\xi_1<0$. Аналогичным способом получены результаты и для случаев $E\xi_1=0$, $E\xi_1>0$. В данной работе существенно используются результаты работ [1] и [7], в связи с чем будем предполагать, выполненными следующие условия (см. [1] , [7]).

(C_1) Распределение ξ_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту.

(C_2) $Ee^{\lambda\xi_1}<\infty$ при $-\alpha\le\lambda\le\beta$, $\alpha>0, \beta>0$, $E\xi_1<0$, $Ee^{\beta\xi_1}>1$.

Пусть $f(\lambda)=Ee^{\lambda\xi_1}$. Известно (см , например, [8]), что в условиях (C_1) и (C_2) существует единственное положительное решение $\lambda=q$ уравнения $f(\lambda)=1$, $0<q<\beta$. А функция $r(\lambda)=1-f(\lambda)$ допускает факторизацию $r(\lambda)=r_+(\lambda)r_-(\lambda)$ при $-\alpha\le Re\lambda\le\beta$. Функции $r_\pm(\lambda)$ называются компонентами факторизации и для них известны различные представления через характеристик ξ_1 (см.напр. [8]).

Теорема. *Пусть выполнены условия (C_1), (C_2). Тогда существует такое $\varepsilon>0$, что при $a\to\infty$, $b\to\infty$*

$$E\theta(a,b)=|E\xi_1|^{-1}\,E\tau_1\{c_1e^{q(a+b)}-c_2e^{qa}-2a-b+c_3+c_4(2b+c_5)e^{-qb}\}+$$
$$o(e^{(2q-\beta)(a+b)})+o(e^{-\alpha(a+b)})+O(e^{qb-\varepsilon a})+(a+b)O(e^{-(q+\varepsilon)b})+O(e^{-(q+\varepsilon)a}),$$

где коэффициенты (c_i) $i=1,2,3,4,5$ явным образом выражаются через значений компонент факторизации $r_\pm(\lambda)$ и их производных в точках 0 и q.

Отметим , что величина ε , участвующая в теореме, связана с возможностью функции $r(\lambda)$ сохранять свойство аналитичности в полосе $0<Re\lambda<q+\varepsilon$ и не иметь там комплексных нулей.

Литература

1. Лотов В.И. О случайных блужданиях в полосе .Теория вероятн. и ее примен. 1991, том 36, выпуск 1, стр.160-165.

2. Лотов В.И. О достижении высокого уровня блужданием с задержкой в нуле. Сибирский матем. журн ,1999,том 40, номер 6, стр.1276-1288 .

3. Булинская Е.В. О пересечении высокого уровня некоторым классом случайных процессов с дискретным временем. Фундаментальная и прикладная математика, 1995, Т.1, No.1,стр. 81-107.

4. Королюк В.С. Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. Киев, Наукова думка, 1975.

5. Khodjibayev V.R. Asymptotic representations for characteristics of exit from an interval for stochastic processes with independent increments.Siberian Adv. Math ,1997 ,T. 7, No.3, pp.75-86.

6. Lotov V.I, Khodjibayev V.R.On the limit theorems for the first exit time from a strip for stochastic processes II.Siberian Adv.Math . ,1998 , v.8, No.4, p.41-59.

7.Лотов В.И. Об аппроксимации математического ожидания времени первого выхода случайного блуждания из интервала. Сиб. матем. журн. ,2016 , том 57 , No.1, стр. 113-120.

8. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М: Наука ,1972 ,368 с.

Конфлюэнтные гипергеометрические функции трех переменных и соответствующие им системы дифференциальных уравнений

Холдарова И.Ж.

Ферганский госуниверситет, Фергана, Узбекистан,
irodaxonxoldarova@mail.ru

Большие успехи в изучении теории гипергеометрической функции одного переменного стимулировали развитие соответствующих теорий для функций от двух и многих переменных. Аппель [1] определил в 1880 г. четыре функции, каждая из которых аналогична функции Гаусса. 1889 г. Горн установил, что существуют 14 полных и 20 конфлюэнтных гипергеометрических функций двух переменных и составил системы уравнений в частных производных, которым удовлетворяют гипергеометрические функции из списка Горна. Сривастава и Карлссон [2] составили список 205 полных гипергеометрических функций трех переменных.

В настоящем сообщении определим все конфлюэнтные формы первой гипергеометрической функции $F_{1b}\left(a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2;c;x,y,z\right)$ из списка Сривастава-Карлссона и составим системы уравнений, соответветствующие этим конфлюэнтным гипергеометрическим функциям трех переменных.

Полная гипергеометрическая функция трех переменных F_{1b} определяется формулой

$$F_{1b}\left(a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)_n\left(a_2\right)_n\left(a_3\right)_p\left(a_4\right)_p\left(b_1\right)_{m-n}\left(b_2\right)_{m-p}}{m!n!p!(c)_m}x^m y^n z^p,$$

предельные формы которой записиваются следующими равенствами:

$$F_{1b1}\left(a_1,a_2,a_3,b_1,b_2;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\,(a_2)_n\,(a_3)_p\,(b_1)_{m-n}\,(b_2)_{m-p}}{m!n!p!(c)_m}x^m y^n z^p,$$

$$F_{1b2}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\,(a_2)_n\,(b_1)_{m-n}\,(b_2)_{m-p}}{m!n!p!(c)_m}x^m y^n z^p,$$

$$F_{1b3}\left(a_1,a_2,b_1,b_2;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\,(a_2)_p\,(b_1)_{m-n}\,(b_2)_{m-p}}{m!n!p!(c)_m}x^m y^n z^p,$$

$$F_{1b4}\left(a,b_1,b_2;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(a)_n\,(b_1)_{m-n}\,(b_2)_{m-p}}{m!n!p!(c)_m}x^m y^n z^p,$$

$$F_{1b5}\left(b_1,b_2;c;x,y,z\right)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(b_1)_{m-n}\,(b_2)_{m-p}}{m!n!p!(c)_m}x^m y^n z^p,$$

где $(\lambda)_k$ – известный символ Похгаммера.

Ряды $\sum\limits_{m,n,p=0}^{\infty}A_{m,n,p}x^m y^n z^p$, где

$$\frac{A_{m+1,n,p}}{A_{m,n,p}}=\frac{F(m,n,p)}{F'(m,n,p)},\ \frac{A_{m,n+1,p}}{A_{m,n,p}}=\frac{G(m,n,p)}{G'(m,n,p)},\ \frac{A_{m,n,p+1}}{A_{m,n,p}}=\frac{H(m,n,p)}{H'(m,n,p)},$$

и

$$F(m,n,p),F'(m,n,p),G(m,n,p),G'(m,n,p),H(m,n,p),H'(m,n,p)$$

– полиномы относительно m, n и p, удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Эту систему можно записать с помощью дифференциальных операторов

$$\delta_1\equiv x\frac{\partial}{\partial x},\ \ \delta_2\equiv y\frac{\partial}{\partial y},\ \ \delta_3\equiv z\frac{\partial}{\partial z}$$

в виде

$$\left\{\begin{array}{l}\left[F'(\delta_1,\delta_2,\delta_3)x^{-1}-F(\delta_1,\delta_2,\delta_3)\right]u=0\\ \left[G'(\delta_1,\delta_2,\delta_3)y^{-1}-G(\delta_1,\delta_2,\delta_3)\right]u=0\\ \left[H'(\delta_1,\delta_2,\delta_3)z^{-1}-H(\delta_1,\delta_2,\delta_3)\right]u=0.\end{array}\right.$$

В следующем списке дифференциальных уравнений в частных производных u является искомой функцией от x, y и z

$$u=F_{1b1}\left\{\begin{array}{l}x(1-x)u_{xx}+xyu_{xy}+xzu_{xz}-yzu_{yz}+\\ \qquad\qquad+[c-(b_1+b_2+1)x]u_x+b_2yu_y+b_1zu_z-b_1b_2u=0\\ y(1+y)u_{yy}-xu_{xy}+[1-b_1+(a_1+a_2+1)y]u_y+a_1a_2u=0\\ zu_{zz}+xu_{xz}+(1-b_2+z)u_z+a_3u=0;\end{array}\right.$$

$$u = F_{1b2} \begin{cases} x(1-x)u_{xx} + xyu_{xy} + xzu_{xz} - yzu_{yz} + \\ \qquad +[c-(b_1+b_2+1)x]u_x + b_2yu_y + b_1zu_z - b_1b_2u = 0 \\ y(1+y)u_{yy} - xu_{xy} + [1-b_1+(a_1+a_2+1)y]u_y + a_1a_2u = 0 \\ zu_{zz} + xu_{xz} + (1-b_2)u_z + u = 0; \end{cases}$$

$$u = F_{1b3} \begin{cases} x(1-x)u_{xx} + xyu_{xy} + xzu_{xz} - yzu_{yz} + \\ \qquad +[c-(b_1+b_2+1)x]u_x + b_2yu_y + b_1zu_z - b_1b_2u = 0 \\ yu_{yy} - xu_{xy} + [1-b_1+y]u_y + a_1u = 0 \\ zu_{zz} - xu_{xz} + (1-b_2+z)u_z + a_2u = 0; \end{cases}$$

$$u = F_{1b4} \begin{cases} x(1-x)u_{xx} + xyu_{xy} + xzu_{xz} - yzu_{yz} + \\ \qquad +[c-(b_1+b_2+1)x]u_x + b_2yu_y + b_1zu_z - b_1b_2u = 0 \\ yu_{yy} - xu_{xy} + [1-b_1+y]u_y + au = 0 \\ zu_{zz} + xu_{xz} + (1-b_2)u_z + u = 0; \end{cases}$$

$$u = F_{1b5} \begin{cases} x(1-x)u_{xx} + xyu_{xy} + xzu_{xz} - yzu_{yz} + \\ \qquad +[c-(b_1+b_2+1)x]u_x + b_2yu_y + b_1zu_z - b_1b_2u = 0 \\ yu_{yy} - xu_{xy} + (1-b_1)u_y + u = 0 \\ zu_{zz} - xu_{xz} + (1-b_2)u_z + u = 0. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Appell P. and Kampe de Feriet J. Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques; Polynomes d'Hermite, Gauthier - Villars. Paris, 1926. — 448 p.

2. Srivastava H.M., Karlsson P.W., Multiple Gaussian Hypergeometric Series. New York,Chichester,Brisbane and Toronto: Halsted Press, 1985. 428 p.

Нелокальная задача Стеклова для нагруженного уравнения третьего порядка

Холиков Д.

Ташкентский архитектурно строительный институт, Ташкент, Узбекистан, xoliqov23@mail.ru;

В этой работы представляет собой исследование разрешимости нелокальной задачи для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка.

В области $D = \{(x,t): \ 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка

$$Mu \equiv Lu + \int\limits_0^l k(x,t)u(x,t)dx = f(x,t), \tag{1}$$

где $Lu \equiv u_{xxt} + d(x,t)u_t + a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u$ – псевдопараболический оператор, а $k(x,t)$ и $f(x,t)$ — заданные функции.

Задача. *Найти регулярное в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

нелокальному интегральному условию

$$u_x(0,t) = \alpha_1(t)u(0,t) + \alpha_2(t)u(l,t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3}$$

$$u_x(l,t) = \beta_1(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(l,t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

здесь $\varphi(x)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ – заданные функции, причем

$$\varphi^{'}(0) = \alpha_1(0)\varphi(0) + \alpha_2(0)\varphi(l), \quad \varphi^{'}(l) = \beta_1(0)\varphi(0) + \beta_2(0)\varphi(l).$$

Нелокальные условия (3) и (4) являются нелокальными условиями В.А.Стеклова первого класса [1], которые естественным образом возникают при решении многих прикладных задач, например, задачи об охлаждения незамкнутых твердых тел линейных размеров (см. например [1, 2]).

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если коэффициенты уравнения (1) для всех $(x,t) \in D$ удовлетворяют условиям: $a(x,t) \in C^{1,0}(\overline{D}) \cap C^{2,0}(D)$, $b(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{1,0}(D)$, $c(x,t) \in C(\overline{D})$, $d(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C^{0,1}(D)$. Кроме того, $d(x,t) < 0$ для любой $(x,t) \in \overline{D}$, а заданные функции $f(x,t)$, $k(x,t)$, $\varphi(x)$, $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ удовлетворяют условиям $f(x,t)$, $k(x,t) \in C(\overline{D})$, $\varphi(x) \in C^1[0,l] \cap C^2(0,l)$; $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t) \in C^1[0,T]$ и $\alpha_2(t) \neq 0, \beta_2(t) \neq 0$, то задача имеет единственное регулярное в области D решение.*

С помощью метода Римана доказаны существование и единственность регулярного решения исследуемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. *Задачи со смешением для уравнений в частных производных.* – М:, Наука, 2006. – 287 с.

2. Стеклов В.А. *Основные задачи математической физики.* – М:, Наука. 1983. – 432 с.

Класс Харди для $A(z)-$аналитических функций

Хусенов Б. Э.

Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

husenovbehzod@mail.ru

Пусть $A(z)-$ некоторая непрерывная функция в области $D \subset \mathbb{C}$. Введем оператор $\partial_A = \partial - \overline{A(z)} \cdot \bar{\partial}$, где $\partial-$ оператор дифференцирование по z, а $\bar{\partial}-$ оператор дифференцирование по $\bar{z}$.

Определение 1. [3] Пусть $f(z) \in C^1(D)$. Если для любого $z \in D$ она удовлетворяет уравнение Бельтрами:

$$\overline{\partial_A} f(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

то $f(z)$ называется $A(z)-$аналитической функцией в области D, где $|A(z)| \leq c < 1, c = const$.

Множество $L(a;r) = \left\{ |\psi(z;a)| = \left| z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(z;a)} \overline{A(\tau)} d\tau} \right| < r \right\}$ для достаточно маленьких r компактно принадлежить D и содержит точку a, где $\gamma(z;a)-$ гладкая кривая, соединяющая точки $z; a$. Это множество называется $A(z)-$ лемнискатой с центром в точке a и обозначется как $L(a;r)$. Она является односвязной областью.

Пусть $A(z)-$антианалитическая, $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$, в области D. Мы вводим некоторые определения классов в $L(a;r) \subset D$ лемнискате для $A(z)-$аналитических функций $f(z) \in O_A(D)$.

Определение 2. $A(z)-$аналитическая $f(z)$ функция является принадлежной к классу Харди H_A^p, если функция односвязная область в лемнискате $L(a;r)$,

$$z \in \partial L(a;\rho), 0 < \rho < r, p > 0, H_A^p(f) = \lim_{\rho \to r} \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho} |f(z)|^p |dz + A d\bar{z}| < \infty. \quad (2)$$

Класс Харди в области D $A(z)-$аналитических функций обозначается как $H_A^p(D)$. Мы вводим норму в этот класс следующим образом:

Пространство Харди H_A^p для аналитических функций при $0 < p \leq 1-$ это класс функций которая конечная норма в лемнискате $L(a;r)$:

$$\|f\|_{H_A^p} = \sup_{0<\rho\leq r} \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{\partial L(a;\rho)} |f(z)|^p |dz + A d\bar{z}| < \infty,$$

при $p > 1$ конечная норма выражается следующим образом:

$$\|f\|_{H_A^p} = \left(\sup_{0<\rho\leq r} \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{\partial L(a;\rho)} |f(z)|^p |dz + A d\bar{z}| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

Далее, при $0 < p < q$ очевидно выражения:

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{\partial L(a;\rho)} |f(z)|^q |dz + A d\bar{z}| < 1 + \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{\partial L(a;\rho)} |f(z)|^p |dz + A d\bar{z}|,$$

отсюда следует, что если $f(z)$ принадлежит классу H_A^p, то она принадлежит также классу H_A^q, то есть $H_A^p \subset H_A^q$.

Обозначим через H_A^∞ класс функций, $A(z)-$аналитических и ограниченных в лемнискате $L(a;r)$. Для $f \in H_A^\infty$ условия нормы выражается следующим образом:

$$\|f\|_{H_A^\infty} = \sup_{|\psi(z;a)|<r} |f(z)| < \infty.$$

Следовательно, при $1 < p < q < \infty$, имеет $H_A^\infty \subset H_A^p \subset H_A^q \subset H_A^1$.

Если $f \in H_A^\infty$ то f принадлежит всем пространствам $H_A^p : H_A^\infty \subset H_A^p \subset H_A^q$, где $0 < p < q < \infty$.

Пусть $\ln^+ a$ обозначает $\ln a$, если $a \geq 1$ и 0, если $a < 1$. Очевидно, что $|\ln a| = 2\ln^+ a - lna$, $\ln^+ ab = \ln^+ a + \ln^+ b$ и $e^{\ln^+ a} < 1 + a$.

Определение 3. $f(z) \in O_A(L(a;r))$ функция является принадлежной к классу N_A если функция в лемнискате $L(a;r)$,

$$N_A(f) = \lim_{\rho\to r} \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho} \ln^+ |f(z)|^p |dz + Ad\bar{z}| < \infty. \quad (3)$$

Пределы (2) и (3) конечные существуют для каждой $f(z) \in O_A(L(a;\rho))$ функции, так как интегралы $\frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{\partial L(a;\rho)} |f(z)|^p |dz + Ad\bar{z}|$ и $\frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{\partial L(a;\rho)} \ln^+ |f(z)||dz + Ad\bar{z}|-$ неубывающие функции от ρ.

Буквой B_A мы будем обозначать класс функций, $A(z)-$аналитических и ограниченных в лемнискате $L(a;r)$.

Очевидно, если функция $f(z)$ принадлежит классу B_A (или H_A^p) то еч произведение на любую ограниченную $A(z)-$аналитическую функцию также принадлежит классу B_A (или H_A^p).

Учитывая, что среднее геометрическое $e^{\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{\partial L(a;\rho)} (1+|f(z)|^p)|dz+Ad\bar{z}|}$ не больше среднего арифметического $\left(\frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{\partial L(a;\rho)} (1 + |f(z)|^p)\, |dz + Ad\bar{z}|\right)^{\frac{1}{p}}$ при любом $p > 0$, заключаем, что класс H_A^p содержится в классе N_A.

Окончательно связ между рассматриваемыми классами выражается следующим образом:

$$p > q, \quad B_A \subset H_A^p \subset H_A^q \subset N_A. \quad (4)$$

Для классы H_A^p приведем аналог теорема Ф. Рисс.

Теорема. Если $f(z)$ функция принадлежить класса H_A^p, то каково бы ни было подмножество M положительной меры на границы лемнискате $\partial L(a;r)$:

$$\lim_{\rho\to r} \int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho} |f(z)|^p |dz + Ad\bar{z}| = \int\limits_M |f(\varsigma)|^p |d\varsigma + Ad\bar{\varsigma}| \quad (5)$$

и

$$\lim_{\rho\to r} \int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho} |f(z) - f(\varsigma)||d\varsigma + Ad\bar{\varsigma}| = 0, \quad (6)$$

где $M \subset \partial L(a;r)$, $\varsigma \in M$, $\rho < r$ $-$ радиус.

ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. Москва.: Гостехиздат, 1950.

2. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. Москва.: Мир, 1984.

3. Sadullayev A., Jabborov N. M. On a class of A-analytic functions//J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2016. Volume 9, Issue 3. 374-383 p.

О сепаратно $\vec{\alpha}$ - гармонических функциях

Шарипов Р. А.[1], Абдикадиров С. М.[2]

[1]Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,
[1]sharipovr80@mail.ru;
[2]Каракалпакский государственный университет, Нукус, Узбекистан,
[2]abdikadirov1983@inbox.ru

Класс сепаратно гармонических функций широко используется при решении различных задач комплексного анализа. Изучение основных свойств сепаратно гармонических функций тесно связано с сепаратно аналитическими функциями. Сепаратно гармонические функции впервые были изучены Лелоном [1]. Позже, в общем случае, сепаратно гармонические функции были изучены в работах А. Зеряхи [2] и Ж.М. Хекарта [3]. Дальнейшие результаты связанные с гармоническими продолжениями сепаратно гармонических функций принадлежат А. Садуллаеву и С. Имомкулову [4].

В данной работе изучаются сепаратно $\vec{\alpha}$ - гармонические функции, где $\vec{\alpha} = (\alpha', \alpha'')$. Для начала введем понятие гармонической функции.

Пусть α - произвольная замкнутая, строго положительная дифференциальная форма бистепени $(n-1, n-1)$ в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$:

$$\alpha = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z) dz\,[j] \wedge d\bar{z}\,[k],\ \alpha_{jk}(z) \in C^1(\mathbb{D}),\ \ d\alpha = 0,$$

здесь $dz\,[j] = dz_1 \wedge ... \wedge dz_{j-1} \wedge dz_{j+1} \wedge ... \wedge dz_n, d\bar{z}\,[k] = d\bar{z}_1 \wedge ... \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_n.$

Определение 1. (см. [5]) Дважды непрерывно дифференцируемая в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ функция $u(z) \in C^2(\mathbb{D})$ называется $\vec{\alpha}$ - *гармонической*, если $dd^c u \wedge \alpha = 0$ в $\mathbb{D}$.

Пусть α' и α'' строго положительные, замкнутые дифференциальные формы соответственно бистепени $(n-1, n-1)$ и $(m-1, m-1)$.

Рассмотрим следующие операторы, действующие в пространстве $C^2(\mathbb{D} \times \mathbb{G})$, $\mathbb{D} \times \mathbb{G} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ для любой функции $u(z,w) \in C^2(\mathbb{D} \times \mathbb{G})$,

$$d_z d^c_{\bar{z}} u(z,w) \wedge \alpha'(z) = \left[\frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k\right] \wedge \left[\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} {\alpha'}_{jk}(z)\, dz[j] \wedge d\bar{z}[k]\right] =$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^{n} \sum_{j,k=1}^{n} (-1)^{k+j+1} {\alpha'}_{jk}(z) \frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz \wedge d\bar{z}$$

для любого фиксированного $w \in \mathbb{G}$;

$$d_w d^c_{\bar{w}} u(z,w) \wedge \alpha''(w) = \left[\frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial w_j \partial \bar{z}_k} dw_j \wedge d\bar{w}_k\right] \wedge$$

$$\wedge \left[\left(\frac{i}{2}\right)^{m-1} \sum_{j,k=1}^{m} \alpha''_{jk}(w)\, dw[j] \wedge d\bar{w}[k] \right] = \left(\frac{i}{2}\right)^{m} \sum_{j,k=1}^{m} (-1)^{j+k+1} \alpha''_{jk}(w) \frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial w_j \partial \bar{w}_k} dw \wedge d\bar{w}$$

для любого фиксированного $z \in \mathbb{D}$.

Определение 2. (см. [6]) Функция $u(z,w) \in C^2(\mathbb{D} \times \mathbb{G})$, называется *сепаратно* $\vec{\alpha}$ *- гармонической* в области $\mathbb{D} \times \mathbb{G}$, где $\vec{\alpha} = (\alpha', \alpha'')$, если удовлетворяет следующие условия:

1) $d_z d^c_{\bar{z}} u(z,w) \wedge \alpha'(z) = 0$, для любого фиксированного $w \in \mathbb{G}$;

2) $d_w d^c_{\bar{w}} u(z,w) \wedge \alpha''(w) = 0$, для любого фиксированного $z \in \mathbb{D}$.

Имеет место следующая

Теорема 1. (см. [6]) *Если функция* $u(z,w) \in C^2(\mathbb{D} \times \mathbb{G})$*, является сепаратно* $\vec{\alpha}$ *- гармонической, то*

$$dd^c u(z,w) \wedge \phi \wedge \beta = 0,$$

где $\phi = \alpha'(z) \wedge \alpha''(w), \beta = dd^c\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n, \mathbb{G} \subset \mathbb{C}^m$ *и функция* $u(z,w)$ *определенная в области* $\mathbb{D} \times \mathbb{G}$ *является* $\alpha'(z)$ *- гармонической по переменной* z*, и* $\alpha''(w)$ *- гармонической по переменной* w*. Если* $\alpha'(z)$ *и* $\alpha''(w)$ *являются действительными аналитическими дифференциальными формами, тогда* $u(z,w)$ *является* $\phi \wedge \beta$ *- гармонической функцией, где* $\phi = \alpha'(z) \wedge \alpha''(w)$*,* $(z,w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{G}$ *и* $\beta = dd^c\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lelon P. Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables reelles// Ann. Inst. Fourier 11, 1961. pp. 515-562.

2. Zeriahi A. Bases communes dans certains espaces de fonctions harmoniques et fonctions separement harmoniques sur certains ensembles de // Ann. Fac. Sci. Toulouse. Math., 1982, ser. 5. v.4. pp. 75-102.

3. Hecart J. M. Ouverts d'harmonicite pour les fonctions separement harmoniques// Potential Anal., 2000, v. 13. №2. pp. 115-126.

4. Садуллаев А.С., Имомкулов С.А. Продолжение голоморфных и плюригармонических функций с тонкими особенностями на паралельных сечениях. Труды математического института им.В.А.Стеклова, 2006, т.53. с. 158-174.

5. Ваисова М.Д. Теория потенциала в классе субгармонических функций.// Узбекский математический журнал, Ташкент, 2016, №3, с. 46-52.

6. Imomkulov S.A., Abdikadirov S.M., Sharipov R.A. $\vec{\alpha}$ - separately subharmonic functions. // Central Asian Problems of Modern Science and Education. 2020, v.3, pp. 66-80.

Неравенство типа Крамера-Рао для модели конкурирующих рисков

Эрисбаев С. А.

Нукусский государственный педагогический институт, Нукус, Узбекистан, sabitbekn@mail.ru;

Неравенство Крамера-Рао позволяет оценить качества статистических оценок неизвестных параметров. Свойство эффективности оценок измеряется близостью среднеквадратического отклонения оценки к нижней границе Крамера-Рао. Если результаты наблюдений составляют полную выборку, то соответствующие результаты представляют основу классической математической статистики. В случае неполных-цензурированных наблюдений неравенства типа Крамера-Рао и Баттачария впервые были установлены авторами [1]. Целью настоящей работы является исследования свойств информации Фишера и установление неравенства типа Крамера-Рао для наблюдений, образующих модель конкурирующих рисков (МКР). Для фиксированного натурального числа k, пусть $\left\{X_j^{(1)}, ..., X_j^{(k)},\ j \geqslant 1\right\}$-последовательность независимых и одинаково распределенных независимых случайных величин (с.в.) с соответствующими маргинальными функциями распределения (ф.р.) $\left\{F^{(1)}, ..., F^{(k)}\right\}$, зависящими от одного и того же неизвестного сколярного параметра $\theta \in \Theta \subseteq R^1$. Пусть $f^{(i)}\left(t;\,\theta\right) = \dfrac{\partial F^{(i)}\left(t;\,\theta\right)}{\partial\theta}$ и $\lambda^{(i)}\left(t;\,\theta\right) = \dfrac{f^{(i)}\left(t;\,\theta\right)}{1 - F^{(i)}\left(t;\,\theta\right)}$ - функции плотности и интенсивности отказов, соответствующие ф.р. $F^{(i)}$, $i = \overline{1, k}$. В МКР наблюдаются векторы $\left\{X_j,\, \delta_j^{(1)},\, \ldots,\, \delta_j^{(k)},\ j \geqslant 1\right\}$ интерес представляют также и пары $\left\{\left(X_j,\, \delta_j^{(i)}\right),\ j \geqslant 1\right\}$, где $X_j = \min\left(X_j^{(i)},\, 1 \leqslant i \leqslant k\right)$ и $\delta_j^{(i)} = I\left(X_j = X_j^{(i)}\right)$–индикаторы указанных в скобках событий. Пусть $H\left(t;\theta\right) = P_\theta\left(X_j \leqslant t\right)$–ф.р.с.в. X_j и $H^{(i)}(t;\theta) = P_\theta(X_j \leqslant t,\, \delta_j^{(i)} = 1)$ - субраспределения, соответствующие парам $\left\{\left(X_j,\, \delta_j^{(i)}\right) i = \overline{1,\, k}\right\}$. Ввиду независимости с.в. $\left\{X_j^{(1)}, ..., X_j^{(k)}\right\}$, $H\left(t;\,\theta\right) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{k}\left[1 - F^{(i)}\left(t;\,\theta\right)\right]$ и тогда существуют плотности $h\left(t;\,\theta\right) = \dfrac{\partial H\left(t;\,\theta\right)}{\partial t} = h^{(1)}\left(t;\,\theta\right) + \ldots + h^{(k)}\left(t;\,\theta\right)$, где $h^{(i)}\left(t;\,\theta\right) = f^{(i)}\left(t;\,\theta\right)\cdot \prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{k}\left[1 - F^{(l)}\left(t;\,\theta\right)\right]$ и $H^{(i)}\left(t;\,\theta\right) = \int\limits_{-\infty}^{t} h^{(i)}\left(u;\,\theta\right)du = \int\limits_{-\infty}^{t}\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{k}\left[1 - F^{(l)}\left(u;\,\theta\right)\right]dF^{(i)}\left(u;\,\theta\right)$.

Пусть $\lambda\left(t;\,\theta\right) = \lambda^{(1)}\left(t;\,\theta\right) + \ldots + \lambda^{(k)}\left(t;\,\theta\right)$ – плотность интенсивности с.в. X. Через $m^{(i)}(t;\,\theta) = P_\theta(\delta_j^{(i)} = 1/X_j = t) = E_\theta\left[\delta_j^{(i)}/X_j = t\right]$ обозначим регрессии индикаторов $\delta_j^{(i)}$ относительно с.в. X_j. Пусть $I_{\left(X,\,\delta^{(1)},\ldots,\delta^{(k)}\right)}\left(\theta\right)$, $I_X\left(\theta\right)$, $I^{(i)}_{\left(X,\delta^{(i)}\right)}\left(\theta\right)$ и $I^{(i)}_{\left(\delta^{(i)}/X\right)}\left(\theta\right)$ - информационные функции Фишера соответственно вектора $\left\{X, \delta^{(1)},\, \ldots,\delta^{(k)}\right\}$ с.в. X, пары $\left(X,\, \delta^{(i)}\right)$ и с.в. $\delta^{(i)}$ при заданном X. Обозначим через $\kappa\left(t,\, y^{(1)},\, ...,\, y^{(k)};\, \theta\right)$ совместную плотность вектора $\left\{X, \delta^{(1)},\, \ldots,\delta^{(k)}\right\}$ относительно меры $\nu\left(t,\, y^{(1)},\, ...,\, y^{(k)}\right)$. Рассмотрим некоторые условия регулярности для субплотностей $h^{(i)}$:

(У1) $N^{(i)} = \left\{t \in R^1 :\ h^{(i)}\left(t;\,\theta\right) > 0\right\}$ не зависят от параметра θ и $\bigcap\limits_{i=1}^{k} N^{(i)} \neq \emptyset$;

(У2) Существуют $\dfrac{\partial^m h^{(i)}\left(t;\,\theta\right)}{\partial\theta^m}$, $m = 1, 2;\ i = 1, ..., k;\ (t;\,\theta) \in R^1 \times \Theta$;

(У3) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\dfrac{\partial^m h^{(i)}\left(t;\,\theta\right)}{\partial\theta^m}\right|dt < \infty,\ m = 1, 2;\ i = 1, ..., k;\ \theta \in \Theta$;

(У4) Для всех $\theta \in \Theta :\ I^{(i)}_{\left(X,\delta^{(i)}\right)}\left(\theta\right) \in \left(0;\, +\infty\right),\ i = 1, ..., k$.

В следующей теореме приведены цепочек результатов о представлении информации Фишера.

Теорема 1. В условиях регулярности (У1) - (У4) справедливы представления для $I_{\left(X,\,\delta^{(1)},\ldots,\delta^{(k)}\right)}\left(\theta\right)$ для всех $\theta\in\Theta$:

$$I_{\left(X,\,\delta^{(1)},\ldots,\delta^{(k)}\right)}\left(\theta\right)=\sum_{i=1}^{k}I^{(i)}_{\left(X,\delta^{(i)}\right)}\left(\theta\right)=I_X\left(\theta\right)+\sum_{i=1}^{k}I^{(i)}_{\left(\delta^{(i)}/X\right)}\left(\theta\right),$$

где

$$I^{(i)}_{\left(X,\delta^{(i)}\right)}\left(\theta\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial log\lambda^{(i)}\left(t;\,\theta\right)}{\partial\theta}\right)^2dH^{(i)}\left(t;\,\theta\right),I_X\left(\theta\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial log\lambda\left(t;\,\theta\right)}{\partial\theta}\right)^2dH\left(t;\,\theta\right),$$

и

$$I^{(i)}_{\left(\delta^{(i)}/X\right)}\left(\theta\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial\log m^{(i)}\left(t;\,\theta\right)}{\partial\theta}\right)^2\cdot m^{(i)}\left(t;\,\theta\right)dH\left(t;\,\theta\right).$$

Теперь сформулируем аналог неравенства Крамера-Рао для дисперсии несмещенной оценки $\widehat{\varphi}(X,\,\delta^{(1)},...,\delta^{(k)})$ функции $\varphi(\theta)$ по одному наблюдению $(X,\,\delta^{(1)},\,\ldots,\,\delta^{(k)})$.
(У5) Функция $\varphi\left(\theta\right)$ – непрерывна дифференцируема, $\varphi'\left(\theta\right)\neq 0$ и для всех $\theta\in\Theta$:

$$\int\limits_{R^1\times\{0,1\}^k}\widehat{\varphi}\left(t,\,y^{(1)},\,\ldots,\,y^{(k)}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\kappa\left(t;\,y^{(1)},\,\ldots,\,y^{(k)};\,\theta\right)d\nu\left(t;\,y^{(1)},\,\ldots,\,y^{(k)};\,\theta\right)=\varphi'\left(\theta\right).$$

Теорема 2. Пусть справедливы условия регулярности (У1)-(У5) и $D_\theta\widehat{\varphi}\in(0,+\infty)$. Тогда для всех $\theta\in\Theta$ имеем

$$D_\theta\widehat{\varphi}(X,\,\delta^{(1)},...,\delta^{(k)})\geqslant\frac{\left(\varphi'(\theta)\right)^2}{I_{\left(X,\,\delta^{(1)},\,\ldots\,,\,\delta^{(k)}\right)}\left(\theta\right)}.\tag{1}$$

Пусть оценка $\widehat{\varphi}$ функционально не зависит от вектора $\left(\delta^{(1)},\,...,\,\delta^{(k)}\right)$ и

$$f^{(i)}\left(t;\,\theta\right)=\exp\left\{-T^{(i)}\left(t\right)g\left(\theta\right)+g_0\left(\theta\right)+v^{(i)}\left(t\right)\right\},\tag{2}$$

где $g(\theta)$ - строго монотонна, непрерывно дифференцируема, $g'(\theta)\neq 0$ и $g(\theta)\dfrac{dT^{(i)}(t)}{dt}>0, i=1,...,k$ для всех $(t;\,\theta)\in R^1\times\Theta$. Тогда для того, чтобы в (1) имело место равенство, необходимо и достаточно, чтобы с.в. X и вектор $\left(\delta^{(1)},\,...,\,\delta^{(k)}\right)$ были независимыми и в (2) $g_0\left(\theta\right)+v^{(i)}\left(t\right)=\log\left(T^{(i)}\left(t\right)g\left(\theta\right)\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abdushukurov A. A., Kim L.V. Lower Cramer-Rao and Bhattacharya bounds for randomly censored data. J. Soviet. Math., 1987. v.38, N.5. p. 2171 - 2185.

Квадратичные стохастические операторы вольтерровского типа. Метод функции Ляпунова

Эшмаматова Д.Б.

Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент., 24dil@mail.ru

Известно, что одной из важнейших задач теории динамических систем нелинейных операторов является изучение асимптотического поведения траекторий. Для этого существует ряд классических, а также современных методов [1], [2]. В теории устойчивости наиболее эффективным считается метод функций Ляпунова [1]. В своих работах Р.Н. Ганиходжаеву удалось разработать аналог метода функций Ляпунова для дискретных динамических систем вольтерровского типа. Целью настоящей работы является дальнейшее изучение метода функций Ляпунова для трансверсальных дискретных динамических систем вольтерровского типа [1],[2].

Следуя методам работы [1] рассмотрим задачу описания всех функций вида

$$\varphi(x) = x_1^{p_1}...x_m^{p_m}, \text{ где } x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

являющихся функцией Ляпунова для динамических систем вольтерровского типа.

Оказалось, что для некоторых операторов вольтерровского типа существуют также и функции Ляпунова других видов. Р.Н. Ганиходжаевым была поставлена задача о выявлении условий существования, а также полного описания функций Ляпунова вида $\varphi(x) = \frac{x_i}{x_j}$, где $i \neq j$, определенных внутри симплекса S^{m-1}.

Пусть $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ ([2]) оператор вольтерровского типа и $x^0 \in S^{m-1}$. Последовательность $\{x^{(n)}\}$, где $x^{(n)} = V^n x^0$, называется траекторией при $n \in \mathbb{Z}$, положительной (отрицательной) траекторией при $n \in N(-n \in N)$. Через $\omega^+(x^0)$ и $\omega^-(x^0)$ обозначаются множество предельных точек, соответственно, положительной и отрицательной траекторий.

Непрерывный функционал $\varphi : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова для дискретной динамической системы

$$x_k^{(n+1)} = x_k^{(n)}(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i^{(n)}), \ k = \overline{1,m}, \ n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

если для любой начальной точки $x^0 \in S^{m-1}$ существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x^{(n)}), \quad \lim_{n\to-\infty} \varphi(x^{(n)})$$

Случай несильного турнира. Пусть турнир T_m динамической системы

$$x_k^{'} = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i), \ k = \overline{1,m}, \tag{2}$$

(2) не является сильным и $\widetilde{T}_m$ – фактор-турнир турнира ([1],[2]) T_m и $\alpha \subset I = \{1, ..., m\}$ – множество вершин T_m попавших в сток фактор-турнира $\widetilde{T}_m$.

Теорема 1. Для любого $i \notin \alpha$ и любого $j \in \alpha$ функция $\varphi(x) = \frac{x_i}{x_j}$, является функцией Ляпунова для динамической системы (2).

Перейдем к случаю сильных турниров.

Теорема 2. Если $ri \in S^{m-1}$ содержит неподвижную точку оператора V, то для динамической системы (2) не может существовать монотонно убывающей функции Ляпунова вида $\varphi(x) = \frac{x_i}{x_j}$.

Результаты данной работы можно применить для решения задач популяционной генетики, то есть это дает нам решение задач о динамике размножения бактерий и вирусов, а также построение практических прогнозов их появления с поколения в поколение ([3]).

Литература

1. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры. Матеем. сборник, 1992, т. 183, є 8, с. 129–141.

2. Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B. Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories. Vladikavkaz. Mat. Zh., 2006, Volume 8, Number 2, 12-28.

3. Murray Y. D. On a necessary condition for the ergodicity of quadratic operators defined on a two-dimensional simplex, Russ. Marh. Surv 59. —є 3. —2004 —p.571-573.

Задача Коши для линейного уравнения, связанного с перидинамической моделью

Юлдашева А. В.

филиал МГУ в городе Ташкенте, Ташкент, Узбекистан;
yuasv86@mail.ru

Рассмотрим в области $\Omega \subset R^2$ с кусочно-гладкой границей следующую задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_{\Omega} K(x,y)\,[u(x,t) - u(y,t)]\,dy \ = \ f(x,t), \quad x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Здесь предполагается, что неизвестная функция $u : \Omega \times [0,T] \to R$, ядро $K : \Omega \times \Omega \to R$ и внешняя сила $f : \Omega \times [0,T] \to R$ являются скалярными функциями.

В работах [1-2] изучались решения данной задачи Коши, допускающие разрывы первого рода по пространственной переменной, исключаемые моделями, описываемыми дифференциальными уравнениями.

Интегральный оператор в правой части уравнения (1) имеет специальное сильно сингулярное ядро, особенность которого заключается в том, что вблизи диагонали $x = y$ оно имеет вид

$$K(x,y) \ = \ \frac{c_n}{|x-y|^2} \ + \ \gamma(x,y),$$

где $\gamma(x,y)$ интегрируемая функция, и выполняется граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} K(x,y) \ = \ 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega. \tag{3}$$

Здесь $\nu = \nu(x)$ — внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω в точке $x \in \partial\Omega$.

Уравнение (1) является гиперсингулярным и неограниченным в классических функциональных пространствах, таких, как $L_p(\Omega)$ или соболевские пространства $W_p^l(\Omega)$.

При решении задачи мы воспользуемся самосопряжчнным расширением оператора Лапласа $-\Delta$, порождчнным граничными условиями Неймана. Спектр этого расширения состоит из собственных значений $\{\lambda_k\}$, а собственные функции $\{v_k(x)\}$ удовлетворяют соотношениям:

$$-\Delta v_k(x) = \lambda_k v(x),\ x \in \Omega, \qquad \frac{\partial v_k(s)}{\partial \nu} = 0,\ s \in \partial\Omega, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Решение этой спектральной задачи мы понимаем в смысле $W_2^1(\Omega)$

Для любого $\beta \geq 0$ введем гильбертово пространство $H^\beta(\Omega) \ = \ D\left((I-\Delta)^{\beta/2}\right)$ с нормой

$$\|u\|_\beta^2 \ = \ \sum_{k=1}^{\infty}(1+\lambda_k)^\beta |(u, v_k)|^2.$$

Имеет место следующая теорема

Теорема 1. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < \alpha/2$. Для любого $T > 0$ и любых $\varphi \in W_2^\alpha(\Omega)$, $\psi \in W_2^\alpha(\Omega)$ и $f \in C\big\{[0,T] \to W_2^\alpha(\Omega)\big\}$ существует, и при том единственное, решение задачи (1)-(2) из класса $C^2\big\{[0,T] \to H^\beta(\Omega)\big\}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. S. A. Alimov, Y. Cao and O. A. Ilhan On the problems of peridynamics with special convolution kernels //J. of Integral Equations and Applications, 26, 2014, 301-321. 2. Алимов Ш.А., Юлдашева А.В. О разрешимости перидинамического уравнения с сингулярным ядром. // Дифференциальные уравнения, Том 57, 3(2021), с. 375-386.

Дробная производная ψ–маршо на отрезке

Яхшибоев М. У., Турсункулов Б.М.

Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий, Узбекистан

m.yakhshiboev@gmail.com;

В работе [1] рассмотрены обобщенная форма для дробных операторов Римана-Лиувилля, а для названных дробными операторами ψ– Римана-Лиувилля, получены и доказаны важные свойства новых обобщенных операторов ψ–Римана-Лиувилля в пространстве $L^p([a,b])$.

Определение 1. Пусть $\alpha > 0, -\infty \leq a < b \leq \infty$ и пусть функция φ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\psi \in C^1([a,b])$ является положительной возрастающей функцией такой, что $\psi'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a,b)$. Левосторонние и правосторонние дробные интегралы ψ–Римана-Лиувилля функции φ относительно другой функции ψ на отрезке $[a,b]$, с порядком α определяются следующим образом:

$$(I_{a+}^{\alpha,\psi}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}\varphi(t)dt, x > a$$

и

$$(I_{b-}^{\alpha,\psi}\varphi)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \psi'(t)(\psi(t)-\psi(x))^{\alpha-1}\varphi(t)dt, x<b$$

соответственно.

При $0<\alpha<1, 0<\varepsilon<1$ мы полагаем

$$(D_{a+,\varepsilon}^{\alpha,\psi}f)(x)=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}}+$$

$$+\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{\varepsilon}^{\psi(x)-\psi(a)}\frac{f(x)-f(\psi^{-1}(\psi(x)-t))}{t^{\alpha+1}}dt, x>a$$

которую будем называть кусеченнойњ дробной производной ψ–Маршо.

В работе введено обобщение производной ψ–Маршо на отрезке. Установлены интегральные представления усеччнной дробной производной ψ–Маршо. Доказаны теоремы обращения и описания дробных интегралов ψ–Римана-Лиувилля от функций в пространстве $L^p([a,b])$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sousa J. Vanterler da C, Rodrigues Fabio G, Oliveira Edmundo. Stability of the fractional Volterra integrodifferential equation by means of ψ–Hilfer operator.Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2019.Vol. 42,No. 9.pp. 3033-3043.

On wavelet density estimation of regression function

Abdulvohidov A. L.[1], Muradov R. S.[2]

[1] Andijan State University, Andijan, Uzbekistan, alisherabdulvohidovl@gmail.com

[2] Namangan Institute of Engineering and Technology, Namangan, Uzbekistan, rustamjonmuradov@gmail.com

1. Introduction. In industrial life-testing, medical research and other studies, the observation of the occurrence of a failure be made impossible by the previous occurrence of a censoring event.

2. Regression function and wavelet density estimation. Let $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ denote the survival times and $X_1, X_2, ..., X_n$ the associated covariates, and let us assume that $(Y_1, X_1), (Y_2, X_2), ..., (Y_n, X_n)$ are independent and have a joint distribution function (d.f.) $F(x, y)$. Also let $C_1, C_2, ..., C_n$ denote the independent and identically distribution censoring times with a common d.f. G. It is assumed that (Y_i, X_i) is independent of T_i for each i. In this random right censored model, instead of $\left\{(Y_i, X_i),\ i=\overline{1,n}\right\}$ we observe $\left\{(Z_i, \delta_i, X_i), i=\overline{1,n}\right\}$, where $Z_i=\min(Y_i, T_i)=Y_i \wedge T_i$ and $\delta_i=I(Y_i \le T_i)$, where $I(A)$ stands for indicator of the event A. Let H is distribution function of Z_1 and $\tau_H=\inf\{x:\ H(x)=1\}\le\infty$. Here, we consider the nonparametric regression model:

$$Y_i=g(X_i)+\sigma(X_i)\cdot\varepsilon_i,$$

where $\sigma(\cdot)$ is the conditional variance representing heteroscedasticity and ε represents random error which is assumed independent and identically distributed. In this regression model we want to estimate Y_i given X_i,i.e., to estimate the mean regression function $g(x) = E(Y/X = x)$. Our goal, is to estimate unknown function g based on the observations $\left\{(Z_i, \delta_i, X_i),\ i = \overline{1, n}\right\}$. Here we use wavelet-based mean regression function estimators. We assume that the regression function g, is used for $x \in (0,1)$. Our aim is to estimate g, by empirical wavelet coefficients. Let, $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are bounded and compactly supported father and mother wavelets:

$$\varphi_{j_0k}(x) = 2^{j_0/2}\varphi\left(2^{j_0}x - k\right),$$

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k),\ x \in R, j_0, j \in Z.$$

Then the collection $\{\varphi_{j_0k}, \psi_{jk}, jj_0,\ k \in Z\}$ is an orthonormal basis of $L^2(R)$. Therefore, for all $f \in L^2(R)$:

$$f(x) = \sum_{k \in Z} \alpha_{j_0k}\varphi_{j_0k}(x) + \sum_{jj_0}\sum_{k \in Z} \beta_{jk}\psi_{jk}(x),$$

where

$$\alpha_{j_0k} = \int \varphi_{j_0k}(x) f(x)\, dx, \quad \beta_{jk} = \int \psi_{jk}(x) f(x)\, dx.$$

We consider $r-$ regular mother wavelets ψ. Then the wavelet expansion of g is

$$g(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \alpha_{j_0k}\varphi_{j_0k}(x) + \sum_{jj_0}\sum_{k=0}^{2^j-1} \beta_{jk}\psi_{jk}(x), \quad x \in [0,1],$$

where

$$\alpha_{j_0k} = \int \varphi_{j_0k}(x) f(x)\, dx, \quad \beta_{jk} = \int \psi_{jk}(x) f(x)\, dx.$$

Then proposed nonlinear wavelet estimator of $g(x)$ is

$$\hat{g}(x) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} \hat{\alpha}_{j_0k}\varphi_{j_0k}(x) + \sum_{jj_0}^{j_1}\sum_{k=0}^{2^j-1} \hat{\beta}_{jk} I\left(\left|\hat{\beta}_{jk}\right| > d\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right)\psi_{jk}(x),$$

where j_0 and j are chose suitable. The coefficients estimators are:

$$\hat{\alpha}_{j_0k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i Z_i \varphi_{j_0k}(X_i)}{1 - G_n(Z_i) + \frac{1}{n}}, \quad \beta_{jk} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i Z_i \psi_{jk}(X_i)}{1 - G_n(Z_i) + \frac{1}{n}},$$

where G_n denote the relative-risk power estimator of d.f. G of author [1].

REFERENCES

1. A.A.Abdushukurov Statistics of incomplete observations, 2009. Tashkent. University Press. 269p.

Maximal solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform algebra

Abdurasulov K.K.[1], **Abrayev D.Sh.**[2], **Adashev J.Q.**[3]

[1,3]Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
abdurasulov0505@mail.ru, adashevjq@mail.ru;
[2]Chirchiq State Pedagogical Institute of Tashkent region.

The aim of this work is to describe solvable Leibniz algebras with naturally graded quasi-filiform Leibniz nilradicals and with maximal dimension of complemented space of its nilradical. Namely, naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras in any finite dimension over $\mathbb{C}$ were studied by Camacho, Gómez, González, and Omirov [1]. They found five such algebras of the first type, where two of them depend on a parameter and eight algebras of the second type with one of them depending on a parameter.

Definition 1. A Leibniz algebra L is called quasi-filiform if $L^{n-2} \neq \{0\}$ and $L^{n-1} = \{0\}$, where $n = \dim L$.

Theorem 1. [1] Let L be a naturally graded quasi-filiform Leibniz algebra, then it is isomorphic to one algebra of the non isomorphic families

$$\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma):\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n+\alpha e_2, & [e_1,e_{n-1}]=\beta e_n, \quad [e_{n-1},e_{n-1}]=\gamma e_n,\end{cases}$$

$$\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma):\begin{cases} [e_1,e_1]=e_2, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_3]=-e_4+\beta e_2, & [e_1,e_i]=-e_{i+1}, & 4\le i\le n-1,\\ [e_3,e_3]=\gamma e_2, & [e_i,e_{n+2-i}]=(-1)^i\alpha e_n, & 3\le i\le n-1,\end{cases}$$

where $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ is a basis of the algebra and in the algebra $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ if n is odd, then $\alpha\in\{0,1\}$, if n is even, then $\alpha=0$.

The following theorem describes the maximal dimensions of the complemented spaces to $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ and $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Proposition 1. Let R be a solvable Leibniz algebra whose nilradical is naturally graded quasi-filiform non-Lie Leibniz algebras. Then the maximal dimension of complemented space to the nilradical are not greater than two.

We give a description of solvable Leibniz algebras with the nilradicals $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ and $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ such that the dimension of the complementary subspace is equal to maximal.

Theorem 2. There is no solvable Leibniz algebra with the nilradical $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ and the maximal dimension of the complementary space to the nilradical is equal to one.

Theorem 3. Let R be a solvable Leibniz algebra with the nilradical $\mathcal{L}(\alpha,\beta,\gamma)$ and the maximal dimension of the complementary space to the nilradical be equal to two. Then R is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$R^1_{n+2}(0,0,0):\begin{cases} [e_i,x]=ie_i, & 1\le i\le n-2, & [e_n,x]=e_n,\\ [x,e_1]=-e_1, & [e_{n-1},y]=e_{n-1}, & [e_n,y]=e_n,\end{cases}$$

$$R^2_{n+2}(0,-1,0):\begin{cases} [e_i,x]=ie_i, & 1\le i\le n-2, & [e_n,x]=e_n,\\ [x,e_1]=-e_1, & [x,e_n]=-e_n, & [e_{n-1},y]=e_{n-1},\\ [e_n,y]=e_n, & [y,e_{n-1}]=-e_{n-1}, & [y,e_n]=-e_n,\end{cases}$$

$$R^3_{n+2}(0,1,1):\begin{cases} [e_1,x]=e_1-e_{n-1}, & [e_2,x]=2e_2-2e_n, \quad [e_i,x]=ie_i,\\ [x,e_1]=-e_1+e_{n-1}, & [e_1,y]=e_{n-1}, \quad [e_2,y]=2e_n,\\ [e_{n-1},y]=e_{n-1}, & [e_n,y]=2e_n, \quad [y,e_1]=-e_{n-1},\\ [y,e_{n-1}]=-e_{n-1}, & 3\le i\le n-2, \end{cases}$$

$$R^4_{n+2}(1,0,0):\begin{cases} [e_1,x]=e_1-e_{n-1}, & [e_2,x]=e_2-e_n, \quad [e_i,x]=(i-1)e_i,\\ [e_n,x]=2e_n, & [x,e_1]=-e_1+e_{n-1}, \quad [e_1,y]=e_{n-1},\\ [e_2,y]=e_2+e_n, & [e_i,y]=e_i, \quad [e_{n-1},y]=e_{n-1},\\ & 3\le i\le n-2, \end{cases}$$

where it is taken into account that each solvable algebra has its own multiplications of the nilradical and other products are zero.

Theorem 4. Let R be a solvable Leibniz algebra with the nilradical $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ and the maximal dimension of the complementary space to the nilradical be equal to one. Then R is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$H^1_{n+1}(0,0,1),\ H^2_{n+1}(1,2,0),\ H^3_{n+1}(1,0,\gamma),\ H^4_{n+1}(1,-2,1),\ H^5_{n+1}(1,4,2).$$

Let us give a classification of solvable Leibniz algebras with nilradical $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ and two-dimensional complementary vector subspace to the nilradical.

Theorem 5. Let R be a solvable Leibniz algebra with the nilradical $\mathcal{G}(\alpha,\beta,\gamma)$ and the maximal dimension of the complementary space to the nilradical be equal to two. Then R is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$H^1_{n+2}(0,0,0),\ H^2_{n+2}(0,1,0),\ H^3_{n+2}(0,2,1),\ H^4_{n+2}(1,0,0),\ H^5_{n+2}(1,1,0),\ H^6_{n+2}(1,2,1).$$

Conclusion. Thus from the above and the obtained results it can be seen that the classifications of the solvable Leibniz algebras with the nilradical $\mathcal{L}(1,-1,0)$, $\mathcal{L}(1,0,0)$, $\mathcal{G}(1,1,0)$, $\mathcal{G}(1,2,1)$ and the dimension of complememtary space equals one have been remaining an open problem. For other algebras the problem was solved.

REFERENCE

1. Camacho, L. M., Gómez, J. R., González, A. J., Omirov, B. A. (2009). *Naturally graded quasi-filiform Leibniz algebras.* J. Symbolic Comput. 44(5):527–539.

Estimation of jointly survival function by right random censored observations in the presence of covariate

Abdushukurov A. A.[1], Muradov R. S.[2]

[1] Moscow State University named after M.V.Lomonosov, Tashkent Branch, Tashkent, Uzbekistan, a_abdushukurov@rambler.ru;

[2] Namangan Institute of Engineering and Technology, Namangan, Uzbekistan, rustamjonmuradov@gmail.com

1. Introduction. The problem of estimating of jointly survival function from incomplete data has been considered by authors [1-3]. In the special bivariate case, there are numerous examples of paired data representing the times to death of individuals (twins or married couples), the failure times of components of system and others which subject to random censoring. At present time, there are several approaches to estimating of survival functions of vectors of lifetimes. Moreover, the random variables (r.v.-s) of interest (lifetimes) and censoring r.v.-s can be also influenced by other variable, often called prognostic factor or covariate. In medicine, dose a drug and in engineering some environmental conditions (temperature, pressure and others) are influenced to the observed variables. The basic problem consist in estimation of jointly distribution of lifetimes by such censored dependent data. The aim of paper is considering this problem in the case of right random censoring model in the presence of covariate.

2. Description of the model. Let's consider the case when the support of covariate C is the interval $[0,1]$ and we consider our results on fixed design points $0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 1$. Thus, on a probability space $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$let's consider two sequences $\mathbb{X} = \{(X_{1i},\ X_{2i}),\ i1\}$ and $\mathbb{Y} = \{(Y_{1i},\ Y_{2i}),\ i1\}$ of conditionally independent random vectors with conditional survival functions $F_x(t,s) = P(X_{11} > t,\ X_{21} > s/C = x)$ and $G_x(t,s) = P(Y_{11} > t,\ Y_{21} > s/C = x)$ at given covariate $C = x$, where $x \in [0,1]$ and $(t,s) \in \bar{R}^{+2} = [o,\infty) \times [o,\infty)$. Here sequences $\mathbb{X}$ and $\mathbb{Y}$ can be dependent. Introduce a marginal conditional survival functions

$$S_{1x}^{X}(t) = P(X_{11} > t/C = x),\quad S_{2x}^{X}(s) = P(X_{21} > s/C = x),$$

$$S_{1x}^{Y}(t) = P(Y_{11} > t/C = x),\ S_{2x}^{Y}(s) = P(Y_{21} > s/C = x), \tag{1}$$

which supposed to be continuous, $x \in [0,1]$, $t, s0$. Suppose that vector $\mathbb{X}$ is censored from the right by vector $\mathbb{Y}$ and observed data is consist on $\mathbb{V}^{(n)} = \left\{(Z_i,\ \delta_i, C_i),\ i = \overline{1,\ n}\right\}$, where $Z_i = (Z_{1i}, Z_{2i})$, $Z_{ki} = \min(X_{ki}, Y_{ki})$, $\delta_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i})$, $\delta_{ki} = I(Z_{ki} = X_{ki})$, $k = 1,2$; $i = \overline{1,\ n}$. Here $I(A)$ is stands for an indicator of event A. Introduce jointly conditional survival function of the vector $(X_{11}, X_{21,}Y_{11}, Y_{21})$ given $C = x$:

$$K_x(t,s,z,v) = P(X_{11} > t, X_{21} > s, Y_{11} > z, Y_{21} > v),\ (t,s,z,v) \in \overline{R}^{+4}.$$

Then we obtain representations at $x \in [0,1]$:

$$F_x(t,s) = K_x(t,s,0,0),\quad G_x(t,s) = K(0,0,t,s),\ (t,s) \in \overline{R}^{+2}, \tag{2}$$

$$H_x(t,s) = P(Z_{11} > t, Z_{21} > s/C = x) = P(X_{11} > t, Y_{11} > t, X_{21} > s, Y_{21} > s/C = x) =$$
$$= K_x(t,s,\ t,s),\ (t,s) \in \overline{R}^{+2}. \tag{3}$$

Then according to the Theorem of Sklar (see, Nelson (1999)), there exist on $[0,1]^4$ conditional copula survival function $C_x(\overline{u})$, $\overline{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in [0,1]^4$ such that we have following representation of survival function (2) for all $(t,s,z,v) \in \overline{R}^{+4}$as

$$K_x(t,s,z,v) = C_x\left(S_{1x}^X(t), S_{2x}^X(s), S_{1x}^Y(z), S_{2x}^Y(v)\right). \tag{4}$$

Assume that at the fixed design value $x \in [0,1]$, C_x is Archimedean copula, i.e.

$$C_x(u_1,u_2,u_3,u_4) = \varphi^{[-1]}\left[\varphi_x(u_1)+\varphi_x(u_2)+\varphi_x(u_3)+\varphi_x(u_4)\right],\ \bar{u} = (u_1,u_2,u_3,u_4) \in [0,1]^4, \tag{5}$$

where, for each x, $\varphi_x : [0,1] \to [0,\infty]$ is a known continuous, convex, strictly decreasing function with $\varphi_x(1) = 0$, $\varphi_x^{[-1]}$ is a pseudo-inverse of φ_x (see, [4]) and given by

$$\varphi_x^{[-1]}(s) = \begin{cases} \varphi_x^{-1}(s), & 0 \le s \le \varphi_x(0), \\ 0, & \varphi_x(0) \le s \le \infty. \end{cases}$$

We assume that copula generator function φ_x is strict, i.e. $\varphi_x(0) = \infty$ and hence $\varphi_x^{[-1]} = \varphi_x^{-1}$. Thus from formulas (2)-(5) one can get for a fixed $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} F_x(t,s) &= \varphi_x^{-1}\left[\varphi_x\left(S_{1x}^X(t)\right)+\varphi_x\left(S_{2x}^X(s)\right)\right],\ (t,s) \in \overline{R}^{+2}, \\ G_x(t,s) &= \varphi_x^{-1}\left[\varphi_x\left(S_{1x}^Y(t)\right)+\varphi_x\left(S_{2x}^Y(s)\right)\right],\ (t,s) \in \overline{R}^{+2}, \end{aligned} \tag{6}$$

$$H_x(t,s) = \varphi_x^{-1}\left[\varphi_x\left(S_{1x}^X(t)\right)+\varphi_x\left(S_{2x}^X(s)\right)+\varphi_x\left(S_{1x}^Y(t)\right)+\varphi_x\left(S_{2x}^Y(s)\right)\right],\ (t,s) \in \overline{R}^{+2},$$

Since

$$S_{1x}^Z(t) = P\left(Z_{11} > t/C = x\right) = H_x(t;0) = P\left(X_{11} > t,\ Y_{11} > t/C = x\right),\ t0,$$

$$S_{2x}^Z(s) = P\left(Z_{21} > s/C = x\right) = H_x(0,s) = P\left(Y_{11} > s,\ Y_{21} > s/C = x\right),\ s0,$$

then from last formula in (6) we obtain $S_{1x}^Z(t) = \varphi_x^{-1}\left[\varphi_x\left(S_{1x}^X(t)\right)+\varphi_x\left(S_{1x}^Y(t)\right)\right],\ t0,$

$$S_{2x}^Z(s) = \varphi_x^{-1}\left[\varphi_x\left(S_{2x}^X(s)\right)+\varphi_x\left(S_{2x}^Y(s)\right)\right],\ s0. \tag{7}$$

Now from (7) it follows that for fixed $x \in [0,1]$

$$\varphi_x\left(H_x(t,s)\right) = \varphi_x\left(F_x(t,s)\right)+\varphi_x\left(G_x(t,s)\right),\ (t,s) \in \overline{R}^{+2}.$$

Note that functionals (7) admits to estimation of one dimensional survival functions S_{1x}^X and S_{2x}^X correspondingly by subsamples $\mathbb{V}_1^{(n)} = \left\{(Z_{1i}, \delta_{1i}, C_i),\ i = \overline{1,n}\right\}$ and $\mathbb{V}_2^{(n)} = \left\{(Z_{2i}, \delta_{2i}, C_i),\ i = \overline{1,n}\right\}$ with $\mathbb{V}_1^{(n)} + \mathbb{V}_2^{(n)} = \mathbb{V}^{(n)}$ and then by $\mathbb{V}^{(n)}$ estimation of joint survival function $F_x(t,s)$ using first formula in (6). We propose two estimators of conditional jointly survival function and study its large sample properties.

REFERENCES

1. Abdushukurov A.A., Muradov R.S. Estimation of bivariate survival function from random censored data with Poisson sample size. //Calcutta Statistical Association Bulletin.,2020, 72(2), pp. 111-122.
2. Abdushukurov A.A. Estimation of conditional survival function under dependent right

random censored data.// Austrian J. of Statist. 2020.Vol. 49, pp. 1-8.
3. Burke M.D. Estimation of a bivariate distribution function under random censorship.// Biometrika. 1988. Vol. 75, pp. 379-382.
4. Nelsen R.B. An introduction to copulas. New York: Springer, 2006.

Korteweg – De Vries equation on a tree with unbounded root and edges

Akhmedov M.I.
Yeoju Technical Institute in Tashkent, 156 Usman Nasyr Str., 100121, Tashkent,
maqsad.ahmedov@mail.ru;

We investigate the linearized KdV equation on metric tree consisting of three different types of bonds: incoming unbounded root, two finite bonds and four outgoing unbounded bonds. Under natural assumptions at the vertices, we obtain the uniqueness of a solution. To show the existence we use the theory of potentials and reduce the problem to a system of linear algebraic equations. We show that the latter are uniquely solvable under conditions of the uniqueness theorem. bonds are denoted by $B_j,\ j=\overline{1,7}$ the coordinate $x_1$on B_1 is defined from $-\infty$ to 0, and coordinates x_2 and x_3 from links B_2 and B_3 from 0 to L, and coordinates x_4 and x_5 and x_6 and x_7 on the bonds B_4 and B_5 and B_6 and B_7 are defined from 0 to such that on each bond the vertex corresponds to 0. We denote the graph by Γ. On each bond we consider the linear equation:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^3}{\partial x_j^3}\right)u_j(x_j,t)=f_j(x,t),\quad t>0, x_j\in B_j, j=\overline{1,7}. \tag{1}$$

Below, we will also use the notation x instead of $x_j,\ j=\overline{1,7}$. We treat a boundary value problem and using the method of potentials, reduce it to a system of integral equations.The solvability of the obtained system of integral equations is proven.

0.1 Formulation of the problems

We look for solutions $u\in C^{2,1}(\Gamma)$[1] vanishing at $-\infty$, i.e.

$$\lim_{x\to-\infty}u(x,t)=\lim_{x\to-\infty}\partial_x u(x,t)=0,\ \text{for all}\ \ t>0, \tag{2}$$

and set the Kirchhoff conditions to connect the functions $u_j(x_j)$ defined on each bond of the graph.

$$u_1(0,t)=a_2u_2(0,t)=a_3u_3(0,t), u_{1x}(0,t)=b_2u_{2x}(0,t)=b_3u_{3x}(0,t), \tag{3}$$

$$u_{1xx}(0,t)=\frac{1}{a_2}u_{2xx}(0,t)+\frac{1}{a_3}u_{3xx}(0,t), \tag{4}$$

$$a_2u_2(L,t)=a_4u_4(0,t)=a_5u_5(0,t), b_2u_{2x}(L,t)=b_4u_{4x}(0,t)=b_5u_{5x}(0,t), \tag{5}$$

$$\frac{1}{a_2}u_{2xx}(L,t)=\frac{1}{a_4}u_{4xx}(0,t)+\frac{1}{a_5}u_{5xx}(0,t), \tag{6}$$

$$a_3u_3(L,t)=a_6u_6(0,t)=a_7u_7(0,t), b_3u_{3x}(L,t)=b_6u_{6x}(0,t)=b_7u_{7x}(0,t), \tag{7}$$

$$\frac{1}{a_3}u_{3xx}(L,t)=\frac{1}{a_6}u_{6xx}(0,t)+\frac{1}{a_7}u_{7xx}(0,t), \tag{8}$$

[1]This is class of functions that are C^2 in x and C^1 in t.

For $t > 0$, where $a_k, b_k, k = \overline{2,7}$, are nonzero constants. Moreover, we assume that the $f_j(x,t), j = \overline{1,7}$ and the initial conditions:

$$u_j(x,0) = u_0(x), k, x \in \overline{B_j}, j = \overline{1,7}, \tag{9}$$

are smooth enough and bounded, and that satisfies the vertex conditions (2)-(7). These vertex conditions are not the only possible ones, and the main motivation for our choice is that they guarantee conservation of energy of the solution and, if the solutions decay (to zero) at infinity, the norm (energy) conservation.

REFERENCES

1. S.Abdinazarov, The general boundary value problem for the third order equation with multiple characteristics (in Russian), *Differential Equations* **3(1)**, 3–12 (1981).

2. M.I.Akhmedov, Z.A.Sobirov, M.R.Eshimbetov, Intial boundary value problem the linearized KdV equation on simple metric star graph, *Uz. Math.J.* **4**, 13–21 (2017).

3. T.D.Djuraev, Boundary value problems for mixed and mixed-composite type equations (in Russian),*Fan Tashkent*, (1979).

4. Z.A.Sobirov, H.Uecker, M.Akhmedov, Exact solutions of the Cauchy problem for the linearized KdV equation on metric star graphs,*Uz. Math. J* **3**, (2015).

5. Z.A.Sobirov, M.I.Akhmedov, H.Uecker, Cauchy problem for the linearized KdV equation on general metric star graphs, *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics* **6(2)**, 198–204 (2015).

6. Z.A.Sobirov, M.I.Akhmedov, O.V.Karpova, B.Jabbarova, Linearized KdV equation on a metric graph, *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics* **6(6)**, 757–761 (2015).

Central limit theorem for circle maps with a break and external noise

Aliyev A.[1], **Abdusalomov X.**[2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
aliyev95.uz@mail.ru;
National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
hasanboy155abs@gmail.com

Dynamical systems with external noise is a branch of dynamical systems. In one dimensional dynamical systems, the orbit of a point play key role. But we can not calculate their coordinates accurately or exactly in computer or the natural problems. In all cases there is a calculation error. The calculation error will be always random variable and it is called external noise. The papers of [1], [2] considered heuristically a renormalization theory for weak Gaussian noise perturbing one dimensional maps at the accumulation of period doubling. The main result in those papers was that after appropriately rescaling space and time, the effective noise of this renormalized system satisfies some scaling relations. In work of O.Diaz-Espinosa and R.de la Llave, central limit theorem for critical circle dynamics with external weak noise is proved by using renormalization (see [4]).

Let $T \in C^2(S^1)$ be circle homeomorphism and consider dynamical system without noise $x_n = T(x_{n-1}),\ x_0 \in S^1$.

Let (ξ_n) be a sequence of independent and identically distributed random variables (defined in some probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$), with $p > 2$ finite moments satisfying following conditions:

- $E\xi_n = 0$;
- $E|\xi_n|^2 = D^2$.

We define the system

$$\bar{x}_n = T(\bar{x}_{n-1}) + \sigma_n \xi_n,\ x_0 \in S^1$$

σ_n will be referred to as the "noise level".

Lyapunov function is defined as

$$\Lambda_2(x_0, n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=k}^{n-1} |T'(x_j)|^2,\ x_0 \in S^1.$$

Let $\omega(x, \sigma)$ be the process defined by

$$\omega_n(x, \sigma_n) = \frac{\bar{x}_n - x_n}{\sigma_n D \sqrt{\Lambda_2(x_0, n)}},\ x_0 = x. \qquad (1)$$

We prove that if $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\}),\ \varepsilon > 0$ circle homeomorphism with rotation number $\rho = [k, k, k, k...]$ and a break point x_b, the central limit theorem for $\omega_n(x, \sigma_n)$ is hold.

Theorem 1. *Let $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\}),\ \varepsilon > 0$ circle homeomorphism with rotation number $\rho = [k, k, k, ...]$, $k \in \mathbb{N}$ and a break point x_b and (ξ_n) be a sequence of independent and identically distributed random variables with $p > 2$ finite moments and $E\xi_n = 0$, $E|\xi_n|^2 = D^2$. Then, for all $x \neq T^l(x_b)$, $l \in \mathbb{Z}$, there is a constant $\gamma > 0$ such that if*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n n^\gamma = 0,$$

the process $\omega_{q_n}(x, \sigma_{q_n})$ defined by (1)converge in distribution to the standard Gaussian.

REFERENCES

1. *B.Shraiman, C.E.Wayne, and P.C.Martin.* Scaling theory for noisy period-doubling transitions to chaos. Physical Review Letters, 46(14):935-939, 1981.
2. *J.Crutchfield, M.Nauenberg, and J.Rudnick.* Scaling for external noise at the onset of chaos. Physical Review Letters, 46(14):933-935, 1981.
3. *E. B. Vul, Y. G. Sinai, and K. M. Khanin.* Feigenbaum universality and the thermodynamic formalism. Russian Math. Surveys, 39(3):1-40, 1984. English Translation.
4. *O.Diaz-Espinosa and R.de la Llave.* Renormalization and central limit theorem for critical dynamical systems with weak external noise.JMD 1(3) 477-543 2007

2-local derivation on solvable Lie algebras whose nilradical is a model Lie algebra

Allambergenov A.[1], Yuldoshev I. G.[2], Yusupov B. B.[3]

[1,2] Nukus state pedagogical institute, 1, P. Seyitov, 230105, Nukus, Uzbekistan, allayar2010@mail.ru; i.yuldashev1990@mail.ru

[3]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,
b.yusupov@mathinst.uz

In recent years non-associative analogues of classical constructions become of interest in connection with their applications in many branches of mathematics and physics. The notions of local and 2-local derivations are also become popular for some non-associative algebras such as the Lie and Leibniz algebras.

The notions of local derivations were introduced in 1990 by R.V.Kadison [10] and D.R.Larson, A.R.Sourour [11]. Later in 1997, P.Šemrl introduced the notions of 2-local derivations and 2-local automorphisms on algebras [9]. The main problems concerning these notions are to find conditions under which all local (2-local) derivations become (global)derivations and to present examples of algebras with local (2-local) derivations that are not derivations.

Investigation of 2-local derivations on Lie algebras was initiated in paper in [4]. Sh.A.Ayupov and K.K.Kudaybergenov have proved that every 2-local derivation on semi-simple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with 2-local derivations which are not derivations. In [5] local derivations of solvable Lie algebras are investigated and it is shown that in the class of solvable Lie algebras there exist algebras which admit local derivations which are not derivation and also algebras for which every local derivation is a derivation. Moreover, it is proved that everylocal derivation on a finite-dimensional solvable Lie algebra with model nilradical and maximal dimension of complementary space is a derivation. Sh.A.Ayupov, A.Kh.Khudoyberdiyev and B.B.Yusupov proved similar results concerning local and 2-local derivations on solvable Leibniz algebras in their recent paper [7]. In [8] the author proved that any local and 2-local derivation on the solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length with the maximal dimension of complementary space to the nilradical is a derivation. Moreover, a similar problem concerning 2-local derivations of such algebras is investigated. In [3] local and 2-local derivations and automorphism of complex finite-dimensional simple Leibniz algebras are investigated, and it is proved that all local and 2-local derivations on a finite-dimensional complex simple Leibniz algebras are automatically derivations and it is shown that filiform Leibniz algebras admit local derivations which are not derivations. The results of the paper [6] shows have proved that p-filiform Leibniz algebras as a rule admit local and 2-local derivations which are not derivations.

Let L be a Lie algebra. For a Lie algebra L consider the following central lower and derived sequences:

$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L^1], \quad k \geq 1,$$
$$L^{[1]} = 1, \quad L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}], \quad s \geq 1.$$

Definition 1. A Lie algebra L is called nilpotent (respectively, solvable), if there exists $p \in \mathbb{N}$ ($q \in \mathbb{N}$) such that $L^p = 0$ (respectively, $L^{[q]} = 0$). 1

Any Lie algebra L contains a unique maximal solvable (resp. nilpotent) ideal, called the radical (resp. nilradical) of the algebra. A non-trivial Lie algebra is called semi-simple if its radical is zero.

A derivation on a Lie algebra L is a linear map $d : L \to L$ which satisfies the Leibniz rule:

$$d([x,y]) = [d(x),y] + [x,d(y)], \quad \text{for any} \quad x,y \in L.$$

The set of all derivations of a Lie algebra L is a Lie algebra with respect to commutation operation and it is denoted by $Der(L)$.

For any element $x \in L$ the operator of right multiplication $ad_x : L \to L$, defined as $ad_x(z) = [z,x]$ is a derivation, and derivations of this form are called inner derivation. The set of all inner derivations of L, denoted $ad(L)$, is an ideal in $Der(L)$.

Definition 2. A map $\nabla : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ (not necessary linear) is called 2-*local derivation* if for any $x,y \in \mathcal{L}$ there exists a derivation $d_{x,y} \in Der(\mathcal{L})$ such that

$$\nabla(x) = d_{x,y}(x), \quad \nabla(y) = d_{x,y}(y).$$

Let N be a finite-dimensional nilpotent Lie algebra. For the matrix of linear operator ad_x denote by $C(x)$ the descending sequence of its Jordan blocks' dimensions. Consider the lexicographical order on the set $C(L) = \{C(x) \mid x \in L\}$.

Definition 3. A sequence

$$\left(\max_{x \in L \setminus L^2} C(x)\right)$$

is said to be the characteristic sequence of the nilpotent Lie algebra N.

Definition 4. Nilpotent Lie algebra with characteristic sequence $(n_1, n_2, \dots, n_k, 1)$ is said to be model if there exists a basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ such that

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n_1, \\ [e_{n_1+\dots+n_{j-1}+i}, e_1] = e_{n_1+\dots+n_{j-1}+i+1}, & 2 \le j \le k, \ 2 \le i \le n_j, \end{cases}$$

where omitted products are equal to zero.

It is known that the maximal dimension of the complementary space of solvable Lie algebra with model nilpotent Lie algebra with characteristic sequence $(n_1, n_2, \dots, n_k, 1)$ is equal to $k+1$. Let $L = Q + N$ be a solvable Lie algebra with $dimQ = k+1$. Then L has a basis $\{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ such that the table of multiplication of L has the form

$$L_{k+1}(N) : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \le i \le n_1, & \\ [e_{n_1+\dots+n_{j-1}+i}, e_1] = e_{n_1+\dots+n_{j-1}+i+1}, & 2 \le j \le k, & 2 \le i \le n_j, \\ [e_i, x_1] = ie_i, & 1 \le i \le n, & \\ [e_i, x_2] = e_i, & 2 \le i \le n_1+1, & \\ [e_{n_1+\dots+n_{j-2}+i}, x_j] = e_{n_1+\dots+n_{j-2}+i}, & 3 \le j \le k+1, & 2 \le i \le n_{j-1}+1. \end{cases}$$

In [1] it is proved that any derivation of $L_{k+1}(N)$ is inner for any characteristic sequence $(n_1, n_2, \dots, n_k, 1)$.

Theorem 1. *Let $L_{k+1}(N)$ solvable Leibniz algebras. Then any 2-local derivation of $L_{k+1}(N)$ is a derivation.*

References

1. Ancochea Bermúdez J.M., Campoamor-Stursberg R. Cohomologically rigid solvable Lie algebras with a nilradical of arbitrary characteristic sequence. Linear Algebra Appl. 488 (2016), 135-147.

2. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. Linear Alg. and Appl., 2016, Vol. 493, p. 381-388.

3. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Omirov B. A. Local and 2-local derivations and automorphisms on simple Leibniz algebras. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 43, 2020, pp.2199-2234.

4. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Rakhimov I.S., 2-Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. Linear Algebra Appl., 474 (2015), 1–11.

5. Ayupov Sh. A., Khudoyberdiyev A. Kh. Local derivations on Solvable Lie algebras. Linear and Multilinear Algebra, 2019, doi.org/10.1080/03081087.2019.1626336.

6. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Yusupov B. B. Local and 2-local derivations of p-filiform Leibniz algebras. Journal of Mathematical Sciences, 245(3), 2020, pp.359-367.

7. Ayupov Sh. A., Khudoyberdiyev A. Kh., Yusupov B. B. Local and 2-local derivations of Solvable Leibniz algebras. International Journal of Algebra and Computation, 30(6), 2020, pp.1185-1197.

8. Ayupov Sh. A., Yusupov B. B. Local and 2-local derivation on solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length. Karakalpak Scientific Journal Vol. 3 : Iss. 1 , Article 1, 2020, pp. 4-15.

9. Šemrl P. Local automorphisms and derivations on $B(H)$. Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 1997, pp.2677-2680.

10. Kadison R.V, Local derivations. Journal of Algebra., 1990, Vol. 130, p. 494–509.

11. Larson D.R., Sourour A.R., Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proc. Sympos. Pure Math. 51 Part 2, Provodence, Rhode Island 1990, p. 187–194.

ON SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR EQUATIONS WITH BOUNDARY OPERATORS OF FRACTIONAL ORDER

Ashurov R. R.[1], Fayziev Yu. E.[2]

Institute of Mathematics, Academy of Science of Uzbekistan,Tashkent, Uzbekistan;
ashurovr@gmail.com
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
fayziev.yusuf@mail.ru

In the present paper we study with boundary value problems for equations with the operator $\frac{\partial^2}{\partial y^2} - A(x, D)$, where $A(x, D)$ is a nonnegative elliptic differential operator and with boundary operators of fractional order ρ. In particular, boundary conditions can be given through the one-sided Marchaud, Grünwald-Letnikov or Liouville-Weyl fractional derivatives of order ρ. We find orthogonality and smoothness conditions on the boundary function, which guarantee both the existence and uniqueness of the classical solutions.

Let B^ρ_y be the one-sided Marchaud,Grünwald-Letnikov or Liouville-Weyl fractional derivative of order ρ (see [1]). Then we get (see [2], Example 3.12 and formula (3.119))

$$B^\rho_y e^{-ay} = a^\rho e^{-ay}, \quad y \text{ and } a > 0. \tag{1}$$

This formula played an essential role in the construction of the work Gorenflo et al. [1] and it is also important for our reasoning.

Let Ω be N-dimensional bounded domain with a sufficiently smooth boundary $\partial\Omega$ and $A(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha$ be an arbitrary nonnegative formally selfadjoint (symmetric) elliptic differential operator of order $m = 2l$ with sufficiently smooth coefficients $a_\alpha(x)$ in Ω, where $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ - multi-index and $D = (D_1, D_2, ..., D_N)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Recall, an operator $A(x,D)$ is elliptic in Ω, if for all $x \in \Omega$ and $\xi \in R^N$ one has

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \ne 0, \quad \xi \ne 0.$$

Consider a boundary value problem

$$u_{yy}(x,y) = A(x,D)u(x,y), \quad x \in \Omega, \quad y > 0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} B_j u(x,y) = \sum_{|\alpha|\le m_j} b_{\alpha,j}(x) D^\alpha u(x,y) = 0, \quad 0 \le m_j \le m-1, \\ j = 1,2,...,l; \quad x \in \partial\Omega, \end{gathered} \tag{3}$$

$$B_y^\rho u(x,+0) = \varphi(x), \quad \rho > 0, \ x \in \Omega, \tag{4}$$

$$|u(x,y)| \longrightarrow 0, \quad y \longrightarrow \infty, \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

where $\varphi(x)$ and coefficients $b_{\alpha,j}(x)$ are given functions.

Definition. A function $u(x,y)$ with the properties $u_{yy}(x,y)$, $A(x,D)u(x,y) \in C(\overline{\Omega} \times (0,\infty))$, $u(x,y)$, $B_y^\rho u(x,y) \in C(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ and satisfying all the conditions of problem (2) - (5) in the classical sense is called **the (classical) solution** of the boundary value problem (2) - (5).

Application of the Fourier method to problem (2) - (5) leads us to consider the following spectral problem

$$A(x,D)v(x) = \lambda v(x) \quad x \in \Omega; \tag{6}$$

$$B_j v(x) = 0, \quad j = 1,2,...,l; \quad x \in \partial\Omega. \tag{7}$$

S. Agmon [3] found the necessary conditions for boundary $\partial\Omega$ of the domain Ω and for coefficients of operators A and B_j, which guarantee compactness of the inverse operator, i.e. the existence of a complete in $L_2(\Omega)$ system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k(x)\}$, $k \ge 1$, and a countable set of nonnegative eigenvalues λ_k of spectral problem (6) - (7).

To formulate the main result of this paper we need to introduce for any real number τ an operator $\hat{A}^\tau$, acting in $L_2(\Omega)$ in the following way

$$\hat{A}^\tau g(x) = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\tau g_k v_k(x), \quad g_k = (g, v_k).$$

Obviously, operator $\hat{A}^\tau$ with the domain of definition

$$D(\hat{A}^\tau) = \{g \in L_2(\Omega) : \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^{2\tau} |g_k|^2 < \infty\}$$

is selfadjoint. If we denote by A the operator in $L_2(\Omega)$, acting as $Ag(x) = A(x,D)g(x)$ and with the domain of definition $D(A) = \{g \in C^m(\bar{\Omega}) : B_j g(x) = 0, \quad j = 1,...,l, \quad x \in \partial\Omega\}$, then it is not hard to show, that operator $\hat{A} \equiv \hat{A}^1$ is a selfadjoint extension in $L_2(\Omega)$ of operator A. In the same way one can define the operator $(\hat{A}+I)^\tau$, where I is the identity operator in $L_2(\Omega)$.

Let the multiplicity of the eigenvalue $\lambda = 0$ be equal to k_0, i.e. $\lambda_k = 0$, $k = 1, 2, ..., k_0$. Let the boundary function $\varphi(x)$ satisfy the following orthogonality conditions

$$\varphi_k = \int\limits_\Omega \varphi(x) v_k(x) dx = 0, \ k = 1, 2, ..., k_0. \tag{8}$$

The next theorem shows that this condition (together with the requirement for smoothness of the boundary function) ensures both the existence and uniqueness of the solution to the boundary value problem.

Theorem. Let $\varphi(x) \in D(\hat{A}^\tau)$, $\tau > \frac{N}{2m}$ and conditions (8) be satisfied. Then there exists a unique solution of the forward problem (2) - (5) and it has the representation

$$u(x,y) = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{\lambda_k})^\rho} \varphi_k \, v_k(x) \, e^{-\sqrt{\lambda_k} y}, \tag{9}$$

which absolutely and uniformly converges on $x \in \overline{\Omega}$ for each $y \in [0, \infty)$.

REFERENCES

1. Gorenflo R., Luchko Yu.F., Umarov S.R. On some boundary value problems for pseudo-differensial equations with boundary operators of fractional order. // Fract. Calc. Appl. Anal.,2000, V 3, No 4, P. 454 – 468.

2. Umarov S. Introduction to Fractional and Pseudo-Differential Equations with Singular Symbols. Springer, 2015.

3. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems. // Comm. Pure and Appl. Math., 1962, V. 15, Issue 2, P. 119 - 143.

Description of 2-Local and local derivations on Jordan rings of self-adjoint matrices

Ayupov Sh. A.[1], Arzikulov F. N.[2], Umrzaqov N. M.[3], Nuriddinov O. O.[4]

[1,2]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,
shavkat.ayupov@mathinst.uz;
[2,3,4]Andizhan State University, Andizhan, Uzbekistan
arzikulovfn@rambler.ru; umrzaqov2010@mail.ru; o.nuriddinov86@mail.ru

The present paper is devoted to 2-local derivations on Jordan rings and Jordan algebras. The study of 2-local derivations began in the paper [2] of Šemrl. In [2] the notion of 2-local derivations is introduced and 2-local derivations on the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on the infinite-dimensional separable Hilbert space H are described. Later a number of papers were devoted to 2-local maps on different types of rings, algebras, Banach algebras and Banach spaces.

In [1] 2-local inner derivations on the Jordan ring $H_n(\Re)$ of n-dimensional symmetric matrices over a commutative associative ring $\Re$ are investigated. It is proved that every such 2-local inner derivation is a derivation. In this paper 2-local derivations on the Jordan ring of self-adjoint matrices over a commutative involutive ring are described. We prove that each 2-local inner derivation on the Jordan ring $H_n(\Re)$ of self-adjoint $n \times n$ matrices over a commutative unital involutive ring $\Re$ is a derivation.

Let $\Re$ be a Jordan ring. Recall that a map $D : \Re \to \Re$ is called a derivation, if $D(x+y) = D(x) + D(y)$ and $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ for any two elements x, $y \in \Re$.

A derivation D on $\Re$ is called an inner derivation if there exist elements a_1, a_2, $\ldots$, a_m, b_1, b_2, $\ldots$, b_m in $\Re$ such that $D(x) = \sum_{k=1}^{m}[a_k(b_kx) - b_k(a_kx)], x \in \Re$.

A map $\Delta : \Re \to \Re$ is called a 2-local derivation, if for any two elements x, $y \in \Re$ there exists a derivation $D_{x,y} : \Re \to \Re$ such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$, $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$.

Let Δ be a 2-local derivation of the Jordan ring $\Re$. Δ is called a 2-local inner derivation, if for each pair of elements x, $y \in \Re$ there is an inner derivation D of $\Re$ such that $\Delta(x) = D(x)$, $\Delta(y) = D(y)$.

Let, throughout the present paper, $\Re$ be a unital involutive ring, $M_n(\Re)$ be the $n \times n$ matrices ring over $\Re$, $n > 1$. Let $\{e_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}$ be the set of matrix units in $M_n(\Re)$, i.e. $e_{i,j}$ is a matrix with components $a^{i,j} = \mathbf{1}$ and $a^{k,l} = \mathbf{0}$ if $(i,j) \neq (k,l)$, where $\mathbf{1}$ is the identity element, $\mathbf{0}$ is the zero element of $\Re$, and a matrix $a \in M_n(\Re)$ is written as $a = \sum_{k,l=1}^{n} a^{k,l}e_{k,l}$, where $a^{k,l} \in \Re$ for $k, l = 1, 2, \ldots, n$.

Suppose that the element 2 is invertible in $\Re$. In this case the set $H_n(\Re) = \{(a_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in M_n(\Re) : (a^{i,i})^* = a^{i,i}, (a^{i,j})^* = a^{j,i}, i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ is a Jordan ring with respect to the addition and the Jordan multiplication $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba), a, b \in H_n(\Re)$. Throughout this paper, let $\bar{e}_{i,j} = e_{i,j} + e_{j,i}$ for every pair of different indices i, j in $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Let, throughout the paper, $\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{m}[a_k, b_k]$, $\mathbf{c} = \sum_{k=1}^{l}[c_k, d_k]$.

Lemma 1. Let Δ be a 2-local derivation on $H_n(\Re)$, i, j, p be arbitrary pairwise different indices

1) let $\sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}$, $\sum_{k=1}^{l} D_{c_k,d_k}$ be the derivations on $H_n(\Re)$, generated by some elements a_1, a_2, $\ldots$, a_m, b_1, b_2, $\ldots$, b_m, c_1, c_2, $\ldots$, c_l, d_1, d_2, $\ldots$, $d_l \in H_n(\Re)$ such that $\Delta(\bar{e}_{i,j}) = \sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}(\bar{e}_{i,j}) = \sum_{k=1}^{l} D_{c_k,d_k}(\bar{e}_{i,j})$. Then the following equalities are valid relatively the associative multiplication $\mathbf{a}^{i,j} - \mathbf{a}^{j,i} = \mathbf{c}^{i,j} - \mathbf{c}^{j,i}$, $\mathbf{a}^{i,i} - \mathbf{a}^{j,j} = \mathbf{c}^{i,i} - \mathbf{c}^{j,j}$.

2) let $\sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}$, $\sum_{k=1}^{l} D_{c_k,d_k}$ be derivations on $H_n(\Re)$, generated by elements a_1, a_2, $\ldots$, a_m, b_1, b_2, $\ldots$, b_m, c_1, c_2, $\ldots$, c_l, d_1, d_2, $\ldots$, $d_l \in H_n(\Re)$ such that $\Delta(\bar{e}_{i,j}) = \sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}(\bar{e}_{i,j}), \Delta(\bar{e}_{i,p}) = \sum_{k=1}^{l} D_{c_k,d_k}(\bar{e}_{i,p})$. Then the following equality is valid $\mathbf{a}^{i,j} - \mathbf{a}^{j,i} = \mathbf{c}^{i,j} - \mathbf{c}^{j,i}$.

Lemma 2. Let Δ be a 2-local derivation on $H_n(\Re)$, i, j, p be arbitrary pairwise different indices and let $\sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}$, $\sum_{k=1}^{l} D_{c_k,d_k}$ be the derivations on $H_n(\Re)$, generated by some elements $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m, c_1, c_2, \ldots, c_l, d_1, d_2, \ldots, d_l \in H_n(\Re)$ such that $\Delta(\bar{e}_{i,p}) = \sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}(\bar{e}_{i,p}), \Delta(\bar{e}_{p,j}) = \sum_{k=1}^{l} D_{c_k,d_k}(\bar{e}_{p,j})$. Then the following equalities hold relative to the associative multiplication $e_{i,i}\mathbf{a}e_{j,j} = e_{i,i}\mathbf{c}e_{j,j}, e_{j,j}\mathbf{a}e_{i,i} = e_{j,j}\mathbf{c}e_{i,i}$.

Let Δ be a 2-local derivation on $H_n(\Re)$, i, j, p be arbitrary pairwise different indices, and let $\sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}$ be the derivation on $H_n(\Re)$, generated by some elements a_1, a_2, $\ldots$, a_m, b_1, b_2, $\ldots$, $b_m \in H_n(\Re)$ such that $\Delta(\bar{e}_{i,p}) = \sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}(\bar{e}_{i,p}), \Delta(\bar{e}_{p,j}) = \sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}(\bar{e}_{p,j})$. Let $a_{i,j} = e_{i,i}\frac{1}{4}\mathbf{a}e_{j,j}, a^{i,j}e_{i,j} = \frac{1}{4}\mathbf{a}^{i,j}e_{i,j}, a^{i,j} \in \Re, \mathbf{a}^{i,j} \in \Re$, $a_{j,i} = e_{j,j}\frac{1}{4}\mathbf{a}e_{i,i}, a^{j,i}e_{j,i} = \frac{1}{4}\mathbf{a}^{j,i}e_{j,i}, a^{j,i} \in \Re, \mathbf{a}^{j,i} \in \Re$. In these notations the following lemma is valid.

Lemma 3. Let Δ be a 2-local derivation on $H_n(\Re)$, i, j be arbitrary different indices and let $\sum_{k=1}^{l} D_{c_k,d_k}$ be the derivation on $H_n(\Re)$, generated by some elements $c_1, c_2, \ldots, c_l$, $d_1, d_2, \ldots, d_l \in H_n(\Re)$ such that $\Delta(\bar{e}_{i,j}) = \sum_{k=1}^{l} D_{c_k,d_k}(\bar{e}_{i,j})$. Then the following equality is valid $\Delta(\bar{e}_{i,j}) = (\sum_{k,l=1,k\neq l}^{n} a_{k,l})\bar{e}_{i,j} - \bar{e}_{i,j}(\sum_{k,l=1,k\neq l}^{n} a_{k,l}) + (\mathbf{c}^{i,i} - \mathbf{c}^{j,j})e_{i,j} + (\mathbf{c}^{j,j} - \mathbf{c}^{i,i})e_{j,i}$.

Let $\Re$ be a unital involutive ring, and let $x_o = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{e}_{k,k+1} \in H_n(\Re)$. Fix different indices i_o, j_o. Let $x_1, x_2, \ldots, x_q, y_1, y_2, \ldots, y_q \in H_n(\Re)$ be elements such that $\Delta(\bar{e}_{i_o,j_o}) = \sum_{k=1}^{q}[x_k(y_k\bar{e}_{i_o,j_o}) - y_k(x_k\bar{e}_{i_o,j_o})]$ and $\Delta(x_o) = \sum_{k=1}^{q}[x_k(y_k x_o) - y_k(x_k x_o)]$. Let $c = \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{q}[x_k, y_k])$.

Put $c = \sum_{i,j=1}^{n} c^{i,j}e_{i,j} \in H_n(\Re)$ and $\bar{a} = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{n} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$, where $a_{i,i} = c^{i,i}e_{i,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Lemma 4. Let $\Re$ be a unital involutive ring, let k, l be arbitrary different indices, and let $b = \{b^{i,j}e_{i,j}\} \in H_n(\Re)$ be an element such that $b = \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{q}[c_k, d_k])$ for some c_1, $c_2, \ldots, c_q, d_1, d_2, \ldots, d_q \in H_n(\Re)$ such that $\Delta(\bar{e}_{k,l}) = \sum_{p=1}^{q}[c_p(d_p(\bar{e}_{k,l})) - d_p(c_p(\bar{e}_{k,l}))]$ and $\Delta(x_o) = \sum_{p=1}^{q}[c_p(d_p x_o) - d_p(c_p x_o)]$. Then $c^{k,k} - c^{l,l} = b^{k,k} - b^{l,l}$.

Theorem 5. Let $\Re$ be a unital commutative involutive ring. Then every 2-local inner derivation on $H_n(\Re)$ is a derivation.

REFERENCES

1. Ayupov Sh.A., Arzikulov F.N. 2-Local derivations on associative and Jordan matrix rings over involutive commutative rings// Linear Algebra Appl. 2017. Vol. 522. P. 28–50.

2. Šemrl P. Local automorphisms and derivations on $B(H)$// Proc. Amer. Math. Soc. 1997. Vol. 125. P. 2677–2680.

Local derivations and automorphisms of Cayley algebras

Ayupov Sh.A.,[1,3] **Elduque A.,**[2] **Kudaybergenov K.K.**[1,4]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

[2]Departamento de Matemáticas e Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, Spain

[3]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

[4]Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan

shavkat.ayupov@mathinst.uz, elduque@unizar.es, karim2006@mail.ru

Let $\mathcal{A}$ be an algebra (not necessary associative). Recall that a linear mapping (respectively, a linear bijection) $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is said to be a derivation (respectively, automorphism), if $\varphi(xy) = \varphi(x)y + x\varphi(y)$ (respectively, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$) for all $x, y \in \mathcal{A}$. A linear mapping Δ is said to be a local derivation (respectively, local automorphism), if for every $x \in \mathcal{A}$ there exists a derivation (respectively, automorphism) φ_x on $\mathcal{A}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = \varphi_x(x)$. These notions were introduced and investigated independently by R.V. Kadison [4] and D.R. Larson and A.R. Sourour [5]. The above papers gave rise to a series of works devoted to the description of mappings which are close to automorphisms and derivations of C^*-algebras and operator algebras. In [5] D.R. Larson and A.R. Sourour proved that if $\mathcal{A} = B(X)$, the algebra of all bounded linear operators on a Banach space X, then every invertible local automorphism of $\mathcal{A}$ is an automorphism. Thus automorphisms on $B(X)$ are completely determined by their local actions. In [3] it was shown that the set of all local automorphisms $LocAut(\mathcal{A})$ of an algebra $\mathcal{A}$ form a multiplicative group.

In 1997, P.Šemrl [6] introduced the concepts of 2-local derivations and 2-local automorphisms. Recall that a mapping $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (not necessary linear) is said to be a 2-local derivation (respectively, 2-local automorphism), if for every pair $x, y \in \mathcal{A}$ there exists a derivation (respectively, automorphism) $\varphi_{x,y} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ (depending on x, y) such that $\Delta(x) = \varphi_{x,y}(x)$, $\Delta(y) = \varphi_{x,y}(y)$. P. Šemrl [6] described 2-local derivations on the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on the infinite-dimensional separable Hilbert space H, by proving that every 2-local derivation on $B(H)$ is a derivation. A detailed discussion of 2-local derivations on operator algebras can be found in the survey [1].

In the present talk we study local and 2-local derivations and automorphisms of Cayley algebras over an arbitrary field $\mathbb{F}$.

Let $\mathbb{F}$ be an arbitrary field. Cayley (or octonion) algebras over $\mathbb{F}$ constitute a well-known class of nonassociative algebras. They are unital nonassociative algebras $\mathcal{C}$ of dimension eight over $\mathbb{F}$, endowed with a nonsingular quadratic multiplicative form (the norm) $\mathfrak{n} : \mathcal{C} \to \mathbb{F}$. Hence

$$\mathfrak{n}(xy) = \mathfrak{n}(x)\mathfrak{n}(y)$$

for all $x, y \in \mathcal{C}$, and the polar form

$$\mathfrak{n}(x, y) := \mathfrak{n}(x + y) - \mathfrak{n}(x) - \mathfrak{n}(y)$$

is a nondegenerate bilinear form (see [2]).

Recall that the norm $\mathfrak{n}$ is isotropic if there is a non zero element $x \in \mathcal{C}$ with $\mathfrak{n}(x) = 0$, otherwise it is called anisotropic. Note that any Cayley algebra with anisotropic norm is a division algebra. It is known that, up to isomorphism, there is a unique Cayley algebra whose norm is isotropic. It is called the split Cayley algebra.

We denote by

- $\mathfrak{so}(\mathcal{C}, \mathfrak{n})$ the set of all linear mappings of $\mathcal{C}$ which are skew-hermitian with respect to $\mathfrak{n}$;
- $O(\mathcal{C}, \mathfrak{n})$ the set of all linear mappings of $\mathcal{C}$ which are orthogonal with respect to $\mathfrak{n}$;
- $\mathcal{C}_0$ the set of all traceless elements of $\mathcal{C}$, i.e., $\mathcal{C}_0 = \{x \in \mathcal{C} : \mathfrak{n}(x, 1) = 0\}$;
- $LocDer(\mathcal{C})$ the set of all local derivations of $\mathcal{C}$;
- $2LocDer(\mathcal{C})$ the set of all 2-local derivations of $\mathcal{C}$;
- $2LocAut(\mathcal{C})$ the set of all 2-local automorphisms of $\mathcal{C}$.

Theorem. *Let $\mathcal{C}$ be a Cayley algebra over an arbitrary field with norm $\mathfrak{n}$. Then*

1) *the space of local derivations of $\mathcal{C}$ is the Lie algebra $\{d \in \mathfrak{so}(\mathcal{C}, \mathfrak{n}) : d(1) = 0\}$;*
2) *the set $LocAut(\mathcal{C})$ coincides with $\{\varphi \in O(\mathcal{C}, \mathfrak{n}) : \varphi(1) = 1\}$;*
3) *if $\mathcal{C}$ is a split algebra, then every 2-local derivation (2-local automorphism) of $\mathcal{C}$ is a derivation;*
4) *if $\mathcal{C}$ is a division algebra, then*

$$2LocDer(\mathcal{C}) = LocDer(\mathcal{C}) = \{d \in \mathfrak{so}(\mathcal{C}, \mathfrak{n}) : d(1) = 0\}$$

and

$$2LocAut(\mathcal{C}) = LocAut(\mathcal{C}) = \{\varphi \in O(\mathcal{C}, \mathfrak{n}) : \varphi(1) = 1\}.$$

Note that the dimensions of the Lie algebras $LocDer\,(\mathcal{C}) \cong \mathfrak{so}(\mathcal{C}_0, \mathfrak{n})$ and $Der\,(\mathcal{C})$ are equal to 21 and 14, respectively. Therefore the Cayley algebra $\mathcal{C}$ admits local derivations which are not derivations.

References

[1] Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Peralta A. M., A survey on local and 2-local derivations on C^*-algebras and von Neumann algebras, in Topics in Functional Analysis and Algebra, *Contemporary Mathematics AMS,* **672** (2016) 73-126.

[2] Elduque A., Kochetov M. , *Gradings on simple Lie algebras*, Mathematical Surveys and Monographs **189**, American Mathematical Society, Providence, RI; Atlantic Association for Research in the Mathematical Sciences (AARMS), Halifax, NS, 2013.

[3] Elisova A.P., Zotov I.N., Levchuk V.M., Suleymanova G.S., *Local automorphisms and local derivations of nilpotent matrix algebras*, Izv. Irkutsk Gos. Univ. **4** (1) (2011) 9-19.

[4] Kadison R.V., *Local derivations,* J. Algebra, **130** (1990) 494-509.

[5] Larson D. R., Sourour A. R., *Local derivations and local automorphisms of $B(X)$,* Proc. Sympos. Pure Math. **51** (1990) 187-194.

[6] Šemrl P., *Local automorphisms and derivations on $B(H)$*, Proc. Amer. Math. Soc., **125** (1997) 2677-2680.

Local ergodic theorems for flows in Banach ideals of compact operators

Azizov A. N.[1], Chilin V. I.[2]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,

[1]azizov.07@mail.ru; [2]vladimirchil@gmail.com

Let $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ be an infinite-dimensional separable Hilbert space over the field $\mathbb{C}$ of complex numbers, and let $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ be the C^*-algebra of bounded linear operators in $\mathcal{H}$. Denote by $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ (respectively, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$) the two-sided ideal of compact (respectively, finite rank) linear operators in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Let $\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x = x^*\}$, $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) : x \geq 0\}$, and let $\tau : \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \to [0,\infty]$ be the canonical trace on $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. If $e \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$ is a projection in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ and $\mathbf{1}$ is the identity of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, then we will write $e^\perp = \mathbf{1} - e$.

Let $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, and let $\{e_\lambda\}_{\lambda\geq 0}$ be the spectral family of projections for the absolute value $|x| = (x^*x)^{1/2}$ of x, that is, $e_\lambda = \{|x| < \lambda\}$. If $t > 0$, then the t-th generalized singular number of x, or the non-increasing rearrangement of x, is defined as (see [3])

$$\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \ \tau(e_\lambda^\perp) \leq t\}.$$

A non-zero linear subspace $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ with a Banach norm $\|\cdot\|_X$ is called noncommutative symmetric space if the conditions $x \in X,\ y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \mu_t(y) \leq \mu_t(x)\ \forall\, t > 0$ imply that $y \in X$ and $\|y\|_X \leq \|x\|_X$.

The spaces $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$, as well as the classical Banach two-sided ideals $\mathcal{C}_p = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \ \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$, are examples of noncommutative symmetric spaces.

If $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, then $|x| = \sum\limits_{n=1}^{m(x)} s_n(x)p_n$ (if $m(x) = \infty$, the series converges uniformly, i.e. with respect to the uniform norm $\|x\|_\infty = \sup\limits_{\xi\in\mathcal{H}, \|\xi\|_\mathcal{H}=1} \|x(\xi)\|_\mathcal{H}$), where $\{s_n(x)\}_{n=1}^{m(x)}$ is the set of eigenvalues of the compact operator $|x|$ in the decreasing order, and p_n is the projection onto the eigenspace corresponding to $s_n(x)$. Consequently, the non-increasing rearrangement $\mu_t(x)$ of $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ can be identified with the sequence $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n(x) \downarrow 0$ (if $m(x) < \infty$, we set $s_n(x) = 0$ for all $n > m(x)$).

Fix an orthonormal basis $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathcal{H}$. Let p_n be the one-dimensional projection on the subspace $\mathbb{C} \cdot \varphi_n \subset \mathcal{H}$. If $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ is a symmetric space then the set $E(X) = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \ x_\xi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n p_n \in X \right\}$ (the series converges uniformly) is a symmetric sequence space with respect to the norm $\|\xi\|_{E(X)} = \|x_\xi\|_X$. Consequently, each symmetric space $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ generates a symmetric sequence space $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)}) \subset c_0$. The converse is also true: every symmetric sequence space $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ generates a symmetric space $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ by the following rule (see [4]): $\mathcal{C}_E = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\} \in E\}$, $\|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}\|_E$. The pair $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is called a Banach ideal of compact operators. It is known that $(\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_p) = (\mathcal{C}_{l^p}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{l^p}})$ for all $1 \le p < \infty$ and $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty) = (\mathcal{C}_{c_0}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{c_0}})$.

We say that a Banach ideal $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ is fully symmetric, if conditions $y \in \mathcal{C}_E$, $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $\int\limits_0^s \mu_t(y)dt \le \int\limits_0^s \mu_t(x)dt \ \forall\, s > 0$ entail that $x \in \mathcal{C}_E$ and $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \le \|y\|_{\mathcal{C}_E}$.

A linear contraction $T : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is called a Dunford-Schwartz operator (writing $T \in DS$), if $T(\mathcal{C}_1) \subset \mathcal{C}_1$ and $\|T(x)\|_1 \le \|x\|_1$ for all $x \in \mathcal{C}_1$. We will write $T \in DS^+$ if T is a positive Dunford-Schwartz operator, that is, $T \in DS$ and $T(\mathcal{B}_+(\mathcal{H})) \subset \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$.

Any fully symmetric ideal $\mathcal{C}_E$ is an exact interpolation space in the Banach pair $(\mathcal{C}_1, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ (see [2]). It then follows that $T(\mathcal{C}_E) \subset \mathcal{C}_E$ and $\|T\|_{\mathcal{C}_E \to \mathcal{C}_E} \le 1$ for all $T \in DS$. In particular, $T(\mathcal{K}(\mathcal{H})) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ and the restriction of T on $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ is a linear contraction (also denoted by T).

Let $\mathbb{R}$ be the set of real numbers, d is an arbitrary natural number and let $\mathbb{R}_+^d = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) : \ 0 \le u_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots, d\}$. Let $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^d}$ be a semigroup of positive Dunford-Schwartz operators, such that $T_\mathbf{0}(x) = x$ for all $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. A semigroup $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^d}$ is said to be strongly continuous on $\mathcal{C}_1$ if $\lim\limits_{\mathbf{u} \to \mathbf{v}} \|T_\mathbf{u}(x) - T_\mathbf{v}(x)\|_1 = 0$ for each $x \in \mathcal{C}_1$. Note that for $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)$ the convergence $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$ means that $u_i \to v_i$ for each $i = 1, \ldots, d$.

It is known (see [5]) that for any $x \in \mathcal{C}_1$ and $t > 0$ there exists the Bochner integral $A_t(x) = \frac{1}{t^d} \int\limits_{[0,t]^d} T_\mathbf{u}(x) d\mathbf{u} \in \mathcal{C}_1$. Therefore we define the positive linear contraction A_t acting on $\mathcal{C}_1$, which can be extended (see [1]) to the positive Dunford-Schwartz operator (this extension we also denote by A_t).

The following Theorem is a version of local individual ergodic theorem for flows on fully symmetric ideals.

Theorem 1. *Let $\mathcal{C}_E$ be a fully symmetric ideal. If $x \in \mathcal{C}_E$, then $\|A_t(x) - x\|_\infty \to 0$ as $t \to 0$.*

A fully symmetric ideal $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ is said to have order continuous norm if $\|x_n\|_{\mathcal{C}_E} \downarrow 0$ whenever $0 \le x_n \in \mathcal{C}_E$ and $x_n \downarrow 0$. It is clear that the fully symmetric ideals $(\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$, have order continuous norms.

The following Theorem is a version of local mean ergodic theorem for flows on fully symmetric ideals.

Theorem 2. *Let $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ be a fully symmetric ideal with order continuous norm. If $x \in \mathcal{C}_E$, then $\|A_t(x) - x\|_{\mathcal{C}_E} \to 0$ as $t \to 0$.*

REFERENCES

1. Azizov A., Chilin V. Ergodic theorems for flows in the ideals of compact operators // Taurida J. Comp. Sci. Theor. Math. 2020. Vol. 4.
2. Dodds P.G., Dodds T.K., Pagter B. Fully symmetric operator spaces // J. Integr. Equat. Oper. Theory. 1992. Vol. 15, P.942–972.
3. Fack T., Kosaki H. Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacific. J. Math. 1986. Vol. 123, P. 269–300.
4. Lord S., Sukochev F., Zanin D. Singular Traces. Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2013.
5. Yosida K. Functional Analysis. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer Verlag, 1965.

Integration of the discrete sine-gordon equation with a self-consistent source

Babajanov B.A.[1], Azamatov A.Sh.[2]
[1,2]Urgench State University, Urgench, Uzbekistan,
a.murod@mail.ru; azizbek.shavkatovich@gmail.com

This work is devoted to the application of the inverse scattering theory for integration of the discrete Sine-Gordon equation with a self-consistent source.

Hirota showed the integrabilty of discrete version of the sine–Gordon equation and found its Lax pair, Backlund transformations and N-soliton solutions [1]. In [2] generalization of Hirota's discretization scheme for the sine-Gordon equation was considered. The soliton solutions are obtained by extending the generalized inverse method [3] and the related linear spectral problem for the discrete sine-Gordon equation was studied in [4].

It needs to point out the sG equations and its close allies are valued in the investigation of a great variety of diverse fields[5], such as the study of surfaces with constant negative curvature, or integrable surfaces [6], elementary particle physics, quantum optics, Josephson junctions [7], nonlinear excitations in condensed matter physics[8], vortex structures in fluids and plasmas [9].

This study investigate the integration of the discrete sine-Gordon(sG) equation with a self-consistent source via the inverse scattering method.

The first investigation of the soliton equations with self-consistent sources has been considered in [10] and still attracts considerable attention in recent years [11-13, see also their reference].

We consider the following system of equations

$$\dot{\theta}_{n+1} - \dot{\theta}_n = 2\left(\sin\theta_{n+1} + \sin\theta_n\right) + \sum_{k=1}^{N}\left(f_{1,n+1}^k f_{1,n}^k + f_{2,n+1}^k f_{2,n}^k\right), n \in Z, \tag{1}$$

$$\theta_n(t)|_{t=0} = \theta_n^0, n \in Z, \tag{2}$$

$$L_n(z_k, t) f_n^k = f_{n+1}^k, n \in Z \tag{3}$$

where $L_n(z,t) = zP_n(t) + \frac{1}{z}Q_n(t)$, $P_n(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta_n(t) & \sin\theta_n(t) \\ \sin\theta_n(t) & 1-\cos\theta_n(t) \end{pmatrix}$,

$$Q_n(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\cos\theta_n(t) & -\sin\theta_n(t) \\ -\sin\theta_n(t) & 1+\cos\theta_n(t) \end{pmatrix},$$

$\theta_n = \theta_n(t)$ and $f_n^k = f_n(z_k,t)$, $\hat{f}_n^k = \sigma_2 f_n(z_k,t)$ column-vector functions satisfy the following normalizing conditions

$$\beta_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(f_i^k\right)^T (Q_i - P_i)\,\sigma_2 f_i^k, \quad \hat{\beta}_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}_i^k\right)^T \left(z_k^2 Q_i - P_i\right)\sigma_2 \hat{f}_i^k.$$

Here $\beta_k(t)$, $\hat{\beta}_k(t)$ are given scalar continuous functions and $\sigma_i (i = 1,2,3)$ are the usual Pauli matrices of rank 2.

The purpose of the work is to find the set of functions $\{\theta_n(t),\ f_n^k(t)\}, n \in Z$ supposing the existence in the class of functions

$$\lim_{|n|\to\pm\infty} \omega_n = \lim_{|n|\to\pm\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \sin\theta_j(t) = 0, \quad \underset{|n|\to\infty}{\theta_n(t)} = 0(mod 2\pi) \tag{4}$$

which is the solution of the considering (1)-(3) problem.

Theorem 1. If the set of functions $\{\theta_n(t),\ f_n^k(t)\}$ represent the solution of the (1)-(3) in the class of functions (4), then the scattering data of the $L_n(t)$ operator with the potential $\theta_n(t)$ satisfy the following time evolution equations

$$\dot{R}(z) = -2\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)R(z), \qquad |z| = 1,\ z \neq \pm 1,$$

$$\dot{z}_k = 0,\ \dot{C}_k = \left(-2\frac{z_k^2+1}{z_k^2-1} + \beta_k + \hat{\beta}_k\right)C_k, k = 1,...,N.$$

The obtained results completely define the time evolution of the scattering data, which allows us to solve the problem (1)-(3) by using the method of the inverse spectral problem of (3) [see 4].

REFERENCES

1. *Hirota R.* 1977, J. Phys. Soc. Japan, 43, 2079.
2. *Orfanidis S.* 1978 J. Phys. Rev. D 18 3822.
3. *Levi D., Ragnisco O., Bruschi M.* 1980, Nuovo Cimento A 58 56.
4. *Pilloni L. and Levi D.* The Inverse Scattering Transform for Solving the Discrete Sine-Gordon Equation // Physics Letters A, 92 (1982), 1, pp. 5-81982.
5. *Fritz Gesztesy, Helge Holden.* A Local Sine-Gordon Hierarchy and its Algebro-Geometric Solutions // arXiv:solv-int/9707010
6. *Bobenko A. I.* Constant mean curvature surfaces and integrable systems // Russ. Math. Surv.46:4 , 1991, 1–45.
7. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., and Morris H.C. Solitons and Nonlinear Wave Equations, Academic Press, London, 1982.

8. *Borisov A.B., Kiseliev V.V.* Topological defects in incommensurate magnetic and crystal structures and quasi-periodic solutions of the elliptic sine-Gordon equation // Physica D 31 ,1988, 49–64.

9. *Ting A.C., Chen H.H., Lee Y.C.* Exact solutions of a nonlinear boundary value problem: The vortices of the two-dimensional sinh-Poisson equation // Physica 26D , 1987, pp.37–66.

10. *Melnikov V.K.* Integration method of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source // Phys.Lett. A, 133, 1988, pp.493-496.

11. *Da-Jun Zhang , Deng-yuan Chen.* The N-Soliton Solutions of the sine-Gordon Equation with Self-Consistent Sources // Physica A 321, 2003, pp. 467Ц481.

12. *Khasanov A.B., Urazboev G.U.* On the sine-Gordon equation with a self-consistent source // Mat. Tr., 2008, Volume 11, Number 1, 153–166,

13. *Babajanov B.A., Fechkan M., Urazbaev G.U.* On the periodic Toda Lattice with self-consistent source // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015; 22: 379-388.

On the integration of the Toda lattice hierarchy with an integral type source

Babajanov B.A.[1], Ruzmetov M.[2]

[1,2]Urgench State University, Urgench, Uzbekistan,

a.murod@mail.ru;

The Toda lattice [1] is a simple model for a nonlinear one-dimensional crystal that describes the motion of a chain of particles with exponential interactions of the nearest neighbors. It is shown in the works [2-3] that Toda lattice equation can be integrated by Inverse Scattering Method for the discrete Sturm-Liuville operator. Integration of Toda lattice equation with a source are presented in [4-8].

In this work, the Toda lattice hierarchy with an integral type source

$$\begin{cases} \frac{da_n}{dt} = a_n(G_{n+1,r+1} - G_{n,r+1}) + a_n \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_{n+1}(\mu,t)g_{n+1}(\mu,t) \\ -f_n(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu, \\ \frac{db_n}{dt} = H_{n+1,r+1} - H_{n,r+1} + a_n \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_n(\mu,t)g_{n+1}(\mu,t)+ \\ +f_{n+1}(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu - a_{n-1} \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_n(\mu,t)g_{n-1}(\mu,t) + f_{n-1}(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu, \\ a_{n-1}f_{n-1} + b_nf_n + a_nf_{n+1} = \frac{\mu+\mu^{-1}}{2}f_n, \\ a_{n-1}g_{n-1} + b_ng_n + a_ng_{n+1} = \frac{\mu+\mu^{-1}}{2}g_n, \;\; n \in Z., \end{cases} \tag{1}$$

$$a_n(0) = a_n^0, \;\; b_n(0) = b_n^0, \quad n \in Z, \tag{2}$$

is studied. Where $G_{n,j}(t) = \sum\limits_{s=0}^{j} c_{j-s} < \delta_n, \, L(t)^s\delta_n >, \quad 0 \le j \le r+1,$

$$H_{n,j}(t) = \sum_{s=0}^{j} 2a_n(t)c_{j-s} < \delta_{n+1}, \, L(t)^s\delta_n > +c_j + 1, \;\; 0 \le j \le r+1,$$

$$(L(t)y)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \tag{3}$$

$$< \delta_m, \delta_n >= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n\,, \end{cases}$$

1. $a_n^0 > 0, \ Im\, b_n^0 = 0, \quad n \in Z, \ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\,n\,| \left(\left|\, a_n^0 - \frac{1}{2}\,\right| + |\,b_n^0| \right) < \infty,$

2. The operator $L(0)$ has exactly N eigenvalues $\lambda_1(0), \lambda_2(0), ..., \lambda_N(0)$ which are out of the interval $[-1;\, 1]$.

The main aim of this work is to obtain the expressions of the solutions $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n(\mu,t)\}_{-\infty}^{\infty}$ and $\{g_n(\mu,t)\}_{-\infty}^{\infty}$ of the problem (1)-(3) in the framework of inverse scattering method for the operator $L(t)$.

Theorem. If the functions $a_n(t)$, $b_n(t)$,$f_n(\mu,t)$,$g_n(\mu,t)$, $n \in Z$ are solutions of the problem (1)-(3), then the scattering data of the operator (3) are given by relations

$$\frac{dz_k}{dt} = 0, \quad k = 1, 2, ..., N, \tag{8}$$

$$\frac{\partial R(z,t)}{\partial t} = \left((z - z^{-1})\tilde{g}_r(z,0) + \frac{1}{z^2 - 1} v.p. \oint_{|\mu|=1} D(\mu,t)d\mu \right) R(z,t) +$$

$$+2\pi i\,(Q(z,t) + Q(z^{-1},t))R(z,t) + 4\pi i P(z^{-1}), \tag{9}$$

$$\frac{dB_k(t)}{dt} = \Bigg[(z_k - z_k^{-1})\tilde{g}_r(z_k,0) - \frac{1}{z_k^2 - 1} \oint_{|\mu|=1} \frac{(\mu+z_k)(\mu z_k - 1)}{\mu(\mu - z_k)} (b(\mu,t)c(\mu,t) + q(\mu,t)r(\mu,t))d\mu$$

$$-\frac{1}{z_k^2-1} \oint_{|\mu|=1} \frac{(\mu - z_k)(\mu z_k + 1)}{\mu(\mu - z_k^{-1})} (a(\mu)d(\mu) + p(\mu)s(\mu))d\mu \Bigg] B_k(t), \quad k = 1, 2, ..., N, \tag{10}$$

where

$$\tilde{G}_{n,\,r}(z,t) \to \tilde{g}_r(z,\,0), \ n \to -\infty,$$

$$D(\mu,t) = (q(\mu,t)r(\mu,t) + p(\mu,t)s(\mu,t)) \left[\frac{(\mu+z)(\mu z - 1)}{\mu(\mu - z)} + \frac{(\mu - z)(\mu z + 1)}{\mu(\mu - z^{-1})} \right],$$

$$\begin{aligned} a(\mu,t) &= p(\mu,t)\beta(\mu^{-1},t) + q(\mu,t)\alpha(\mu,t), \\ b(\mu,t) &= p(\mu,t)\alpha(\mu^{-1},t) + q(\mu,t)\beta(\mu,t), \\ c(\mu,t) &= r(\mu,t)\beta(\mu^{-1},t) + s(\mu,t)\alpha(\mu,t), \\ d(\mu,t) &= r(\mu,t)\alpha(\mu^{-1},t) + s(\mu,t)\beta(\mu,t) \end{aligned}$$

and

$$\alpha(\mu,t) = \prod_{j=1}^{N} \left| \frac{\mu - z_j}{\mu z_j - 1} \right| \exp\left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_{|\zeta|=1} \ln\left(1 - |R(\zeta,t)|^2\right) \frac{\mu+\zeta}{\mu-\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta} \right\},$$

$$\beta(\mu^{-1},t) = -R(\mu,t)\alpha(\mu,t).$$

The relations (8), (9) and (10) determine the evolution of scattering data for the operator $L\,(t)$, which allows to use the inverse scattering method to find the solutions of the Cauchy problem (1)-(3).

References

1.Toda M. Waves in nonlinear lattice. - Suppl., Progress Thoer. Physics, 1970, 45, p. 174-200.

2. Flaschka H. On the Toda lattice. II.-Progress Theor. Physics, 1974, 51, N 3, p. 703-716.

3. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Lattices, Mathematical Surveys and Monographs, vol.72, AMS, 2000.

4. Cabada A., Urazboev G.U. Integration of the Toda lattice with an integral-type source. Inverse Problems, 2010; 26: 085004 (12pp).

5. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M, Babajonov A.B. On the integration of a Toda-type chain with an integral type source, Bulletin of the Institute of Mathematics, Vol.1, 15-26, 2020.

6. X. Liu, Y. Zeng, On the Toda lattice equation with self-consistent sources. J. Phys. A: Math. Gen. 38, 2005, 8951-8965.

7. Babajanov B. A. Integration of the Toda-type chain with a special self-consistent source. Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. - Switzerland, spring, 2018.-P. 45-56.

8. Babajanov B.A., Feckan M., Urazbaev G.U.: On the periodic Toda Lattice hierarchy with an integral source, Commun. Sci. Numer. Simul. 52 (2017), 110-123.

On classification of two-dimensional algebras over any basic field

Bekbaev U. Dj.

100095, Turin Polytechnic University in Tashkent, 17, Little Ring Road street, Tashkent, Uzbekistan,

uralbekbaev@gmail.com

In [1] the classification, up to isomorphism, problem of all two-dimensional algebras over a field $\mathbb{F}$ is solved under the assumption that any second and third order polynomial over $\mathbb{F}$ has a root in it. The main aim of this paper is to get a classification of such algebras without any assumption on the basic field. The classification will be given in terms of the matrix of structure constants (MSC) as in [1].

If $\mathbf{A}$ is any 2 dimensional algebra with multiplication $\cdot$ given by a bilinear map $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ whenever $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{A}$ and $e=(e_1,e_2)$ is a fixed basis for $\mathbf{A}$ as a vector space over $\mathbb{F}$ then the algebra $\mathbf{A}$ is fully defined its MSC, with respect to the basis e,

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{pmatrix} \in Mat(2\times 4;\mathbb{F}),$$

where $e_1\cdot e_1=\alpha_1e_1+\beta_1e_2,\ e_1\cdot e_2=\alpha_2e_1+\beta_2e_2,\ e_2\cdot e_1=\alpha_3e_1+\beta_3e_2,\ e_2\cdot e_2=\alpha_4e_1+\beta_4e_2.$

In terms of MSC the isomorphism of of two algebras can be given in the following way.

Definition. *Two-dimensional algebras* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, *given by their matrices of structural constants* A, B, *are said to be isomorphic if* $B=gA(g^{-1})^{\otimes 2}$ *holds true for some* $g\in GL(2,\mathbb{F})$, *where* $\otimes$ *stands for the Kronecker product of matrices.*

The following is the main result of the paper in $Char.(\mathbb{F})\neq 2,3$ case.

Theorem. *Any non-trivial 2-dimensional algebra over a field* $\mathbb{F}$, $Char.(\mathbb{F})\neq 2,3$, *is isomorphic to only one of the following listed, by their matrices of structure constants, algebras:*

$$A_1(\mathbf{c})=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1+\alpha_2 & \alpha_4 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \text{where } \mathbf{c}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\beta_1)\in\mathbb{F}^4,$$

$$A_2(\mathbf{c})=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{where } \mathbf{c}=(\alpha_1,\alpha_4,\beta_2)\in\mathbb{F}^3,\ \alpha_4\neq 0,$$

$$A_3(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & \beta_2 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix},$$

where $\mathbf{c} = (\alpha_1, \alpha_4, \beta_2) \in \mathbb{F}^3$ and $0 \neq a \in \mathbb{F}$,

$$A_4(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ where } \mathbf{c} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{F}^2,$$

$$A_5(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha_1 - 1 & 1-\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } \mathbf{c} = \alpha_1 \in \mathbb{F},$$

$$A_6(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 1 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ where } \mathbf{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2,\ \alpha_4 \neq 0,$$

$$A_7(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & a^2\alpha_4 \\ 0 & 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix},$$

where $\mathbf{c} = (\alpha_1, \alpha_4) \in \mathbb{F}^2$ and $0 \neq a \in \mathbb{F}$,

$$A_8(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ where } \mathbf{c} = \beta_1 \in \mathbb{F},\ A_9(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{10}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1'(a) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

where polynomial $(\beta_1 t^3 - 3t - 1)(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)(\beta_1^2 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)$ has no root in $\mathbb{F}$, $a \in \mathbb{F}$ and $\beta_1'(t) = \frac{(\beta_1^2 t^3 + 6\beta_1 t^2 + 3\beta_1 t + \beta_1 - 2)^2}{(\beta_1 t^2 + \beta_1 t + 1)^3}$,

$$A_{11}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a^3\beta_1^{\pm 1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where polynomial $\beta_1 - t^3$ has no root in $\mathbb{F}$, $\mathbf{c} = \beta_1 \neq 0$ and $0 \neq a \in \mathbb{F}$,

$$A_{12}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ a^2\beta_1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ where } \mathbf{c} = \beta_1 \in \mathbb{F},\ 0 \neq a \in \mathbb{F},$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Similar results are obtained in $Char.(\mathbb{F}) = 2$, $Char.(\mathbb{F}) = 3$ cases as well. These results can be used also to solve problems considered in [2,3,4,5] in general case. For other approaches to the classification problem of two-dimensional algebras one can see [6,7].

REFERENCES

1. Ahmed, H., Bekbaev, U., Rakhimov, I.: Complete classification of two-dimensional algebras, 12 pages, *AIP Conference Proceedings*, 1830, 070016, 2017, doi 10.1063/1.4980965.
2. Ahmed, H., Bekbaev, U., Rakhimov, I.: Identities on Two-Dimensional Algebras, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, 41(9), pp. 1615–ВЦ1629.
3. Ahmed, H., Bekbaev, U., Rakhimov, I.: Subalgebras, idempotents, ideals and quasi-units of two-dimensional algebras, *International Journal of Algebra and Computations*,

2020, 30(5), pp. 903–929.
4. Ahmed, H., Bekbaev, U., Rakhimov, I.: On Two-Dimensional Power Associative Algebras Over Algebraically Closed Fields and $\mathbb{R}$, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, 40(1), pp. 1–13.
5. Ahmed, H., Bekbaev, U., Rakhimov, I.: Classification of two-dimensional Jordan algebras over $\mathbb{R}$, *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 2018, 12(3), pp. 287–303.
6. Kaygorodov, I., Volkov,Yu.: The variety of 2-dimensional algebras over an algebraically closed field, *Canadian Journal of Mathematics*, 2019, 71(4), pp. 819–842.
7. Petersson, H.P.: The classification of two-dimensional nonassicative algebras, 2000, *Result. Math.*, 3, pp. 120–154.

Compact-open topology

Beshimov R. B.[1], Xushboqov A. B.[2]

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
rbeshimov@mail.ru, azizxushboqov@mail.ru

Definition 1. Let (X,τ) be topology space. $\mu = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ family of open sets of (X,τ) is base if every non-empty open set $\forall G \subset X$ are represented as union of U_α that $G = \bigcup \left\{U_\alpha, \alpha \in A' \subset A\right\}$ [1] .
Let's define local base

Definition 2. Let p be an arbitrary point in a topological space X . A family β_p of open sets containing p is called a *local base* at p if for each open set G containing p , $\exists G_p \in \beta_p$ with the property $p \in G_p \subset G$ [2].

Any base β has the following properties:

(B1) For any $U_1, U_2 \in \beta$ and every point $x \in U_1 \bigcap U_2 \in \beta$ there exists a $U \in \beta$ such that $x \in U \subset U_1 \bigcap U_2$.

(B2) For every $x \in X$ there exists a $U \in \beta$ such that $x \in U$.

Let X and Y arbitrary topologic spaces; for$A \subset X$ and $B \subset Y$ define $M(A,B) = \left\{f \in Y^X : f(A) \subset B\right\}$.

Denote by $\mathcal{F}$ the family of all finite subsets of X and let τ be the topology of Y. The family β of all sets $\bigcap_{i=1}^{k} M(A_i, U_i)$, where $A_i \in \mathcal{F}$ and $U_i \in \tau$ for $i = 1, 2, ..., k$, generates-according to Proposition of bases a topology is called the *topology of pointwise convergence* on Y^X. The family β is a base for the space Y^X witht the topology of pointwise convergence.

Definition 3. The compact-open topology on Y^X is the toplogy generated by the base consisting of all sets $\bigcap_{i=1}^{k} M(C_i, U_i)$, where C_i is a compact subset of X and U_i is an open subset of Y for $i = 1, 2, 3, ..., k$.

Let's solve example.

X and Y be real line and f continuous mapping from R to R that $X = Y = R$ and $f : R \to R$.

For $M(C,U) = \{f \in R^R : f(C) \subset U\}$ compact-open topology on R^R we check follows:
1. What is weight
2. What is network weight
3. What is π-weight

4. What is π network weight of topological space ?

Theorem . If the weight of both X and Y is not larger than $m\aleph_0$ and X is a locally compact space, then the weight of the space Y^X with the compact-open topology is not larger than m.

Proof. Let β be a base for X such that $|\beta| \leq m$, finite unions of members of β belong to β and $[V]$ is compact for every $V \in \beta$; let $\mathcal{D}$ be base for Y such that $|\mathcal{D}| \leq m$ and finite unions of members of $\mathcal{D}$ belong to $\mathcal{D}$. The family $\mathcal{E}$ consisting of all sets $M([V];W)$, where V $\in \beta$ and $W \in \mathcal{D}$ has cardinality $\leq m$, so that to complete the proof it suffices to show that $\mathcal{E}$ is a subbase for the space R^R. Indeed for every $f \in R^R$, a compact subset of C of X and an open subset U of Ysuch that $f \in M(C;U)$, there exist a V $\in \beta$ satisfying $C \subset V \subset [V] \subset f^{-1}(U)$ and a $W \in \mathcal{D}$ satisfying $f([V]) \subset W \subset U$. Therefore, we have $f \in M([V];W) \subset M(C;U)$ and $M([V];W) \in \mathcal{E}$

We now introduce the concept of a networks:

A family $\mathcal{N}$ of subsets of a topological space X is a *network* for X if for every point $x \in X$ and any neighbourhood Ox there exist an $M \in \mathcal{N}$ such that that $x \in M \subset Ox$. Clearly, any base for X is a network for topological space X: it is a network of a special kind, namely, all members of which are open. The family of all one-point subsets of a space is another example of a network. The network weight of a space X is defined as the smallest cardinal number of the form $|\mathcal{N}|$, where $\mathcal{N}$ is a network for X; this cardinal number of the is denoted by $nw(X)$. Clearly for every topological space X we have $nw(X) \leq w(X)$ and $nw(R) \leq |X|$.

Let us note that if there exists a network $\mathcal{N}$for X such $|\mathcal{N}| \leq m$, then X has a dense subset of cardinality $\leq m$ so that for every topological space X we have $d(X) \leq nw(X)$. In my example X and Y be real line. Since $w(R) = \aleph_0$, $nw(R) \leq w(R)$ and $nw(R^R) \leq nw(R)$, follows that $nw(R^R) = \aleph_0$.

Let's introduce the concept of a $\pi-$base:

Definition 4. If $\beta \subset \tau(X)\backslash\{\emptyset\}$ is called to be a $\pi-$base of X is for every non-empty open set G there is a $U_\alpha \in \beta$ with $U_\alpha \subset G$. [4]

$\pi(X) = \min\{|\beta| : \beta \text{ be a } \pi-\text{ base of } X\}$

$\pi(X)$ is called the $\pi-$weight of X.

B(x)= $\{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in N\}$ base of . $x \in X$ such that Ox= $U_{\frac{1}{n}}(x)$. there exist $n_0 \in N$ such that $n < n_0$,then $U_{\frac{1}{n_0}}(x) \subset G$. Let's define $\pi-$ weight of X. Since any base for X is $\pi-$ base for X, then $\pi(R) \leq w(R)$. Since $w(R) = \aleph_0$ and $\pi(R) \leq w(R)$, then $\pi(R) = \aleph_0$. For every topological space X and Y real line $\pi(R^R) \leq \pi(R)$ is satisfied. So that $\pi(R^R) = \aleph_0$.

We now introduce $\pi-$ network:

Definition 5. Let's X be arbitrary topological space and $\mathcal{M} = \{M_\alpha, \alpha \in A\}$ family of all subsets of X topological space. $\mathcal{M}$ family is $\pi-$ network , if for any $U \subset X$ open sets there exist $M_\alpha \in \mathcal{M}$ such that. $M_\alpha \subset U$

$n\pi(M) = \min\{|\mathcal{M}| : \mathcal{M} \text{ be a } \pi-\text{ network of } X\}$

$n\pi(M)$ is called the $\pi-$network weight of X.

Clearly, any network for X is a $\pi-$network for topological space X. Since $\mathcal{N}$ family is network for X topologic space there exist $M \in \mathcal{N}$ set such that $x \in M \subset Ox$.

For every $U \in R$ open sets there exist $M_\alpha \in \mathcal{M}$ such that $M_\alpha \subset U$. We define M_α. Let's choose an arbitrary neighbourhood U of x such that U= $U_{\frac{1}{n}}(x)$. There exist

$M_\alpha \in \mathcal{M}$ then $M_\alpha \subset U$. It is clear that any network for X is $\pi-$ network for X, then $n\pi(X) \leq nw(X)$. Since $nw(R) = \aleph_0$ and $n\pi(R) \leq nw(R)$, then $n\pi(R) = \aleph_0$. For every topological space X and Y real line $n\pi(R^R) \leq n\pi(R)$ is satisfied. So that $n\pi(R^R) = \aleph_0$.

References

1. R.B. Beshimov. Noincrease of density and weak density under weakly normal functors// Mathematical notes,(2008) 84.493-497
2. H. Lubica and D. R. Ljuisa, Kocinac., Uniform boundedness in function space // Topology and its Applications (2018) 241,242-251
3. Ryszard Engilking General topology Berlin 1989

The minitightness of space of the permutation degree

Beshimov R.B.[1]**, Zhuraev R.M.**[2]

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
rbeshimov@mail.ru; rmjurayev@mail.ru

It is known that a permutation group is the group of all permutations, that is one-to-one mappings $X \to X$. A permutation group of a set X is usually denoted by $S\big(X\big)$. Especially, if $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, then $S\big(X\big)$ is denoted by S_n. Let G be a subgroup of the permutation group S_n (groups of all permutations of n elements) and let X be a compact. The group G acts on the n-th power of the space X as permutation of coordinates. The set of all orbits of this action with quotient topology we denote by $SP^n_G X$. The space $SP^n_G X$ is called G-permutation degree of the space X. In particular, if $G = S_n$ then $SP^n_G X = SP^n X$ [1].

Definition 1. [2]. Let X and Y be topological spaces. A function $f : X \to Y$ is said to be strictly τ-continuous if for every subspace A of X such that $|A| \leq \tau$, the restriction of f to A coincides with the restriction to A of some continuous function $g : X \to Y$.

In [2] A.V.Arhangelskii introduced cardinal invariant so called the minimal tightness of a topological space as follows:

Definition 2. [2]. The minitightness of a space X is

$$t_m(X) = \min\{\tau : \ \tau \text{ is an infinite cardinal and every strictly}$$

$$\tau\text{-continuous real-valued function on } X \text{ is continuous}\}$$

Recall that a subset A of a topological space X is called τ-closed [3] if for some $B \subset A$, $|B| \leq \tau$ we have $[B] \subset A$. τ -closer of the set A is defined as $[A]_\tau = \bigcup \big\{[B] : \ B \subset A, \, |B| \leq \tau\big\}$.

A space X is called τ-bounded, if the closure in X of every subset of cardinality at most τ is compact [3].

Theorem 1. τ-bounded subspace of Hausdorff space is τ-closed.

Theorem 2. τ-closed subset of τ-bounded space is also τ-bounded.

Theorem 3. A topological space X is τ-bounded if and only if $SP^n X$ is τ-bounded, where n is a natural number.

Theorem 4. For any infinite topological space X we have $t_m(X) = t_m(SP^n X)$.

References

1. V.V.Fedorchuk, Covariant functors in the category of compacta absolute retracts and Q manifolds // UMN. 1981. Issue 36, Vol. 3. pp. 177–195.
2. A.V.Arhangelskii, Functional tightness, Q-spaces and τ-embeddings // Comment. Math. Univ. Carol. 1983, 24 (1) pp. 105–119.
3. O. Okunev, The minitightness of products // Topology and its applications 2016. Issue 208, pp. 10–16.

The population dynamics of ecological processes in river networks

Boborahimova M.I.
Romanovskiy Institute of Matematics, Tashkent , Uzbekistan.
e-mail: kamina9314@mail.ru;

The organisms living in a river systems a exposed to incorrect currents in the downstream direction. One of the most pressing issues today is how to manage the flow direction without harming the flow ecology, how to save the organisms living in the flow from being washed away and lost. Various researches on this issue are currently being carried out by the world's leading biological, ecological and mathematical scientists. In [1,2] studies, models of reaction-diffusion equations, based on the theory of metric graphs, were used to study the topological structures of river networks, the problem of survival and extinction of species.

We use these equation to model the population growth and spread of a new species in some simple river networks, hoping to gain a fuller understanding of the effect of the river network structure on the population dynamics. Let $D_1 = \{(x,t) : -l \le x \le 0, 0 \le t \le T\}$ denote the lower part of the river, and $D_2 = \{(x,t) : 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ denote the upper part of the river.

$$d_1(u)u_t - u_{xx} - c_1u_x = u(a_1 - b_1u) \quad (t,x) \in D_1, \tag{1}$$

$$d_2(v)v_t - v_{xx} - c_2v_x = v(a_2 - b_2v) \quad (t,x) \in D_1, \tag{2}$$

$$d_3(w)w_t - w_{xx} - c_3w_x = w(a_3 - b_3w) \quad (t,x) \in D_1, \tag{3}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad -l \le x \le 0, \tag{4}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad -l \le x \le 0, \tag{5}$$

$$w(0,x) = w_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{6}$$

$$u(t,-l) = v(t,-l) = w(t,l) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$u(t,0) = v(t,0) = w(t,0), \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$k_1u_x(t,0) + k_2v_x(t,0) = k_3w_x(t,0), \quad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

where u, v, w is the population density in the river, $d_1(u), d_2(v), d_3(w)$ is the positive definite functions , a_i, b_i, c_i, k_i are positive constants,$i = 1, 2, 3$.

We first, consider two-sided estimates are established for $u(t,x), v(t,x), w(t,x)$, and then estimates for the higher derivatives $\mid u, v, w \mid_{1+\alpha}$, $\mid u, v, w \mid_{2+\alpha}$. [3, 4].

References

1.Yihong Du,Bendong Lou, Rui Peng, Maolin Zhou.The Fisher -KPP over simple graphs:varied persistence states in river networks arXiv:1809.06961v1[math.AP] 18 sep 2018
2. J. von Below, Classical solvability of linear parabolic equations on networks, Journal of Differential Equations 72(1988), 316-337
3. Kruzhkov S. N. Nonlinear parabolic equations with two independent variables. Tr. Mosk. Mat., 1967, 16,-pp. 329-346.
4. Takhirov J.O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in biology // Indian J.Pure Appl.Math., 2019. 50(1), -pp. 95-112.

On estimation of distribution function under right random censoring

Bozorov S. B.[1]
Gulistan State University, Gulistan, Uzbekistan,
Suxrobbek_8912@mail.ru

Introduction. Censored data occur in survival analysis, bio-medical trials, industrial experiments. There are several schemas of censoring (from the right, left, both sides, mixed with competing risks and others). However, in statistical literature right random censoring is a very spreading, in so far as it is easy described from the methodological point of view. Here we also consider this kind of censorship in order to comparing our results with others. Let $X_1, X_2, ...$ and $Y_1, Y_2, ...$ be two independent sequences of independent and identically distributed (i.i.d.) random variables (r.v.-s) with common unknown continous distribution functions (d.f.-s) F and G, respectively. Let the X_j be censored on the right by Y_j, so that the observations available for us at the $n-$th stage consist of the sample $C^{(n)} = \{(Z_j, \delta_j), 1 \leq j \leq n\}$, where $Z_j = \min(X_j, Y_j)$ and $\delta_j = I(X_j \leq Y_j)$ with $I(A)$ meaning the indicator of the event A. The main problem is consist of nonparametrical estimating of d.f. F with nuisance d.f. G based on censored sample $C^{(n)}$. In [1] we proposed following estimator of $F(t)$:

$$F_n^{PR}(t) = 1 - (1 - H_n(t))^{R_n^p(t)}. \tag{1}$$

where $R_n^p(t) = (\Lambda_n(t))^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{t} p_n(u)\, d\Lambda_n(u), \Lambda_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{I(z_j \leq t)}{1 - H_n(z_j) + \frac{1}{n}}, \; H_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} I(Z_j \leq t)$ and

$$p_n(t) = \left[\frac{1}{nh(n)}\sum_{j=1}^{n} k\left(\frac{t - Z_j}{h(n)}\right)\right]^{-1} \cdot \left[\frac{1}{nh(n)}\sum_{j=1}^{n} \delta_j k\left(\frac{t - Z_j}{h(n)}\right)\right],$$

where the kernel $k(\cdot)$ is a given probability density function and $\{h = h(n), n1\}$ is a bandwith sequence. In [1] the strong uniform consistency and asymptotic normality of estimator $F_n^{PR}(t)$ are established. In order to formulate these results we need some definitions and conditions. Let's denote

$$r(n) = h^2(n) + (nh(n))^{-1/2}(\log n)^{1/2}.$$

Consider following conditions.

(C1) $(F,G) \in K = \{(F,G) : N_F \bigcap N_G \neq \emptyset,\ P(X_j \le Y_j) \in (0,1)\}$, where $N_F = \{t : 0 < F(t) < 1\}$ and $N_G = \{t :\ 0 < G(t) < 1\}$;

(C2) Numbers α, β and γ are such that: $\min\{H(\alpha),\, 1 - H(\beta)\}\,\gamma(0,1)$, $\alpha > \tau_H = \sup\{t :\ H(t) = 0\}$ and $\beta < T_H = \inf\{t : H(t) = 1\}$, $[\alpha, \beta] \neq \emptyset$;

(C3) For all $n1 :\ P(0 < \nu_n < n) = 1$;

(C4) k is a symmetric, continuous, twice continuously differentiable and of bounded variation density function with compact support;

(C5)Density $q(t) = H'(t)$ exists, is four times continuously differentiable at $t \in [\alpha, \beta]$ and $\sup\limits_{\alpha \le t \le \beta} q(t) > 0$;

(C6)$p(t)$ is four times continuously differentiable at $t \in [\alpha, \beta]$;

(C7)$n^{1-\varepsilon} \cdot h(n) \to \infty$ for some $\varepsilon > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} h^{\lambda}(n) < \infty$ for some $\lambda > 0$ and $h^2(n) = o\left((nh(n))^{-1/2} \cdot \left(\log\left(\frac{1}{h(n)}\right)\right)^{1/2}\right)$;

Consider random functions

$$\varphi_1(t; z) = \frac{p(t)}{1 - H(t)}\left(I(Z \le t) - H(t)\right), \varphi_2(t; z) = \int_{-\infty}^{t} \frac{I(Z \le u) - H(u)}{1 - H(u)} p'(u)\, du,$$

$$\varphi_3(t; z, \delta) = \int_{-\infty}^{t} k\left(\frac{u - Z}{h}\right) \cdot \frac{(\delta - p(u))}{1 - H(u)} du.$$

In the next theorem, the difference ${F_n}^{PR}(t) - F(t)$ can be approximated by summ of i.i.d. random functions on t with the rate for the remainder term tending to zero at $n \to \infty$ almost surely.

Theorem 1. Under the conditions (C1) – (C7),

$$ {F_n}^{PR}(t) - F(t) = (1 - F(t))\, \Psi_n(t) + \mathrm{Q}_n(t),$$

where $\Psi_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi_1(t; Z_i) - \varphi_2(t; Z_i) + \varphi_3(t; Z_i, \delta_i)\right]$, with

$$\sup_{\alpha \le t \le \beta} |\mathrm{Q}_n(t)| \overset{a.s.}{=} \mathrm{O}\left(\max\{(r(n)\log n)^2, \frac{\log n}{n}\}\right).$$

Theorem 2. Under assumptions of theorem 1, at $n \to \infty$

$$\sup_{\alpha \le t \le \beta} \left|F_n^{PR}(t) - F(t)\right| \overset{a.s.}{=} \mathrm{O}\left(\max\{r(n)\log n, (\frac{\log n}{n})^{1/2}\}\right).$$

Theorem 3. Under the assumptions of theorem 1 and if

(C8) $nh^2(n)(\log n)^{-6} \to \infty$, $nh^8(n)(\log n)^4 \to 0$ and $h^3(n)(\log n)^5 \to 0$ as $n \to \infty$for any $t \in [\alpha, \beta]$:

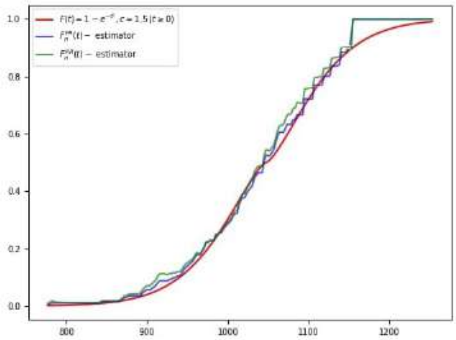
1. If $nh^4(n) \to 0$, then $n^{1/2}\left(F_n^{PR}(t) - F(t)\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2(t)\right)$,

2. If $nh^4(n) \to C^4$, then $n^{1/2}\left(F_n^{PR}(t) - F(t)\right) \xrightarrow{d} N\left(b(t), \sigma^2(t)\right)$,

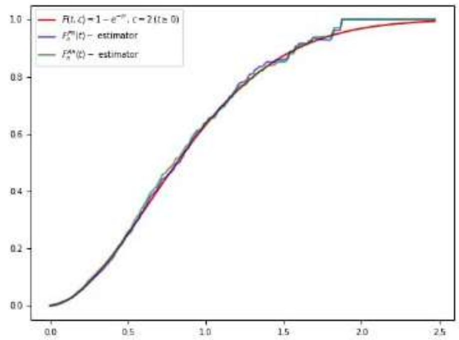
where $b(t) = C^2(1 - F(t))\,\alpha(t)\,d(k)$, $d(k) = \int u^2 k^2(u)\, du$, $\sigma^2(t) = (1 - F(t))^2\, \gamma(t)$,

$\alpha(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\left(\frac{1}{2}p''(u)q(u) + p'(u)q'(u)\right)du}{1 - H(u)}$, $\gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} \mu(u)\, du$, $\mu(t) = \frac{p(t)q(t)}{(1 - H(t))^2}$.

At the end we present some pictures of d.f. F, estimator ${F_n}^{RR}$ and ${F_n}^{PR}$.



Natural sample of volume n=97



Modeled sample of volume n=300,\\ F-Weibull, G-exp (\lambda=1)

REFERENCES

1. Abdushukurov A.A. , Bozorov S.B. , Nurmukhamedova N.S. Noparametric Estimation of Distribution Function Under Right Random Censoring Based on Presmoothed Relative - Risk Function // ISSN 1995-0802, Lobachevskii journal of mathematics, 2021, Vol. 42, No. 2, 257-268. Pleiades Publishing, Ltd., 2021.

-Automorphisms of AW-algebras

Chepukhalin S.A.
National University of Uzbekistan
sergey.rights@gmail.com;

Let $B(H)$ denote the algebra of all bounded linear operators on a complex Hilbert space H. W^*-*algebra* is a weakly closed complex *-algebra of operators on a Hilbert space H containing the identity operator $\mathbb{1}$. The set M' of all elements from $B(H)$ commuting with each element from M is called the *commutant* of the algebra M. The *center* $Z(M)$ of a W^*-algebra M is the set of elements of M, commuting with each element from M. It is easy to see that $Z(M) = M \bigcap M'$. A W^*-algebra M is called *factor*, if $Z(M)$ consists of the complex multiples of $\mathbb{1}$, i.e if $Z(M) = \{\lambda\mathbb{1}, \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Let e, f, h be projections from M. We say that e is equivalent to f, and write $e \sim f$, if $e = w^*w$, $f = ww^*$ for some partial isometry w from M. A projection e is called: *finite*, if $e \sim f \leq e$ implies $f = e$; *infinite* - otherwise; *purely infinite*, if e doesn't have any nonzero finite subprojection; *abelian*, if the algebra eMe is an abelian W^*-algebra. A W^*-algebra M is called *finite, infinite, purely infinite*, if $\mathbb{1}$ is a finite, infinite, purely infinite respectively; M is *σ-finite*, if any family of pairwise orthogonal projections from M is at most countable; *semifinite*, if each projection in M contains a nonzero finite subprojection; *properly infinite*, if every nonzero projection from $Z(M)$ is infinite; *discrete*, or of *type* I, if it contains a faithful abelian projection (i.e. an abelian projection with the central support $\mathbb{1}$); *continuous*, if there is no abelian projection in M except zero; M is of *type* II, if M is semifinite and continuous; *type* $\mathrm{I_{fin}}$ (respectively I_∞), if M is of type I and finite (respectively properly infinite); *type* II_1 (respectively *type* II_∞), if M is of type II and finite (respectively properly infinite); *type* III, if M is purely infinite. It is known that any W^*-algebra has a unique decomposition along its center into the direct sum of W^*-algebras of the $\mathrm{I_{fin}}$, I_∞, II_1, II_∞ and III types (see [1]).

A linear mapping $\alpha : M \to M$ is called a **-automorphism* if $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ and $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$, for all $x, y \in M$. A *-automorphism α is called *inner* if there exists a unitary u in M, such that $\alpha(x) = Adu(x) = uxu^*$, for all $x \in M$. We shall denote by $Aut(M)$ the group of all *-automorphisms and by $Int(M)$ the group of all inner *-automorphisms of M. Two *-automorphisms α and β are said to be *conjugate*, if $\alpha = \theta \cdot \beta \cdot \theta^{-1}$ for some *-automorphism θ.

By a (complex) C*-algebra we mean a complex Banach *-algebra A such that the relation $\|a^*a\| = \|a\|^2$ holds for any $a \in A$.

Let A be a complex *-algebra and let S be a nonempty subset of A. Put

$$R(S) = \{x \in A|\ sx = 0 \text{ for all } s \in S\}$$

and call $R(S)$ the *right-annihilator* of S. Similarly

$$L(S) = \{x \in A|\ xs = 0 \text{ for all } s \in S\}$$

denotes the *left-annihilator* of S.

Definition. A *-algebra A is called a *Baer *-algebra* if for any nonempty $S \subset A$, $R(S) = gA$ for an appropriate projection g.

Since $L(S) = (R(S^*))^* = (hA)^* = Ah$ the definition is symmetric and can be given in terms of the left-annihilator and a suitable projection h. Here $S^* = \{s^*|\ s \in S\}$.

Definition. A (complex) C*-algebra A which is a Baer *-algebra is called a (complex) *AW*-algebra*.

Every W*-algebra is, of course, an AW*-algebra, however, the converse is not true.

Now, we will given auxiliary result from [2].

Theorem 1. ([2], 4.6.12) Every AW*-factor of type I is a W*-factor which is isomorphic to B(H).

Since any *-automorphism of $B(H)$ is inner, then we obtain the main result of the article

Theorem 2. Any *-automorphism of a (complex) AW*-factor of type I is inner.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A., Usmanov Sh.M. Jordan, Real and Lie structures in operator algebras. Kluwer Academic Publishers, MAIA. 1997, Vol. 418, 235 p.

2. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A. Real W*-algebras, Actions of groups and Index theory for real factors. VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, Germany, Bonn. ISBN 978-3-639-29066-0. 2010, p.138.

Equivalence of curves with respect to the action of the Pseudo-Galilean group

Chilin V. I.[1], **Muminov K. K.**[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
[1]vladimirchil@gmail.com; [2]m.muminov@rambler.ru

Let $\mathbb{R}^n$ be the n-dimension linear space over the field $\mathbb{R}$ of real numbers, and let $GL(n,\mathbb{R})$ be the group of all invertible linear transformations in $\mathbb{R}^n$. Let $\vec{x}=\{x_j\}_{j=1}^n\in\mathbb{R}^n$, $g=(g_{ij})_{ij=1}^n\in GL(n,\mathbb{R})$, $x_j,g_{ij}\in\mathbb{R}$, $i,j=1,\ldots,n$. The action g in $\mathbb{R}^n$ is the usual multiplication of $n\times n$-matrix g on a column-vector $\vec{x}$ (notation: $g\vec{x}$).

Let $p\in\{1,\ldots,n-1\}$. Consider in $\mathbb{R}^n$ the bilinear form $[x,y]=x_1y_1+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_ny_n$. The pseudo-orthogonal subgroup in $GL(n,\mathbb{R})$ is defined by the equalities $O(n,p)=\{g\in GL(n,R):[g\vec{x},g\vec{y}]=[\vec{x},\vec{y}]\ \ \forall\ \ \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n\}$.

Let now fix $p\in\{2,\ldots,n-1\}$ and define in $\mathbb{R}^n$ the pseudo-Galilean metric $d_p(\vec{x},\vec{y})$ as follows: $d_p(\vec{x},\vec{y})=|x_1-y_1|$, if $x_1\neq y_1$, and $d_p^2(\vec{x},\vec{y})=\sum\limits_{i=2}^{p}(x_i-y_i)^2-\sum\limits_{i=p+1}^{n}(x_i-y_i)^2$, if $x_1=y_1$. The pair $(\mathbb{R}^n,d_p)$ is called the pseudo-Galilean space ([4], Ch. 5, section 4) and is denoted by ${}^p\Gamma_n$.

Let $\vec{e}_i=(0,\ldots,0,1,0\ldots,0)$ be the standard basis in $\mathbb{R}^n$, where the unity stands on the i-th position, $i=1,\ldots,n$. Put $U_n=\{\alpha\vec{e}_1:\alpha\in\mathbb{R}\}$, $V_n=\left\{\sum\limits_{i=2}^{n}\alpha_i\vec{e}_i:\ \alpha_i\in\mathbb{R},\ i=2,\ldots,n\right\}$. It is clear that $G_n=\{g\in GL(n,\mathbb{R}):\ gU_n=U_n,\ gV_n=V_n\}$ is a subgroup in $GL(n,\mathbb{R})$.

Let $\Gamma O(n,p)=\{g=(g_{ij})_{i,j}^n\in GL(n,\mathbb{R}):\ g_{11}=\pm1,\ g_{i1}=0,\ i=2,\ldots,n,\ gV_n=V_n,\ (g_{ij})_{i,j=2}^n\in O(n-1,p)\}$. It is know that $\Gamma O(n,p)$ is a subgroup in $GL(n,\mathbb{R})$ (see [3]) which is called the group of pseudo-Galilean transformations of the space ${}^p\Gamma_n$.

Denote by I the interval $(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ (the cases $a=-\infty$ or $b=+\infty$ are possible). An I-path is a vector function $\vec{x}(t)=\{x_j(t)\}_{j=1}^n\in\mathbb{R}^n$, $t\in I$, such that the coordinate functions $x_j(t)$, $j=1,\ldots,n$, are C^∞-differentiable.

Let G be a subgroup in $GL(n,\mathbb{R})$. I-paths $\vec{x}(t)$ and $\vec{y}(t)$ are called *G-equivalent* if there exists $g\in G$ such that $\vec{y}(t)=g\vec{x}(t)$ for all $t\in I$.

The r-th derivative of the I-path $\vec{x}(t)=\{x_j(t)\}_{j=1}^n$ is the vector-function $\vec{x}^{(r)}(t)=\{x_j^{(r)}(t)\}_{j=1}^n$, where $x_j^{(r)}(t)$ is the r-th derivative of the coordinate function $x_j(t)$, $j=1,\ldots,n$, $r=1,2,\ldots$.

We say that the I-path $\vec{x}(t)=\{x_j(t)\}_{j=1}^n$ is a *$\Gamma O(n,p)$-regular* if $\det M_{n-1}(\vec{x}(t))\neq0$ for all $t\in I$, where $M_{n-1}(\vec{x}(t))=\left(x_j^{(i)}(t)\right)_{i=0,1,\ldots,n-2,\ j=2,\ldots,n}$, $x_j^{(0)}(t)=x_j(t)$, $j=2,\ldots,n$.

It is know the following criterion of $\Gamma O(n,p)$-equivalence for $\Gamma O(n,p)$-regular I-paths (see ([3], Theorem 9)): $\Gamma O(n,p)$-regular I-paths $\vec{x}(t)$ and $\vec{y}(t)$ are $\Gamma O(n,p)$-equivalent if and only if equality $y_1(t)=x_1(t)$ and the equalities $\sum\limits_{i=2}^{p}(x_i^{(k)}(t))^2-\sum\limits_{i=p+1}^{n}(x_i^{(k)}(t))^2=\sum\limits_{i=2}^{p}(y_i^{(k)}(t))^2-\sum\limits_{i=p+1}^{n}(y_i^{(k)}(t))^2$ hold for all $k=0,1,\ldots,n-2$ and $t\in I$.

Two paths $\vec{x}:I_1\to\mathbb{R}^n$ and $\vec{y}:I_2\to\mathbb{R}^n$ are called D-equivalent, if there exists C^∞-differentiable function φ from I_2 onto I_1, such that $\varphi'(t)>0$ and $\vec{y}(t)=\vec{x}(\varphi(t))$ for all $t\in I_2$. It is clear that D-equivalence of paths is an equivalence relation on the set of all paths. A class $\gamma = \gamma(\vec{x})$ of all pathes that are D-equivalent to the path $\vec{x}(t)$ is called an oriented curve generated by this path. In this case, a path $\vec{y}$ from class γ is called a parametrization of γ.

Bellow we consider the Galilean I-paths $\vec{x} = \big\{\{x_j(t)\}_{j=1}^n : t \in I\big\}$, i.e. the I-paths that $x_1^{(1)}(t) \neq 0$ for all $t \in I$. We sat that an oriented curve γ is a Galilean Γ_n-regular curve, if $\gamma = \gamma(\vec{x})$, where $\vec{x}(t)$ is a Galilean Γ_n-regular I-path.

Let G be a subgroup in the group $GL(n, \mathbb{R})$, $g \in G$, let $\vec{x}(t)$ be an I-path, $\gamma = \gamma(\vec{x}(t))$, and let $g\gamma = \gamma(g(\vec{x}(t))$. The curves γ_1 and γ_2 are called G - equivalent, if there exists $g \in G$ such that $\gamma_2 = g\gamma_1$. It is clear, that G-equivalence of paths $\vec{x}(t)$ and $\vec{y}(t)$ implies G-equivalence of curves $\gamma(\vec{x})$ and $\gamma(\vec{y})$. The converse is generally not true.

Let $\vec{x}(t)$ be a Galilean I-path, and let $l_{\vec{x}}(c,d) = \int\limits_c^d |x_1^{(1)}(t)|dt \geq 0$, $[c,d] \subset I$. If $I = (a,b)$ we set $l_{\vec{x}}(a,d) = \lim_{c\to a+0} l_{\vec{x}}(c,d)$ and $l_{\vec{x}}(c,b) = \lim_{d\to b-0} l_{\vec{x}}(c,d)$. We say that an I-path $\vec{x}(t)$ has the type $(L1)$, if $l_{\vec{x}}(a,d) < \infty$ and $l_{\vec{x}}(c,b) < \infty$; $(L2)$, if $l_{\vec{x}}(a,d) < \infty$ and $l_{\vec{x}}(c,b) = +\infty$; $(L3)$, if $l_{\vec{x}}(a,d) = +\infty$ and $l_{\vec{x}}(c,b) < \infty$; $(L4)$, if $l_{\vec{x}}(a,d) = +\infty$ and $l_{\vec{x}}(c,b) = +\infty$.

Using types $(L1) - (L4)$ we define the interval $I(\vec{x}) = \big(A(\vec{x}),\ B(\vec{x})\big) \subset \mathbb{R}$ as in papers [1], [2]. Consider now a special parametrization for Galilean I-path $\vec{x}(t)$. Define a function $p_{\vec{x}}$ from $I = (a,b)$ onto $I(\vec{x})$, using the following rule [1], [2]: If an I-path $\vec{x}(t)$ has (i) a type $(L1)$ or $(L2)$, then $p_{\vec{x}}(t) = l_{\vec{x}}(a,t)$; (ii) a type $(L3)$, then $p_{\vec{x}}(t) = -l_{\vec{x}}(t,b)$; (iii) a type $(L4)$, then, by choosing a fixed point $a_I \in I$, $p_{\vec{x}}(t) = l_{\vec{x}}(a_I,t)$.

The function $p_{\vec{x}}(t)$ is C^∞-differentiable and $p'_{\vec{x}}(t) > 0$ for each $t \in I$. In particular, there exists an inverse function $q_{\vec{x}}(s)$ from $I(\vec{x})$ onto I, in addition, $q_{\vec{x}}$ is a C^∞-differentiable function and $q'_{\vec{x}}(s) > 0$ for all $s \in I(\vec{x})$. Therefore, $\vec{u}(s) = \vec{x}\big(q_{\vec{x}}(s)\big)$ is a Galilean $I(\vec{x})$-path and $\gamma(\vec{x}) = \gamma(\vec{u})$.

The following Theorem follows gives an equivalence criterion of curves with respect to the action of group $\Gamma O(n,p)$.

Theorem. Let γ and β be a curves, generated by Γ_n-regular Galileo I-path $\vec{x}$ and Γ_n-regular Galileo J-path $\vec{y}$, let $\vec{u}(s) = \vec{x}\big(q_{\vec{x}}(s)\big)$, $s \in I(\vec{x})$, $\vec{v}(r) = \vec{y}\big(q_{\vec{y}}(r)\big)$, $r \in I(\vec{y})$. Then the curves γ and β are $\Gamma O(n,p)$-equivalent if and only if $I(\vec{x}) = I(\vec{y})$, $v_1(t) = \pm u_1(t)$ and $\sum\limits_{i=2}^{p}(u_i^{(k)}(t))^2 - \sum\limits_{i=p+1}^{n}(u_i^{(k)}(t))^2 = \sum\limits_{i=2}^{p}(v_i^{(k)}(t))^2 - \sum\limits_{i=p+1}^{n}(v_i^{(k)}(t))^2$ hold for all $k = 0, 1, \ldots, n-2$ and $t \in I(\vec{x})$.

REFERENCES

1. Aripov R.G.,Khadzhiev Dj. The complete system of global differential and integral invariants of a curve in Euclidean geometry // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. 2007. №7. P. 1–14.

2. Chilin V.I., MuminovK.K. Complete system of differential invariants of a curve in pseudo-Euclidean space // Dynamical Systems. 2013. V. 3 (31), №(1-2). P. 135–149. (Russian).

3. Muminov K.K., Chilin V.I. A Transcendence Basis in the Differential Field of Invariants of Pseudo-Galilean Group // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika. 2019. №3. P. 19–31.

4. Rosenfeld B.A. Non-Euclidean spaces. Moscow.: Nauka, 1969. (Russian).

Two-electron systems in the impurity Hubbard model. Singlete state

Chilin V. I.[1], **Tashpulatov S. M.**[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
vladimirchil@gmail.com;
Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republik of Uzbekistan, Tashkent,
sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru

In the 1963, the paper Hubbard J. [1], where a simple model of a metal was proposed that has become a fundamental model in the theory of strongly correlated electron systems. The Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals. The spectrum and wave functions of the system of two electrons in a crystal described by the Hubbard Hamiltonian were studied in [2]. It is known that two-electron systems can be in two states, triplet and singlet [2]. It was proved in [2] that the spectrum of the system Hamiltonian H^t in the triplet state is purely continuous and coincides with a segment $[m, M]$, and the operator H^s of the system in the singlet state, in addition to the continuous spectrum $[m, M]$, has a unique antibound state for some values of the quasimomentum. Here, we consider the energy operator of two-electron systems in the Impurity Hubbard model and describe the structure of the essential and discrete spectra of the system for singlet state. The Hamiltonian of the chosen model has the form $H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0 - A)\sum_\gamma a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma}$
$+(B_0 - B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0 - U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}$.
Here $A\,(A_0)$ is the electron energy at a regular (impurity) lattice site, $B\,(B_0)$ is the transfer integral between (between electron and impurities) neighboring sites (we assume that $B > 0\,(B_0 > 0)$ for convenience), and the summation over τ ranges the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity), γ is the spin index, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$.

The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fo'ck space $\mathcal{H}_{as}$. Denote by φ_0 the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$. The singlet state corresponds two-electron bound states (or antibound states) to the basis functions: $s_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{a^+_{m\uparrow}a^+_{n\downarrow} - a^+_{m\downarrow}a^+_{n\uparrow}\}\varphi_0$.

The subspace $\widetilde{\mathcal{H}}^s_2$, corresponding to the singlet state is the set of all vectors of the form $\psi = \sum_{m,n\in Z^\nu}\widetilde{f}(m,n)s_{m,n}$, $\widetilde{f} \in l^s_2$, where l^s_2 is the subspace of symmetric functions in $l_2((Z^\nu)^2)$. In this case, the Hamiltonian H acts in the symmetric Fock space $\mathcal{H}_s$.

Theorem 1. *The subspace $\mathcal{H}^s_2$ is invariant under the operator H, and the restriction H^s_2 of operator H to the subspace $\mathcal{H}^s_2$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a bounded self-adjoint operator $\overline{H}^s_2$, acting in the space l^s_2. The operator H^s_2 acts on a vector $\psi \in \mathcal{H}^s_2$ as $H^s_2\psi = \sum_{p,q}(\overline{H}^s_2 f)(p,q)s_{p,q}$.*

In the quasimomentum representation, the operator $\overline{H}^s_2$ acts in $L^s_2((T^\nu)^2)$ as
$(\widetilde{H}^s_2\widetilde{f})(\lambda,\mu) = 2A\widetilde{f}(\lambda,\mu) + 2B\sum_{i=1}^\nu[\cos\lambda_i + \cos\mu_i]\widetilde{f}(\lambda,\mu) + U\int_{T^\nu} f(s,\lambda+\mu-s)ds+$
$\varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(s,\mu)ds + \varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(\lambda,t)dt + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^\nu[\cos s_i + \cos\lambda_i]\widetilde{f}(s,\mu)ds+$
$2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^\nu[\cos t_i + \cos\mu_i]\widetilde{f}(\lambda,t)dt + \varepsilon_3\int_{T^\nu}\int_{T^\nu} f(s,t)dsdt$,
where L^s_2 is the subspace of symmetric functions in $L_2((T^\nu)^2)$.

Theorem 2. *Let $\nu = 1$. Then A). If $\varepsilon_2 = -B$, $\varepsilon_1 < -2B$ (respectively, $\varepsilon_2 = -B$, $\varepsilon_1 > 2B$,) then the essential spectrum of the operator $\widetilde{H}^s_2$ consists of the union of two segments*

$\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$, *and the discrete spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists no more than three points* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$, *where* $z = A + \varepsilon_1$.

B). If $\varepsilon_2 = -2B,\ \varepsilon_1 < 0$ *(respectively,* $\varepsilon_2 = -2B,\ \varepsilon_1 > 0$*), then the essential spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists of the union of two segments:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$, *and discrete spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists no more than three points:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$, *where* $z = A - \sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ *(respectively,* $z = A + \sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$*).*

C). If $\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 > 0$ *(respectively,* $\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 < -2B$*), then the essential spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists of the union of two segments:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$, *and discrete spectrum of the operator* $\widetilde{H}_2^s$ *consists of no more than three points:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$, *where* $z = A - \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}}$, *(respectively,* $(z = A + \frac{2BE}{\sqrt{E^2-1}})$*), and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.

D). If $\varepsilon_1 = \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, *(respectively,* $\varepsilon_1 = -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the essential spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists of the union of two segments:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$, *and discrete spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists of no more than three points:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$, *where* $z = A + \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$, *(respectively,* $z = A - \frac{2B(E^2+1)}{E^2-1}$*), and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.

E). If $\varepsilon_2 > 0,\ \varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B,\ \varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the essential spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists of the union of two segments:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$, *and discrete spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists of no more than three points:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$, *where* $z = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, *and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$.

F). If $\varepsilon_2 > 0,\ \varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B,\ \varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the essential spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists of the union of two segments:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z, A+2B+z]$, *and discrete spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists no more than three points:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z, z_3, z_4\}$, *where* $z = A - \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, *and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, *and the real number* $\alpha > 1$.

K). If $\varepsilon_2 > 0,\ -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B,\ -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the the essential spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists of the union of three segments:* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2^s) = [2A-4B, 2A+4B] \cup [A-2B+z_1, A+2B+z_1] \cup [A-2B+z_2, A+2B+z_2]$, *and discrete spectrum of* $\widetilde{H}_2^s$ *consists of no more than five points:* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2^s) = \{2z_1, z_1+z_2, 2z_2, z_3, z_4\}$, *where* $z_1 = A + \frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, $z_2 = A + \frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, *and* $|\alpha| < 1$.

REFERENCES

1. Hubbard J. Electron Correlations in Narrow Energy Band.//Proc. Roy. Soc. A., 1963. V. 276:1365, P. 238–257.

2. Karpenko B.V., Dyakin V.V.,Budrina G.L. Two electrons in the Hubbard Model.// Phys. Met. Metallogr., 1986. V. 61, P. 702–706.

On the description of symmetric Leibniz algebras by model filiform Lie algebras

Choriyeva I.B., Khudoyberdiyev A.Kh.
National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
irodachoriyeva1@gmail.com, khabror@mail.ru;

It is well known that symmetric Leibniz algebras are generalizations of Lie algebras that are close to Lie algebras. Any Lie algebra is a symmetric Leibniz algebra. However,the class of symmetric Leibniz algebras is far more bigger than the class of Lie algebras. S.Benaydi and M.Bordemann gave a natural method for integrating symmetric Leibniz algebras, which are both right and left Leibniz algebras. This method is based on the characterization of simmetric Leibniz algebras given in [1]. Using this method we obtain the description of five dimensional symmetric Leibniz algebras which underlying Lie algebra is isomorphic to five dimensional model filiform Lie algebra.

Definition 1. An algebra $(\mathcal{L}, [-,-])$ over a field F is called Lie algebra if for any $u, v, w \in \mathcal{L}$ the following identities:

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$$

$$[u,u] = 0$$

hold.

Definition 2. 1) An algebra $(\mathcal{L}, \cdot)$ is said to be a left Leibniz algebra, if for each $u \in \mathcal{L}$, the operator of left multiplication $L_u : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ defined as $L_u(v) = u \cdot v$ is derivation. That is,for any $u, v, w \in \mathcal{L}$ we have the following identity

$$u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w) + v \cdot (u \cdot w). \tag{1}$$

2) An algebra $(\mathcal{L}, \cdot)$ is said to be a right Leibniz algebra, if for each $u \in \mathcal{L}$, the operator of right multiplication $R_u : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ defined as $R_u(v) = v \cdot u$ is derivation. That is,for any $u, v, w \in \mathcal{L}$ we have the following identity

$$(v \cdot w) \cdot u = (v \cdot u) \cdot w + v \cdot (w \cdot u). \tag{2}$$

3) If $(\mathcal{L}, \cdot)$ is both a right and a left Leibniz algebra then it is called a symmetric Leibniz algebra.

Let $\mathcal{L}$ be real vector space equipped with a billinear map $\cdot : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. For all $u, v \in \mathcal{L}$, we define [-,-] and $\circ$ as follows

$$[u,v] = \frac{1}{2}(u \cdot v - v \cdot u) \qquad u \circ v = \frac{1}{2}(u \cdot v + v \cdot u). \tag{3}$$

Proposition 1 [2]. Let $(\mathcal{L}, \cdot)$ be an algebra. The following assertions are equivalent:

1. $(\mathcal{L}, \cdot)$ is a symmetric Leibniz algebra.
2. The following conditions hold:
   (a) $(\mathcal{L}, [-,-])$ is a Lie algebra.
   (b) For any $u, v \in \mathcal{L}$, $u \circ v$ belongs to the center of $(\mathcal{L}, [-,-])$.

(c) For any $u, v \in \mathcal{L}$, $([u,v]) \circ w = 0$ and $(u \circ v) \circ w = 0$.

According to this proposition, any symmetric Leibniz algebra is given by a Lie algebra $(\mathcal{L}, [-,-])$ and a billinear symmetric form $\omega : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to Z(\mathcal{L})$ where $Z(\mathcal{L})$ is the center of the Lie algebra, such that for any $u, v, w \in \mathcal{L}$

$$\omega([u,v], w) = \omega(\omega(u,v), w) = 0.$$

Then the product of the symmetric Leibniz algebra is given by

$$u \cdot v = [u,v] + u \circ v.$$

Proposition 2 [2]. Let $(\mathcal{G}, [-,-])$ be a Lie algebra and ω and μ two soutions of (5). Then $(\mathcal{G}, \cdot_\omega)$ is isomorphic to $(\mathcal{G}, \cdot_\mu)$ if and only if there exists an automorphism A of $(\mathcal{G}, [-,-])$ such that $\mu(u,v) = A^{(-1)}\omega(Au, Av)$.

We will now consider the problem of constructing symmetric Leibniz algebras connected by five-dimensional model filiform Lie algebra Lie algebra. Consider the Lie algebra $\mathcal{G}_{5.1}$ with non-washing Lie brackets given by

$$[e_4, e_5] = e_3, \quad [e_3, e_5] = e_2, \quad [e_2, e_5] = e_1.$$

It is known that the center is $Z(\mathcal{G}_{5.1}) = \{e_1\}$. By applying Proposition 1 and by doing a straightforward computations, we get the corresponding symmetric billinear ω satisfying the equation (5)

$$\omega(e_4, e_4) = \alpha e_1, \quad \omega(e_5, e_5) = \beta e_1, \quad \omega(e_4, e_5) = \gamma e_1$$

where $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$.

We use now Proposition 2 to obtain the classification of symmetric Leibniz algebras whose underlying Lie algebra is $\mathcal{G}_{5.1}$. We cosider the group of the automorphisms of $\mathcal{G}_{5.1}$ given by

$$T = \begin{pmatrix} a_{44}(a_{55})^3 & a_{34}(a_{55})^2 & a_{24}a_{55} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{44}(a_{55})^2 & a_{34}a_{55} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{44}a_{55} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{pmatrix}$$

Now we are ready to formulate our main result of the work.

Theorem. Let $\mathcal{L}, \cdot$ be a simmetric Leibniz algebra whose underlying Lie algebra is $\mathcal{G}_{5.1}$. Then L is isomorphic one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} [e_4, e_5] = -[e_5, e_4] = e_3, \quad [e_3, e_5] = -[e_5, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_5] = -[e_5, e_2] = e_1, \\ [e_4, e_5] = e_1 \quad [e_4, e_4] = e_1, \quad [e_5, e_5] = e_1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_2 : [e_4, e_5] = -[e_5, e_4] = e_3, \quad [e_3, e_5] = -[e_5, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_5] = -[e_5, e_2] = e_1, \quad [e_4, e_4] = e_1.$$

$$\mathcal{L}_3 : [e_4, e_5] = -[e_5, e_4] = e_3, \quad [e_3, e_5] = -[e_5, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_5] = -[e_5, e_2] = e_1, \quad [e_5, e_5] = e_1.$$

$$\mathcal{L}_4 : [e_4, e_5] = -[e_5, e_4] = e_3, \quad [e_3, e_5] = -[e_5, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_5] = -[e_5, e_2] = e_1, \quad [e_4, e_5] = e_1.$$

REFERENCES

1. E.Barreiro and S.Benayadi. A New Approach to Leibniz Bialgebras, Algebra and Representation Theory (2016) 19:71-101
2. Hamid Abchir, Fatima-ezzahrae Abid and Mohamed Boucetta. A class of Lie racks associated to symmetric Leibniz algebras. arXiv.2102.00387 (2021)

The behavior of leading eigenvalue of transfer operators associated by circle maps

Dzhalilov A. A.[1], Aliyev A. A.[2]
Turin Polytechnic University in Tashkent, Uzbekistan,
adzhalilov21@gmail.com;
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
aliyev95.uz@mail.ru

Let X_{br} be the set of strictly increasing pairs of functions $(f(x),\ x \in [-1,0],\ g(x),\ x \in [0,\alpha],\ \alpha > 0)$ satisfying the following conditions:

- $f(0) = \alpha,\ g(0) = -1$;
- $f(-1) = g(\alpha)$;
- $f(g(0)) = f(-1) < 0$;
- $f^{(2)}(g(0)) \geq 0$;
- $f(x) \in C^{2+\varepsilon}([-1,0])$, $g(x) \in C^{2+\varepsilon}([0,\alpha])$ for all $\varepsilon > 0$.
- $f'_{+}(0) \neq g'_{-}(0)$.

These conditions allow us to define a circle homeomorphism $G_{f,g}$ on $[-1,\alpha)$ from a pair $(f,g) \in X_{br}$ with break point $x_b = 0$ (and possibly with a second break point $x_b = -1$ if $f'(-1) \neq g'(\alpha)$) as follows

$$G_{f,g}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } \ x \in [-1,0), \\ g(x) & \text{if } \ x \in [0,\alpha). \end{cases}$$

Using the map $l : [-1,\alpha] \to S^1$ with $l(x) = \frac{x+1}{\alpha+1}$ we get a circle homeomorphism $l \circ G_{f,g} \circ l^{-1}$ on $S^1 = \mathbb{R} \mod 1$, which we denote for simplicity also by $G_{f,g}$ whenever its domain of definition is clear. We define the rotation number $\rho(G_{f,g})$ of $G_{f,g}$ by the rotation number of this circle homeomorphism when acting on S^1 (see [1]) . Denote by $X_{br}(\omega)$ the subset of $(f,g) \in X_{br}$ with $\rho(G_{f,g}) = \omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ the golden mean.

Define a renormalization transformation $R_{br} : X_{br}(\omega) \to X_{br}(\omega)$ as follows:

$$R_{br}(f(x), g(x)) = (\tilde{f}(x),\ x \in [-1,0];\ \tilde{g}(x),\ x \in [0,\alpha']),$$

where

$$\tilde{f}(x) = -\alpha^{-1} f(g(-\alpha x)),\ \tilde{g}(x) = -\alpha^{-1} f(-\alpha x),\ \alpha' = -\alpha^{-1} f(-1).$$

Vul et al. in [2] proved, that $R_{br} : X_{br}(\omega) \to X_{br}(\omega)$ has an unique periodic orbit $\{f_i(x, c_i), g_i(x, c_i), i = 1, 2\}$ of period two, that means

$$R_{br}(f_1(x, c_1), g_1(x, c_1)) = (f_2(x, c_2), g_2(x, c_2)),$$
$$R_{br}(f_2(x, c_2), g_2(x, c_2)) = (f_1(x, c_1), g_1(x, c_1)).$$

Using the pairs of functions (f_i, g_i), $i = 1, 2$ we can define two circle homeomorphisms $G_i : [-1, \alpha_i] \to [-1, \alpha_i]$, $i = 1, 2$, as

$$G_i(x) = \begin{cases} f_i(x, c_i) & \text{if} \quad x \in [-1, 0), \\ g_i(x, c_i) & \text{if} \quad x \in [0, \alpha_i). \end{cases}$$

We rename the homeomorphism of the circle S^1 corresponding to G_1 by G_{br}. We denote by $B(G_{br})$ the set of all circle homeomorphisms which are $C^{1+\epsilon}$ conjugate to G_{br}.

A. Dzhalilov and J. Karimov in [3] constructed the thermodynamic formalism for maps of $B(G_{br})$. Denote the space of infinite words

$$\Omega := \{\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), \;\; a_n = a, 0, 1, \text{ such that}, a_{n+1} = 0, \text{ iff } a_n = a, \;\; n1\}.$$

It is showed [3] that $G \in B(G_{br})$, there is universal continuous (on Tychonoff topology) function $U_b : \Omega \to (-\infty, 0)$, called potential function (or potential), corresponding to G. Moreover, it is proved that the potential U_b exponentially weakly depend on variables. Notice that such potentials are "good"in statistical mechanics [4].

Let $\sigma : \Omega \to \Omega$ be the shift map $\sigma(\underline{b})_i = b_{i+1}, i \geq 1$. Denote by $C(\Omega)$ the space of continuous functions .

Next we define the Ruell's transfer-matrix operator :

$$(D_\beta f)(\underline{b}) = \sum_{\underline{x} \in \sigma^{-1}(\underline{b}) \cap \Omega} e^{\beta U_{br}(\underline{x})} f(\underline{x}) \qquad (1).$$

It is well known [4] that the operator D_β, $\beta > 0$ has the leading eigenvalue λ_β. The behavior of leading eigenvalue λ_β as function of β is one of important problem of statistical mechanics [4].

We formulate our main result.

Theorem 1. *For arbitrary real numbers β and δ with $1 \leq \delta < \beta$ the following inequality holds*

$$\lambda_{-\beta}^{\delta} < \lambda_{-\delta}^{\beta},$$

where λ_t is the leading eigenvalue of the transfer operator D_t defined in (1).

References

1. W.M. de Melo, S. van Strien, One dimensional dynamics, Springer Verlag, Berlin, p. 605 (1993).

2. E.B.Vul, K.M.Khanin, Circle homeomorphisms with weak discontinuities, Advances in Sov. Math. 3, 57–98 (1991).

3. A.Djalilov and J.Karimov, The thermodynamic formalism and exponents of singularity of invariant measure of circle maps with a single break, Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki, 30 (3), 343-366 (2020).

4. Ruelle, D. Thermodynamic formalism. Encyclopedia of Math, and its Appl., vol. 5, Reading, Mass: Addison- Wesley (1978)

Ground states corresponding to subgroups of index three for the Ising model on the Cayley tree of order tree

Egamov D. O.
Institute of mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
dilshodbekegamov@gmail.com

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, from each vertex of which exactly $k+1$ edges issue(see [1]). Let $\Gamma^k = (V, L, i)$, where V is the set of vertices of Γ^k, L is the set of edges of Γ^k and i is the incidence function associating each edge $l \in L$ with its endpoints $x, y \in V$. If $i(l) = \{x, y\}$, then x and y are called *nearest neighboring vertices*, and we write $l = \langle x, y\rangle$. The distance $d(x, y), x, y \in V$ on the Cayley tree is the shortest path from x to y.

For the fixed $x^0 \in V$ (as usual, x^0 is called a root of the tree) we set

$$W_n = \{x \in V \ \mid \ d(x, x^0) = n\}.$$

We write $x < y$ if the path from x^0 to y goes through x and $|x| = d(x, x^0)$, $x \in V$.

It is known that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k+1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$, $i = 1, ..., k+1$ of the second order (i.e. $a_i^2 = e$, $a_i \neq e$) with generators $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$.

Let $S(x)$ be the set of "direct successors"of $x \in G_k$ i.e.,

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} |\ d(y, x) = 1\},\ x \in W_n.$$

Also, $S_1(x)$ is the set of all nearest neighboring vertices of $x \in G_k$, i.e., $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y\rangle\}$ and $x_\downarrow = S_1(x) \setminus S(x)$.

The index of a subgroup is called the *period of the corresponding periodic configuration*. A configuration that is invariant with respect to all cosets is called *translation-invariant*.

Let $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$ be a family of cosets, where G_k^* is a subgroup of index $r \geq 1$. We consider model which its spins take values in the set $\Phi = \{-1, 1\}$. Configuration $\sigma(x), x \in V$ is called G_k^* *weakly periodic*, if $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ for $x \in H_i, x_\downarrow \in H_j, \forall x \in G_k$.

The Ising model with competing interactions has the form

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{\langle x,y\rangle} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{\substack{x,y\in V:\\ d(x,y)=2}} \sigma(x)\sigma(y),$$

where $J = (J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$ are coupling constants and $\sigma \in \Omega$.

Let M be the set of unit balls with vertices in V. We call the restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$ a *bounded configuration* σ_b.

Define the energy of a ball b for configuration σ by

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{\langle x,y\rangle} \sigma(x)\sigma(y) + J_2 \sum_{d(x,y)=2} \sigma(x)\sigma(y), \quad x, y \in b,$$

where $J = (J_1, J_2) \in R^2$.

We consider following partition set $N_3 = \{1, 2, 3, 4\}$. Let $B_0 = \{\emptyset\}, B_1 = \{1, 2\}, B_2 = \{3, 4\}$. Now, we consider functions $u_{B_1B_2} : \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \to \{e, a_1, a_3\}$ and $\gamma :< e, a_1, a_3 >\to \{e, a_1, a_3\}$

$$u_{B_1B_2}(x)=\begin{cases} e,\ if\, x=e,\\ a_1,\ if\ x=a_i,\ i=\overline{1,2},\\ a_3,\ if\ x=a_i,\ i=\overline{3,4},\end{cases}$$

$$\gamma(x)=\begin{cases} e\ if\, x=e\\ a_1\, if\, x\in\{a_1,a_3a_1\}\\ a_3\, if\, x\in\{a_3,a_1a_3\}\\ \gamma(a_ia_{4-i}...\gamma(a_ia_{4-i}))\, if\, x=a_ia_{4-i}...a_{4-i},\ l(x)3,\ i=\{1;3\}\\ \gamma(a_ia_{4-i}...\gamma(a_{4-i}a_i))\, if\, x=a_ia_{4-i}...a_i,\ l(x)3,\ i=\{1;3\}.\end{cases}$$

Let $H_1 := \Im^1{}_{B_1B_2}\ (G_3)$. Then $H_1=\{x\in G_3|\ \gamma(u\ _{B_1B_2}\ (x))=e\}$. Note that H_1 is a subgroup of index 3 (see[2]).

$$G_3/H_1=\{H_1,H_2,H_3\}.$$

H_1-weakly periodic set of h has the form

$$\varphi(x)=\begin{cases} a_{12}, & x_{\downarrow}\in H_1 \text{ and } x\in H_2,\\ a_{13}, & x_{\downarrow}\in H_1 \text{ and } x\in H_3,\\ a_{21}, & x_{\downarrow}\in H_2 \text{ and } x\in H_1,\\ a_{23}, & x_{\downarrow}\in H_2 \text{ and } x\in H_3,\\ a_{31}, & x_{\downarrow}\in H_3 \text{ and } x\in H_1,\\ a_{32}, & x_{\downarrow}\in H_3 \text{ and } x\in H_2,\end{cases}$$

where $\varphi_{ij}\in\Phi$, $i,j\in\{1,2,3\}$.

In the sequel, we write $\varphi(x)=(a_{12},a_{13},a_{21},a_{23},a_{31},a_{32})$ for such a weakly periodic configuration φ.

Theorem 1. Let $k=3$. Then the following assertions hold.

1. There are exactly six H_1-weakly periodic ground states on $\{J_2=\frac{1}{2}J_1, J_1\geq 0\}$, which are not periodic, have the form $\varphi_1=(i,j,i,j,i,j)$, $\varphi_2=(i,j,i,j,j,i)$, $\varphi_3=(i,j,j,i,j,i)$, and $\varphi_{3+v}=-\varphi_v$, where $v=1,2,3$ and $i\neq j; i,j\in\Phi$.

2. There are exactly two H_1-weakly periodic ground states on $\{J_2=-\frac{1}{2}J_1, J_1\leq 0\}$, which are not periodic, have the form $\varphi_7=(i,j,j,i,i,j)$ and $\varphi_8=-\varphi_7$, where $i\neq j; i,j\in\Phi$.

REFERENCES

1. U. A. Rozikov: *Gibbs measures on a Cayley tree,* World Scientific Publishing, Singapore 2013.

2. U. A. Rozikov, F. H. Haydarov: *arXiv:1910.13733*, Invariance property on group representations of the Cayley tree and its applications.

An interior boundary value problem for a system of partial differential equations of mixed type

Fayazov K. S.[1], **Abdullayeva Z. Sh.**[2]
Turin Polytechnic University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan,
kudratillo52@mail.ru;
Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi,
Tashkent, Uzbekistan,
sabina-07-14@mail.ru

This work is devoted to the study of the problem for a system of equations of mixed type with data inside the domain of regularity of the solution. The problem under consideration is ill-posed in the sense of J. Hadamard. On the base on the theory conditionally correct problems, we will prove the uniqueness and conditional stability of the desired problem on the well-posed set. For this reason, we transform the problem under consideration to an initial-boundary value problem and obtain an a priori estimate for the solution of the problem. The uniqueness and conditional stability theorem is proved on the well-posed set. The regularization method is used to construct a sequence of approximate solutions. An estimate is obtained for the norm of the difference between the exact and approximate solutions.

Consider the system of equations

$$signx v_{tt}(x,t) + v_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad signx u_t(x,t) + u_{xx}(x,t) = v(x,t),$$

in the domain $D = \{-1 < x < 1, \ x \neq 0, \ 0 < t < T\}$.

Looking for a solution $(u(x,t), \ v(x,t))$ system of equations (1), satisfying: initial and internal

$$\begin{array}{l} v|_{t=0} = 0, \qquad v|_{t=t_0} = \varphi_1(x), \\ u|_{t=2t_0} = \varphi_2(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (0 < t_0 < 2t_0 = T), \end{array}$$

boundary

$$\begin{array}{l} v(-1,t) = v(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{array}$$

and gluing conditions

$$\begin{array}{l} v(-0,t) = v(+0,t), \ \ v_x(-0,t) = v_x(+0,t), \ \ 0 \leq t \leq T, \\ u(-0,t) = u(+0,t), \ \ u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \ \ 0 \leq t \leq T. \end{array}$$

A number of uniqueness and stability theorems for the solution of interior problems for equations of elliptic type are obtained in the works of M.A. Lavrent'ev and M.M. Lavrentiev, S.P. Shishatsky, and A. Abdukarimov. Internal problems for parabolic equations were considered in the works of M.M. Lavrent'ev, B.K. Amonov, S.P. Shishatsky and others.

BIBLIOGRAPHY

1. Lavrent'ev M.M., Savel'ev L. Ya. Theory of operators and ill-posed problems. Novosibirsk.: Publishing house of the Institute of Mathematics, 912 p, 2010.
2. Fayazov K.S., Khajiev I.O. Conditional Well-Posedness of a Boundary Value Problem

for a Composite Differential Equation of the Fourth Order //Izv. universities. Mat. 2015. number 4. pp. 65–74.

Conditional well-posedness of a boundary value problem for a high-order equation with one line of degeneracy

Fayazov K.S., Khajiev I.O.

Turin Polytechnic University in Tashkent (Uzbekistan), National University of Uzbekistan, Turin Polytechnic University in Tashkent (Uzbekistan)
kudratillo52@mail.ru, kh.ikrom04@gmail.com

The work is devoted to the study of an ill-posed boundary value problem for a high-order non-homogeneous mixed-type equation.

Let $Q_T = \{(x,y,t) : (x,y) \in \Omega,\ 0 < t < T, T < \infty\}$, $\Omega = \{(x,y) : |x| < l,\ 0 < y < d\}$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Consider the partial differential equation

$$\partial_t^n u + \operatorname{sgn}(x)\partial_x^2 u + \partial_y^{2m} u = f(x,y,t) \tag{1}$$

in the domain $Q_T \cap \{x \neq 0\}$, where $n, m \in N$.

Statement of the problem. Find a solution to equation (1) in the domain $Q_T \cap \{x \neq 0\}$ and satisfies the following conditions: initial

$$\partial_t^j u\big|_{t=0} = \varphi_j(x,y),\ j = 0,1,...,n-1.,\ (x,y) \in \bar{\Omega}, \tag{2}$$

boundary

$$\begin{aligned} &u|_{x=-l} = u|_{x=l} = 0,\ 0 \le y \le d,\ 0 \le t \le T, \\ &\partial_y^{2p} u\big|_{y=0} = \partial_y^{2p} u\big|_{y=d} = 0,\ p = 0,1,...,(m-1),\ -l \le x \le l,\ 0 \le t \le T \end{aligned} \tag{3}$$

and gluing conditions

$$u|_{x=-0} = u|_{x=+0},\ u_x|_{x=-0} = u_x|_{x=+0},\ 0 \le y \le d,\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

where $\varphi_j(x,y)$ are sufficient smooth functions and satisfy the consistency conditions, $j = 0,1,...,n-1$.

In this paper, the ill-posed boundary value problem (1) - (4) is investigated for conditional correctness.

References

1. Lavrent'ev M.M., Savel'ev L. Ya. (2010) Theory of operators and ill-posed problems. - 2nd ed., Rev. and add. Novosibirsk: Publishing house of the Institute of Mathematics, 912 p.

2. Fayazov K.S. (1994) The Ill-Posed Cauchy Problem for a Differential Equation of the First and Second Orders with Operator Coefficients. *Siberian Math. J.*, volume 35, number 3, pp. 702–706.

Boundary control for the Pseudo-Parabolic equation with mixed data on the boundary

Fayazova Z. K.[1]
YEOJU Technical Institute in Tashkent (Uzbekistan)
z.fayazova@yahoo.com

In this thesis, we consider the following problem related to a pseudo-parabolic equation. On a part of the boundary of the region $D = \{(x, y) \in R^2 : |x| < \pi, |y| < \pi\}$, the value of the solution and its derivative, which contains the control parameter, are given. It is required to find such a mode of operation so that the average value of the solution in a certain subdomain of the region D takes a given value.

Let the function $u(x, y, t)$ satisfies the equation

$$u_t = \triangle u_t + \triangle u, \quad (x, y, t) \in D_T = \{0 < t < T, |x| < \pi, |y| < \pi\} \tag{1}$$

initial value

$$u|_{t=0} = 0, \quad |x| < \pi, |y| < \pi \tag{2}$$

and boundary values

$$\begin{aligned} &u|_{x=\pi} = 0, (u - u_x)|_{x=-\pi} = \mu(t)\phi(y), \quad 0 \leq T, |y| < \pi; \\ &u|_{y=\pi} = 0, (u - u_y)|_{y=-\pi} = 0, \quad 0 \leq T, |x| < \pi; \\ &\Phi(-\pi) = \Phi(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Here $\phi(y)$ -given function, $\mu(t)$ -is the control parameter, $\mu(0) = 0$.

Problem. Find $\mu(t)$ from the condition

$$\int_0^\pi \int_0^\pi u(x, y, t) dx dy = \theta(t) \tag{4}$$

where $\mu(t)$ satisfies $\mu(0) = 0$ and

$$|\mu(t)| \leq 1.$$

Theorem 1. *Let function $\phi \in W_2^2[-\pi, \pi]$ is not identically equal to zero and satisfies the condition $\phi_m \geq 0, m = 0, 1, 2, ...$ Then there exists a constant $M > 0$, such that for any function $\theta \in W_2^1(-\infty, +\infty)$ satisfying the conditions*

$$\|\theta(t)\|_{W_2^1(R)} \leq M,$$

$\theta(t) = 0$ for $t \leq 0$, there is an admissible control $\mu(t)$ that ensures the fulfillment of condition (4).

REFERENCES

1. Chen P.J., Gurtin M.E.(1968) On a theory of heat conduction involving two temperatures. *Z.Angew.Math.Phys*, v.19, pp.614-627

2. Bernard D. Coleman, Richard J. Duffin, Victor J. Mizel.(1965) "Instability, uniqueness, and nonexistence theorems for the equation on a strip". *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Volume 19, Issue 2, pp.100-116.

On inhomogeneous Markov chains generated by quadratic stochastic operators

Ganikhodjaev N. N.

Institute of Mathematics Academy of Sciences Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, nasirgani@yandex.ru;

A number of works by T. A. Sarymsakov are devoted to ergodicity, regularity and other issues of the limiting behavior of transition probabilities for finite but inhomogeneous Markov chains, as well as for homogeneous chains with a set of states from a finite interval [1]. The structural study of the sequence of stochastic matrices allowed him to formulate statements about the ergodic properties of inhomogeneous Markov chains.

In this paper, we present and discuss the inhomogeneous Markov chains generated by quadratic stochastic operator .

A stochastic process is a family of random variables X_t where t is a parameter running over a suitable index set T. Below we assume that the index t corresponds to discrete units of time, and the index set is $T=\{0,1,2,...\}$. Stochastic processes are distinguished by their state space, or the range of possible values for the random variables X_t by their index set T, and by the dependence relations among the random variables X_t. We assume also that the number of states is finite.

Let a state space $E=\{1,2,\cdots,r\}$ is a finite set and corresponding σ-algebra is a power set $\mathcal{P}(E)$, i.e., the set of all subsets of E, then the set of all probability measures on $(E,\mathcal{F})$ has the following form:

$$S^{r-1}=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in R^r : x_i\geq 0 \text{ for any } i, \text{ and } \sum_{i=1}^{r}x_i=1\}$$

and corresponding quadratic stochastic operator V has the following form

$$(V\mathbf{x})_k=\sum_{i,j=1}^{r}P_{ij,k}x_ix_j, \qquad (1)$$

where $i)P_{ij,k}\geq 0; ii)P_{ij,k}=P_{ji,k}$ and $iii)\sum_{k=1}^{r}P_{ij,k}=1$.

Follow Billingsley [2] one can consider the following construction of a stochastic process. As above let $E=\{1,\cdots,r\}$ be a finite set of r elements. The general probability on E is specified by assigning non-negative probabilities p_i to the elements $i\in E$ in such a way that $\sum_{i\in E}p_i=1$. Let $(\Omega,\mathfrak{F},\mu)$ be the product of infinite sequence of copies of the resulting measure space. The general element of $\Omega=\prod_{n\in\mathbb{Z}_+}E_n$ with $E_n=E$ for any $n\in\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$, is an infinite sequence $\omega=(\omega_0,\omega_1,\cdots)$ of elements of E. Let X_n be the nth coordinate function, i.e. the mapping from Ω to E such that $X_n(\omega)=\omega_n$. Then a collection of random variables $\{X_n : n=0,1,\cdots\}$ forms a stochastic process with finite state space E. Let initial distribution, i.e. a distribution of random random variable X_0 is specified by $\pi=(p_1,p_2,\cdots,p_r)$, that is $Pr\{X_0=i\}=p_i$. Then applying qso V (1), we define the distribution of random variable X_1 as $\pi^{(1)}=(p_1^{(1)},p_2^{(1)},\cdots,p_r^{(1)})$, that is $Pr\{X_1=k\}=p_k^{(1)}$, where

$$p_k^{(1)}=\sum_{i,j=1}^{r}P_{ij,k}p_ip_j.$$

By recurrence we can define the distribution of random variable X_{n+1} as

$$\pi^{(n+1)} = (p_1^{(n+1)}, p_2^{(n+1)}, \cdots, p_r^{(n+1)}),$$

that is $Pr\{X_{n+1} = k\} = p_k^{(n+1)}$, where

$$p_k^{(n+1)} = \sum_{i,j=1}^{r} P_{ij,k} p_i^{(n)} p_j^{(n)}, \tag{2}$$

where $n = 1, 2, \cdots$. Thus for process $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ a distribution (2) of random variable X_n for arbitrary n is defined once a qso (1) and the probability distribution of X_0 are specified. To completely define this process we have to show how to compute its finite-dimensional distributions.

Theorem The process $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ defined with one-dimensional distributions (2) is inhomogeneous Markov chain.

Proof Let us define

$$Pr\{X_1 = k | X_0 = i\} = P_{ik}^{0,1} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij,k} p_j,$$

where $i, k = 1, \cdots, r$. It is evident that $P_{ik}^{0,1} \geq 0$. Let us verify that a matrix $\Pi^{0,1} = ||P_{ik}^{0,1}||_{i,k=1}^{r}$ is a stochastic:

$$\sum_{k=1}^{r} P_{ik}^{0,1} = \sum_{k,j=1}^{r} P_{ij,k} p_j = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{r} P_{ij,k} \right) p_j = \sum_{j=1}^{r} p_j = 1.$$

Now let us compute the distribution of X_1 using the stochastic matrix $\Pi^{0,1} = ||P_{ik}^{0,1}||_{i,k=1}^{r}$ as $\pi \cdot \Pi^{0,1}$. It is easy to verify that

$$(\pi \cdot \Pi^{0,1})_k = \sum_{i=1}^{r} p_i P_{ik}^{0,1} = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{r} P_{ij,k} p_j \right) = \sum_{i,j=1}^{r} P_{ij,k} p_i p_j.$$

Then the distribution of X_1 computed by stochastic matrix $\Pi^{0,1} = ||P_{ik}^{0,1}||_{i,k=1}^{r}$ coincide with distribution generated by qso (1). By recurrence one can verify that the distribution of X_{n+1} computed by stochastic matrix $\Pi^{n,n+1} = ||P_{ik}^{n,n+1}||_{i,k=1}^{r}$ coincide with distribution generated by qso (1), where

$$Pr\{X_{n+1} = k | X_n = i\} P_{ik}^{n,n+1} = \sum_{j=1}^{r} P_{ij,k} p_j^{(n)},$$

Thus inhomogeneous Markov chain $\{X_n : n = 0, 1, \cdots\}$ is completely defined by distribution of X_0 and a sequence $\{\Pi^{n,n+1} : n = 0, 1, \cdots\}$ of one-step transition probability matrices.

We investigate correlations between ergodicity of quadratic stochastic operators and corresponding inhomogeneous Markov chains. Also we discuss the problem when the corresponding Markov chain will be homogeneous.

REFERENCES

1. T.A. Sarymsakov, Fundamentals of the theory of Markov processes, Moscow: Gostekhizdat,1954.
2. P. Billingsley, Ergodic Theory and Information. New York.: Wiley, 1965.

The circle maps with several breaks and total trivial jump ratios

Jabborov N. A.[1], Djalilov Sh. A.[2]
Joint Belarusian-Uzbek Interdisciplinary Institute of Applied Technical Qualifications in Tashkent, Uzbekistan,
jabborov61@mail.ru;
Samarkand State Economics and Service Institute, Samarkand, Uzbekistan,
dshuxrat@mail.ru

It is well known that investigations of many problems of statistical mechanics, biology, medicine and natural sciences an important role plays the invariant measures. In present work we study the probability invariant measures of piecewise-smooth sircle maps with break points i.e. at which the derivative has discontinuity.

The problem of absolute continuity of the invariant measure for circle diffeomorphisms is well understood. The fundamental results in this direction were obtained by V. Arnold, M. Herman, Moser ,Yoccoz , Sinai and Khanin, Kaznelson and Ornstein and others.

Let f be an orientation preserving homeomorphism of the circle $S^1 \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ with lift $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, which is continuous, strictly increasing and fulfills

$$F(x+1) = F(x) + 1, \ x \in \mathbb{R}.$$

The circle homeomorphism g is then defined by $f(x) = F(x) \mod 1$ with $x \in \mathbb{R}$ a lift of $x \in S^1$. The **rotation number** ρ_f is defined by

$$\rho_f := \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \mod 1.$$

Here and below F^i denotes the i-th iteration of the map F. It is well known, that the rotation number ρ_f does not depend on the starting point $x \in \mathbb{R}$ and is irrational if and only if f has no periodic points (see [1]). The rotation number ρ_f is invariant under topological conjugations.

A natural generalization of circle diffeomorphisms are piecewise smooth homeomorphisms with break points . The point x_b is called break point of f, if there exist the one-sided positive derivatives $Df_-(x_b)$ and $Df_+(x_b)$ exist, but do not coincide. Denote $\sigma(x_b) := \frac{Df_-(x_b)}{Df_+(x_b)}$. The positive number $\sigma(x_b)$ is called the **jump ratio** of **jump** of f at the point x_b.

Consider the circle homeomorphism

$$f(x) := F(x)\ mod 1, \text{ for any } x \in S^1,$$

where the lift function $F : R^1 \to R^1$ satisfies the following conditions:

(C_1) $F \in C^{2+\epsilon}\left(S^1 \setminus \left\{b_i^{(1)},\, i=\overline{1,m_1},\, b_j^{(2)},\, j=\overline{1,m_2}\right\}\right)$, $b_i^{(l)} := f^i(b_0^{(l)}),\ l=1,2.$

(C_2) $b_i^{(1)}$, $i=\overline{1,m_1}$, $b_j^{(2)}$, $j=\overline{1,m_2}$ are break points

(C_3) $\prod \sigma_i(i) \prod \sigma_j(j) := 1.$

It is well known that a circle homeomorphism f with irrational rotation number ρ_f are uniquely ergodic, i.e. it has a unique invariant probability measure μ_f.

In [2] Herman proved

Theorem 1.*(see [2]) The invariant measure of PL-circle homeomorphism with two break points and irrational rotation number is absolutely continuous with respect to Lebesque measure if and only if these break points belong to the same orbit.*

For such a homeomorphism the character of the invariant measure strongly depends on its total jump ratio σ_f being trivial or nontrivial, i.e. $\sigma_f = 1$ or $\sigma_f \neq 1$. A recent result of [3] in the case $\sigma_f \neq 1$ is

Theorem 2. *(see [3]). Let $f \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(m)}\})$, $\varepsilon > 0$ be a P-homeomorphism with irrational rotation number ρ_f and a finite number of break points $a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(m)}$. Suppose its total jump ratio $\sigma_f = \sigma(a^1)\cdot\sigma(a^{(2)})\cdot ... \cdot \sigma(a^{(m)}) \neq 1$. Then its invariant probability measure μ_f is singular with respect to Lebesque measure l.*

More difficult to investigate are piecewise smooth $P-$ homeomorphisms f with a finite number of break points and trivial total jump ratio $\sigma_f = 1$.

In the present paper we study $C^{2+\epsilon}$ P-homeomorphisms f with arbitrary irrational rotation number ρ_f and a finite number break points lying on two different orbits, whose total jump ratio $\sigma_f = 1$. Put

$$\Gamma := \{\alpha \in [0,1] : \alpha = [k_1, k_2, ..., k_n, ...] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \text{there exists } N = N(\alpha) \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

$$\text{such that } k_n \geq 3, \text{ for all } n \geq N\}.$$

We formulate our main result.

Theorem 3 *Suppose that the circle homeomorphism f satisfies the conditions $(C_1)-(C_3)$ and their rotation number is irrational. Denote its invariant measure by μ_f. Then there exists a subset $M_\rho \subset [0,1]$ of full Lebesque measure, such that μ_f is singular w.r.t. Lebesgue measure if $\mu_f([b_0^{(1)}, b_0^{(2)}]) \in M_\rho$.*

References

1. W.M. de Melo, S. van Strien, One dimensional dynamics, Springer Verlag, Berlin, p. 605 (1993).

2. M. Herman, Sur la conjugaison diffйrentiable des diffeomorphismes du cercle a des rotations Publications Mathйmatiques de l'IS, Tome 49, pp. 5-233(1979).

3.A. Dzhalilov, D. Mayer and U. Safarov, Piecewise-smooth circle homeomorphisms with several break points. Izvestiya: Mathematics,76(1):94 (2012).

Denjoy equality

Jalilov A. A.[1]
Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
adjalilov2013@gmail.com

Let g be an orientation preserving homeomorphism of the circle $S^1 \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ with lift $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, which is continuous, strictly increasing and fulfills $G(\hat{x}+1) = G(\hat{x})+1,\ \hat{x} \in \mathbb{R}$. The circle homeomorphism g is then defined by $g(x) = G(\hat{x}) \mod 1$ with $\hat{x} \in \mathbb{R}$ a lift of $x \in S^1$. The **rotation number** ρ_g is defined by $\rho_g := \lim\limits_{n\to\infty} \frac{G^n(\hat{x})-\hat{x}}{n} \mod 1$. Here and below, G^i denotes the i-th iteration of the map G. It is well known, that the rotation number ρ_g does not depend on the starting point $\hat{x} \in \mathbb{R}$ and is irrational if and only if g has no periodic points (see [1]). Therotation number ρ_g is invariant under topological conjugations.

Denjoy's classical theorem states, that a circle diffeomorphism g with irrational rotation number $\rho = \rho_g$ and $\log Dg$ of bounded variation can be conjugated to the linear rotation R_ρ with lift $\hat{R}_\rho(\hat{x}) = \hat{x} + \rho$, that is, there exists a homeomorphism $\varphi : S^1 \to S^1$ with $g = \varphi \circ R_\rho \circ \varphi^{-1}$.

A natural generalization of circle diffeomorphisms are piecewise smooth homeomorphisms with break points (see [2]).

The class of **P-homeomorphisms** consists of orientation preserving circle homeomorphisms g which are differentiable except at a finite or countable number of break points, denoted by $BP(g) = \{x_b \in S^1\}$, at which the one-sided positive derivatives Dg_- and Dg_+ exist, but do not coincide, and for which there exist constants $0 < c_1 < c_2 < \infty$, such that

- $c_1 < Dg_-(x_b) < c_2$ and $c_1 < Dg_+(x_b) < c_2$;
- $c_1 < Dg(x) < c_2$ for all $x \in S^1 \backslash BP(g)$;
- $\log Dg$ has finite total variation v in S^1.

Piecewise linear (PL) orientation preserving circle homeomorphisms are simplest examples of P-homeomorphisms. They occur in many other areas of mathematics such as group theory, homotopy theory and logic via the Thompson groups. A family of PL-homeomorphisms were first studied by M. Herman in [2] to give examples of circle homeomorphisms of arbitrary irrational rotation number which admit no invariant σ-finite measure absolutely continuous with respect to Lebesque measure. Herman's family of maps has been studied later by several authors (see for instance [3], [4]) in the context of interval exchange transformations. Special cases are affine 2-interval exchange transformations, to which Herman's examples with break points $a^{(0)} = 0$ and $c^{(0)} = c$ belong.

Lemma 1. Let g be a P-homeomorphism with irrational rotation number ρ_g and $|BP(g)| < \infty$. Then for any y_0 with $y_s := g^s(y_0) \notin BP(g)$ for all $0 \le s < q_n$, the inequality

$$e^{-v} \le \prod_{s=0}^{q_n-1} Dg(y_s) \le e^{v}. \tag{1}$$

holds.

Inequality (1) is called **Denjoy's inequality**.

Two homeomorphisms g_1 and g_2 of the circle are said to be topologically equivalent, if there exists a homeomorphism $\varphi : S^1 \to S^1$ such that $\varphi(g_1(x)) = g_2(\varphi(x))$ for any $x \in S^1$. The homeomorphism φ is called a **conjugacy**.

The following fact plays a key role in the proof of Theorems 1.3 and 1.4.

Theorem 1.(see [2]) Let g be a P-homeomorphism with irrational rotation number $\rho = \rho_g$ and invariant probability measure μ_g. Then

$$\int\limits_{S^1} \log Dg(x) d\mu_g(x) = 0. \tag{2}$$

Consider now an arbitrary P-homeomorphisms g with irrational rotation number ρ_g and two break points $b^{(1)}, b^{(2)}$, which are not on the same orbit and whose total jump $\sigma_g = 1$. Denote by $\frac{p_n}{q_n}$ the partial convergents of ρ_g. In this section we study the derivative Dg^{q_n} and the location of the break points of g^{q_n}. Obviously the map g^{q_n} has $2\,q_n$ break points denoted by $BP_g^n := BP_g^n(b^{(1)}) \cup BP_g^n(b^{(2)})$ with $BP_g^n(b^{(1)}) := \{\bar{b}_0^{(1)}, \bar{b}_1^{(1)}, ..., \bar{b}_{q_n-1}^{(1)}\}$, respectively $BP_g^n(b^{(2)}) := \{\bar{b}_0^{(2)}, \bar{b}_1^{(2)}, ..., \bar{b}_{q_n-1}^{(2)}\}$ where $\bar{b}_i^{(1)} = g^{-i}(b^{(1)})$ respectively $\bar{b}_i^{(2)} = g^{-i}(b^{(2)}),\ 0 \le i \le q_n - 1$. Let $\xi_n(b^{(1)})$ be the n-th dynamical partition determined by the break point $b^{(1)}$ and the map g. Then for the second break point $b^{(2)}$ one finds either $b^{(2)} \in I_{i_0}^n(b^{(1)})$ for some $0 \le i_0 < q_{n-1}$, or $b^{(2)} \in I_{j_0}^{n-1}(a_0) = g^{j_0}((b^{(1)}, b_{-q_n}^{(1)}]) \cup g^{j_0}((b_{-q_n}^{(1)}, b_{q_{n-1}}^{(1)}))$ for some $0 \le j_0 < q_n$, i.e. either $b^{(2)} \in g^{j_0}((b_{(1)}, b_{-q_n}^{(1)}])$ or $b^{(2)} \in g^{j_0}((b_{-q_n}^{(1)}, b_{q_{n-1}}^{(1)}))$, where the two last cases we are going to treat separately.

We give our result only for the first case, other three cases can be shown by similar way. In the first case we define disjoint subintervals of the circle by

$$U_n^*(\bar{a}_s^{(1)}) := [\bar{c}_{i_0+s}^{(0)}, \bar{a}_s^{(0)}],\ \text{for}\ 0 \le s \le q_n - i_0 - 1, \tag{3}$$

respectively

$$U_n^*(\bar{a}_s^{(0)}) := [\bar{c}_{s-q_n+i_0}^{(0)}, \bar{a}_s^{(0)}]\ \text{for}\ q_n - i_0 \le s \le q_n - 1. \tag{4}$$

Next we define for every $n \ge 1$

$$U_n^* = \bigcup_{s=0}^{q_n-1} U_n^*(\bar{a}_s^{(0)}). \tag{5}$$

Theorem 2. Let $f = f_{\beta,\lambda,\theta}$ be Herman's PL-circle homeomorphism with irrational rotation number ρ_θ and two break points $a^{(0)}$ and $c^{(0)}$, which lie on different orbits. Assume $\bar{c}_0^{(0)} = c^{(0)}$ satisfyes case1 for some i_0 with $0 \le i_0 < q_{n-1}$. Then in case of n odd

$$Df^{q_n}(x) = \begin{cases} \sigma\ Df_+^{q_n}(\bar{a}_0^{(0)}), & \text{if } x \in U_n^* \\ Df_+^{q_n}(\bar{a}_0^{(0)}), & \text{if } x \in S^1 \setminus U_n^*; \end{cases} \tag{6}$$

in case of n even

$$Df^{q_n}(x) = \begin{cases} Df_+^{q_n}(\bar{a}_0^{(0)}), & \text{if } x \in U_n^* \\ \sigma\ Df_+^{q_n}(\bar{a}_0^{(0)}), & \text{if } x \in S^1 \setminus U_n^*, \end{cases} \tag{7}$$

where

$$Df_+^{q_n}(\bar{a}_0^{(0)}) = \sigma^{(-1)^{n+1}\mu_f(U_n^*) - \chi_{[a^{(0)},c^{(0)}]}((-1)^{n+1})}. \tag{8}$$

REFERENCES

1. I.P. Cornfeld, S.V. Fomin and Ya.G. Sinai: *Ergodic Theory*, Springer Verlag, Berlin (1982).

2. M. Herman: *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., **49**, 225-234 (1979).

3. Z. Coelho, A. Lopes, L. F. da Rocha, Absolutely continuous invariant measure for a class of affine interval exchange maps, Proc. Am. Math. Soc. **123** (11), 3533–3542 (1995).

4. H. Nakada, On a classification of PL-homeomorphisms of a circle. In Probability theory and mathematical statistics (Tbilisi, 1982), Lecture Notes in Math., **1021**, 474–480, Springer, Berlin, 1983.

5. A.A. Dzhalilov and I. Liousse: *Circle homeomorphisms with two break points.* Nonlinearity, **19**, 1951-1968 (2006).

6. H. Akhadkulov, A. Dzhalilov and D. Mayer On conjugations of circle homeomorphisms with two break points. Ergod. Theor. Dyn. Syst.34, 725-741 (2013)

A convex combination of non-Volterra quadratic stochastic operators

Jamilov U. U.[1], Mukhitdinov R. T.[2]

[1]V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent;
uygun.jamilov@mathinst.uz;
[2]Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan.
muxitdinov-ramazon@rambler.ru

Consider the following two non-Volterra quadratic stochastic operators (QSOs) on the two-dimensional simplex (see [1]-[3] for theory of QSOs)

$$V_1: \begin{cases} x_1' = x_1^2, \\ x_2' = x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2, \\ x_3' = 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \end{cases} \quad (1) \qquad V_2: \begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2, \\ x_2' = x_2^2, \\ x_3' = 2x_1x_3 + 2x_2x_3. \end{cases} \quad (2)$$

In the following theorem we describe the asymptotical behavior of the QSOs (1) and (2).

Theorem 1.

i) $\mathrm{Fix}\,(V_1) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, (0, 1/2, 1/2)\}$, $\mathrm{Fix}\,(V_2) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, (1/2, 0, 1/2)\}$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} V_1^n\big(\mathbf{x}^{(0)}\big) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \backslash \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} V_2^n\big(\mathbf{x}^{(0)}\big) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \backslash \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Let us consider the convex linear combination of given QSOs, that is convex linear combination of

$$V_\lambda = \lambda V_1 + (1-\lambda) V_2, \quad \lambda \in [0, 1].$$

It is clear that V_λ has the form

$$V_\lambda: \begin{cases} x_1' = x_1^2 + (1-\lambda)x_3^2 + 2(1-\lambda)x_1x_2, \\ x_2' = x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2\lambda x_1x_2, \\ x_3' = 2x_1x_3 + 2x_2x_3. \end{cases} \quad (3)$$

Setting
$$\lambda = \frac{1}{2} + \varepsilon, \quad \varepsilon \in \Big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big]$$
one can rewrite the QSO (4) in the following form
$$V_\varepsilon : \begin{cases} x_1' = x_1^2 + \Big(\frac{1}{2} - \varepsilon\Big)x_3^2 + (1-2\varepsilon)x_1x_2, \\ x_2' = x_2^2 + \Big(\frac{1}{2} + \varepsilon\Big)x_3^2 + (1+2\varepsilon)x_1x_2, \\ x_3' = 2x_1x_3 + 2x_2x_3. \end{cases} \tag{4}$$

Theorem 2. Let $\varepsilon = 0$. Then

i) $\mathrm{Fix}\,(V_0) = \{(1/4, 1/4, 1/2)\} \cup \Gamma_{\{1,2\}} = \{\mathbf{x} \in S^2 : x_3 = 0\}$;

ii) the fixed point $(1/4, 1/4, 1/2)$ is an attracting point and a fixed point $\mathbf{x} \in \Gamma_{\{1,2\}}$ is a non-hyperbolic point;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} V_0^n\big(\mathbf{x}^{(0)}\big) = (1/4, 1/4, 1/2)$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \backslash \Gamma_{\{1,2\}}$.

Theorem 3. Let $\varepsilon \neq 0$. Then

i) $\mathrm{Fix}\,(V_\varepsilon) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{x}^*\}$;

ii) if $(\sqrt{3}-1)/8 \leq \varepsilon \leq (\sqrt{3}-1)/8$ then the vertex $\mathbf{e}_1$ is a repelling point and otherwise it is a saddle point. The vertex $\mathbf{e}_2$ is a saddle point;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} V_\varepsilon^n\big(\mathbf{x}^{(0)}\big) = \mathbf{x}^*$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2 \backslash \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

References

1. N. N. Ganikhodjaev, R. N. Ganikhodjaev, and U. U. Jamilov, *Quadratic stochastic operators and zero-sum game dynamics*, Ergod. Th. and Dynam. Sys. **35** (5), 1443-1473, 2015.

2. R. N. Ganikhodzhaev, *Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments*, Sbornik: Mathematics **76** (2), 489-506, 1993.

3. R. Ganikhodzhaev, F. Mukhamedov and U. Rozikov, *Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems*, Infin. Dimens. Anal. Quan. Probab. Relat. Top. **14** (2), 279-335, 2011.

The modeling of information diffusion in online social networks

Juraboyeva O.S.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent , Uzbekistan.
joraboyevaoyxon@gmail.com

Online social networks have recently become important media for spreading information and facilitating the building of social relations among a huge number of people. Research efforts on understanding information diffusion have a significant impact on real life
applications such as product marketing, political online campaign, etc. Extensive investigations have been made to understand network structure, user interactions, and

traffic properties and to study the characteristics of information diffusion. Mathematical modeling has played an increasingly important role in understanding information diffusion in online social networks.[1]

In this paper we investigate the [2] model with a free boundary for online social networks. The problem is given in the following form:

$$u_t - du_{xx} - cu_x = r(t)u(1 - \frac{u}{K}) \quad D = \{(t;x) : t > 0; 0 < x < h(t)\}, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), h(0) = h_0, \quad 0 \leq x \leq h_0 \tag{2}$$

$$u_x(t,0) = 0, u(t,h(t)) = 0, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

$$h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)) \quad t \geq 0 \tag{4}$$

where $u(t,x)$ represents the density of influenced users with distance x at time t. $x = h(t)$ is the moving boundary to be determined and represents the spreading front of news (such as movie recommendation) among users. $u_x(t,0) = 0$ means no news traveling in the left part. Hence we only need consider the diffusion in the right part. K is the carrying capacity, d is the diffusion rate, and $r(t)$ is intrinsic growth rate. We call $h'(t) = -\mu u_x(t,h(t))$ Stefan condition, where μ represents the diffusion ability of the information in the new area.

For functional spaces and norms, we will employ the notations of [2], and we will also make use of its results. The manuscript is organized as follows. First, we establish two-sided bounds for $u(t,x)$ and $h'(t)$, and then bounds for $|u|_{1+\alpha}$,$|u|_{2+\alpha}$ for appropriate $0 < \alpha < 1$. Afterwards, using those auxiliary results, we prove global existence and uniqueness theorems[3].

References

1. Chengxia Lei, Zhigui Lin, Haiyan Wang. The free boundary problem describing information diffusion in online social networks.Differential Equations 254 (2013) 1326-1341

2. Y. Du and Z. Lin, Spreading-vanishing dichotomy in a diffusive logistic model with a free boundary, SIAM J. Math. Anal., 42 (2010), 377-405.

3. Takhirov J.O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in biology // Indian J.Pure Appl.Math., 2019. 50(1), -pp. 95-112.

On local derivations on real W*-algebras

Karimov U. Sh.[1]

National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
karimovulugbe07@gmail.com

In the paper [1] R.V.Kadison introduced the notion of local derivations and, in particular, proved that the local derivations on the W*-algebra are derivations. In [2] B.E.Johnson generalized this result for the C*-algebras.

Given an algebra R, a linear operator $\delta : R \to R$ is called a *derivation*, if $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$, for all $x, y \in R$. A linear map $\delta : R \to R$ is called a *local derivation*, if for every $x \in R$, there exists a derivation $\delta_x : R \to R$ such that $\delta(x) = \delta_x(x)$.

Throughout this thesis R is a real W*-algebra and $\delta : R \to R$ is a norm-continuous local derivation.

Proposition 1. Let e and f are projections such that $ef = 0$, and v is an operator in R such that $v^*v = e$ and $vv^* = f$. If R_0 is the real *-subalgebra generated by e, f, v and v^*, then the restriction $\delta|_{R_0}$ of δ to R_0 is derivation, i.e.

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y), \qquad \forall x, y \in R_0.$$

Proposition 2. If A is an abelian real W*-subalgebra of R, then the restriction δ_A of δ to A is derivation.

Let R_0 be as in Proposition 1 and let A be an abelian real W*-subalgebra of $R \cap R_0'$. Since the elements of algebras R_0 and A commute between with each other, then arguing similarly to the proof of Theorem [6], we obtain the following result.

Proposition 3. If R_1 is the real W*-algebra generated by R_0 and A, then the restriction δ_{R_1} of δ to R_1 is derivation.

From the above we get one of the main result.

Theorem Let R be a real W*-algebra and let $P = P(R)$ be the set of all projections of R. Then the restriction $\delta|_P$ of δ to P is derivation, i.e.

$$\delta(ef) = \delta(e)f + e\delta(f), \qquad \forall e, f \in P.$$

Proof. Let e and f are projections in R, i.e. $e, f \in P$. Then real W*-algebra R_1 generated by e and f is either abelian, of type I_2, or the direct sum of an abelian real W*-algebra and one of type I_2. If R_1 is abelian, then the proof follows from Proposition 2, and if R_1 is not abelian, it is generated by its center and a subalgebra R_0 isomorphic to a real factor of type I_2. Proposition 3 applies and $\delta|_{R_1}$ is derivation. Thus $\delta(ef) = \delta(e)f + e\delta(f)$. □

Now, we consider R_s and R_k – hermit and skew-hermit part of R, respectively, i.e.

$$R_s = \{x \in R : \ x^* = x\}, \quad R_k = \{x \in R : \ x^* = -x\}.$$

Since δ is norm continuous and the set of finite linear combinations of projections in R is norm dense in R_s, then by Theorem we obtain.

Corollary. The restriction $\delta|_{R_s}$ of δ to JW-algebra R_s is derivation.

□

REFERENCES

1. Kadison R. V. Local Derivations. Journal of Algebra, 130, (1990), pp.494-509.
2. Johnson B. E. Local derivations on C*-algebras are derivations.Transactions of the american mathematical society, Vol. 353, N 1, pp.313-325.
3. Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A. , Usmanov Sh. M. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Vol. 418, (1997). Kluw.Acad.Pub.,MAIA. 235p.
4. Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A. Real W*-algebras, Actions of groups and Index theory for real factors. VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, Mauritius.(2010), 138p.
5. Li B. R., Real operator algebras, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2003, 241p.
6. Karimov U. Sh. On the local derivations on real W*-algebras. Bulletin of the Institute

of Mathematics. 2020/6, 1-3pp

Complete systems of invariants of a t-figure in a two-dimensional bilinear metric space over the field of rational numbers

Khadjiev D.[1], Beshimov G. R.[2]

[1,2]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
[1]V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
Tashkent, Uzbekistan,
khdjavvat@gmail.com; gayratbeshimov@gmail.com

Let Q be the field of rational numbers, Q^2 be the two dimensional vector space over Q. Denote by $\varphi_p(x,y)$ the following bilinear form on Q^2: $x_1y_1+px_2y_2$, where p is a prime number. Denote by (Q^2,φ_p) the space Q^2 with the bilinear form $\varphi_p(x,y)$. Let T be a countable set. A mapping $\gamma: T\to Q^2$ will be called a T-parametric figure in Q^2. Let $O(2,Q^2,\varphi_p)$ be the group of all orthogonal transformations of the bilinear metric space (Q^2,φ_p). Put $SO(2,Q^2,\varphi_p)=\{g\in O(2,Q^2,\varphi_p)|detg=1\}$, $MO(2,Q^2,\varphi_p)=$ $\{H: Q^2\to Q^2 \mid Hx=gx+b, g\in O(2,Q^2,\varphi_p), b\in Q^2\}$, $MSO(2,Q^2,\varphi_p)=$ $\{H\in MO(2,Q^2,\varphi_p)|detg=1\}$. The present paper is devoted to solutions of problems of G-equivalence of T-parametric figures in Q^2 for groups $G=O(2,Q^2,\varphi_p), SO(2,,Q^2,\varphi_p)$, $MO(2,,Q^2,\varphi_p)$, $MSO(2,,Q^2,\varphi_p)$. Complete systems of G-invariants of T-parametric figures in (Q^2,φ_p) for the defined groups have obtained. Let $\gamma(t)$ be a T-parametric figure in (Q^2,φ_p). Denote by $Z(\gamma(t))$ the subset $\{t\in T|\gamma(t)=0\}$ of T. Let $[x\,y]=x_1y_2-x_2y_1$, where $x=(x_1,x_2)\in Q^2, y=(y_1,y_2)\in Q^2$.

Theorem. Let $\gamma(t)$ be a T-parametric figure in Q^2 such that $Z(\gamma(t))\neq T$, and $t_0\in T\setminus Z(\gamma(t))$.

(i). Suppose that a T-parametric figure $\eta(t)$ in Q^2 such that $\gamma(t)\overset{SO(2,Q^2,\varphi_p)}{\sim}\eta(t), \forall t\in T$. Then the following equalities hold:

$$\begin{cases} Z(\gamma(t))=Z(\eta(t)); \\ \varphi_p(\gamma(t_0),\gamma(t))=\varphi_p(\eta(t_0),\eta(t)), \forall t\in T\setminus Z(\gamma(t)); \\ [\gamma(t_0)\gamma(t)]=[\eta(t_0)\,\eta(t)], \forall t\in T\setminus Z(\gamma(t)). \end{cases} \tag{1}$$

(ii). Conversely, assume that a T-parametric figure $\eta(t)$ in Q^2 such that the above equalities (1) hold. Then there exists a single matrix $F\in SO(2,Q^2,\varphi_p)$ such that $\eta(t)=F\gamma(t), \forall t\in T$. The evident form of F as follows:

$$F=\begin{pmatrix} \frac{\varphi_p(\gamma(t_0),\eta(t_0))}{\varphi_p(\gamma(t_0),\gamma(t_0))} & -\frac{[\gamma(t_0)\,\eta(t_0)]}{\varphi_p(\gamma(t_0),\gamma(t_0))} \\ \frac{[\gamma(t_0)\,\eta(t_0)]}{\varphi_p(\gamma(t_0),\gamma(t_0))} & \frac{\varphi_p(\gamma(t_0),\eta(t_0))}{\varphi_p(\gamma(t_0),\gamma(t_0))} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

where $\det(F)=(\frac{\varphi_p(\gamma(t_0),\eta(t_0))}{\varphi_p(\gamma(t_0),\gamma(t_0))})^2+(\frac{[\gamma(t_0)\,\eta(t_0)]}{\varphi_p(\gamma(t_0),\gamma(t_0))})^2=1$.

A complete system of relations between elements of the obtained complete system of $SO(2,Q^2,\varphi_p)$-invariants also obtained. Similar results have obtained also for the groups $O(2,Q^2,\varphi_p), MSO(2,Q^2,\varphi_p), MO(2,Q^2,\varphi_p)$.

Periodic Gibbs measures for one fertile HC model on the Cayley tree of order $k \geq 2$

Khakimov R. M.[1], Umirzakova K. O.[2]
Institute of Mathematics, Namangan, Uzbekistan;
rustam-7102@rambler.ru
Namangan State University, Namangan, Uzbekistan;
kamola-0983@mail.ru

Let $\Im^k = (V, L)$ is Cayley tree of order $k \geq 2$. Let $\Phi = \{0, 1, 2\}$ and $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ be a configuration. We consider the set Φ as the set of vertices of a graph G. A configuration σ is called a G-*admissible configuration* on the Cayley tree, if $\{\sigma(x), \sigma(y)\}$ is the edge of the graph G for any pair of nearest neighbors x, y in V.

The activity set [1] for a graph G is a function $\lambda : G \to R_+$. The value λ_i of the function λ at the vertex $i \in \{0, 1, 2\}$ is called the vertex activity.

For given G and λ we define the Hamiltonian of the $G-$HC model as

$$H_G^{\lambda}(\sigma) = \sum_{x \in V} \log \lambda_{\sigma(x)},\ \sigma \in \Omega^G.$$

The reader can find the definition of the Gibbs measure and of other subjects related to Gibbs measure theory, for example, in [2].

Definition 1.[1] A graph is said to be fertile if there is a set of activities λ such that the corresponding Hamiltonian has at least two translation-invariant Gibbs measures.

We consider the case $\lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ and we study periodic Gibbs measures in the case fertile graph $G = wand$: $\{0, 1\}\{0, 2\}\{1, 1\}\{2, 2\}$.

It is known [2] that there exists a unique G-HC Gibbs measure μ if and only if for any functions $z : x \in V \longmapsto z_x = (z_{1,x}, z_{2,x})$ the equality holds:

$$z_{i,x} = \lambda \prod_{y \in Sx} \frac{a_{i0} + a_{i1} z_{1,y} + a_{i2} z_{2,y}}{a_{00} + a_{01} z_{1,y} + a_{02} z_{2,y}}, i = 1, 2. \tag{1}$$

It is known that we have one-to-one correspondence between the set V of vertices of a Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k that is the free product of $k + 1$ cyclic groups of second order (see [2]).

The following theorem is true.

Theorem 1. Let H be a normal subgroup of finite index and $G_k^{(2)}$ is a subgroup of words of even length in G_k. Then for HC model each H-periodic Gibbs measure is either $G_k^{(2)}$-periodic or translation-invariant.

By Theorem 1, there are only $G_k^{(2)}$-periodic Gibbs measures, and for them from (1) we obtain the following system of equations:

$$\begin{cases} t_1 = \lambda \left(\frac{1+z_1}{z_1+z_2}\right)^k,\ t_2 = \lambda \left(\frac{1+z_2}{z_1+z_2}\right)^k, \\ z_1 = \lambda \left(\frac{1+t_1}{t_1+t_2}\right)^k,\ z_2 = \lambda \left(\frac{1+t_2}{t_1+t_2}\right)^k. \end{cases} \tag{2}$$

We consider the map $W : R^4 \to R^4$ defined as

$$\begin{cases} t_1' = \lambda\left(\frac{1+z_1}{z_1+z_2}\right)^k, \ t_2' = \lambda\left(\frac{1+z_2}{z_1+z_2}\right)^k, \\ z_1' = \lambda\left(\frac{1+t_1}{t_1+t_2}\right)^k, \ z_2' = \lambda\left(\frac{1+t_2}{t_1+t_2}\right)^k. \end{cases}$$

We note that the system (2) is the equation $z = W(z)$. Therefore, solving the system (2) is equivalent to finding fixed points of the map $z' = W(z)$.

The next lemma is true.

Lemma 1. The following sets are invariant under the map W:

$$I_1 = \{(t_1, t_2, z_1, z_2) \in R^4 : t_1 = t_2 = z_1 = z_2\},$$

$$I_2 = \{(t_1, t_2, z_1, z_2) \in R^4 : t_1 = t_2, z_1 = z_2\},$$

$$I_3 = \{(t_1, t_2, z_1, z_2) \in R^4 : t_1 = z_1, t_2 = z_2\},$$

$$I_4 = \{(t_1, t_2, z_1, z_2) \in R^4 : t_1 = z_2, t_2 = z_1\}.$$

We consider invariant set $I_2 = \{(t_1, t_2, z_1, z_2) \in R^4 : t_1 = t_2, z_1 = z_2\}$.

Theorem 2. *Let $k \geq 2$ and $\lambda_{cr} = 2^k(k-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^k$. Then for HC model in the case $G =$ wand on I_2 for $0 < \lambda < \lambda_{cr}$ there exist at least three $G_k^{(2)}$-periodic Gibbs measures, one of which is translation-invariant and the other two are $G_k^{(2)}$-periodic (non translation-invariant), where $G_k^{(2)}$ is a subgroup of words of even length in G_k.*

Remark. In [3] the cases $k = 2$ ($\lambda_{cr} = 1$) and $k = 3$ ($\lambda_{cr} = \frac{128}{27}$) are considered. In these cases on I_2 for $0 < \lambda < \lambda_{cr}$ the existence of exactly three $G_k^{(2)}$-periodic Gibbs measures was proved.

R E F E R E N C E S

1. Brightwell G. R., Winkler P. Graph homomorphisms and phase transitions // J.Combin. Theory Ser.B. 1999. Vol. 77, pp. 221–262.

2. Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. World Sci. Publ., Singapore. 2013.

3. Khakimov R. M., Umirzakova K. O. Existence of periodic Gibbs measures for one fertile HC models // Abstracts of the International Online Conference Frontier in Mathematics and Computer science, October 12-15, 2020, p. 215.

Asymptotics of the eigenvalues of the perturbed bilaplacian in a one-dimensional lattice

Khalkhuzhaev A. M.[1], Pardabaev M. A.[2]

V.I.Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan

[1]ahmad_x@mail.ru; [2]m.pardaboev@mathinst.uz

Abstract. *We study eigenvalues of the Schrödinger-type operator*

$$\widehat{\mathbf{h}}_\mu := \widehat{\Delta}\widehat{\Delta} - \mu\widehat{\mathbf{v}}_{ab}, \quad \mu > 0,$$

in one dimensional lattice $\mathbb{Z}$, where $\widehat{\Delta}$ is the discrete Laplacian on $\mathbb{Z}$ and $\widehat{\mathbf{v}}_{ab}$ is a rank one-operator depending on nonzero real parameters a and b. We prove that the number $\mu_0 := 0$, is the coupling constant

threshold, i.e., for any $\mu \in (0, \mu_0]$ *the discrete spectrum of* $\widehat{\mathbf{h}}_\mu$ *is empty and for any* $\mu > \mu_0$ *the discrete spectrum of* $\mathbf{h}_\mu$ *is a singleton* $e(\mu)$*, and* $e(\mu) < 0$ *for* $\mu > \mu_0$*. Moreover, we study the properties of* $e(\mu)$ *as a function of* μ*, in particular, we find the asymptotics of* $e(\mu)$ *as* $\mu \searrow \mu_0$ *and* $\mu \to +\infty$*.*

Let $\mathbb{Z}$ be the one-dimensional lattice and $\ell^2(\mathbb{Z})$ be the Hilbert space of square-summable functions defined on $\mathbb{Z}$. In this paper we study the discrete spectrum of one-parameter family

$$\widehat{\mathbf{h}}_\mu = \widehat{\Delta}\widehat{\Delta} - \mu \widehat{\mathbf{v}}_{ab}, \quad \mu > 0,$$

where

$$\widehat{\Delta}\hat{f}(x) = \hat{f}(x) - \frac{\hat{f}(x+1) + \hat{f}(x-1)}{2}, \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}),$$

is the discrete Laplacian, and

$$\widehat{\mathbf{v}}_{ab}\hat{f}(x) = \begin{cases} a^2\hat{f}(0) - \frac{ab}{2}\hat{f}(1) - \frac{ab}{2}\hat{f}(-1), & x = 0, \\ -\frac{ab}{2}\hat{f}(0) + \frac{b^2}{4}\hat{f}(1) + \frac{b^2}{4}\hat{f}(-1), & x = \pm 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

is a rank-one potential. Here a and b are non-zero real numbers.

Let $\mathbb{T}$ be the one-dimensional torus and $L^2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square-integrable function on $\mathbb{T}$. Let

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T}), \quad \mathcal{F}\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x \in \mathcal{Z}} \hat{f}(x) e^{ipx}$$

be the standard Fourier transform with the inverse

$$\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} f(p) e^{-ipx} dp.$$

The momentum representation $\mathbf{h}_\mu$ of $\widehat{\mathbf{h}}_\mu$ defined as $\mathbf{h}_\mu = \mathcal{F}\widehat{\mathbf{h}}_\mu \mathcal{F}^{-1}$ and acts in $L^2(\mathbb{T})$ as

$$\mathbf{h}_\mu := \mathbf{h}_0 - \mu \mathbf{v}_{ab}, \qquad \mu \geq 0,$$

where $\mathbf{h}_0 := \mathcal{F}\widehat{\mathbf{h}}_0\mathcal{F}^{-1}$ is the multiplication operator in $L^2(\mathbb{T})$ by

$$\mathfrak{e}(q) := (1 - \cos q)^2,$$

and $\mathbf{v}_{ab} := \mathcal{F}\widehat{\mathbf{v}}_{ab}\mathcal{F}^{-1}$ is the rank-one integral operator

$$\mathbf{v}_{ab}f(p) = (a - b\cos p)\,\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (a - b\cos q)\ f(q) dq.$$

where $a \neq 0$ and $b \neq 0$ - arbitrary real numbers.

Since $\sigma(\widehat{\Delta}) = \sigma_{ess}(\widehat{\Delta}) = [0, 2]$, we have $\sigma(\mathbf{h}_0) = \sigma_{ess}(\mathbf{h}_0) = [0, 4]$.

Hence, by the compactness of $\mathbf{v}_{ab}$ and WeylвЂ™s Theorem,

$$\sigma_{ess}(\mathbf{h}_\mu) = \sigma_{ess}(\mathbf{h}_0) = [0, 4]$$

for any $\mu > 0$. By the nonnegativity of $\mathbf{v}_{ab}$ the operator $\mathbf{h}_\mu$ has empty positive discrete spectrum.

Note that the bottom of $\mathbf{h}_0$ is not quadratic, i.e., degenerate. The spectral theory of lattice Schrödinger-type operators with quadratic bottom, in particular with discrete Laplacian, has been extensively studied in recent years [3],[4] because of their applications in the theory of ultracold atoms in optical lattices [1],[6],[8]. For these models, the appearance of weakly coupled bound states is quite well-understood: the sufficient and necessary condition for the existence of discrete spectrum is tightly related to the coupling constant threshold phenomenon [2]: a number $\lambda_0 0$ is a coupling constant threshold for the Hamiltonian $-\Delta + \lambda V$ with V being a short range potential, if some eigenvalue $e(\lambda)$ is absorbed into the continuous spectrum as $\lambda \searrow \lambda_0$, and conversely, for any $\epsilon > 0$, as $\lambda \nearrow \lambda_0 + \epsilon$ the continuous spectrum gives birth to a new eigenvalue. This phenomenon and the absorption rate of eigenvalues as

$\lambda \to \lambda_0$ have been studied for discrete Schrödinger operators with quadratic bottom, for example, in [3],[4],[5].

The expansion of eigenvalues of one-dimensional bilaplacian with zero-range perturbation has been established recently in [7]. In this paper, we study the the absorption rate of negative eigenvalues of $\mathbf{h}_\mu$ as μ converges to coupling constant threshold. It highly depends on a and b.

Theorem. *Suppose that $a \neq b$. Then for any $\mu > 0$ the operator $\mathbf{h}_\mu$ has a unique eigenvalue $e(\mu)$ outside the essential spectrum and the associated eigenfunction is*

$$f_\mu(p) := \frac{a - b\cos p}{\mathfrak{e}(p) - e(\mu)}$$

Moreover:

(1) $e(\mu) < 0$ for any $\mu > 0$;

(2) the function $\mu \in (0, +\infty) \mapsto e(\mu)$ is real-analytic strictly decreasing, strictly concave in $(0, +\infty)$ with asymptotics

$$\lim_{\mu \searrow 0} e(\mu) = 0 \quad \textit{and} \quad \lim_{\mu \to +\infty} \frac{e(\mu)}{\mu} = -\frac{1}{2}(2a^2 + b^2)$$

(3) for sufficiently small and positive μ

$$(-e(\mu))^{1/4} = \sum_{n \geq 1} D_n \mu^{n/3},$$

where D_n, $n = 1, 2, \ldots,$ are real coefficients with

$$D_1 := 2^{-1/3}(a-b)^{2/3}, \quad D_2 = 0,$$

$$D_3 := \frac{a(a-b)}{24}, \quad D_4 := \frac{2^{-1/3}b^2(a-b)^{2/3}}{3}.$$

References

1. D. Jaksch *et al*: Cold bosonic atoms in optical lattices. Phys. Rev. Lett. 81 (1998), 3108–3111.
2. M. Klaus, B. Simon: Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case. Ann. Phys. 130 (1980), 251–281.
3. S. Lakaev, A. Khalkhuzhaev, Sh. Lakaev: Asymptotic behavior of an eigenvalue of the two-particle discrete Schrödinger operator. Theoret. Math. Phys. 171 (2012), 800–811.
4. S. Lakaev, Sh. Kholmatov: Asymptotics of eigenvalues of two-particle Schrödinger operators on lattices with zero range interaction. J. Phys. A: Math. Theor. 44 (2011).
5. S. Lakaev, Sh. Kholmatov: Asymptotics of the eigenvalues of a discrete Schrödinger operator with zero-range potential. Izvestiya: Mathematics 76 (2012), 946–966.
6. M. Lewenstein, A. Sanpera, A. Ahufinger: Ultracold Atoms in Optical Lattices. Simulating Quantum Many-Body Systems. Oxford University Press, Oxford, 2012.
7. Sh. Kholmatov, M. Pardabaev: On Spectrum of the Discrete Bilaplacian with Zero-Range Perturbation. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 6, pp. 1286вЃЎ1293..
8. K. Winkler *et al.*:Repulsively bound atom pairs in an optical lattice. Nature 441 (2006).

Reductional method in perturbation theory of generalized spectral E. Schmidt problem

Khalmukhamedov A.R.[1], Akhmadjanova D.D.[2]

National University of Uzbekistan named M.Ulugbek, Uzbekistan, Tashkent,
[1]AKhalmukhamedov@yahoo.ru; [2]durdona@mail.ru

Let E_1, E_2 be Banach spaces $E_1 \subset E_2 \subset H$ with dense embeddings, H be a Hilbert space and $B \in L(E_1, E_2)$ be closed linear operator. Let $\lambda_0 \in R$ - be n-multiple Fredholmian point of the following E. Schmidt unperturbed spectral problem, analytically dependent on E. Schmidt spectral parameter $\lambda \in R$, with relevant E. Schmidt eigenelements $\begin{pmatrix} \varphi_{i0} \\ \psi_{i0} \end{pmatrix}$

$$B\varphi_{i0} = A(\lambda_0)\psi_{i0} \tag{1}$$

$$B^*\psi_{i0} = A^*(\lambda_0)\varphi_{i0} \tag{2}$$

We considered following perturbed E.Schmidt's spectral problem:

$$B\varphi = A(\lambda, \varepsilon)\psi, \tag{3}$$

$$B^*\psi = A^*(\lambda, \varepsilon)\varphi, \tag{4}$$

where $\mu = \lambda - \lambda_0$, $\varepsilon \in R, |\varepsilon| < \rho_0$ -small parameter, and $A(\lambda, \varepsilon)\psi = \sum\limits_{i+j\geq 0} A_{ij}\mu^i\varepsilon^j\psi$. It is required to determine the perturbed eigenvalues with relevant eigenvectors $\begin{pmatrix} \varphi(\varepsilon) \\ \psi(\varepsilon) \end{pmatrix}$ in the form of series on small parameter ε degrees. In the direct sum $H \oplus H$ our problem can be rewritten in the following matrix form

$$(\mathcal{B}_0 - \mathcal{A}(\lambda_,))\Phi \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{A}(\lambda_0) \\ -\mathbf{A}^*(\lambda_0) & \mathbf{B}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(\varepsilon) \\ \psi(\varepsilon) \end{pmatrix} = \\ = \sum_{i+j\geq 1} \mu^i\varepsilon^j \begin{pmatrix} 0 & A_{ij} \\ A^*_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(\varepsilon) \\ \psi(\varepsilon) \end{pmatrix} \tag{5}$$

E. Schmidts eigenelements of the adjoint perturbation problem corresponding to the same eigenvalues are determined analogously

$$(\mathcal{B}^*_0 - \mathcal{A}^*(\lambda_,))\Psi \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{B}^* & -\mathbf{A}(\lambda_0) \\ -\mathbf{A}^*(\lambda_0) & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(\varepsilon) \\ \overline{\psi}(\varepsilon) \end{pmatrix} = \\ = \sum_{i+j\geq 1} \mu^i\varepsilon^j \begin{pmatrix} 0 & A_{ij} \\ A^*_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(\varepsilon) \\ \overline{\psi}(\varepsilon) \end{pmatrix} \tag{6}$$

In this article at the usage of the reduction method suggested in the articles [1], [2] the investigation of perturbation of multiple eigenvalues is reduced to the investigation of perturbation of simple ones.

As application of the obtained results the problem about boundary perturbation for the system of two Sturm-Liouville problem with E. Schmidts spectral parameter is considered.

Definition. The condition of the common zeroes for the operator $\mathcal{B}$ and $\mathcal{A}(\lambda_0, 0)$ called by the "degeneration removal"(DR) condition.

Theorem 1. Let the DR condition be satisfied. Then a eigenvalues $\lambda_i(\varepsilon)$ of the problem (3),(4) with relevant eigenelements $\Phi_i(\varepsilon) = \left(\varphi_(\varepsilon)\,\psi_i(\varepsilon)\right)^T$, and defect-elements $\Psi_i(\varepsilon) = \left(\tilde{\psi}_(\varepsilon)\,\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)\right)^T$, are the simple eigenvalues of the regularized operators (9) with corresponding eigenelement and defect functional of the form

$$\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \Phi_i(\varepsilon) + \sum_{s\neq i} c_{is}\Phi_s(\varepsilon),\ \ \tilde{\Psi}_i(\varepsilon) = \Psi_i(\varepsilon) + \sum_{s\neq i} c_{is}\Psi_s(\varepsilon)$$

Theorem 2. If $dimN\left(\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda_0, 0)\right) = dimN\left(\mathcal{B}^* - \mathcal{A}^*(\lambda_0, 0)\right) = n$ and $\ll \mathcal{A}_{10}\Phi_{i0}, \Psi_{i0} \gg\neq 0, i = \overline{1,n},$ fot all $i = \overline{1,n},$ then for suffiriently small ε there exist exactly n geometrically simple eigenvalues $\lambda_i(\varepsilon)$, $\lambda_i(0) = \lambda_0,$ with corresponding eigenelements $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ and defect functionals $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ analytically dependent on ε.

Theorem 3. Let at the GJChs presence $\ll \sum\limits_{k=1}^{p_i} \mathcal{A}_k\Phi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \Psi_{i0} \gg\neq\ 0,$ for all, $i = \overline{1,n}$. If $L_{0j} = 0,\ j = \overline{1,\infty}$ and $L_{11} \neq 0$ then there exist K simple eigenvalues with relevant to them eigenelements presenting in the form of series by $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. If $L_{0j} = 0,\ j = \overline{1, q_i - 1},\ L_{0q_i} \neq 0, L_{11} \neq 0$ then there exist exactly K eigenvalues n of which with the relevant eigenelements representary by integer degrees of ε, according to the first nonzero coefficient from the sequence $\{L_{1j}\}$.

1. Rakhimov D. G. On the perturbations of Fredholm eigenvalues of linear operators. Middle Volga Mathematical Society Journal (MVS Journal). vol. 17. No 3,2015, p. 37-43.
2. Rakhimov D. G. On the perturbations Fredholm eigenvalues of the linear operators. Journal of Differential Equations. Minsk. 2017, vol. 53, No 5, pp. 615-623.

On the extension of solvable Lie algebras with filiform nilradical

Khudoyberdiyev A.Kh.[1], Sheraliyeva S.A.[2]
National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
[1]khabror@mail.ru; [2]abdiqodirovna@mail.ru

It is well known that the method of central extension is very useful to the classification of finite-dimensional algebras. This method first used by Skjelbred and Sund for the classification of nilpotent Lie algebras [1]. After that Sund in [2] generalize central extension method for the solvable Lie algebras. It should be noted that the central extension method is very applicable to the classification of nilpotent algebras of low dimensional. There is several works which applied central extension method to the classification of low dimensional nilpotent algebras. However, there is not many works which extension is used for the classification of solvable algebras. In this for we apply extension method for the solvable Lie algebras with filiform nilradical.

Definition 1. An algebra $(L, [-,-])$ over a field F is called Lie algebra if for any $x, y, z \in L$ the following identities:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

$$[x,x] = 0$$

hold.

For an arbitrary Lie algebra L we define the derived and central series as follows:

$$L^{[1]} = L,\ L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}],\ s \geq 1,$$

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1.$$

Definition 2. An n-dimensional Lie algebra L is called solvable (nilpotent) if there exist $s \in N$ ($k \in N$) such that $L^{[s]} = 0$ ($L^k = 0$). Such minimal numbers are called index of solvability and nilpotency, respectively.

Filiform Lie algebra is a nilpotent algebra which index of nilpotency consist with the dimension of the algebra. In [3] it is proven up to isomorphism there is unique $n+2$ dimensional solvable Lie algebra with n-dimensional model filiform nilradical and the table of multiplication this solvable Lie algebra is follows.

$$R(n_1)\ :\begin{cases} [e_k, e_1] = e_{k+1}, & 2 \leq k \leq n, \\ [e_1, x_1] = e_1, & \\ [e_k, x_1] = (k-2)e_k, & 3 \leq k \leq n, \\ [e_k, x_2] = e_k, & 2 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Now let L be Lie algebra and A be an abelian algebra. Let $\theta : L \to EndA$ a representation, $B : L \times L \to A$ an anti-symmetric bilinear map satisfying the condition

$$\psi(x, [y, z]) + \psi(z, [x, y]) + \psi(y, [z, x]) + \theta(x)\psi(y, z) + \theta(z)\psi(x, y) + \theta(y)\psi(z, x) = 0,$$

where $x, y, z \in L$

The bilinear map satisfying previous condition is a 2-cocycle on L with respect to θ. The set of all such 2-cocycles is denoted by $Z^2(L, \theta)$.

The 2-coboundaries on L with respect to θ are defined as

$$df(x, y) = f([x, y]) + \theta \circ \alpha(y)(f(x)) - \theta \circ \alpha(x)(f(y))$$

for some linear map $f : L \to A$ and $\alpha \in Aut(L)$. The set of all such 2-coboundaries is denoted by $B^2(L, \theta)$ and its a subset of $Z^2(L, \theta)$.

Now we give the extension for the solvable Lie algebra L. For the given $\psi \in Z^2(L, \theta)$, we construct a Lie algebra $\tilde{L} = L(\psi, \theta)$ which is an extension of L by A as follows: $\tilde{L} = L \oplus A$ as vector space, and the Lie product is given by

$$[(x, a), (y, b)] = ([x, y], \psi(x, y) + \theta(x)b - \theta(y)a);$$

for all $a, b \in A, x, y \in L$.

In [2] it is proved that two extensions $L(\psi_1, \theta_1)$ and $L(\psi_2, \theta_2)$ are isomorphic if and only if the following equation is hold

$$\psi_2(\alpha(x), \alpha(y)) = \beta \circ \psi_1(x, y) + f([x, y]) + \theta_2 \circ \alpha(y)(f(x)) - \theta_2 \circ \alpha(x)(f(y)),$$

where $\alpha \in Aut(L), \beta \in Aut(A)$.

In the following theorem we find all non-split extension of solvable Lie algebra $R(n_1)$.

Theorem. Let $\widetilde{L}$ be a extension of the solvable Lie algebra $R(n_1)$, then $dim(\widetilde{L}) = dim(R(n_1)) + 1$ and $\widetilde{L}$ is isomorphic to on of the following two non-isomorphic algebras:

$$\widetilde{L}_1 : \begin{cases} [e_k, e_1] = e_{k+1}, & 2 \leq k \leq n, \\ [e_1, x_1] = e_1, & \\ [e_k, x_1] = (k-2)e_k, & 3 \leq k \leq n+1, \\ [e_k, x_2] = e_k, & 2 \leq k \leq n+1, \end{cases}$$

$$\widetilde{L}_2 : \begin{cases} [e_k, e_1] = e_{k+1}, & 2 \leq k \leq n-1, \\ [e_i, e_{n+2-i}] = (-1)^i e_{n+1}, & 2 \leq i \leq \frac{n+1}{2}, \\ [e_1, x_1] = e_1, & \\ [e_k, x_1] = (k-2)e_k, & 3 \leq k \leq n, \\ [e_{n+1}, x_1] = (n-2)e_{n+1}, & \\ [e_k, x_2] = e_k, & 2 \leq k \leq n, \\ [e_{n+1}, x_2] = 2e_{n+1} & \end{cases}$$

where n is odd.

Remark. In case of n is even there exist only one extension $\widetilde{L}_1$.

REFERENCES

1. Skjelbred T., Sund T., Sur la classification des algebres de Lie nilpotentes, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 286 (5)(1978), 241–242.
2. Sund T. On the structure of solvable Lie algebras. Mathematica Scandinavica journal, 44 (2)(1979), 235–242.
3. Šnobl L, Winternitz W. A class of solvable Lie algebras and their Casimir invariants, J. Phys. A 38 (2005) 2687–2700.

-Antiautomorphisms of AW-algebras

Kim D.I.

National University of Uzbekistan
dmitriy.kim.1995.04.23@gmail.com

Let H be a complex Hilbert space, $B(H)$ denote the algebra of all bounded linear operators on H. The *weak (operator) topology* on $B(H)$ is the locally convex topology, generated by seminorms of the form: $\rho(a) = |(\xi, a\eta)|$, $\xi, \eta \in H, a \in B(H)$. W^**-algebra* is a weakly closed complex *-algebra of operators on a Hilbert space H containing the identity operator $\mathbb{1}$. Recall that W^*-algebras are also called *von Neumann algebras*.

Let further M be a W^*-algebra. The set M' of all elements from $B(H)$ commuting with each element from M is called the *commutant* of the algebra M. The *center* $Z(M)$ of a W^*-algebra M is the set of elements of M, commuting with each element from M. It is easy to see that $Z(M) = M \bigcap M'$. Elements of $Z(M)$ are called *central* elements. A W^*-algebra M is called *factor*, if $Z(M)$ consists of the complex multiples of $\mathbb{1}$, i.e if $Z(M) = \{\lambda\mathbb{1}, \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Let e, f, h be projections from M. We say that e is equivalent to f, and write $e \sim f$, if $e = w^*w$, $f = ww^*$ for some partial isometry w from M. A projection e is called: *finite*, if $e \sim f \leq e$ implies $f = e$; *infinite* - otherwise; *purely infinite*, if e doesn't have any nonzero finite subprojection; *abelian*, if the algebra eMe is an abelian W^*-algebra. A W^*-algebra M is called *finite, infinite, purely infinite*, if $\mathbb{1}$ is a finite, infinite, purely infinite respectively; M is *σ-finite*, if any family of pairwise orthogonal projections from M is at most countable; *semifinite*, if each projection in M contains a nonzero finite subprojection; *properly infinite*, if every nonzero projection from $Z(M)$ is infinite; *discrete*, or of *type* I, if it contains a faithful abelian projection (i.e. an abelian projection with the central support $\mathbb{1}$); *continuous*, if there is no abelian projection in M except zero; M is of *type* II, if M is semifinite and continuous; *type* $\mathrm{I_{fin}}$ (respectively I_∞), if M is of type I and finite (respectively properly infinite); *type* II_1 (respectively *type* II_∞), if M is of type II and finite (respectively properly infinite); *type* III, if M is purely infinite. It is known that any W^*-algebra has a unique decomposition along its center into the direct sum of W^*-algebras of the $\mathrm{I_{fin}}$, I_∞, II_1, II_∞ and III types.

A linear mapping $\alpha : M \to M$ is called a **-automorphism* (respectively a *-antiautomorphism) if $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ and $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ (respectively $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$), for all $x, y \in M$. A mapping α is called involutive if $\alpha^2 = id$. A *-automorphism α is called *inner* if there exists a unitary u in M, such that $\alpha(x) = Adu(x) = uxu^*$, for all $x \in M$. We shall denote by $Aut(M)$ the group of all *-automorphisms, by $Ant(M)$ the group of all *-antiautomorphisms, and by $Int(M)$ the group of all inner *-automorphisms of M. Two *-automorphisms or *-antiautomorphisms α and β are said to be *conjugate*, if $\alpha = \theta \cdot \beta \cdot \theta^{-1}$ for some *-automorphism θ.

By a real C*-algebra we mean a real Banach *-algebra R such that the relation $\|a^*a\| = \|a\|^2$ holds and the element $1 + a^*a$ is invertible for any $a \in R$. A real C*-algebra R such that $R + iR$ is a complex W*-algebra is referred to as a real W*-algebra. This is equivalent to the fact that the algebra R is weakly closed and $\mathbb{1} \in R$, $R \cap iR = \{0\}$.

Let A be a real or complex *-algebra and let S be a nonempty subset of A. Put

$$R(S) = \{x \in A |\ sx = 0 \text{ for all } s \in S\}$$

and call $R(S)$ the *right-annihilator* of S. Similarly

$$L(S) = \{x \in A |\ xs = 0 \text{ for all } s \in S\}$$

denotes the *left-annihilator* of S.

Definition. A *-algebra A is called a *Baer *-algebra* if for any nonempty $S \subset A$, $R(S) = gA$ for an appropriate projection g.

Since $L(S) = (R(S^*))^* = (hA)^* = Ah$ the definition is symmetric and can be given in terms of the left-annihilator and a suitable projection h. Here $S^* = \{s^* |\ s \in S\}$.

Definition. A real (or complex) C*-algebra R which is a Baer *-algebra is called an real (resp. complex) *AW*-algebra*.

Every W*-algebra is, of course, an AW*-algebra, however, the converse is not true.

Now, we will given auxiliary results from [1].

Theorem 1. ([1], 4.3.8) Let α and β be involutive *-anti-automorphisms of a (complex) AW*-factor R. Then the real AW*-factors

$$A = \{x \in R: \ \alpha(x) = x^*\} \text{ and } B = \{x \in R: \ \beta(x) = x^*\}$$

are real *-isomorphic if and only if the involutive *-anti-automorphisms α and β are conjugate, i.e. $\beta = \theta\alpha\theta^{-1}$ for a suitable *-automorphism of the AW*-factor M.

Theorem 2. ([1], 4.6.11) Let R be a real AW*-factor of type I. Then R is isometrically *-isomorphic to the algebra $B(H)$ of all bounded $\mathbb{P}$-linear operators on the Hilbert space H over $\mathbb{P}$, where $\mathbb{P}$ is equal to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$. In particular, every AW*-factor of type I is a W*-factor (real or complex).

Hence, taking into account the theorem 1.4.1 [2], we obtain the main result of the article

Theorem 3. Let M be a (complex) AW*-factor.

1. If M is a type I_∞ or I_n (n – odd), then M possesses exactly one conjugacy class of involutive *-antiautomorphisms.
2. If M is a type I_n (n – even), then there exist exactly two conjugacy classes on involutive *-antiautomorphisms of M.

REFERENCES

1. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A. Real W*-algebras, Actions of groups and Index theory for real factors. VDM Publishing House Ltd. Beau-Bassin, Germany, Bonn. ISBN 978-3-639-29066-0. 2010, p.138.

2. Ayupov Sh.A., Rakhimov A.A., Usmanov Sh.M. Jordan, Real and Lie structures in operator algebras. Kluwer Academic Publishers, MAIA. 1997, Vol. 418, 235 p.

Generalized solution of the Cauchy problem for hyperbolic equation with two lines of degeneracy of the second kind

Komilova N.J.

Ferghana State University, Ferghana, Uzbekistan,
nigora.komilova@bk.ru

Consider the following degenerating hyperbolic equation of second kind with two lines of change of the type

$$x^n u_{xx} - (-y)^m u_{yy} = 0 \tag{1}$$

in a finite domain D, bounded by characteristics $AB: \ \xi = 0$, $BC: \ \eta = 1$ and $AB: \ y = 0$ of equation (1) for $y \leq 0$ and $x0$, where m and n are a real numbers $(0 \leq n < m < 1)$;

$$\left.\begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix}\right\} = \frac{2}{2-n} x^{(2-n)/2} \mp \frac{2}{2-m} (-y)^{(2-m)/2} \quad . \tag{2}$$

The Cauchy problem. Find a function $u(x,y) \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ satisfying equation (1) and the following initial-value conditions

$$u(x,0) = \tau(x), \quad u_y(x,0) = \nu(x),$$

where $\tau(x)$ and $\nu(x)$ are sufficiently smooth given functions.

In characteristic coordinates (2), the equation (1) transforms into an equation of the type of the generalized Euler-Poisson-Darboux equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\left[\frac{q}{\eta+\xi}+\frac{p}{\eta-\xi}\right]\frac{\partial u}{\partial\xi}+\left[\frac{q}{\eta+\xi}-\frac{p}{\eta-\xi}\right]\frac{\partial u}{\partial\eta}=0, \tag{3}$$

where

$$2q=\frac{n}{n-2},\ 2p=\frac{m}{m-2},\ -1<2p<2q\le 0,$$

and the domain D is transformed into the domain Δ, the border of which consists of line segments $PM:\xi=0$, $QM:\eta=1$ and $PQ:\eta=\xi$.

It is known that the solution of equation (3) with the following initial data

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1, \tag{4}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial y}=[2(1-2p)]^{-2p}\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2p}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=\nu(x),\ 0<x<1, \tag{5}$$

has the form [1]

$$u(\xi,\eta)=\int_0^1 H_1(\xi,\eta;\zeta)\,\tau(t)d\zeta+\int_0^1 H_2(\xi,\eta;\zeta)\,\tau'(t)d\zeta+\int_0^1 H_3(\xi,\eta;\zeta)\,\nu(t)d\zeta, \tag{6}$$

where

$$H_1(\xi,\eta;\zeta)=\gamma_1(\eta+\xi)^{-q}\zeta^p(1-\zeta)^p t^q[2(1+2p)F(q,1-q;p;\sigma)-$$

$$-\frac{q}{t}(\eta-\xi)\,(1-2\zeta)\,F(q,1-q;p;\sigma)-\frac{dF(q,1-q;p;\sigma)}{d\sigma}\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial\zeta}\Big],$$

$$H_2(\xi,\eta;\zeta)=-\gamma_1(\eta+\xi)^{-q}(\eta-\xi)\,(1-2\zeta)\,\zeta^p(1-\zeta)^p t^q F(q,1-q;p;\sigma),$$

$$H_3(\xi,\eta;\zeta)=-\gamma_2(\eta+\xi)^{-q}\,(\eta-\xi)^{1-2p}\,\zeta^{-p}(1-\zeta)^{-p}t^q F(q,1-q;1-p;\sigma),$$

$$t=\xi+(\eta-\xi)\,\zeta,\qquad \sigma=\frac{(\eta-\xi)^2\zeta(1-\zeta)}{2t(\eta+\xi)},$$

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(1+2p)}{2^{1-q}\Gamma^2(1+p)},\ \gamma_2=[2(1-2p)]^{2p}2^{q-1}\frac{\Gamma(1-2p)}{\Gamma^2(1-p)},$$

$F(a,b;c;x)$ is a famous Gaussian hypergeometric function.

Definition. If $\tau'(x)$ and $\nu(x)$ are continuous functions for $0<x<1$, then an expression of the form (6) is called a generalized solution of eq. (3) in the domain Δ.

We consider following class of the generalized solutions of the Cauchy problem (3)–(5).

Definition. By a generalized solution of the class $R_2(p,q)$ of the equation (3), we mean a generalized solution (6), where the function $\tau(x)$ is representable in the form

$$\tau(x)=\int_0^x (x-s)^{-2p}(x+s)^{-2q}s^{2q}F\left(q,\ q-p-1;1-p;\ \frac{(x-s)^2}{(x+s)^2}\right)T(s)ds, \tag{7}$$

where $\nu(x)$ and $T(x)$ are continuous and integrable functions in $(0,1)$.

Substituting (7) in (6), we obtain

$$u(\xi,\eta)=\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)^{-q}\int\limits_0^{\xi}(\eta-t)^{-p}(\xi-t)^{-p}t^qF\left(q,\ 1-q;1-p;\sigma\right)T(t)dt$$

$$+\left(\frac{\eta+\xi}{2}\right)^{-q}\int\limits_{\xi}^{\eta}(\eta-t)^{-p}(t-\xi)^{-p}t^qF\left(q,\ 1-q;1-p;\ \sigma\right)N(t)dt, \tag{8}$$

where

$$N(t)=\frac{1}{2\cos\pi\beta}T(t)-\gamma_2\nu(t).$$

Theorem. If $T(x)$ and $\nu(x)$ are continuous and integrable functions in $(0,1)$ and the function $\tau(x)$ is represented by (7), then the Cauchy problem (3)–(5) has unique generalized solution $u\in R_2(p,q)$ represented by formula (8).

REFERENCES

1. Makarov I.A. Cauchy problem for an equation with two lines of degeneracy of the second kind// Math. Phys. Kuybishev, 1976. P. 3–7. [In Russian].

A spectrum of elements of Banach–Kantorovich algebras over L_0

Kudaybergenov K. K.,[1] **Arziev A. D.**[2]

[1,2] V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics
Uzbekistan Academy of Sciences,Tashkent, Uzbekistan
karim2006@mail.ru, allabayarziev@gmail.com

Let (Ω,Σ,μ) be a measure space having the direct sum property and let $L^0=L^0(\Omega,\Sigma,\mu)$ be an algebra of all complex measurable functions on Ω (functions equal almost everywhere are identified).

Let $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ be a set of all bounded complex-valued measurable functions on Ω and

$$L^\infty(\Omega)=\left\{f\in L^0:\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \lambda>0,\ |f|\le\lambda\mathbf{1}\right\},$$

where $\mathbf{1}$ is the unit in L^0. Note that the Boolean algebra ∇ of all idempotents in L^0, coincides with the set of all classes of functions of the form χ_A, where $A\in\Sigma$.

Consider a linear space X over the field of complex numbers $\mathbb{C}$. A mapping $\|\cdot\|:X\to L^0$ is called a L^0-valued norm on X, if for every $x,\,y\in X,\ \lambda\in\mathbb{C}$ the following relations hold:

1) $\|x\|\ge 0,\ \ \|x\|=0\Leftrightarrow x=0$;

2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$;

3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$.

The pair $(X,\ \|\cdot\|)$ is called a lattice-normed space over L^0.

A lattice-normed space X is called d-decomposable, if for any $x\in X$ with $\|x\|=\lambda_1+\lambda_2,\ 0\le\lambda_1,\,\lambda_2\in L^0,\ \lambda_1\lambda_2=0$ there exist $x_1,x_2\in X$ such that $x=x_1+x_2$ and

$\|x_1\| = \lambda_1, \|x_2\| = \lambda_2$. A net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ in X is called (bo)-converging to $x \in X$, if the net $\{\|x_\alpha - x\|\}_{\alpha\in A}$ is (o)-converges to zero in L^0. A (bo)-complete d-decomposable lattice-normed space over L^0 is called a Banach–Kantorovich space over L^0 (see [1]). It is known that every Banach–Kantorovich space X over L^0 is a module over L^0 and $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ for all $\lambda \in L^0$, $u \in X$ (see [1]).

Let $\mathcal{A}$ be an arbitrary algebra over the field $\mathbb{C}$ and $\mathcal{A}$ is a module over L^0, with $(\lambda u)v = \lambda(uv) = u(\lambda v)$ for all $\lambda \in L^0$, $u, v \in \mathcal{A}$. Consider on $\mathcal{A}$ some L^0-valued norm $\|\cdot\|$, endowing $\mathcal{A}$ with the structure of Banach–Kantorovich space, in particular, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ for all $\lambda \in L^0$, $u \in \mathcal{A}$.

An algebra $\mathcal{A}$ is called a Banach–Kantorovich algebra over L^0, if $\|uv\| \leq \|u\|\|v\|$ for all $u, v \in \mathcal{A}$. If $\mathcal{A}$ is a Banach–Kantorovich algebra over L^0 with a unit e such that $\|e\| = 1$, where $\mathbf{1}$ is the unit in L^0, then $\mathcal{A}$ is called a unital Banach–Kantorovich algebra. A subset K of Banach–Kantorovich space X over L^0 is called a *cyclic*, if $\sum\limits_{i\in I} \pi_i x_i \in K$ for each net $\{x_i\}_{i\in I}$ from K and any partition of the unit $\{\pi_i\}_{i\in I}$ in ∇.

Let $\mathcal{X}$ be a mapping that matches to each point $\omega \in \Omega$ a Banach algebra $\big(\mathcal{A}(\omega), \|\cdot\|_{\mathcal{A}(\omega)}\big)$, where $\mathcal{A}(\omega) \neq \{0\}$ for all $\omega \in \Omega$. A function u is called a section of $\mathcal{X}$, if it is defined on Ω almost everywhere and takes a value $u(\omega) \in \mathcal{A}(\omega)$ for $\omega \in \mathrm{dom}(u)$, where $\mathrm{dom}(u)$ is the domain of u.

Let L be some set of sections.

A pair $(\mathcal{X}, L)$ is called measurable Banach bundle, if

1) $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in L$ for all $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ and $c_1, c_2 \in L$, where $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 : \omega \in \mathrm{dom}\,(c_1) \cap \mathrm{dom}\,(c_2) \mapsto \lambda_1 c_1(\omega) + \lambda_2 c_2(\omega)$;

2) the function $\|c\| : \omega \in \mathrm{dom}(c) \mapsto \|c(\omega)\|_{\mathcal{A}(\omega)}$ is measurable for all $c \in L$;

3) the set $\{c(\omega) : c \in L,\, \omega \in \mathrm{dom}(c)\}$ is dense in $\mathcal{A}(\omega)$ for all $\omega \in \Omega$;

4) If $u, v \in L$, then $uv \in L$, where $uv : \omega \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v) \mapsto u(\omega)v(\omega)$.

A section s is called simple, if there exists $c_i \in L,\ A_i \in \Sigma,\ i = 1, \ldots, n$, such that $s(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(\omega) c_i(\omega)$. A section u called measurable, if there exists a sequence $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ of simple sections such that $\|s_n(\omega) - u(\omega)\|_{\mathcal{A}(\omega)} \to 0$ for almost all $\omega \in \Omega$.

Denote by $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ a set of all measurable sections, and by $L^0(\Omega, \mathcal{X})$ the factorization of $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})$ with respect to equality almost everywhere.

Let

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{X}) = \big\{u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X}) : \|u(\omega)\|_{\mathcal{A}(\omega)} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)\big\}$$

and

$$L^\infty(\Omega, \mathcal{X}) = \big\{\hat{u} \in L^0(\Omega, \mathcal{X}) :\ \|\hat{u}\| \in L^\infty(\Omega)\big\}\,.$$

Consider an arbitrary lifting $\rho : L^\infty(\Omega) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ [2], and a vector valued lifting $l_\mathcal{X} : L^\infty(\Omega, \mathcal{X}) \to \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{X})$ associated with lifting ρ [3].

Let $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ are measurable bundles of Banach algebras over Ω. The map $H : \omega \to H_\omega$, where $H_\omega : X(\omega) \to Y(\omega)$ is an injective homomorphism of Banach algebras, we call the embedding of $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$, if $\{H_\omega(u(\omega)) :\ u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})\} \subset \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{Y})$. In the case when $\{H_\omega(u(\omega)) :\ u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{X})\} = \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{Y})$ the embedding H, is called an isomorphism from $\mathcal{X}$ to $\mathcal{Y}$ (in this situation, the bundles $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ will be called isomorphic).

Proposition. *For every Banach–Kantorovich algebra $\mathcal{A}$ over L^0 there exists a unique, up to isomorphism, measurable bundle of Banach algebras $(\mathcal{X}, L)$ with a vector-valued lifting $l_\mathcal{X}$ such that $\mathcal{A}$ is isometrically isomorphic to $L^0(\Omega, \mathcal{X})$, and*

$\{l_{\mathcal{X}}(x)(\omega) : x \in L^\infty(\Omega, \mathcal{X})\} = X(\omega)$ for all $\omega \in \Omega$. Moreover, if $\mathcal{A}$ is a unital algebra, then $X(\omega)$ is also unital algebra for all $\omega \in \Omega$.

Let ∇ be the Boolean algebra of all idempotents in L^0. If $\mathcal{A}$ is a unital Banach–Kantorovich algebra over L^0, then the subalgebra $\pi\mathcal{A} = \{\pi x : x \in \mathcal{A}\}$, where $\pi \in \nabla, \pi \neq 0$ can be considered as a unital algebra with unit πe. By $\mathrm{spm}(x)$ we denote the set of all $\lambda \in \mathrm{sp}(x)$ such that for every $\pi \in \nabla$, $\pi \neq 0$, the element $\pi(\lambda e - x) \notin \mathrm{Inv}(\pi\mathcal{A})$, where $\mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ – set of all invertible elements of the algebra $\mathcal{A}$.

The next result is a version of Gelfand's spectrum theorem for elements of Banach–Kantorovich algebras over L^0.

Theorem 1. *For every $x \in \mathcal{A}$ the set $spm(x)$ is nonempty, (o)-closed, cyclic and bounded subset of L^0.*

REFERENCES

1. Kusraev A.G. Dominated operators. Kluwer, 2000.
2. Gutman A.E. Banach bundles in the theory of lattice–normed spaces. II. Measurable Banach bundles// Siberian Adv. Math. **3** (1993), no. 4, 8–40.
3. Ganiev I.G., Chilin V.I.Measurable bundles of C^*-algebras// Vladikavkaz. Math. J. **5** (2003), no. 1, 35-38.

Partial orders on $*$-regular rings

Kudaybergenov K. K.[1], Nurjanov B. O.[2]

Karakalpakstan branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan,
karim2006@mail.ru[1],
nurjanov@list.ru[2]

A ring $\mathcal{A}$ is a $*$-ring (or ring with involution) if there exists an operation $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ such that for all $a, b \in \mathcal{A}$

$$(a^*)^* = a, \quad (a+b)^* = a^* + b^*, \quad (ab)^* = b^* a^*.$$

A ring $\mathcal{A}$ is called regular if, for each $x \in \mathcal{A}$, there exists an element $y \in \mathcal{A}$ such that $xyx = x$. An involution $*$ of $\mathcal{A}$ is called proper if $x^*x = 0$ implies $x = 0$ for any $x \in \mathcal{A}$. A $*$-ring $\mathcal{A}$ is said to be $*$-regular if it is a regular ring with proper involution.

Let $\mathcal{A}$ be a $*$-regular ring. Then there exists a unique projection $r(x)$ such that

(1) $xr(x) = x$;

(2) $xy = 0$ if and only if $r(x)y = 0$.

Similarly, there exists a unique projection $l(x)$ such that

(3) $l(x)x = x$;

(4) $yx = 0$ if and only if $yl(x) = 0$.

The projections $r(x)$ and $l(x)$ are called the right projection and the left projection of x, respectively. The projection $s(x) = l(x) \vee r(x)$ is the support of the element x.

Let us consider the so-called rank-metric ρ on $\mathcal{A}$ defined as follows

$$\rho(x, y) = \mu(l(x - y)),\ x, y \in \mathcal{A}$$

(see [1, Lemma 18.1]), where μ is a real-valued function on the lattice of all projections from $\mathcal{A}$.

Let $\mathcal{A}$ be a $*$-regular ring such that it is a rank-ring with a rank-metric ρ. Moreover, we shall assume that $(\mathcal{A}, \rho)$ is a complete metric $*$-ring.

For elements $a, b \in \mathcal{A}$ set

$$a \prec_s b \Longleftrightarrow b = a + c,\ s(a)s(c) = 0,$$

$$a \prec_l b \Longleftrightarrow l(a)b = a,$$

$$a \prec_r b \Longleftrightarrow br(a) = a.$$

A relation $\prec$, where $\prec \in \{\prec_s, \prec_l, \prec_r\}$, is a partial order on $\mathcal{A}$, that is,

(1) $x \prec x$;

(2) $x \prec y,\ y \prec x \Rightarrow x = y$;

(3) $x \prec y,\ y \prec z \Rightarrow x \prec z$.

We shall consider the order topologies on $*$-regular ring $\mathcal{A}$ generated with respect the partial orders $\prec_s$, $\prec_l$ and $\prec_r$.

The notion of order convergence of a net was introduced by G. Birkhoff (see [2]).

Let us recall a notion of (o)-topology or order topology (for details see [2, 3]). Let $\prec \in \{\prec_s, \prec_l, \prec_r\}$. For a net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{A}$, the notion $x_\alpha \uparrow x$ (resp. $x_\alpha \downarrow x$), where $x \in \mathcal{A}$, means that $x_\alpha \prec x_\beta$ (resp. $x_\beta \prec x_\alpha$) for $\alpha \leq \beta$ and $x = \sup\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ (resp. $x = \inf\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$). A net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{A}$ is called (o)-convergent to the element x in $\mathcal{A}$ (denoted by $x_\alpha \stackrel{(o)}{\to} x$), if there exist nets $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ and $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A}$ of $\mathcal{A}$ such that $y_\alpha \prec x_\alpha \prec z_\alpha$ for each $\alpha \in A$ and $y_\alpha \uparrow x$, $z_\alpha \downarrow x$. The strongest topology on $\mathcal{A}$ for which (o)-convergence of nets implies their convergence in the topology is called the order topology, or the (o)-topology, and is denoted by $t_o(\prec)$. Here $\prec$ is $\prec_s$, $\prec_l$ or $\prec_r$.

Let t_ρ be the topology on $\mathcal{A}$ generated by the rank-metric ρ.

Theorem. Let $\mathcal{A}$ be a $*$-regular ring with a rank-metric such that $(\mathcal{A}, \rho)$ is a complete metric $*$-ring. Then the order topology $t_o(\prec)$ stronger than t_ρ.

REFERENCES

1. von Neumann J. Continuous geometry, Foreword by Israel Halperin, Princeton Mathematical Series, No. 25 Princeton University Press, Princeton, N.J. 1960.

2. Birkhoff G., von Neumann J. The logic of quantum mechanics // Ann. of Math. 1936. 37, no. 4, 823–843.

3. Vulikh B.Z. Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces, Gordon and Breach, New York. 1967.

Some limit theorems for the critical Galton-Watson branching processes

Kudratov Kh.[1], **Khusanbaev Ya.**[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
qudratovh_83@mail.ru;
Institut of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
yakubjank@mail.ru

Suppose that $\{\xi(k,j)\ ,\ k,j\in\mathbb{N}\}$ be a sequence of independent identically distributed random variables taking non-negative integer values. Let the random variable $\xi(1,1)$ have the distribution

$$p_k = P(\xi(1,1)=k)\,,\ \ k=0,\,1,...,$$

with the generating function

$$F(s) := Es^{\xi(1,1)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k\,,\ 0\le s\le 1,$$

and $p_0+p_1\neq 1$. Consider the process $W(k)$, $k0$ defined by the following recurrent relation:

$$W(0)=\eta\ ,\ \ W(n)=\sum_{j=1}^{W(n-1)} \xi(n,j)\ ,\ n\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

here η is a random variable that takes positive integer values and independent on the sequence of random variables $\{\xi(k,j)\ ,\ k,j\in\mathbb{N}\}$.

We call the process $\{W(k)\ \ ,\ k0\}$ the Galton-Watson process starting with a random number of particles η. It is well known [1], the asymptotic state of the process $\{W(k)\ \ ,\ k0\}$ depends on the mean value of the random variable $\xi(1,1)$, and it is divided into the classes as follows. It is clear that $F'(1)=E\xi(1,1)$. The process (1) is called subcritical, critical and supercritical if $F'(1)<1$, $F'(1)=1$ and $F'(1)>1$, respectively.

In this work, we consider only critical processes.

We denote the Galton-Watson process generated by the i-th particle in the initial state by $W_i(n),\ n=0,1,....$ Obviously, $W_i(n),\ n=0,1,...\ ,\ i1$ form independent and identically distributed Galton-Watson branching processes. It is known [1] that $W(n)$ can be represented as

$$W(n)=\sum_{i=1}^{\eta} W_i(n)\,,\ n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Independence of random variables η and $\xi(i,j)$, $i1$, $j1$ implies independence of $W_i(n)$ and the random variable η. Denote by $P(n)$ the probability of degeneration of the process $\{W(k)\ \ ,\ k0\}$ at the n-th step, i.e. $P(n)=P(W(n)=0)$. We denote by $R(n)$ the probability of continuation of the process $W_1(n)$ at the n-th step, i.e. $R(n)=P(W_1(n)>0)$. In what follows, we need the following designations:

$$Q(n)=1-P(n)\ ,\ \ h(s):=Es^{\eta}\ ,\ \ H_n(s):=Es^{W(n)}\,,\ A=h'(1)\,,\ \sigma^2=F''(1)\ ,$$

$F_0\,(s)=s$, $F_1(s)=F(s)$, $F_n(s)=F(F_{n-1}(s))$ is the n-th iteration of $F(s)$.

Further the sign $a_n\sim b_n$ indicates that $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$.

The case when the process $\{W(k),\ k0\}$ starts with one particle ($\eta = 1$) has been studied by many authors. So, in 1938, A.N. Kolmogorov [4] obtained the following famous result for the probability of continuation $R(n)$ of the critical Galton-Watson process:

$$R(n) \sim \frac{2}{\sigma^2 n}. \tag{3}$$

In 1947, A.M. Yaglom [5] studied the conditional distribution of the variable $W(n)$ given $W(n) > 0$ and obtained the following result:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{2}{\sigma^2 n} W(n) \le y / W(n) > 0\right) = 1 - e^{-y},\ y > 0, \tag{4}$$

here it was required $F'''(1) < \infty$. The given results (**??**), (2) were later obtained by Kesten, Ney, Spitzer [6] under the condition $F''(1) < \infty$. In [7], V.M. Zolotarev obtained similar results for branching processes with continuous parameters.

In 1968, Slack [8] considered the case of

$$F(s) = s + (1-s)^{1+\alpha} L\left(1-s\right),\ \alpha \in (0,1], \qquad (S)$$

here $L(x)$ is a slowly varying function on a neighborhood of zero, and obtained the following:

$$(1 - F_n(0))^\alpha L(1 - F_n(0)) \sim \frac{1}{\alpha n}, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\exp\left\{-\lambda(1 - F_n(0))W(n)\right\} / W(n) > 0\right) = 1 - \lambda\left(1 + \lambda^\alpha\right)^{-1/\alpha},\quad \lambda > 0. \tag{6}$$

This result implies the result by Yaglom (4) if $\alpha \equiv 1$ and $F''(1) < \infty$. It should be noted that in the case considered by Slack, the equality $F''(1) = \infty$ can be satisfied.

In [3], K.V. Mitov, G.K. Mitov, N.M. Yanev considered the critical case $(F'(1) = 1)$ when the second factorial moment was finite: $F''(1) = \sigma^2 < \infty$, and the generating function of the number of particles in the initial state was satisfied the condition

$$h(s) = 1 - (1-s)^\theta L_0\left(\frac{1}{1-s}\right),\ \theta \in (0,1), \qquad (M)$$

here $L_0(x)$ is a slowly varying function at infinity, and obtained the following results:

$$P(W(n) > 0) = 1 - h(F_n(0)) \sim (\sigma^2 n)^{-\theta} L_0(n), \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\exp\left\{-\lambda(1 - F_n(0))W(n)\right\} / W(n) > 0\right) = 1 - \lambda^\theta (1 + \lambda)^{-\theta},\ \lambda > 0. \tag{8}$$

With the help of Tauber's theorems, it is not difficult to see that condition (M) implies that the average number of particles in the initial state is infinitely. But it follows from (7) that in this case, too, the critical Galton-Watson process will degenerate with probability 1.

In 2007, S.V. Nagaev and V. Wachtel [10] considered the case of $\alpha = 0$ in condition (S), i.e.

$$F(s) = s + (1-s) L_0\left(\frac{1}{1-s}\right) \tag{9}$$

and obtained the following results

$$\lim_{n\to\infty} P\left(H(R^{-1}(n))V(W(n)) < x/W(n) > 0\right) = 1 - e^{-x},\ x > 0. \tag{10}$$

Here

$$H(x) = x(F(1 - x^{-1}) - 1 + x^{-1}),\ x1,$$

and

$$V(y) = \int_0^{1-1/y} \frac{ds}{F(s) - s} = \int_1^y \frac{dx}{xH(x)},\ y1.$$

Thus, the analog of the Yaglom theorem is set for all critical processes that satisfy the condition (S) in the case of $\alpha \in [0,1]$. It should be noted that in the case of $\alpha = 0$ not the distribution of the process itself, but the distribution of the process obtained after substitution converges to an exponential distribution.

All of the above results were obtained for distributions under the condition $W(n) > 0$.

In 1951, W. Feller [9] studied the critical Galton-Watson process starting with a large number of particles and satisfying the condition $F''(1) = \sigma^2 < \infty$, i.e. he considered the case when for process (1), the equality $W(0) = \frac{1}{2}n\sigma^2 x + o(n)$ holds, where the parameter is x, and received the following result without the condition $W(n) > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\exp\left[-\frac{2\lambda W(n)}{\sigma^2 n}\right]/W(0) = \left[\frac{1}{2}n\sigma^2 x + o(n)\right]\right) = \exp\left[-\frac{\lambda x}{1+\lambda}\right],\ \lambda > 0,\ x > 0. \tag{11}$$

In this work, we consider critical Galton-Watson processes starting from a random number of particles and determine the effect of the mean value of the initial state on the asymptotic state of the process. We prove the limit theorem that generalizes W. Feller's result for processes starting from a large number of particles and satisfying the condition (S). We prove the limit theorem for critical processes $W(n)$ satisfied the conditions (S) and (M) under the condition $W(n) > 0$.

Suppose that a critical Galton-Watson process is given, defined by relation (1). The following theorem shows the influence of the average number of particles in the initial state on the asymptotic's of the survival probability of the process.

Theorem 1. If condition (S) is satisfied and $h''(1) < \infty$, then

$$Q^{\alpha}(n)L(1 - F_n(0)) \sim \frac{A^{\alpha}}{\alpha n}$$

as $n \to \infty$.

Theorem 2. If (S) holds then

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\exp\{-\lambda(1 - H_n(0))W(n)\}/W(n) > 0\right) = 1 - A\lambda\left(1 + (A\lambda)^{\alpha}\right)^{-1/\alpha},\quad \lambda > 0.$$

In the case of $\eta = 1$, the equality $A = 1$ holds, and in this case Theorem 2 turns of the Slack theorem.

The following theorem determines the asymptotic distribution of the critical Galton-Watson process, which initially has average many particles and the law of particle multiplication satisfies the condition (S).

Theorem 3. If the condition (S) is satisfied and for the initial state $W(0)$, the condition $W(0) = [bn^{1/\alpha}L^{1/\alpha}(1-F_n(0))]$ is valid, then

$$E\left(\exp\left\{-\lambda(1-F_n(0))W(n)\right\}/W(0) = \left[bn^{1/\alpha}L^{1/\alpha}(1-F_n(0))\right]\right) \to$$

$$\to \exp\left\{-\lambda b\left(\alpha\left(1+\lambda^{\alpha}\right)\right)^{-1/\alpha}\right\}$$

as $n \to \infty$.

Theorem 4. If the conditions (M) and (S) are satisfied, then

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\exp\left\{-\lambda(1-F_n(0))W(n)\right\}/W(n)>0\right) = 1-\lambda^{\theta}(1+\lambda^{\alpha})^{-\theta/\alpha},\ \lambda>0.$$

In the case of $F''(1) < \infty$, Theorem 4 implies the result by Mitov, Mitov, and Yanev. If we set formal $\theta = 1$, $\alpha = 1$ in the last Laplace substitution, we get the Laplace substitution $(1+\lambda)^{-1}$ of the exponential distribution.

Theorem 5. If the conditions (M) and (9) are satisfied, then

$$\lim_{n\to\infty} P\left(H(R^{-1}(n))V(W(n)) < x/W(n)>0\right) = 1-e^{-\theta x},\ x>0.$$

REFERENCES

1. Harris T.E. The theory of branching processes. Springer - Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963. 355p.
2. Seneta. E. Regularly Varying Functions. Springer, Berlin. 1976.
3. Mitov K.V., Mitov G.K., Yanev N.M. Limit theorems for critical randomly indexed branching processes. Workshop on Branching Processes and Their Applications. Springer, 2010.
4. Kolmogorov A.N. K resheniyu odnoy biologicheskoy zadachi// Izv. NII mat. i. mex. Tomskogo Universiteta , 1938, t. 2, vip. 1.(in Russian)
5. Yaglom A. M. Nekotorie predelnie teoremi teorii vetvyashchixsya sluchaynix protsessov// DAN SSSR, 1947, 56, 8, 795-798.(in Russian)
6. F. Spitzer., H. Kesten., P. Ney. The Galton-Watson process with mean one and finite variance// Theory of Probability and its Applications, 1966, 11:4, 513-540.
7. Zolotarev V.M. More exact statements of several theorems in the theory of branching processes// Theory of Probability and its Applications, 1957, 2:2, 245-253.
8. Slack R.S. A Branching Process with Mean One and Possibly Infinite Variance// Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. 9, 139-145 (1968).
9. Feller W. Diffusion processes in genetics// Proc. 2^{nd} Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob., 1951, 227-246.
10. Nagaev S.V., Wachtel V. The critical Galton-Watson process without further power moments// Journal of Applied Probability, **44**:3 (2007), 753-769.

Estimates for norms of some integral operators

Kuliev K.[1], Kuliev G.[2] Eshimova M.[3]

[1]Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,
komilkuliev@gmail.com;
[2]Samarkand Branch of Tashkent University of Information Technologies, Samarkand;
kulievag@mail.ru;
[3]Samarkand State Architectural and Civil Engineering Institute, Samarkand;
eshimova_math@mail.ru.

Let $(a, b) \subset R$ and u, v be weight functions in (a, b), i.e., positive measurable functions defined a.e. in (a, b). Let $p, q > 1$ and introduce weighted Lebesgue spaces

$$L_{p,v} = \{f : \|f\|_{p,v}^p := \int_a^b |f(t)|^p v(t)dt < \infty\}$$

and similarly $L_{q,u}$. In this paper we consider the integral operator

$$H : L_{p,v} \to L_{q,u},\ (Hf)(x) := \int_a^x k(x,t)f(t)dt, \tag{1}$$

where $k(x,t)$ is so-called "Oinarov's kernel i.e., the function $k(x,t)$ is a continuous nonnegative function increasing in the first argument, decreasing in the second argument and satisfying the condition: there exists a number $h1$ such that

$$k(x,s) \leq h(k(x,t) + k(t,s))$$

for all $a < s \leq t \leq x < b$.

Recently, in 2021 A.Kalybay and A.Baiarystanov [1] were obtained upper and lower estimates for the norm of the operator (1) in the case $1 < p \leq q < \infty$ as

$$A \leq \|H\|_{L_{p,v} \to L_{q,u}} \leq (h+1)^3 p^{\frac{1}{q}} (p')^{\frac{1}{p'}} A, \tag{2}$$

where $A = \max\{A_1, A_2\}$ and

$$A_1 = \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b k^q(t,x)u(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_2 = \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b u(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x k^{p'}(x,t)v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

But, the calculations show that for certain values of p and q it is possible to obtain a better estimate.

The first result of the paper reads:

Theorem 1. *Let $1 < p \leq q < \infty$. Then the norm of the integral operator in (1) satisfies*

$$A \leq \|H\| \leq C,$$

where C is a positive solution of the equation

$$C^{q'} - hq^{\frac{1}{q-1}}(q')^{\frac{1}{q-1}} A^{\frac{1}{q-1}} C = hq^{\frac{1}{q-1}}(p')^{\frac{q'}{p'}} A^{q'} \tag{3}$$

and $A = max\{A_1, A_2\}$.

Remark 2. Equation (3) has a unique positive solution, since the function

$$h(x) = \frac{x^{q'}}{q^{\frac{1}{q-1}}(p')^{\frac{q'}{p'}}A^{q'} + q^{\frac{1}{q-1}}(q')^{\frac{1}{q-1}}A^{\frac{1}{q-1}}x}$$

is continuous and monotone increasing function of x in the half line $(0, \infty)$, $h(0) = 0$ and $h(\infty) = \infty$.

Example 3. Let $1 < p \leq q = 2$ and $h1$. Then Equation (3) and it's positive solution take the forms

$$C^2 - 4AhC = 2h(p')^{\frac{2}{p'}}A^2$$

and

$$C = \left(2h + \sqrt{4h^2 + 2h(p')^{\frac{2}{p'}}}\right)A,$$

respectively. Then corresponding estimates take the form

$$A \leq \|H\| \leq \left(2h + \sqrt{4h^2 + 2h(p')^{\frac{2}{p'}}}\right)A.$$

Our next result reads as:

Theorem 4. Let $1 < p \leq q < \infty$. Then the norm of the integral operator in (1) satisfies

$$A \leq \|H\| \leq eh^{q-1}qq'A,$$

where $A = max\{A_1, A_2\}$.

References

1. A.Kalybay, A.Baiarystanov, Exact estimate of norm of integral operator with Oinarov condition.//Kaz. Math. Jour. 2021, 21, pp. 6-14.
2. A.Kufner, L.Maligranda, L.-E. Persson, The Hardy inequality-about its history and some related results. Pilsen, 2007.

About one property of the exponential matrix

Kushakov H. [1], **Muhammadjonov A.** [2], **Ismoilova M.** [3]
Andijan State University, Andijan, Uzbekistan
xolmurodjonqoshaqov737@gmail.com; akbarshohmuhammadjonov6764@gmail.com
mekhriniso0916@gmail.com

Abstract. The present paper is devoted to one property of the exponential matrix. In this property, statements that consist of equalities and inequalities are proved. Proved statements are useful to estimate certain expressions in the practical problems. Proving processes are done by expansion of series and inductive method.

The exponential matrix is one of the most important concepts of the higher algebra course, and the exponentsial matrix and many statements including it are widely used in many other fields of the mathematics. It has been widely used in many scientific works which are being done in many fields such as differential equations, dynamic systems, differential games and control theory. Indeed, in many scientific articles, we can notice that the usage of the properties of the exponential matrix makes the work easier. In this paper, the statements, represented by an exponential matrix, are presented. The presented statements were proved by using inductive method. In the process of proving the statements, the definition of the norm of a matrix was used. We also make extensive use of the following properties of the exponential matrix in our scientifie work. Now, we present the property that is the main part of our paper.

Property For the matrix $e^{A_i t}$, the following relations hold

i.
$$e^{A_i(t+h)} = e^{A_i t} \cdot e^{A_i h},$$

ii.
$$|e^{A_i t}\eta_i| \le e^{-\lambda_i t} a(t)|\eta_i|, \quad \|e^{A_i t}\| \le a(T), \quad a(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2,$$

iii.
$$\|e^{A_i t}\| \le a(T), \quad \|e^{A_i t} - E_3\| \le 1 - e^{-\lambda_i t} + t + \frac{1}{2}t^2, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

where $\|A\| = \max\limits_{|x|=1} |Ax|$.

The second inequality in iii can be established as follows.

For $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, we have

$$\begin{aligned}
||e^{A_i t} - E_3|| &= \max_{|x|=1} \left|\left(e^{A_i t} - E_3\right)x\right| = \max_{|x|=1} \left| \begin{bmatrix} e^{-\lambda_i t} - 1 & te^{-\lambda_i t} & \frac{1}{2}t^2 e^{-\lambda_i t} \\ 0 & e^{-\lambda_i t} - 1 & te^{-\lambda_i t} \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_i t} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right| \\
&= \max_{|x|=1} \left| \begin{bmatrix} \left(e^{-\lambda_i t} - 1\right)x_1 + te^{-\lambda_i t}x_2 + \frac{1}{2}t^2 e^{-\lambda_i t}x_3 \\ \left(e^{-\lambda_i t} - 1\right)x_2 + te^{-\lambda_i t}x_3 \\ \left(e^{-\lambda_i t} - 1\right)x_3 \end{bmatrix} \right| \\
&\le \max_{|x|=1} \left(\left| \begin{bmatrix} \left(e^{-\lambda_i t} - 1\right)x_1 \\ \left(e^{-\lambda_i t} - 1\right)x_2 \\ \left(e^{-\lambda_i t} - 1\right)x_3 \end{bmatrix} \right| + \left| \begin{bmatrix} te^{-\lambda_i t}x_2 \\ te^{-\lambda_i t}x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \right| + \left| \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 e^{-\lambda_i t}x_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right| \right) \\
&= \max_{|x|=1} \left(\left(1 - e^{-\lambda_i t}\right)\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + te^{-\lambda_i t}\sqrt{x_2^2 + x_3^2} + \frac{1}{2}t^2 e^{-\lambda_i t}|x_3| \right) \\
&\le 1 - e^{-\lambda_i t} + te^{-\lambda_i t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-\lambda_i t} \le 1 - e^{-\lambda_i t} + t + \frac{1}{2}t^2.
\end{aligned}$$

Thus, the second inequality of iii statement in the Property has been proved. It is easy to be shown that truth of the rest of statements can be proved in the same way.

REFERENCES

1. Bhatia, R. (1997). Matrix Analysis. Graduate Texts in Mathematics. 169. Springer. ISBN 978-0-387-94846-1
2. Householder, Alston S. (2006). The Theory of Matrices in Numerical Analysis. Dover

Books on Mathematics. ISBN 978-0-486-44972-2.
3. Van Kortryk, T. S. (2016). "Matrix exponentials, SU(N) group elements, and real polynomial roots". Journal of Mathematical Physics. 57 (2): 021701. arXiv:1508.05859

Some properties of hyperspaces related to τ-boundedness

Mamadaliev N.K.[1], Toshbuvayev B.M.[2]
[1,2]National University of Uzbekistan
[1]nodir_−88@bk.ru; [2]toshbuvayevboburmirzo@gmail.com

In [1] it was proven that the union of compact subspace in hyperspace is closed in initial topological space. In this thesis our aim is to extend that property for τ-bounded spaces and τ-closed subsets. For more properties of τ-bounded spaces see [2].

The set of all non-empty closed subsets of a topological space X is denoted by $\exp X$. The family of all sets of the form

$$O\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle = \left\{F : \ F \in \exp X,\, F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,\, F \cap U_i \neq \emptyset,\, i = 1, \ldots, n\right\}$$

where $U_1, U_2, \ldots, U_n$ are open subsets of X, generates a base of the topology on the set $\exp X$. This topology is called the *Vietoris topology*. The set $\exp X$ with the Vietoris topology is called *exponential space* or the *hyperspace of a space* X. [3].

Definition. A subset A of a topological space X is called τ-closed [4] if for some $B \subset A$, $|B| \leq \tau$ we have $[B] \subset A$.

Recall that a topological space X is called τ-bounded (see [2]), if the closure in X of every subset of cardinality at most τ is compact.

Theorem 1. Let X be a topological space. Then the set $\Gamma = \{F \in \exp X : F \cap A \neq \emptyset\}$ is τ-closed, if $A \subset X$ is τ-closed in X.

Theorem 2. Let X be an infinite regular space, then $\cup\beta$ is τ-closed in X for every τ-bounded subspace β of the hyperspace $\exp X$.

References

1. Michael E. Topologies on spaces of subsets. Trans. Amer.Math.Soc. 1951, V.71,No 1, pp. 152-172.
2. R.B. Beshimov, D. N. Georgiou, N.M. Mamadaliev On τ-bounded spaces and hyperspaces. Filomat, 2021 (preprint).
3. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. General topology. The basic constructions. Moscow, 2014.
4. O. Okunev, A.R. Paramo Functional tightness, R-quotient mappings and products. Topology and its Applications 228 (2017) 236–242.

Studies estimates of the distribution function in informative model of random censorship from both sides

Mansurov D. R.[1]

Navoi State Pedagogical Institute, Navoi, Uzbekistan
mathematicianmd@gmail.com

Introduction. In biomedical studies of individuals for survival, in engineering tests of technical devices for reliability, there may be cases when the tested objects coming under observation after a certain random time after the start of testing. This phenomenon is called delayed entry or left random censoring. The random variable (r.v.) X that characterizes the lifetime of the tested object becomes to observation under the condition XL. Here L is the moment when the object was placed under observation. In addition to this, r.v. X may also be censored from the right by some other r.v. Y. We are interested in r.v. X which will be subjected to random censorship from both sides by random vector $(L,\ Y)$. Let r.v.-s L, X and Y are mutually independent with continuous distribution functions (d.f.) K , F and G respectively.

Informative model of random censorship from both sides. Let $\{(X_k,\ L_k,\ Y_k)\,, k1\}$ be a sequence of independent realizations of the triple $(X,\ L,\ Y)$ and $S^{(n)} = \{(\mathrm{Z}_i,\ \Delta_i)\,,\ i = 1,\ \dots, n\}$ -the observed sample, where $\mathrm{Z}_i = \max\{L_i,\ \min\{X_i,\ Y_i\}\}$, $\Delta_i = \left(\delta_i^{(0)},\ \delta_i^{(1)},\ \delta_i^{(2)}\right)$, with $\delta_i^{(0)} = I\left(\min\left(X_i,\ Y_i\right) < L_i\right)$, $\delta_i^{(1)} = I\left(L_i \le X_i < Y_i\right)$, $\delta_i^{(2)} = I\left(L_i \le Y_i < X_i\right)$ and $I(A)$ standing for indicator of the event A. Note that in sample $S^{(n)}$ the number of observed r.v.-s X_i is equal to $\delta_1^{(1)} + \dots + \delta_n^{(1)}$. The statistical task is consist in estimating of d.f. F from a sample $S^{(n)}$. However, such a general statement of the estimating problem, d.f.-s K and G are considered as a nuisance. In this paper, we will investigate the evaluation of d.f. F in the case of informative censoring from two sources, when d.f.-s K and G functionally depend on F. To describe such a model by H and N we denote d.f.-s of r.v.-s Z_i and $V_i = \min\left(X_i,\ Y_i\right)$. Then it is easy to see, that

$$H(x) = K(x)\,N(x)\,,\ \ N(x) = 1 - (1 - F(x))\,(1 - G(x))\,,\ \ x \in \mathrm{R}^1. \tag{1}$$

Assume that there are positive unknown parameters θ , β such that following representations are valid for all $x \in \mathrm{R}^1$:

$$\begin{cases} 1 - G(x) = (1 - F(x))^{\theta}\,, \\ K(x) = (N(x))^{\beta}\,, \end{cases} \tag{2}$$

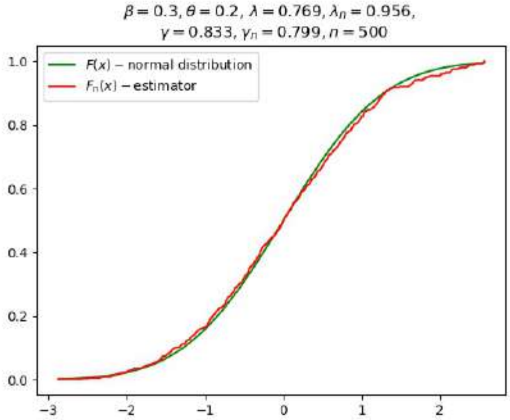
where the parameter β is responsible for the power of censoring from the left, and θ -from the right. From formulas (1) and (2), it is not difficult to derive the following representation for d.f. F :

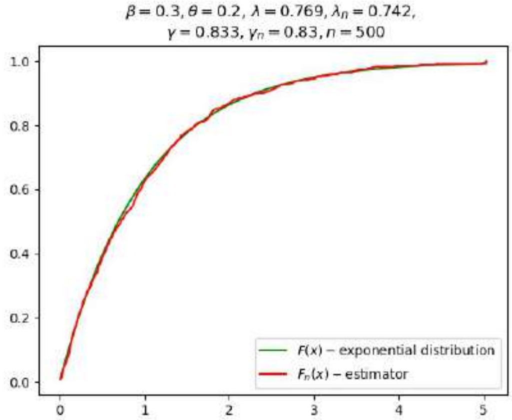
$$1 - F(x) = \left[1 - (H(x))^{\lambda}\right]^{\gamma},\ \ x \in \mathrm{R}^1, \tag{3}$$

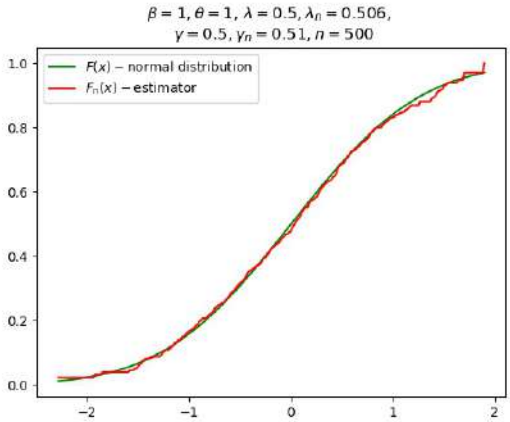
where $\lambda = \frac{1}{1+\beta}$, $\gamma = \frac{1}{1+\theta}$. Using representation (3), we can construct a semiparametric estimate for F over a sample $S^{(n)}$ by estimating a triple $(H(x)\,,\ \lambda,\ \gamma)$:

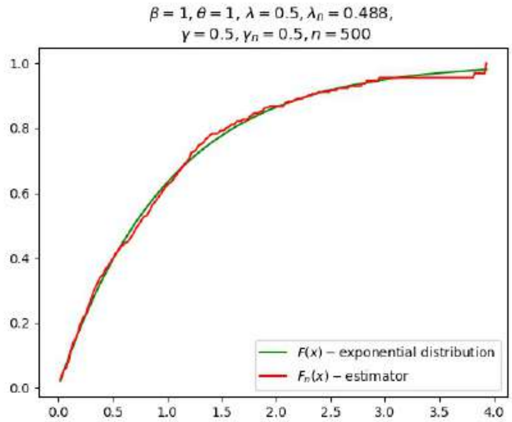
$$F_n(x) = 1 - \left[1 - (H_n(x))^{\lambda_n}\right]^{\gamma_n},\ \ x \in \mathrm{R}^1. \tag{4}$$

Studies of the dependence of the estimator on unknown parameters of censorship. Numerical studies were conducted using the python programming language to clarify how much the estimate $F_n(x)$ depends on the parameters, demonstrating its proximity to the estimated function $F(x)$ (see, figures 1-4). As $F(x)$ we use the standard normal and exponential d.f.-s. Simulated volume data was used for this purpose is $n = 500$. From figures 1-4, we can see that when $0 < \beta, \theta \leq 1$ the estimator $F_n(x)$ is well approximated to $F(x)$ (figures 1-4). In other cases, with an increasing of censoring from the left and right the discrepancy between the estimate and d.f. is noticeable.









References

1. Abdushukurov A. A. Estimation of probability density and intensity function of the Koziol-Green model of random cencoring // Sankhya: Indian J. Statistics, Ser.A. v. 48, (1987), p. 150-168

Some properties of majorization for nonlinear operators

Masharipov S. I.
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
Sirojiddinmasharipov1995@gmail.com

We will denote x majorize y $x \prec y$, if for each $k = \overline{1, n-1}$ consider this conditions:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq \sum_{i=1}^{k} y_i$$

and

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Definition 1. The nonlinear stochastic operators are defined on a simplex S, and the dimensional of the simplex is $(m-1)$, as

$$S^{m-1} = \{x_i = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0\}$$

Definition 2. The evaluation of the nonlinear stochastic operators as

$$(Vx)_k = \sum_{i=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j$$

where the $P_{ij,k}$ is the transaction matrix under the condition:

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0, \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1.$$

An n square matrix $A = (a_{ij})$ is said to be doubly stochastic if all entries are nonnegative and each column an each row sums to one:

$$a_{ij} \geq 0, i, j = 1, ..., n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, j = 1, ..., n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, i = 1, ..., n.$$

Theorem. $V : S^{m-1} \to S^{m-1}, Vx \prec x; \Leftrightarrow \sum_j t_{ij} = 1, \sum_j t_{ij} = 1$ and

$\min_i x_i \leq (Vx, x) \leq \max_i x_i$

REFERENCES

1. A.W. Marshall, I. Olkin, B. C. Arnold, Inequalities: Theory of majorization and its application, springer, New York, 2011.
2. N. P. Sokolov, Spartial matrices and their applications (Russian), Gosudarstv. Izdat. Fiz. -Mat. Lit., Moscow, 1960, pp,300 MR24-A122.
3. F.Shahidi, R. Ganikhodzaev and R. Abdulghafor. The dynamics of some extreme doubly stochastic quadratic operators. Middle east journal of scientific research.Malaysia. January 2013.

Asymptotic efficiency of a Certain class of goodness of fit tests in multinomial distributions

Mirakhmedov Sh.M.[1], Bozarov U.A.[2]

1. V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics. Academy of Sciences of Uzbekistan. University str.,46. Tashkent-l00174 , e-mail: shmirakhmedov@yahoo.com
2. Dep. Theory of probability and Mathematical Statistics. National University of Uzbekistan. University str.,4. Tashkent-l00174

1. Introduction. Let $\eta_1, \ldots \eta_N$ be a random vector of frequencies of a multinomial model on n observations classified into N cells with the cell probabilities $P = (p_1, \ldots, p_N)$, $p_1 + \ldots + p_N = 1$, all $p_j > 0$. We consider goodness of fit tests of hypothesis $H_0 : P = (N^{-1}, \ldots N^{-1})$ versus sequences of alternatives $H_{1n} := (p_1, \ldots, p_N) \neq (N^{-1}, \ldots N^{-1})$, which approach H_0 as $n, N \to \infty$ so that $\varepsilon(N) = N^{-1}[(Np_1 - 1)^2 + \ldots + (Np_N - 1)^2] \to 0$, by means of tests based on symmetric statistics, viz., $S_N^h = h(\eta_1) + \ldots + h(\eta_N)$, where h is a real function defined on non-negative axis. The case where $h(x) = h_d(x) = 2(d(d+1))^{-1}x[x/\lambda_{n,N}^d - 1]$, $d > -1$, $d \neq 0$, else $h_0(x) = 2x\log(x/\lambda_{n,N})$, here $\lambda_{n,N} = n/N$ is the average of observations per cells, is the class of power divergence statistics. The count statistics, where h is an indicator function form another class of symmetric statistics. Our objective in this talk is to discuss on the asymptotic relative efficiency (ARE) of two symmetric statistics. We are interested in the Pitman and intermediate (between Pitman and Bahadur settings) concepts of asymptotic efficiency, the most widely used in statistical inference. We emphasis the two parts of our investigation. The first, we consider the effect of changing of the number of cells on the Pitman efficiency for a family of contamination alternatives; these are extension of the results on Pitman efficiency of Quine and Robinson (1985) to the class of h-tests. The second, we extend the recent results on intermediate ARE in Ÿweak senseŸ of Mirakhmedov (2021) to intermediate ARE of two h-test, defined as a limit of the ratio of sample sizes which guarantee the same precision for both tests, viz., the same significance level tending to zero slower than in BahadurŸs setting and the same asymptotically non-degenerate power. Overall, it is shown that the Intermediate ARE of symmetric tests are differ for the $N = o(\sqrt{n})$ and $\sqrt{n} = o(N)$ it also depend on the Ÿrate of proximityŸ of the sequences of alternatives to the hypothesis.

2. Results. Set

$$\xi \sim Poi(\lambda_{n,N}), \ldots \rho(S_{n,N}^h, \lambda_{n,N}) = corr(h(\xi) - \xi\lambda_{n,N}^{-1}cov(h(\xi), \xi), \xi^2 - (2\lambda_{n,N} + 1)\xi)$$

Theorem 2.1. Let two tests of sizes $\alpha > 0$ based on $S^h_{n,N}$ and $S^f_{n,N}$, which have asymptotical normal distributions under both H_0 and H_{1n} such that $\varepsilon(N) = O((n\lambda_{n,N})^{-\frac{1}{2}})$. Then

$$PE(S^h_{n,N}, S^f_{n,N}) = \lim(\rho^2(S^h_{n,N}, \lambda_{n,N})\rho^{-2}(S^f_{n,N}, \lambda_{n,N})).$$

Assume that the number of classes $N = N(x)$, taken as a function of the continuous variable x, is regularly varying with index $q \in (0, 2)$. Let N and N' be two different number of classes.

Theorem 2.2. Let two tests of sizes $\alpha > 0$ based on $S^h_{n,N}$ and $S^h_{n,N'}$, which have asymptotical normal distributions under both H_0 and H_{1n} such that $\varepsilon(N) = O((n\lambda_{n,N})^{-\frac{1}{2}})$. Then

$PE(S^h_{n,N}, S^h_{n,N'}) = c^{1/(2-q)}$ if $N'(n)/N(n) \to c \in (0,\infty)$, and

$PE(S^h_{n,N}, S^h_{n,N'}) = \infty$ if $N'(n)/N(n) \to \infty$.

The alternatives H_{1n} where $\sqrt{n\lambda_n}\varepsilon(N) \to \infty$ and $\varepsilon(N) = o(\lambda^{-1}_{n,N})$ define the family of intermediate alternatives $\mathfrak{T}_{alt}$. Let $\widetilde{S}^h_{n,N}$ stands for the standardized version of $S^h_{n,N}$.

Assumption $A(\tau_n, \mathfrak{T})$: There exist a sequence of positive numbers $(\tau_n), \tau_n \to 0$ or $\tau_n = c > 0$ for all n, such that -

$$\lim_{n\to\infty} \sup(\tau_n u_n^2)^{-1} \log P_0\{\widetilde{S}^h_{n,N} > u_n\} = 1,$$

for every sequence (u_n), $u_n = O(\sqrt{n\lambda_{n,N}}\varepsilon(N))$ and every alternatives of $\mathfrak{T}$, a sub-family of $\mathfrak{T}_{alt}$.

Theorem 2.3. Assume that for the statistics $S^h_{n,N}$ and $S^f_{n,N}$ the Assumptions $A(\tau_{1n}, \mathfrak{T})$ and $A(\tau_{2n}, \mathfrak{T})$, respectively, are fulfilled. Then

$$IAE(S^h_N, S^g_N) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\tau_{1n}\rho^2(S^h_{n,N}, \lambda_{n,N})}{\tau_{2n}\rho^2(S^g_{n,N}, \lambda_{n,N})}$$

if additionally $\tau_{1n} \leq \tau_{2n}$, for all n, then

$$e(S^h_N, S^f_N) = \lim_{n\to\infty} \frac{\tau_{1n}\rho^2(S^h_{n,N}, \lambda_{n,N})}{\tau_{2n}\rho^2(S^g_{n,N}, \lambda_{n,N})}.$$

REFERENCES

1. Quine, M.P., Robinson, J. (1985) Efficiencies of chi-square and likelihood ratio goodness-of-fit tests, The Annals of Statistics. 13, p.727Ц742.
2. Sherzod M. Mirakhmedov (2021): On the asymptotic properties of a certain class of goodness-of-fit tests associated with multinomial distributions, Communications in Statistics - Theory and Methods, DOI: 10.1080/03610926.2021.1918168.

On low dimensional Sklyanin algebras

Mizomov I. E.
V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
University 4b, Tashkent 100174, Uzbekistan,
mizomovinomjon@mail.ru

Abstract

We give a new characterization of Koszul Calabi-Yau algebras. To this end we use results of Beidar, Fang and Stolin on description of symmetric Frobenius algebras by means of solutions of quantum Yang-Baxter equation. We apply this characterization to give another proof of the Calabi-Yau property for three and four dimensional Sklyanin algebras.

Let k be algebraic closed field $\mathbb{P}_k^2$ be projective plane over k.

Definition The 3-dimensional Sklyanin algebra $A = A(a, b, c)$ is the graded k-algebra with generators x, y, z of degree one, and relations

$$\begin{aligned} ax^2 + byz + czy &= 0 \\ ay^2 + bxz + czx &= 0 \\ az^2 + bxy + cyx &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

where $a, b, c \in k$ satisfying the following two conditions:

(1) $[a : b : c] \in \mathbb{P}_k^2 \setminus D$, where

$$D = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\} \cap \{[a : b : c] | a^3 = b^3 = c^3 = 1\}$$

(2) $abc \neq 0$ and $(3abc)^3 \neq (a^3 + b^3 + c^3)^3$.

Smith showed in [3, Example 10.1] that A is Koszul, whose dual algebra $A^!$ is generated by ξ_1, ξ_2, ξ_3 with relations

$$c\xi_2\xi_3 - b\xi_3\xi_2,\ b\xi_1^2 - a\xi_2\xi_3,\ c\xi_3\xi_1 - b\xi_1\xi_3,$$
$$b\xi_2^2 - a\xi_3\xi_1,\quad c\xi_1\xi_2 - b\xi_2\xi_1,\quad b\xi_3^2 - a\xi_1\xi_2.$$

From these relations, in [2] X.Chen and F.Eshmatov obtain $A^!$ is isomorphic to a graded algebra spanned by

$$1, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2, \xi_1^3.$$

Theorem The 3-dimensional Sklyanin algebra is a Koszul Calabi-Yau algebra with

$$Q = 1 \otimes \xi_1^3 + \xi_1 \otimes \xi_1^2 + \xi_2 \otimes \xi_2^2 + \xi_3 \otimes \xi_3^2 + \xi_1^2 \otimes \xi_1 + \xi_2^2 \otimes \xi_2 + \xi_3^2 \otimes \xi_3 + \xi_1^3 \otimes 1 \tag{2}$$

solution of the quantum Yang-Baxter equation.

Definition Let $\alpha, \beta, \gamma \in k$ such that

$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta\gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \cap \{0, \pm 1\} = \emptyset.$$

The 4-dimensional Sklyanin algebra $A = A(\alpha, \beta, \gamma)$ is the graded k-algebra with generators x_0, x_1, x_2, x_3 of degree one, and relations $r_i = 0, s_i = 0$, where

$$\begin{aligned} r_1 &= x_0x_1 - x_1x_0 - \alpha(x_2x_3 + x_3x_2), & s_1 &= x_0x_1 + x_1x_0 - (x_2x_3 - x_3x_2) \\ r_2 &= x_0x_2 - x_2x_0 - \beta(x_3x_1 + x_1x_3), & s_2 &= x_0x_2 + x_2x_0 - (x_3x_1 - x_1x_3) \\ r_3 &= x_0x_3 - x_3x_0 - \gamma(x_1x_2 + x_2x_1), & s_3 &= x_0x_3 + x_3x_0 - (x_1x_2 - x_2x_1) \end{aligned} \tag{3}$$

As proved by Smith and Stafford [4,Propositions 4.3-4.9], A is Koszul, whose Koszul dual Algebra $A^!$ is generated by $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ with the following relations:

$$
\begin{aligned}
&\xi_0^2 = \xi_1^2 = \xi_2^2 = \xi_3^2 = 0,\\
&2\xi_2\xi_3 + (\alpha+1)\xi_0\xi_1 - (\alpha-1)\xi_1\xi_0 = 0,\\
&2\xi_3\xi_2 + (\alpha-1)\xi_0\xi_1 - (\alpha+1)\xi_1\xi_0 = 0,\\
&2\xi_3\xi_1 + (\beta+1)\xi_0\xi_2 - (\beta-1)\xi_2\xi_0 = 0,\\
&2\xi_1\xi_3 + (\beta-1)\xi_0\xi_2 - (\beta+1)\xi_2\xi_0 = 0,\\
&2\xi_1\xi_2 + (\gamma+1)\xi_0\xi_3 - (\gamma-1)\xi_3\xi_0 = 0,\\
&2\xi_2\xi_1 + (\gamma-1)\xi_0\xi_3 - (\gamma+1)\xi_3\xi_0 = 0.
\end{aligned}
$$

From these relations, we obtain $A^!$ is isomorphic to a graded algebra spanned by

$$1, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_0\xi_1, \xi_1\xi_0, \xi_0\xi_2, \xi_2\xi_0, \xi_0\xi_3, \xi_3\xi_0, \xi_1\xi_0\xi_1, \xi_0\xi_1\xi_0, \xi_0\xi_2\xi_0, \xi_0\xi_3\xi_0.$$

Theorem The 4-dimensional Sklyanin algebra is a Koszul Calabi-Yau algebra with

$$
\begin{aligned}
Q =& 1 \otimes \xi_1\xi_0\xi_1\xi_0 - \xi_0 \otimes \xi_1\xi_0\xi_1 + \xi_1 \otimes \xi_0\xi_1\xi_0 + \frac{1-\beta}{1+\gamma} \cdot \frac{1-\gamma}{1+\alpha} \cdot \xi_2 \otimes \xi_0\xi_2\xi_0\\
&+ \frac{1-\gamma}{1+\alpha} \cdot \xi_3 \otimes \xi_0\xi_3\xi_0 - \xi_0\xi_1 \otimes \xi_0\xi_1 - \frac{1-\beta}{1+\gamma} \cdot \frac{1-\gamma}{1+\alpha} \cdot \xi_0\xi_2 \otimes \xi_0\xi_2\\
&- \frac{1-\gamma}{1+\alpha} \cdot \xi_0\xi_3 \otimes \xi_0\xi_3 + \xi_1\xi_0 \otimes \xi_1\xi_0 + \frac{1-\beta}{1+\gamma} \cdot \frac{1-\gamma}{1+\alpha} \cdot \xi_2\xi_0 \otimes \xi_2\xi_0\\
&+ \frac{1-\gamma}{1+\alpha} \cdot \xi_3\xi_0 \otimes \xi_3\xi_0 + \xi_1\xi_0\xi_1 \otimes \xi_0 - \xi_0\xi_1\xi_0 \otimes \xi_1\\
&- \frac{1-\beta}{1+\gamma} \cdot \frac{1-\gamma}{1+\alpha} \cdot \xi_0\xi_2\xi_0 \otimes \xi_2 - \frac{1-\gamma}{1+\alpha} \cdot \xi_0\xi_3\xi_0 \otimes \xi_3 + \xi_1\xi_0\xi_1\xi_0 \otimes 1.
\end{aligned} \tag{4}
$$

solution of the quantum Yang-Baxter equation.

References

1. K.I. Beidar, Y. Fong, and A. Stolin, *On Frobenius algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Trans. Am. Math. Soc. 349(9) (1997) 3823-3836.
2. X.Chen and F.Eshmatov, *Calabi-Yau algebras and the shifted noncommutative symplectic structure*, Advances in Mathematics 367 (2020) 107126.
3. S.P.Smith, *Some finite dimensional algebras related to elliptic curves*, in: Representation theory of Algebras and Related Topics, Mexico City, 1994, in: CMS Conf. Proc., vol. 19, Amer. Math. Soc., Providence, 1996, pp. 315-348.
4. S.P. Smith, J.T. Stafford, *Regularity of the four dimensional Sklyanin algebra*, Compos. Math. 83 (1992) 259-289

Asymptotics for the eigenvalue of one-particle discrete Schrödinger operator

Mominov Z. E.[1], **Madatova F. A.**[2]
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
zimuminov@gmail.com 1; fotimamadatova2@gmail.com 2;

Introduction.

The spectral properties of grid operators have aroused great interest among mathematicians. Graph and Schenker (1997), D.S.Mattis (1976), A.I.Mogilner (1991), Yafaev (2000) in models of solid state physics and at the same time on the fields theory of lattice one-particle and multi-particle discrete Schrödinger operators with analogues of Schrödinger operators are considered. Therefore, understanding spectrum of such operators is a topic of central importance in physics.

Let $\mathbb{Z}$ be the one-dimensional lattice, $\mathbb{T} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = (-\pi;\pi]$ be the one-dimensional torus, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ be real parameters. **The Discrete Laplacian operator in the momentum representation.** The one-particle Schrödinger operator H in the momentum representation is of the form defined by

$$H = \mathcal{F}^*\hat{H}_\mu\mathcal{F}, \quad H = H_0 - V,$$

where

$$H_0 = \mathcal{F}^*(-\triangle)\mathcal{F}, \quad V = \mathcal{F}^*\hat{V}\mathcal{F}$$

and $\mathcal{F}$ stands for the standard Fourier transformation $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ and $\mathcal{F}^* : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$ is its inverse. Explicitly, the non-perturbed operator H_0 acts on $L^2(\mathbb{T})$ as multiplication operator by the function $\varepsilon(\cdot)$:

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p)f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}), \quad p \in \mathbb{T},$$

where

$$\varepsilon(p) = (1 - \cos p) + \beta(1 - \cos 2p), \quad p \in \mathbb{T}, \quad \beta \geq 0. \tag{1}$$

In the physical literature, the function $\varepsilon(\cdot)$, being a real valued-function on $\mathbb{T}$, is called the dispersion relation of the Laplacian operator $-\Delta$.

The potensial operator

$$(Vf)(p) = \frac{\mu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(q)dq, \quad f \in L^2(\mathbb{T}). \tag{2}$$

The essential spectrum.

H_0 is a multiplication operator by a function, the perturbation V is the one-dimensional operator and, therefore, in accordance to the Weyl theorem on the stability of the essential spectrum the equality $\sigma_{ess}(H_\mu) = \sigma_{ess}(H_0)$ holds, and the essential spectrum of the operator H_μ consists of the following segment on the real axis:

$$\sigma_{ess}(H_{\lambda\mu}) = [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}],$$

where

$$\varepsilon_{\min} = 0, \quad \varepsilon_{\max} = \begin{cases} 2, & 0 \leq \beta \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{(1+4\beta)^2}{8\beta}, & \beta > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Fredholm determinant of the operator H_μ.

For any $\mu \in \mathbb{R}$, we define the Fredholm determinant associated with the operator H_μ as a regular function in $z \in \mathbb{R} \setminus [\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$ as

$$D(\mu, z) = 1 - \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{dp}{\varepsilon(p) - z}. \tag{3}$$

The main result of our work is as follows:

Theorem. *$z(\mu)$ satisfies the asymptotics*

$$z = \frac{1}{-\frac{1}{\mu} - \frac{1+\beta}{2!}\frac{1}{\mu^2} - (2\beta^2 + 3\beta + 2)\frac{1}{\mu^3} + O(\frac{1}{\mu^4})} \quad as \quad \mu \longrightarrow +\infty.$$

References

1. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. T.I. Functional analysis. (1977)
2. Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. T.4. Analysis of operators. (1982)
3. Israel Gohberg, Seymour Goldberg, Marinus A. Kaashoek. Basic Classes of Linear Operators. Birkhäuser Verlag 2003.
4. F. Hiroshima, Z. Muminov, U. Kuljanov. Threshold of discrete Schrödinger operators with delta potentials on n dimensional lattice. ISSN: 0308 -1087 (Print) 1563-5139 (Online) Journal homepage: https://www.tandfonline.com/loi/gma20.
5. M.Federyuk Asimptotika integraliy i ryadiy. Moskva "Nauka"1987.

SOME TOPOLOGICAL PROPERTIES OF SPACE OF THE PERMUTATION DEGREE

Mukhamadiev F. G.[1], Sadullaev A. Kh.[2]

[1]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
[1]farhod8717@mail.ru;
[2]Yeoju Technical Institute in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan,
[2]anvars1997@mail.ru

We shall say that a set P is of the type G_τ in X if there exists a family $\gamma = \{U_\alpha : \alpha \in A, \mid A \mid \leq \tau\}$ of open sets in X such that $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha = P$ [1].

A permutation group X is the group of all permutations (i.s. one-one and onto mappings $X \to X$). A permutation group of a set X is usuallay denoted by $S(X)$. If $X = \{1, 2, ..., n\}$, then $S(X)$ is denoted by S_n, as well.

Let X^n be the n-th power of a compact X. The permutation group S_n of all permutations, acts on the n-th power X^n as permutation of coordinates. The set of all orbits of this action with quotient topology we denote by SP^nX. Thus, points of the space SP^nX are finite subsets (equivalence classes) of the product X^n. Thus two points $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in X^n$ are considered to be equivalent if there is a permutation $\sigma \in S_n$ such that $y_i = x_(\sigma(i))$ for all $i = 1, 2, ..., n$. The space SP^nX is called n-permutation degree of a space X. Equivalent relation by which we obtained space SP^nX is called the symmetric equivalence relation. The n-th permutation degree is always a quotient of X^n. Thus, the quotient map is denoted by as following: $\pi_n^s : X^n \to SP^n X$. Where for every $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$, $\pi_n^s((x_1, x_2, ..., x_n)) = [(x_1, x_2, ..., x_n)]$ is an orbit of the point $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$.

The concept of a permutation degree has generalizations. Let G be any subgroup of the group S_n. Then it also acts on X^n as group of permutations of coordinates. Consequently, it generates a G-symmetric equivalence relation on X^n. This quotient space of the product of X^n under the G-symmetric equivalence relation is called G-permutation degree of the space X and it is denoted by $SP^n_G X$. An operation SP^n_G is also the covariant functor in the category of compacts and it is said to be a functor of G-permutation degree. If $G = S_n$, then $SP^n_G = SP^n$. If the group G consists only of unique element, then $SP^n_G X = X^n$ [2].

Theorem. If the set $SP^n P$ is of the type G_τ $(\tau \geq \aleph_0)$ in the space $SP^n X$, then the set $(\pi_n^s)^{-1}(SP^n P)$ is also of the type G_τ in the space X^n.

REFERENCES

1. A.V.Arkhangel'skii, Topological function spaces. Math. its Appl., vol. 78, Dordrecht: Kluwer, 1992, 205 p. ISBN: 0-7923-1531-6 . Original Russian text published in Arkhangel'skii A.V. Topologicheskie prostranstva funktsii, Moscow: MGU Publ., 1989, 222 p.

2. V.V.Fedorchuk, V.V.Filippov, Topology of hyperspaces and its applications. // Mathematica, cybernetica. Moscow: 4 (1989) - 48 p.

Weighted extremal functions in the class m-subharmonic functions

Narzillaev N.Kh.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

n.narzillaev@nuu.uz

We fix the number $\delta > 0$ and define an δ-m-extremal function. Let $K \subset \mathbb{C}^n$ be a compact set and ψ some bounded function on K. Without loss of generality, we can consider $\psi \leq \lambda < \delta$, $z \in K$.

Consider the following class

$$\mathcal{L}_m^\delta := \{u(z) \in sh_m(\mathbb{C}^n) : \ u(z) \leq \delta, \ z \in \mathbb{C}^n\}.$$

It is clear that if $u(z) \in \mathcal{L}_m$, then $c \cdot u(z) \in \mathcal{L}_m^\delta$ $\forall c \in (0, \delta]$. We put

$$\mathcal{L}_m^\delta(K, \psi) := \{u(z) \in \mathcal{L}_m^\delta, \ u(z)|_K \leq \psi(z)\}.$$

Definition 1. The function $V_m^*(z, K, \psi, \delta) = \overline{\lim_{w \to z}} V_m^*(w, K, \psi, \delta)$ is called the δ-m-extremal function of the compact set K with respect to ψ, where

$$V_m(z, K, \psi, \delta) := \sup\{u(z) : u(z) \in \mathcal{L}_m^\delta(K, \psi)\}, \ z \in \mathbb{C}^n.$$

Note that, for $\delta = 1$ the δ-m-extremal function coincides with the m-Green's function with the weight of the compact set K i.e., $V_m^*(z, K, \psi, 1) \equiv V_m^*(z, K, \psi)$, for $\delta = 1, \psi(z) = 0$ coincides with the m-Green's function, i.e. $V_m^*(z, K, 0, 1) \equiv V_m^*(z, K)$. [1,2,3,4]

Let us list the properties of the δ-m-extremal function:

1°. If $\delta_1 \le \delta_2$, then $V_m^*(z, K, \psi, \delta_1) \le V_m^*(z, K, \psi, \delta_2)$.

2°. If $\psi_1 \le \psi_2, \forall z \in K$, then $V_m^*(z, K, \psi_1) \le V_m^*(z, K, \psi_2)$.

3°. $V_m^*(z, K, \psi, \delta) = \delta \cdot V_m^* \left(z, K, \dfrac{\psi}{\delta} \right)$ in particular, $V_m^*(z, K, \delta) = \delta \cdot V_m^*\left(z, K\right)$.

Unweighted case. We define (δ, m)-regularity and (δ, m)-local regularity in a similar way as for usual m-regularity.

Definition 2. A compact set K is called globally (δ, m)-regular at a point $z^0 \in K$ if $V_m^*(z^0, K, \delta) = 0$. It is called locally (δ, m)-regular at a point $z^0 \in K$ if $V_m^*(z^0, K \cap \bar{B}(z^0, r), \delta) = 0$ for any $r > 0$.

The proposition below immediately follows from property 3 and shows that (δ, m)-regularity is the same as classical m-regularity, namely, $\delta = 1$.

Proposition. Let K be a compact subset of $\mathbb{C}^n$.

(i) A compact set K is globally (δ, m)-regular at a point $z^0 \in K$ if and only if it is globally m-regular at a point z^0.

(ii) A compact set K is locally (δ, m)-regular at a point $z^0 \in K$ if and only if it is locally m-regular at a point z^0.

Weighted case. Consider the following sets of numbers,

$$\Lambda(K, \psi) = \{\delta > 0 : V_m(z, K, \psi, \delta)|_K \equiv \psi(z)\}.$$

Definition 3. Let $\delta \in \Lambda(\psi, K)$. The compact K is called globally (δ, ψ, m)-regular at point $z^0 \in K$ if $V_m^*(z^0, K, \psi, \delta) = \psi(z^0)$. It is called locally (δ, ψ, m)-regular at point $z^0 \in K$ if for every nonempty ball $B(z^0, r)$: $V_m^*(z^0, K \cap \bar{B}(z^0, r), \psi, \delta) = \psi(z^0)$. A compact K is globally (δ, ψ, m)-regular if it is globally (δ, ψ, m)-regular at every point of itself. A compact K is locally (δ, ψ, m)-regular if it is locally (δ, ψ, m)-regular at every point of itself.

Note that global or local (δ, ψ, m)- regularity can only be defined for $\delta \in \Lambda(\psi, K)$. It is easy to see that any locally (δ, ψ, m)-regular point is globally (δ, ψ, m)-regular. We denote by $\Lambda_{reg} = \Lambda_{reg}(K, \psi)$ the set of numbers $\delta \subset \Lambda(K, \psi)$, for which K is globally regular, we denote by $\Lambda_{reg}^{loc} = \Lambda_{reg}^{loc}(K, \psi)$ the set of numbers $\delta \subset \Lambda$, for which K is locally regular. We see, $\Lambda_{reg}^{loc} \subset \Lambda_{reg} \subset \Lambda$.

Theorem. Let K be a compact set, and $\psi(z)$ is weight on $K : \psi(z) \in C(K)$. Then, K is locally (ψ, m)-regular at $z^0 \in K$ if and only if K is locally m-regular (case $\psi \equiv 0$) at z^0.

REFERENCES

1. Sadullaev A., Abdullaev B. Potential theory in the class of m-subharmonic functions. Proc. Stek. Inst. Math.(2012). 279. no 1: P. 155-180

2. Blocki Z. Weak solutions to the complex Hessian equation. Ann. Inst. Fourier. 2005. 55 (5): P. 1735-1756.

3. Sadullaev A. Pluripotential theory. Applications. Germany. Palmarium Academic Publishing. 2012. (in Russian)

4. Narzillaev N.Kh. Delta-extremal functions in $\mathbb{C}^n$. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2021. 14(3) P. 389вЃY398.

Bellman-Harris branching processes and their application

Nazarov Z. A.
National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
zuhrov13@gmail.com

Let $Z(t)$be the number of particles in the Bellman-Harris process at time t. Except as otherwise specified, we assume that the evolution of the process begins at the moment $t = 0$ with one particle of zero age: $Z(0) = 1$. The initial particle of the process has a random lifetime of τ with a distribution of $G(t)$ and generates at the end of its life a random number of descendants of ξ in accordance with the generating function $f(s)$.

Let $F(t; s) = E\left[s^{Z(t)}|Z(0) = 1\right]$be the generating function of the number of particles in the Bellman-Harris process at the moment t. Thus, the function $F(t; s)$ satisfies the integral equation

$$F(t; s) = s(1 - G(t)) + \int_0^t f(F(t - u; s))dG(u). \tag{1}$$

It is clear that the value $F(t; 0) = P(Z(t) = 0)$ is the degeneration probability of the Bellman-Harris process at the moment no later than t. Assuming $s = 0$ in (1), we have

$$F(t; 0) = \int_0^t f(F(t - u; 0))dG(u).$$

The limit $Q := \lim\limits_{t\to\infty} F(t; 0)$, which exists due to the obvious monotonicity of the function $F(t; 0)$ with respect to t, will be called the degeneration probability of the process $Z(t)$, $t \geq 0$. Evidently,

$$Q = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(F(t - u; 0))dG(u) \leq \lim_{t\to\infty} f(F(t; 0))G(t) \leq f(Q).$$

Let $G^{*k}(t)$ denote the $k-$th convolution of the function $G(t) := G^{*1}(t)$ with itself:

$$G^{*0}(t) = I\{t \geq 0\}, \quad G^{*k}(t) = \int_0^t G(t - u)dG^{*(k-1)}(u),$$

where $I\{A\}$is the indicator of the event A. In the following lemma, we obtain upper and lower bounds for the generating function $F(t; s)$ in terms of iterations $f_n(s)$ and convolutions $G^{*n}(t)$.

Lemma. If $E\xi = 1$, then for any $n \geq 1$, the estimates

$$1 - f_n(s) - (1 - s)G^{*n}(t) \leq 1 - F(t; s) \leq 1 - f_n(s) + (1 - s)(1 - G^{*n}(t))$$

are valid.

Recall that the branching Galton-Watson process is a special case of the Bellman-Harris process, in which the lifetime of each particle is equal to one. Let $f_0(s) = s$, and

$$f_n(s) = f(f_{n-1}(s)), \quad n = 1, 2, \ldots$$

be a sequence of iterations of the function $f(s)$.

Theorem. Let $\mu = E\tau = \int\limits_0^\infty t dG(t) \leq \infty$. If the branching Bellman-Harris process satisfies conditions

$$E\xi = f'(1) = 1, \quad \sigma^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 \in (0, \infty),$$

and

$$\lim_{t\to\infty} t^2 (1 - G(t)) = 0,$$

then

$$Q(t) = P(Z(t) > 0) \sim 1 - f_{[\frac{t}{\mu}]}(0) \sim \frac{2\mu}{\sigma^2 t}, \quad t \to \infty,$$

and

$$\lim_{t\to\infty} E\left[exp\left\{-\lambda \frac{2\mu Z(t)}{\sigma^2 t}\right\} \Big| \, Z(t) > 0\right] = \frac{1}{1+\lambda}.$$

We know that the function $F(t;s)$ satisfies equation (1) on the semiaxis $t \geq 0$.

It turns out that for a fixed $s \in [0,1]$, we can say a little more about the properties of $F(t;s)$.

REFERENCES

1. В. А. Ватутин, Ветвящиеся процессы и их применения, Лекционные курсы, НОЦ. Москва-2008.
2. Т. Харрис, Теория ветвяшихся случайных процессов, Мир, М., 1966; пер. с англ.: T. E. Harris, The theory of branching processes, Springer-Verlag, Berlin-Goottingen-Heidelberg, 1963 Zb l, 0117.13002.
3. A.A. Imomov, A.Kh. Meyliev, On Asymptotic structure of continuous-time Markov branching processes allowing immigration without higher-order moments, Уфимский математический журнал. Том 13. No 1, (2021). С. 137-147.

Calogero-Moser type spaces in the variety of two 3×3 matrices

Normatov Z. Sh.

V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics,
University 4b, Tashkent 100174, Uzbekistan,
z.normatov@mathinst.uz

Let $\mathcal{M}_n$ be the $\mathbb{C}$-algebra of $n \times n$ matrices over $\mathbb{C}$. The general linear group acts on the direct product $\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n$ diagonally:

$$g \cdot (X_1, ..., X_d) = \left(gX_1g^{-1}, \ldots, gX_dg^{-1}\right), \quad X_i \in \{X, Y\}, \quad g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\,. \tag{1}$$

Let $\mathbb{C}[\mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n]^{\mathrm{GL}_n}$ be the algebra of GL_n-invariant polynomials, which is known to be generated by the traces

$$\mathrm{Tr}(Z_1 \cdots Z_k)\,, \quad Z_1, ..., Z_k \in \{X, Y\}\,, 1 \leq k \leq n^2,$$

(see Procesi [2], Razmyslov [3]). Furthermore, every relation among the generators is a result of the Cayley-Hamilton theorem.

Definition *The n-th Calogero-Moser space $\mathcal{C}_n$ is*

$$\{(X,Y)\in\mathcal{M}_n\times\mathcal{M}_n \mid \mathit{rank}([X,Y]+I_n)=1\}//\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

where $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *acts by conjugation, i.e.* $g.(X,Y)=(gXg^{-1},gYg^{-1})$.

Calogero-Moser spaces play an important role in geometry and representation theory. In [4] Wilson proved that $\mathcal{C}_n$ is a smooth irreducible affine algebraic variety of dimension $2n$.

Let us make the following notations:

$$\begin{aligned}
r_1 &= a_3a_9-2a_4a_8+a_5a_7\\
r_2 &= a_5a_6-2a_4a_7+a_3a_8\\
r_3 &= a_3(a_3a_5-a_4^2-3v)+6(a_6a_8-a_7^2)\\
r_4 &= a_4(a_3a_5-a_4^2-3v)+3(a_6a_9-a_7a_8)\\
r_5 &= a_5(a_3a_5-a_4^2-3v)+6(a_7a_9-a_8^2)
\end{aligned}\quad.$$

If we use the following substitutions

$$\begin{aligned}
&a_3=\mathrm{Tr}(A^2), a_4=\mathrm{Tr}(AB), a_5=\mathrm{Tr}(B^2),\\
&a_6=\mathrm{Tr}(A^3), a_7=\mathrm{Tr}(A^2B), a_8=\mathrm{Tr}(AB^2), a_9=\mathrm{Tr}(B^3), v=-3,
\end{aligned}$$

where A and B traceless version of the matrices X and Y, respectively, then $r_1,\dots,r_5$ are the defining relations of the coordinate ring of the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_3$ [1]. Varying v we can introduce similar varieties.

Definition *Denote by $\mathcal{C}_{3,v}$ the subspace of $\mathbb{C}[\mathcal{M}_3\times\mathcal{M}_3]^{\mathrm{GL}_3}$ whose coordinate ring is* $\mathbb{C}[a_1,a_2]\otimes\dfrac{\mathbb{C}[a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9]}{(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5)}$.

Theorem *For all $v\neq 0$ the varieties $\mathcal{C}_{3,v}$ and the Calogero-Moser space $\mathcal{C}_3$ are isomorphic.*

Theorem *The variety $\mathcal{C}_{3,0}$ is the invariants of commuting matrices of degree* 3.

References

1. Z. Normatov, *Trace identities in Calogero-Moser space $\mathcal{C}_3$.* International scientific conference on the theme "Modern problems of differential equations and related branches of mathematics". Fergana, March 12–13, 2020.
2. C. Procesi, *The invariant theory of $n\times n$ matrices*, Adv. Math. 19 (1976) 306–381.
3. Yu.P. Razmyslov, *Trace identities of full matrix algebras over fields of zero characteristic*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. 38 (1974) 723–756.
4. G. Wilson, *Collisions of Calogero-Moser particles and an adelic Grassmannian* (with an Appendix by I. G. Macdonald), Invent. Math. **133** (1998), 1–41.

Lie-derivations of some nilpotent Leibniz algebras

Nurmatova I.M.[1].
National university of Uzbekistan, Tashkent , Uzbekistan,
irodanurmatova10000@gmail.com

Leibniz algebras are generalization of Lie algebras and these algebras preserve a unique property of Lie algebras that the right multiplication operators are derivations. They first appeared in papers of A.M.Blokh in the 1960s, under the name D-algebras, emphasizing their close relationship with derivations. The theory of D-algebras did not get as thorough an examination as it deserved immediately after its introduction. Later, the same algebras were introduced in 1993 by Jean-Louis Loday, who called them Leibniz algebras due to the identity they satisfy. The main motivation for the introduction of Leibniz algebras was to study the periodicity phenomena in algebraic K-theory. During the last 20 years, the theory of Lie algebras have been extended to Leibniz algebras. Derivations and operators which are generalization of the derivations play an important role in the study of structure of algebras. Many papers devoted to the investigation of derivations, inner derivations, local and 2-local derivations of Lie and Leibniz algebras.

In this work we investigate Lie-derivations of Leibniz algebras and describe Lie-derivations for some nilpotent Leibniz algebras, such as null-filiform and filiform Leibniz algebras. Moreover, we give the description of Lie-derivations for three-dimensional nilpotent Leibniz algebras.

Definition 1. A Leibniz algebra over K is a vector space L equipped with a bilinear map, called bracket, $[-,-] : L \times L \to L$ satisfying the Leibniz identity:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y],$$

for all $x, y, z \in L$.

Definition 2. A linear map $d : L \to L$ of a Leibniz algebra $(L, [-,-])$ is said to be a derivation if for all $x, y \in L$, the following condition holds:

$$d([x,y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

For a given $x \in L, R_x$ denotes the map $R_x : L \to L$ such that $R_x(y) = [y,x]$, $\forall x \in L$. Note that the map R_x is a derivation. We call this kind of derivations as inner derivations. Derivations that are not inner are said to be outer derivations.

Definition 3 A linear map $d : L \to L$ of a Leibniz algebra $(L, [-,-])$ is said to be a Lie-derivation if for all $x, y \in L$, the following condition holds:

$$d([x,y]_{lie}) = [d(x), y]_{lie} + [x, d(y)]_{lie}.$$

We denote by $DerLie(L)$ the set of all Lie-derivations of a Leibniz algebra L, which can be equipped with a structure of Lie algebra by means of the usual bracket

$$[d_1, d_2] = d_1 \circ d_2 - d_2 \circ d_1,$$

for all $d_1, d_2 \in DerLie(L)$.

Definition 4. A Leibniz algebra L is said to be nilpotent, if there exists $n \in N$ $(m \in N)$ such that $L^n = 0$ (where $L^1 = L$, $L^{n+1} = [L^n, L]$). The minimal number n with such property is said to be the index of nilpotency of the algebra L.

It should be noted that the maximal nilindex for n-dimensional Leibniz algebras is $n+1$ and such type of nilpotent Liebniz algebras are called **null-filiform** and n-dimensional Leibniz algebras with nilindex is equal to n is called **filiform**.

It is known that there exist unique n-dimensional null-filiform Leibniz algebra denoted by NF_n with the table of multiplication

$$NF_n: \ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-1.$$

Moreover, any naturally graded n-dimensional filiform Leibniz algebra is isomorphic one of the following two algebras

$$F_n^1: \ [e_1, e_1] = e_3, \ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \le i \le n-1.$$

$$F_n^1: \ [e_1, e_1] = e_3, \ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 3 \le i \le n-1.$$

In the following theorem we show that any Lie-derivation of the null-filiform and naturally graded filiform Leibniz algebras is a derivation.

Theorem 5. Any Lie-derivation of the algebras NF_n, F_n^1, F_n^2 is a derivation.

Now we consider three-dimensional nilpotent Leibniz algebras:

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1: & \quad \text{abelian}; \\
\lambda_2: & [e_1, e_1] = e_2; \\
\lambda_3: & [e_2, e_3] = e_1, \quad [e_3, e_2] = -e_1; \\
\lambda_4: & [e_2, e_2] = e_1, \quad [e_3, e_3] = \alpha e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1; \\
\lambda_5: & [e_2, e_2] = e_1, \quad [e_3, e_2] = e_1, \quad [e_2, e_3] = e_1; \\
\lambda_6: & [e_3, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_3] = e_2.
\end{array}$$

Theorem 6. Any Lie-derivation of the algebras λ_1, λ_2, λ_3, λ_5, λ_6 is a derivation.

Proposition 7. There exist Lie-derivation of the algebra λ_4 which is not a derivation and any Lie-derivation of the algebra λ_4 has the following form:

$$\begin{array}{l}
D(e_1) = (\beta_2 + 2\beta_3 + 2\alpha_2 + \alpha_3)e_1 \\
D(e_2) = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 \\
D(e_3) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3
\end{array}$$

REFERENCES

1. Ayupov Sh.A, Omirov B.A, Rakhimov I.S., Leibniz Algebras Structure and Classification. Taylor, Francis Group, London: 2020.

2. S.Albeverio, B.A.Omirov, I.S.Rakhimov, Varieties of nilpotent complex Leiniz algebras of dimension less than five. Taylor, Francis. 33:2005., 0092-7872. C. 1575–1585.

3. G.R.Biyogman, J.M.Casas. Lie-central derivations, Lie-centroids and Lie-stem Leibniz algebras. 2010. GA 31061-0490, 36005 Pontevedra, Spain.

On 3-Lie algebras

Omirov B. A.[1], **Jumaniyozov D. E.**[2]
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan;
omirovb@mail.ru
Institute of Mathematics Academy of Science of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;
dostondzhuma@gmail.com

Lie algebras in physics arise in general relativity, quantum field theory, quantum mechanics and string theory. Lie algebra theory has been deeply investigated for many years and Lie algebras are among the most important and useful mathematical objects.

V.T.Fillipov proposed a generalization of Lie algebras called n-Lie algebras [1]. As an infinite-dimensional example he provided n-Lie algebras of Jacobians. Another important example of infinite-dimensional n-Lie algebra structure was given by Dzhumadildayev in [3]. These two examples present the main constructions of infinite dimensional n-Lie algebras.

In this work we consider the generalization of 3-Lie algebras of Jacobians. We introduce a ternary bracket obtained by adding one more column to Jacobian and we give necessary and sufficient conditions when the ternary bracket is 3-Lie algebra.

Definition. A vector space L equipped with skew-symmetric ternary bracket $[-,-,-]$ is called 3-Lie algebra the following identity holds for any $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in L$:

$$[[a_1, a_2, a_3], b_1, b_2] = [[a_1, b_1, b_2], a_2, a_3] + [a_1, [a_2, b_1, b_2], a_3] + [a_1, a_2, [a_3, b_1, b_2]] \qquad (1)$$

Let $\mathcal{A}$ be an associative commutative $\mathbb{F}$-algebra. For fixed mutually commuting derivations d_1, d_2, d_3 of the algebra $\mathcal{A}$ and any $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{A}$ we consider $[x_1, x_2, x_3]_J := Jac(x_1, x_2, x_3)$, where

$$Jac(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} d_1(x_1) & d_1(x_2) & d_1(x_3) \\ d_2(x_1) & d_2(x_2) & d_2(x_3) \\ d_3(x_1) & d_3(x_2) & d_3(x_3) \end{vmatrix}.$$

It is well known that the algebra $\mathcal{A}$ with ternary bracket $[-,-,-]_J$ is 3-Lie algebra [2].

Let d_1, d_2, d_3, d_4 be pairwise commuting derivations of an associative commutative $\mathbb{F}$-algebra $\mathcal{A}$. Then let us define the following ternary bracket on $\mathcal{A}$:

$$[x_1, x_2, x_3]_\alpha = \begin{vmatrix} d_1(x_1) & d_1(x_2) & d_1(x_3) & \alpha_1 \\ d_2(x_1) & d_2(x_2) & d_2(x_3) & \alpha_2 \\ d_3(x_1) & d_3(x_2) & d_3(x_3) & \alpha_3 \\ d_4(x_1) & d_4(x_2) & d_4(x_3) & \alpha_4 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

where, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathcal{A}$.

Now we give a criterion for $[-,-,-]_\alpha$ to form n-Lie structure on $\mathcal{A}$.

Proposition. $\langle \mathcal{A}, [\cdot, \ldots, \cdot]_\alpha \rangle$ is a 3-Lie algebra if and only if

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ d_k(\alpha_i) & d_k(\alpha_j) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_j & \alpha_k \\ d_i(\alpha_j) & d_i(\alpha_k) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_k & \alpha_i \\ d_j(\alpha_k) & d_j(\alpha_i) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

where, $1 \leq i < j < k \leq 4$.

Example. Let $\mathbf{L}$ be a 4-dimensional 3-Lie algebra. Let e_1, e_2, e_3, e_4 be any basis of $\mathbf{L}$. Then $[e_i, e_j, e_k] = \sum\limits_{s=1}^{4} \gamma_{ijk}^s e_s$, where γ_{ijk}^s's are structure constants. Now let $\mathbf{F}[X] = \mathbf{F}[x_1, x_2, x_3, x_4]$ be the polynomial algebra. Define a ternary bracket on $\mathbf{F}[X]$ in the following form:

$$[f_1, f_2, f_3] = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & -\sum\limits_{s=1}^{4} \gamma_{234}^s x_s \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \sum\limits_{s=1}^{4} \gamma_{134}^s x_s \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & -\sum\limits_{s=1}^{4} \gamma_{124}^s x_s \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \sum\limits_{s=1}^{4} \gamma_{123}^s x_s \end{vmatrix}.$$

It is easy to check by using (3) that this satisfies the identity (1). Thus, $\langle \mathbf{F}[X], [-,-,-]\rangle$ is a 3-Lie algebra.

REFERENCES

1. V.T. Filippov, *n-Lie algebras,* Sibirsk. Mat. Zh. 26(6) (1985), 126 - 140.
2. V.T. Filippov, *On n-Lie algebras of Jacobians,* Sib. Mat. Zh. 39(3) (1998), 660 - 669.
3. A.S. Dzhumadildaev, *Identities and derivations for Jacobian algebras,* Contemp. Math. 315 (2002), 245 - 278.

Functional equations for the SOS model with external field on a Cayley tree

Rahmatullaev M. M.[1], **Karshiboev O. Sh.**[2]

Institute of mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
mrahmatullaev@rambler.ru;
Chirchik state pedagogical institute of Tashkent region, Tashkent, Uzbekistan,
okarshiboevsher@mail.ru

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e. a graph without cycles, such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex. Let $\Gamma^k = (V, L)$ where V is the set of vertices and L the set of edges. Two vertices x and y are called *nearest neighbors* if there exists an edge $l \in L$ connecting them. We will use the notation $l = \langle x, y\rangle$. A collection of nearest neighbor pairs $\langle x, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, $\ldots, \langle x_{d-1}, y\rangle$ is called a *path* from x to y (which is the unique path if no edges are crossed twice).

For a fixed $x^0 \in V$, called the root, we set

$$W_n = \{x \in V | d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m$$

and denote by

$$S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}, \quad x \in W_n.$$

the set of *direct successors* of x.

We consider models where the spin takes values in the set $\Phi := \{0, 1, \dots, m\}, m \geq 2$, and is assigned to the vertices of the tree. A configuration σ on V is then defined as a function $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$; the set of all configurations is Φ^V. The (formal) Hamiltonian is of an SOS model with external field form:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| - \sum_{x \in V} \alpha_{\sigma(x),x}, \tag{1}$$

where $J \in R$ and $\alpha_x = (\alpha_{0,x}, \alpha_{1,x}, ..., \alpha_{m,x}) \in R^{m+1}$ is the external (possible random) field.

Let $h : x \mapsto h_x = (h_{0,x}, h_{1,x}, \dots, h_{m,x}) \in R^{m+1}$ be a real vector-valued function of $x \in V \setminus \{x^0\}$.

Given $n = 1, 2, \dots$, consider the probability distribution μ_n on Φ^{V_n} defined by

$$\mu^{(n)}(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\Big(- \beta H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\Big). \tag{2}$$

Here, $\sigma_n : x \in V_n \mapsto \sigma(x)$ and Z_n is the corresponding partition function:

$$Z_n = \sum_{\tilde\sigma_n \in \Phi^{V_n}} \exp\Big(- \beta H(\tilde\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\tilde\sigma(x),x}\Big). \tag{3}$$

We say that the probability distributions $\mu^{(n)}$ are compatible if $\forall n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{4}$$

Here $\sigma_{n-1} \vee \omega_n \in \Phi^{V_n}$ is the concatenation of σ_{n-1} and ω_n. In this case there exists a unique measure μ on Φ^V such that, $\forall n$ and $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$, $\mu\Big(\Big\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\Big\}\Big) = \mu^{(n)}(\sigma_n)$. Such a measure is called a *splitting Gibbs measure* (SGM) corresponding to Hamiltonian H and function $x \mapsto h_x, x \neq x^0$.

The following statement describes the conditions on the boundary fields h_x guaranteeing compatibility of distributions $\mu^{(n)}(\sigma_n)$.

Theorem 1. *The probability distributions $\{\mu^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ defined in (2) are compatible if and only if the following vector identity holds*

$$\tilde h_x = \tilde\alpha_x + \sum_{y \in S(x)} F(\tilde h_y; \theta), \quad x \in V, \tag{5}$$

here and below

$$\theta = e^{\beta J} \tag{6}$$

and

$$\begin{gathered} \tilde h_x = (\tilde h_{0,x}, ..., \tilde h_{m-1,x}), \tilde\alpha_x = (\tilde\alpha_{0,x}, ..., \tilde\alpha_{m-1,x}), \\ \tilde h_{i,x} = h_{i,x} - h_{m,x} + \beta\Big(\alpha_{i,x} - \alpha_{m,x}\Big), \\ \tilde\alpha_{i,x} = \beta\Big(\alpha_{i,x} - \alpha_{m,x}\Big), \quad i = 0, ..., m-1, \end{gathered} \tag{7}$$

the map $F(u; \theta) = (F_0(u; \theta), ..., F_{m-1}(u; \theta))$ is defined for $u = (u_0, ..., u_{m-1}) \in R^m$ and $\theta > 0$ by the formulas

$$F_i(u; \theta) := \ln \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|i-j|} e^{u_j} + \theta^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|m-j|} e^{u_j} + 1}, \ i = 0, \dots, m-1. \tag{8}$$

REFERENCES

1. Georgii H.-O. Gibbs measures and phase transitions. Berlin.: W. de Gruyter, 1988.
2. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. Singapore.: World Scientific, 2013.
3. Rozikov U.A., Suhov Y.M. Gibbs measures for SOS model on a Cayley tree //Inf.Dim.An.,Quant.Prob. and Related Topics. 2006 V.9, №3. P. 471–488.

CRITICAL FUJITA EXPONENTS FOR A SYSTEM OF MULTIDIMENSIONAL PARABOLIC EQUATIONS WITH NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

Rakhmonov Z.R., Alimov A.A.[1]

[1,2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

[1]zraxmonov@inbox.ru

In this paper we consider the properties of solution of nonlinear parabolic system of diffusion equation coupled via nonlinear boundary condition

$$\begin{cases} u_t = \nabla\left(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\right), & x \in R_+^N,\ t>0, \\ \upsilon_t = \nabla\left(|\nabla \upsilon|^{p_2-2}\nabla \upsilon\right), & x \in R_+^N,\ t>0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -|\nabla u|^{p_1-2}\frac{\partial u}{\partial x_1} = u^{\beta_1}\upsilon^{q_1}, & x_1=0,\ t>0, \\ -|\nabla \upsilon|^{p_2-2}\frac{\partial \upsilon}{\partial x_1} = u^{\beta_2}\upsilon^{q_2}, & x_1=0,\ t>0, \end{cases} \tag{2}$$

$$u\,(x,0) = u_0\,(x)\,, \quad \upsilon\,(x,0) = \upsilon_0\,(x)\,, \quad x>0, \tag{3}$$

where $R_+^N = \left\{(x_1,x')\,|x' \in R^{N-1},\ x_1>0\right\}$, $p_i>2$, β_i, $q_i>0\ (i=1,2)$, $u_0(x)$ and $\upsilon_0\,(x)$ are nonnegative continuous functions with compact support in R_+^N.

Nonlinear parabolic system of equations (1) appear in various applications as model of population dynamics, chemical reactions, heat transfer, and so on. For instance $u(x,t)$ and $\upsilon\,(x,t)$ represent the densities of two biological populations during a migration or the temperatures of two kinds of porous materials during a heat propagation [1-3].

The nonlinear boundary conditions (2) can be used to describe the influx of energy input at the boundary. For instance, in the heat transfer process (2) represents the heat flux, and hence the boundary conditions represent a nonlinear radiation law at the boundary. This kind of boundary conditions appears also in combustion problems when the reaction happens only at the boundary of the container, for example because of the presence of a solid catalyzer, see [1, 3] for a justification.

In recent years have been intensively studied the problems on blow-up and global existence conditions in time, blow-up rates to nonlinear parabolic equations, asymptotic of self-similar solutions [4-6]. In particular, critical exponents of the Fujita type, which plays an important role in studying the properties of mathematical models of various nonlinear processes, are described by nonlinear parabolic equations and a system of such equations of mathematical physics (see [4-6] and references therein). This work is devoted to the study of the conditions of global solvability, and unsolvability in time of solutions to problem (1)-(3) based on self-similar analysis.

Theorem 1. Let $\beta_1 \le \frac{2(p_1-1)}{p_1}$, $q_2 \le \frac{2(p_2-1)}{p_2}$. If $\beta_2 q_1 \le \left(\frac{2(p_1-1)}{p_1}-\beta_1\right)\left(\frac{2(p_2-1)}{p_2}-q_2\right)$, then each solution of problem (1)-(3) is global in time.

References

1. Wu, Z.Q., Zhao, J.N., Yin, J.X. and Li, H.L. Nonlinear Diffusion Equations, Singapore: World Scientific, 2001.

2. M. Aripov Standard Equation's Methods for Solutions to Nonlinear Problems, FAN, Tashkent, 1988.

3. A.S.Kalashnikov Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate parabolic equations of second order, Russian Math. Surveys, 42, (1987), 169-222.

4. Mi Yongsheng, Mu Chunlai Global existence and blow-up of solutions to a class of doubly degenerate parabolic equations coupled via nonlinear boundary flux. Advances in Mathematics (China), Vol.43, No.3, 2014, 398-410.

5. Wanjuan Du and Zhongping Li. Critical exponents for heat conduction equation with a nonlinear Boundary condition. Int. Jour. of Math. Anal. vol. 7, 11, 2013, 517-524.

6. Rakhmonov Z.R., Urunbayev J.E. On a Problem of Cross-Diffusion with Nonlocal Boundary Conditions. Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 2019,no. 5, pp. 614-620. doi:https://doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-5-614-620.

ON THE ASYMTOTIC OF THE SOLUTION OF A NONLINEAR FILTRATION PROBLEM WITH A SOURCE AND MULTIPLE NONLINEARITIES

Rakhmonov Z.R. [1], Salimov J.I.[2]

[1,2]National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

[1]zraxmonov@inbox.ru;

Consider the following parabolic equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\right)+u^\beta,\qquad (x,t)\in R_+\times(0,\ +\infty)\,,\tag{1}$$

with nonlinear boundary flux

$$-\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^m}{\partial x}\ (0,t)=u^q\,(0,t)\,,\quad t>0,\tag{2}$$

and initial value condition

$$u\,(x,0)=u_0\,(x)\,0,\quad x\in R_+,\tag{3}$$

where $m>1$, $p>2$,β, $q>0$, $u_0(x)$ - is a bounded, continuous, nonnegative and nontrivial initial data.

Equations (1) appear in various fields of natural science [1-3]. For example, equation (1) arises in the mathematical modeling of thermal conductivity of nanofluids, in the study of problems of fluid flow through porous media, in problems of the dynamics of biological populations, polytropic filtration, and the formation of structures in synergetics and in nanotechnologies, and in a number of other areas [1, 2].

Equation (1) is called as parabolic equation [1] and the case $p>2$ corresponds to the slow diffusion equation. The problem (1)-(3) has been intensively studied by many authors (see [4-6] and references therein) in different values of numerical parameters.

The purposes of this study are to establish asymptotic of self-similar solutions and obtained estimates of solutions of the problem (1)-(3) based on self-similar analysis.

Theorem 2. If $\beta > 2p-1$ and $q < \frac{2(m+p-2)}{p}$ then every solution of problem (1)-(3) blows up in time.

References

1. A.S. Kalashnikov. Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations, Russian. Math. Surveys 42(2), 1987, 169-222.

2. V.A. Galaktionov. On global nonexistence and localization of solutions to the Cauchy problem for some class of nonlinear parabolic equations, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. 23, 1983, 1341-1354;

3. M.Aripov. Standard EquationЎs Methods for Solutions to Nonlinear problems, Tashkent, FAN, 1988.

4. Zhongping Li, Chunlai Mu, Li Xie. Critical curves for a degenerate parabolic equation with multiple nonlinearities. J. Math. Anal. Appl. 359, 2009, 39-47.

5. Wanjuan Du and Zhongping Li. Critical exponents for heat conduction equation with a nonlinear Boundary condition. Int. Jour. of Math. Anal. vol. 7, 11, 2013, 517-524.

6. Z.R. Rakhmonov, A.I. Tillaev. On the behavior of the solution of a nonlinear polytropic filtration problem with a source and multiple nonlinearities. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2018, 9 (3), p. 323-329.

On classification in some chains of evolution algebras

Rozikov U. A.[1], Narkuziyev B. A.[2]

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,

rozikovu@yandex.ru; bnarkuziev@yandex.ru

A chain of evolution algebras (CEA) is an uncountable family (depending on time) of evolution algebras on the field of real numbers. Following [1] we consider a family $\{E^{[s,t]} : s,t \in \mathbb{R}, 0 \le s \le t\}$ of n-dimensional evolution algebras over the field $\mathbb{R}$, with the basis $e_1, e_2, \dots, e_n$ and the multiplication table

$$e_i e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{[s,t]} e_j, \quad i = 1, \dots, n; \quad e_i e_j = 0, \ i \neq j.$$

Here parameters s,t are considered as time. Denote by $\mathcal{M}^{[s,t]} = \left(a_{i,j}^{[s,t]}\right)_{i,j=1,\dots n}$ the matrix of structural constants of $E^{[s,t]}$.

Definition. *A family $\{E^{[s,t]} : s,t \in \mathbb{R}, 0 \le s \le t\}$ of n-dimensional evolution algebras over the field $\mathbb{R}$, is called a chain of evolution algebras (CEA) if the matrix $\mathcal{M}^{[s,t]}$ of structural constants satisfies the Chapman-Kolmogorov equation*

$$\mathcal{M}^{[s,t]} = \mathcal{M}^{[s,\tau]} \mathcal{M}^{[\tau,t]}, \ \ for \ any \ \ s < \tau < t.$$

We consider the following known CEAs (constructed in [3]): $E_i^{[s,t]}$, which correspond to the $\mathcal{M}_i^{[s,t]},\ i=1,2$ defined as:

$$\mathcal{M}_1^{[s,t]}=\frac{h(t)}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{h(s)}+f(s) & \frac{1}{h(s)}+f(s) & \frac{1}{h(s)}+f(s)\\ \frac{1}{h(s)}-g(s) & \frac{1}{h(s)}-g(s) & \frac{1}{h(s)}-g(s)\\ g(s)-f(s) & g(s)-f(s) & g(s)-f(s)\end{pmatrix}$$

where h, g and f are arbitrary functions with $h(s)\neq 0$;

$$\mathcal{M}_2^{[s,t]}=\theta(s)\begin{pmatrix} \eta(t) & \vartheta(t) & \kappa(t)\\ \varphi_1(s)\eta(t) & \varphi_1(s)\vartheta(t) & \varphi_1(s)\kappa(t)\\ \varphi_2(s)\eta(t) & \varphi_2(s)\vartheta(t) & \varphi_2(s)\kappa(t)\end{pmatrix}$$

where

$$\theta(s)=\frac{1}{\eta(s)+\varphi_1(s)\vartheta(s)+\varphi_2(s)\kappa(s)}$$

and η, ϑ, κ, φ_1, φ_2 are arbitrary functions with $\eta(s)+\varphi_1(s)\vartheta(s)+\varphi_2(s)\kappa(s)\neq 0$.

In [4] (see also [2] for the complex field case) three-dimensional real evolution algebras with $dim(E^2)=1$ are classified and twelve pairwise non-isomorphic evolution algebras are described. They are given by the following matrices of structural constants:

$$E_1\ :\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_2\ :\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad E_3\ :\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_4:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_5:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},E_6:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},E_7:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},E_8:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_9:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},E_{10}:\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},E_{11}:\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},E_{12}:\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

We have the next theorems (you may see full text of theorems in [5]).

Theorem 1. *For given values (s,t) of time the evolution algebra $E_1^{[s,t]}$ is isomorphic to one of the algebras $E_4, E_5, E_6,\ E_7, E_8, E_9$.*

Theorem 2. *For given values (s,t) of time the evolution algebra $E_2^{[s,t]}$ is isomorphic to one of the algebras $E_i, i=1,...,12$.*

References

1. J.M. Casas, M. Ladra, U.A. Rozikov, *A chain of evolution algebras,* Linear Algebra Appl., **435**(04) (2011), 852-870.
2. Y.C. Casado, M.S. Molina, M.V. Velasco, *Classification of three - dimensional evolution algebras*, Linear Algebra Appl., **524** (2017), 68-108.

3. A.N. Imomkulov, M.V. Velasco, *Chain of three-dimensional evolution algebras*, *Filomat*, **34**(10) (2020), 3175-3190.

4. A.N. Imomkulov, *Classification of a family of three dimensional real evolution algebras*, *TWMS J. Pure Appl. Math.*, **10**(2) (2019), 225-238.

5. B.A. Narkuziyev, U.A. Rozikov, *Classification in chains of three-dimensional real evolution algebras arXiv:2107.02756v1* .

A quadratic non-stochastic operator

Rozikov U. A.[1], Xudayarov S. S.[2]

V.I. Romanovskiy Institute of mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
rozikovu@yandex.ru;
Bukhara state university, Bukhara, Uzbekistan,
xsanat83@mail.ru

Non-linear dynamical systems arise in many problems of biology, physics and other sciences. In particular, quadratic dynamical systems describe the behavior of populations of different species with population models ([1],[2],[3]) Let S^{m-1} be the $m-1$ dimensional standard simplex and $V : R^m \to R^m$ be a quadratic operator which is given by the following from:

$$V(x)_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j \tag{1}$$

for $k = 1, \ldots, m.$, where $p_{ij,k} = p_{ji,k} \in R$ for $i, j, k \in N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$

Definition. *A quadratic operator (1) preserving a simplex is called non-stochastic if at least one of its coefficients $P_{ij,k}$, $i \neq j$ is negative.*

Consider

$$P_{ii,i} = 1, \quad P_{ii,k} = 1, \forall i = 1, 2, 3; \ \forall k = 2, 3;$$

$$P_{ij,1} = -\frac{1}{2}\sqrt{P_{ii,1}P_{jj,1}} = -\frac{1}{2}, \ \ \forall i \neq j;$$

$$P_{ij,k} \in \left[0, \frac{3}{2}\right], \ \forall i \neq j, \ \ k = 2, 3 \quad \text{with} \quad P_{ij,2} + P_{ij,3} = \frac{3}{2}$$

Then taking some parameters equal to zero we get the following quadratic operator V :

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \\ y' &= 3xy + ayz \\ z' &= 3xz + (3-a)yz, \end{aligned} \tag{2}$$

where $a \in (0, 3)$ and $(x, y, z) \in S^2 = \{(x, y, z) \in R^m : x + y + z = 1\}$. It is easy to see that the fixed points of the operator (2) are

$$s_1 = (1,0,0), \quad s_2 = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right),$$
$$s_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \quad s_4 = \left(\frac{a^2-3a+3}{a^2-3a+9}, \frac{2a}{a^2-3a+9}, \frac{2(3-a)}{a^2-3a+9}\right).$$

Let $a \in (0,3)$. Introduce the following sets:

$$M_1 = \left\{(y,z) \in [0,1]^2 : y = 0\right\}, \quad M_2 = \left\{(y,z) \in [0,1]^2 : z = 0\right\},$$
$$M_3 = \left\{(y,z) \in [0,1]^2 : y+z \le 1, z = \frac{3-a}{a} \cdot y\right\},$$
$$M_4 = \left\{(y,z) \in [0,1]^2 : y+z \le 1, z < \frac{3-a}{a} \cdot y\right\},$$
$$M_5 = \left\{(y,z) \in [0,1]^2 : y+z \le 1, z > \frac{3-a}{a} \cdot y\right\}.$$

and

$$\widehat{M_i} = \left\{(x,y,z) \in S^2 : (y,z) \in M_i\right\}, \quad i = \overline{1,5}.$$

Then

$$S^2 = \bigcup_{i=1}^{5} \widehat{M_i}.$$

Theorem. *If* $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) \in \widehat{M_i}$ *for some* $i = 1,2,3,4,5$ *then for the operator(2) the following holds*

$$\lim_{n\to\infty} V^n(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = \begin{cases} s_1 & \text{if} \quad x^{(0)} = 1 \\ s_2 & \text{if} \quad i = 1, \quad z^{(0)} > 0 \\ s_3 & \text{if} \quad i = 2, \quad y^{(0)} > 0 \\ s_4 & \text{if} \quad i = 3, \quad y^{(0)} > 0 \\ \in \widehat{M_3} & \text{if} \quad i = 4,5. \end{cases}$$

Conjecture. If $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) \in \widehat{M_4} \bigcup \widehat{M_5}$ then for the operator (2) the following holds

$$\lim_{n\to\infty} V^n(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = s_4.$$

REFERENCES

1. Kesten H., Quadratic transformations: a model for population growth. I, II, Adv. // Appl.Probab, 2 (1970) 1-82; 179-228.

2. Yu.I. Lyubich, Mathematical structures in population genetics,// Springer-Verlag, 1992.

3. Rozikov U.A., Population dynamics: algebraic and probabilistic approach.World Sci. Publ.// Singapore.2020.

Differential Game of Pursuit under GrG-constraints on Controls

Samatov B. T.[1], Akbarov A. Kh.[2], Jurayev B. I.[3]

Namangan State University, Namangan, Uzbekistan.
samatov57@inbox.ru[1]
Andijan State University, Andijan, Uzbekistan.
akbarov.adhambek@bk.ru[2], jbahodirjon@bk.ru[3]

Abstract. The main aim of this work is to present some natural applications of Gronwall type inequalities in the Differential Games. We study the pursuit problem for simple motion differential games when Gronwall type constraint imposed on control function of pursuer and geometrical constraint imposed on control function of evader.

There are a huge number of works where simple motion differential games with geometric constraints on controls of the form

$$|u| \leq \rho, \quad |v| \leq \sigma \tag{1}$$

were studied. The first constraint in (1) means that any control function $u(t)$, $t0$, satisfies the condition

$$\|u(\cdot)\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t0} |u(t)| \leq \rho. \tag{2}$$

In the present paper, we propose a new set of controls of pursuer described by the following Grönwall type constraint (briefly, Gr-constraint)

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 + 2k \int\limits_0^t |u(s)|^2 ds \text{ for almost every } t0, \tag{3}$$

and a set of controls of evader described by geometrical constraint (briefly, G-constraint) of the form

$$|v(t)| \leq \beta \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{4}$$

where ρ, β are given positive numbers and k is a given non-negative number respectively.

Let dynamics of pursuer **P** and evader **E** be described by the following equations

$$\mathbf{P}: \dot{x} = u, \quad x(0) = x_o \tag{5}$$

$$\mathbf{E}: \ \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0 \tag{6}$$

where $x, y, x_0, y_0, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n1$, $x_0 \neq y_0$.

DEFINITION 1. The functions $u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot), ..., u_n(\cdot))$ and $v(\cdot) = (v_1(\cdot), v_2(\cdot), ..., v_n(\cdot))$ that satisfy the conditions (3) and (4) are called controls of pursuer and evader respectively.

DEFINITION 2. For a pair of $(x_0,\ u(\cdot))$, $u(\cdot) \in U_{Gr}$ the solution of equation (5), that is,

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t u(s)ds,$$

is called a trajectory of pursuer on interval $t \geq 0$.

DEFINITION 3. For a pair of $(y_0,\ v(\cdot))$, $v(\cdot) \in V_G$ the solution of equation (6), that is,

$$y(t) = y_0 + \int\limits_0^t v(s)ds$$

is called a trajectory of evader on interval $t \geq 0$.

Lemma 1. If

$$|\omega(t)|^2 \leq \alpha^2 + 2k \int\limits_0^t |\omega(s)|^2 ds,$$

then $|\omega(t)| \leq \alpha e^{kt}$, where $\omega(t)$, $t0$, is a measurable function and α, k are non-negative numbers. By Lemma 1, if $u(\cdot) \in \mathbb{U}_{Gr}$ then

$$|u(t)| \leq \rho e^{kt}, \quad t0. \tag{7}$$

It can be easily checked that the converse is not true, that is, inequalities (7) do not imply inequality (3). To define the notions of optimal strategies of players and optimal pursuit time, we consider two games

DEFINITION 4. If $\rho \geq \beta$, then the function

$$\mathbf{u}_{GrG}(t, v) = v - \lambda_{GrG}(t, v)\xi_0, \tag{8}$$

is called Π_{GrG}-strategy of pursuer in the GrG-game of pursuit, where

$$\lambda_{GrG}(t, v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \rho^2 e^{2kt} - |v|^2},\ \xi_0 = z_0/|z_0|.$$

Theorem 1. If the condition $\rho \geq \beta$ holds for differential game (1)-(4), then pursuit can be completed by strategy (8) on $[0, T_{GrG}]$, where T_{GrG} is the first positive solution of the equation

$$e^{kt} = \frac{k\beta}{\rho} t + 1 + \frac{|z_0|k}{\rho}$$

Theorem 2. If $\rho \geq \beta$, then for any control of pursuer, the strategy of evader $\mathbf{v}(t) = -\beta\xi_0$, $t \geq 0$, guarantees the inequality $x(t) \neq y(t)$ on the time interval $[0, T_{GrG})$.

References

1. Gronwall T.H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. Math., 1919, 20(2): 293-296.

2. Azamov A.A., Samatov B.T. П-Strategy. An Elementary introduction to the Theory of Differential Games. - T.: National Univ. of Uzb., 2000. - 32 p.

3. Samatov B.T., Ibragimov G.I., Khodjibayeva I.V. Pursuit-evasion differential games with the gronwall type constraints on controls. Ural mathematical journal, Vol. 6, No. 2, 2020, pp. 95-107.

4. Samatov B.T., Soyibboyev U.B., Akbarov A.Kh. Evasion problem in linear differential game with Gronwall type constraint. Scientific Bulletin of Namangan State University 1(10), 25-33, 2019.

5. Samatov B.T., Jurayev B.I, Akbarov A.Kh. On evasion problem for the case which imposed geometrical-Gronwall constraint. Scientific Bulletin of Namangan State University 2(5), 3-8, 2020.

Derivation of some nilpotent Leibniz superalgebras

Sanoqulova S.
National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,
sanoqulovasarvinoz@mail.ru;

During many years the theory of Lie superalgebras has been actively studied by many mathematicians and physicists. Many works have been devoted to them but few have dealt with nilpotent Lie superalgebras. Recent works [1–3] have studied the problems of description of some classes of nilpotent Lie superalgebras. It is well known that Lie superalgebras are a generalization of Lie algebras. In the same way, the notion of Leibniz algebras can be generalized about Leibniz superalgebras.

In a similar way to Leibniz algebras and Lie superalgebras cases, it is possible to define the notions of null-filiform and filiform Leibniz superalgebras [1] as superalgebras with characteristic sequences $(n \mid m)$ and $(n-1, 1 \mid m)$ respectively. In the present work we investigate derivations of nilpotent Leibniz superalgebras with the characteristic sequence $C(L) = (n \mid m-1, 1)$ and with nilindex equal to $n+m$.

Definition 1. A $\mathbb{Z}_2$-graded vector space $L = L_0 \oplus L_1$ is called a Leibniz superalgebra if it is equipped with a product $[-,-]$ which satisfies the following conditions:

$$[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta} \ for\ all\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2,$$

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - (-1)^{\alpha\beta}[[x,z],y] - graded\ Leibniz\ identity$$

for all $x \in L, y \in L_\alpha, z \in L_\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$.

Note that if in L the identity $[x,y] = -(-1)^{\alpha\beta}[y,x]$ (where $x \in L_\alpha,\ y \in L_\beta$) holds, then the graded Leibniz and graded Jacobi identities coincide. Thus, Leibniz superalgebras are a generalization of Lie superalgebras.

The vector spaces L_0 and L_1 are said to be the even and odd parts of the superalgebra L, respectively. It is obvious that L_0 is a Leibniz algebra and L_1 is a representation of L_0.

For a given Leibniz superalgebra L the lower central and derived series are defined as follows:

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k1,$$

$$L^{[1]} = L,\ L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}],\ s1,$$

respectively.

Definition 2. A Leibniz superalgebra L is said to be nilpotent (respectively, solvable), if there exists $k \in \mathbb{N}(s \in \mathbb{N})$ such that $L^k = \{0\}$ (respectively, $L^{[s]} = \{0\}$). The minimal number k with such property is said to be the index of nilpotency or the nilindex of the superalgebra L.

Definition 3. A derivation of degree s, $s \in \mathbb{Z}_2$, of a superalgebra L is a linear map with the property:

$$D([x,y]) = [x, D(y)] + (-1)^{s \cdot \beta}[D(x), y],$$

where $x \in L,\ y \in L_\beta$.

From the following Propositions we have the descriptions of nilpotent Leibniz superalgebras with characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$ and nilindex $n+m$.

Lemma 1. [2] Let L be a $n+m$-dimensional Leibniz superalgebra with characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$ and nilindex $n+m$. Then, $m = n+1$ or $m = n+2$ and in case of

$m = n+1$ there exists a basis $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\}$ of L in which the products have the following forms:

$[x_i, x_1] = x_{i+1},\ 1 \le i \le n-1,\ \ [y_j, x_1] = y_{j+1},\ 1 \le j \le n-1,$
$[x_i, y_1] = \frac{1}{2} y_{i+1},\ 1 \le i \le n-1,\ [y_j, y_1] = x_j,\ 1 \le j \le n,$
$[y_{n+1}, y_{n+1}] = \gamma x_n,\ [x_i, y_{n+1}] = \sum\limits_{k=[\frac{n+4}{2}]}^{n+1-i} \beta_k y_{k-1+i},\ 1 \le i \le [\frac{n-1}{2}],$
$[y_1, y_{n+1}] = -2 \sum\limits_{k=[\frac{n+4}{2}]}^{n} \beta_k x_{k-1} + \beta x_n,\ [y_j, y_{n+1}] = -2 \sum\limits_{k=[\frac{n+4}{2}]}^{n+2-j} \beta_k x_{k-2+j},\ 2 \le j \le [\frac{n+1}{2}].$

Lemma 2. Let L be a $n+m$-dimensional Leibniz superalgebra with characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$ and nilindex $n+m$ and $m = n+2$. Then, there exists a basis $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_{n+2}\}$ of L in which the multiplication has the following forms:

$[x_i, x_1] = x_{i+1},\ 1 \le i \le n-1,\ \ [y_j, x_1] = y_{j+1},\ 1 \le j \le n,$
$[x_i, y_1] = \frac{1}{2} y_{i+1},\ 1 \le i \le n,\ [y_j, y_1] = x_j,\ 1 \le j \le n,$
$[x_i, y_{n+2}] = \sum\limits_{k=[\frac{n+5}{2}]}^{n+2-i} \beta_k y_{k-1+i},\ 1 \le i \le [\frac{n}{2}],$
$[y_1, y_{n+2}] = -2 \sum\limits_{k=[\frac{n+5}{2}]}^{n+2-j} \beta_k x_{k-2+j},\ 1 \le j \le [\frac{n}{2}].$

Proposition 1. Any even derivation of the $n+m$-dimensional Leibniz superalgebra with characteristic sequence $(n \mid m-1, 1)$ and nilindex $n+m$ and $m = n+1$ has the following form

$$\begin{aligned}
d(e_1) &= 2a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_{\frac{n}{2}} e_{\frac{n}{2}} + (a_{\frac{n}{2}+1} - 2a_{n+1}\beta_{\frac{n}{2}+2}) e_{\frac{n}{2}+1} + \\
&\quad + (a_{\frac{n}{2}+2} - 2a_{n+1}\beta_{\frac{n}{2}+3}) e_{\frac{n}{2}+2} + \dots + (a_{n-1} - 2a_{n+1}\beta_n) e_{n-1} + a_{n-2}\beta e_n, \\
d(e_i) &= 2i a_1 e_i + a_2 e_{i+1} + \dots + a_{\frac{n}{2}} e_{\frac{n}{2}-i+1} + (a_{\frac{n}{2}+1} - 2a_{n+1}\beta_{\frac{n}{2}+2}) e_{\frac{n}{2}+i} + \\
&\quad + (a_{\frac{n}{2}+2} - 2a_{n+1}\beta_{\frac{n}{2}+3}) e_{\frac{n}{2}+i+1} + \dots + (a_{n-i+1} - 2a_{n+1}\beta_{n-i+2}) e_n, \quad 2 \le i \le n, \\
d(y_1) &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_{n+1} y_{n+1}, \\
d(y_i) &= (2i-1) a_1 y_i + a_2 y_{i+1} + \dots + a_{n-i+1} y_n, \qquad 2 \le i \le n, \\
d(y_{n+1}) &= \gamma a_{n+1} y_n + b_{n+1} y_{n+1},
\end{aligned}$$

where $\gamma(a_1 - b_{n+1}) = 0$.

REFERENCES

1. Ayupov Sh.A., Khudoyberdiyev A.Kh., Omirov B.A. The classification of filiform Leibniz superalgebras of nilindex n + m. Acta Math. Sinica (English Series), Vol. 25, Issue 1, 171–190 (2009).

2. Camacho L.M., Gomez J.R., Navarro R.M., Omirov B.A. Classification of some nilpotent class of Leibniz superalgebras. Acta Math. Sinica (English Series), Vol. 26, Issue 5, 799–816 (2010)

3. Kac V.G. Lie superalgebras. Advances in Math., Vol. 26, Issue 1, 8–96 (1977).

The algebraic classification of 4-dimensional nilpotent left symmetric algebras

Sattarov A.M.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan

saloberdi9091@mail.ru;

The algebraic classification (up to isomorphism) of algebras of dimension n from a certain variety defined by a certain family of polinomial identities is a classic problem in the theory of non-associative algebras. There are many results related to the algebraic classification of small-dimensional algebras in the varieties of Jordan, Lie, Leibniz, Zinbiel and many other algebras [2-5]. An algebraic classification of complex 3-dimensional left symmetric algebras is given in [1]. In the present paper, we give the algebraic and geometric classification of 4-dimensional nilpotent left symmetric algebras.

The variety of left symmetric algebras is defined by the following identity:

$$(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz).$$

The above described method gives all (Novikov and non-Novikov) left symmetric algebras. But we are interested in developing this method in such a way that it only gives non-Novikov left symmetric algebras, because the classification of all Novikov algebras is given in [6].

Theorem Let $\mathbf{L}$ be a complex 4-dimensional nilpotent left symmetric algebra. Then $\mathbf{L}$ is a Novikov algebra or isomorphic to one algebra from the following list:

$\mathbf{L}_{01}^4$	:	$e_1e_1 = e_2,$	$e_1e_2 = e_4,$	$e_2e_3 = e_4,$	$e_3e_1 = e_4,$
$\mathbf{L}_{02}^4$	:	$e_1e_1 = e_2,$	$e_2e_3 = e_4,$	$e_3e_1 = e_4,$	
$\mathbf{L}_{03}^4$	:	$e_1e_1 = e_2$	$e_1e_2 = e_4,$	$e_2e_3 = e_4,$	
$\mathbf{L}_{04}^4$	:	$e_1e_1 = e_2,$	$e_2e_3 = e_4,$		
$\mathbf{L}_{05}^4$	:	$e_1e_1 = e_3,$	$e_2e_2 = e_3,$	$e_3e_1 = e_4,$	
$\mathbf{L}_{06}^4$	:	$e_1e_1 = e_3,$	$e_1e_2 = e_4,$	$e_2e_2 = e_3,$	$e_3e_1 = e_4,$
$\mathbf{L}_{07}^4$	:	$e_1e_1 = e_3,$	$e_2e_2 = e_3,$	$e_3e_1 = e_4,$	$e_3e_2 = ie_4,$
$\mathbf{L}_{08}^4$	:	$e_1e_1 = e_3,$	$e_1e_2 = e_4,$	$e_2e_2 = e_3,$	
		$e_3e_1 = e_4,$	$e_3e_2 = ie_4,$		
$\mathbf{L}_{09}^4$	:	$e_1e_2 = e_3,$	$e_1e_3 = -2e_4,$	$e_2e_1 = -e_3,$	$e_3e_1 = e_4,$
$\mathbf{L}_{10}^4$	:	$e_1e_2 = e_3,$	$e_1e_3 = -2e_4,$	$e_2e_1 = -e_3,$	
		$e_2e_2 = e_4,$	$e_3e_1 = e_4,$		
$\mathbf{L}_{11}^4(\lambda)_{\lambda\neq 0}$	:	$e_1e_1 = \lambda e_3,$	$e_2e_1 = e_3,$	$e_2e_2 = e_3,$	
		$e_2e_3 = e_4,$	$e_3e_1 = \lambda e_4,$		
$\mathbf{L}_{12}^4(\lambda)_{\lambda\neq 0}$	:	$e_1e_1 = \lambda e_3,$	$e_1e_2 = e_4,$	$e_2e_1 = e_3,$	
		$e_2e_2 = e_3,$	$e_2e_3 = e_4,$	$e_3e_1 = \lambda e_4,$	
$\mathbf{L}_{13}^4(\lambda)_{\lambda\neq 0}$	:	$e_1e_1 = \lambda e_3,$	$e_2e_2 = e_3,$	$e_2e_3 = (1-\sqrt{1-4\lambda})e_4,$	
		$e_2e_1 = e_3,$	$e_1e_3 = 2\lambda e_4,$	$e_3e_1 = -\lambda(1+\sqrt{1-4\lambda})e_4,$	
		$e_3e_2 = -2\lambda e_4,$			
$\mathbf{L}_{14}^4(\lambda)_{\lambda\neq 0}$	:	$e_1e_1 = \lambda e_3,$	$e_2e_2 = e_3 + e_4,$	$e_2e_3 = (1-\sqrt{1-4\lambda})e_4,$	
		$e_2e_1 = e_3,$	$e_1e_3 = 2\lambda e_4,$	$e_3e_1 = -\lambda(1+\sqrt{1-4\lambda})e_4,$	
		$e_3e_2 = -2\lambda e_4,$			

$$
\begin{array}{llll}
\mathbf{L}^4_{15}(\lambda)_{\lambda\neq 0} & : & e_1e_1=\lambda e_3, & e_2e_2=e_3, & e_2e_3=(1+\sqrt{1-4\lambda})e_4,\\
 & & e_2e_1=e_3, & e_1e_3=2\lambda e_4, & e_3e_1=-\lambda(1-\sqrt{1-4\lambda})e_4,\\
 & & e_3e_2=-2\lambda e_4, & & \\
\mathbf{L}^4_{16}(\lambda)_{\lambda\neq 0} & : & e_1e_1=\lambda e_3, & e_2e_2=e_3+e_4, & e_2e_3=(1+\sqrt{1-4\lambda})e_4,\\
 & & e_2e_1=e_3, & e_1e_3=2\lambda e_4, & e_3e_1=-\lambda(1-\sqrt{1-4\lambda})e_4,\\
 & & e_3e_2=-2\lambda e_4, & & \\
\mathbf{L}^4_{17}(\alpha) & : & e_1e_1=e_2, & e_1e_3=\alpha e_4, & e_2e_1=e_3,\\
 & & e_2e_2=e_4, & e_3e_1=(1-\alpha)e_4, & \\
\mathbf{L}^4_{18} & : & e_1e_1=e_2, & e_1e_2=e_4, & e_1e_3=-e_4,\\
 & & e_2e_1=e_3, & e_2e_2=e_4, & e_3e_1=2e_4,\\
\mathbf{L}^4_{19} & : & e_1e_1=e_2, & e_2e_1=e_3, & e_2e_3=e_4,\\
\mathbf{L}^4_{20} & : & e_1e_1=e_2, & e_1e_3=e_4, & e_2e_1=e_3,\\
 & & e_2e_3=e_4, & e_3e_1=-e_4, & \\
\mathbf{L}^4_{21}(\alpha) & : & e_1e_1=e_2, & e_1e_2=e_4, & e_1e_3=\alpha e_4,\\
 & & e_2e_1=e_3, & e_2e_3=e_4, & e_3e_1=-\alpha e_4,\\
\mathbf{L}^4_{22}(\alpha) & : & e_1e_1=e_2, & e_1e_2=e_3, & e_1e_3=(2\alpha+1)e_4,\\
 & & e_2e_1=e_4, & e_2e_2=e_4, & e_3e_1=-e_4,\\
\mathbf{L}^4_{23}(\lambda,\alpha) & : & e_1e_1=e_2, & e_1e_2=e_3, & e_1e_3=\big((2-\lambda)\alpha+1\big)e_4,\\
 & & e_2e_1=\lambda e_3, & e_2e_2=(\lambda\alpha+1)e_4, & e_3e_1=(\lambda\alpha-1)e_4,\\
\mathbf{L}^4_{24}(\lambda)_{\lambda\notin\{0;1\}} & : & e_1e_1=e_2, & e_1e_2=e_3, & e_1e_3=2(3-\lambda)e_4,\\
 & & e_2e_1=\lambda e_3+e_4, & e_2e_2=2\lambda(\lambda+1)e_4, & e_3e_1=4\lambda e_4.
\end{array}
$$

References

1. Bai C., Bijective 1-cocycles and classification of 3-dimensional left-symmetric algebras, Communications in Algebra, 37 (2009), 3, 1016–1057.

2. Cañete E., Khudoyberdiyev A., The classification of 4-dimensional Leibniz algebras, Linear Algebra and its Applications, 439 (2013), 1, 273–288.

3. Grunewald F., O'Halloran J., Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six, Journal of Algebra, 112 (1988), 315–325.

4. Hegazi A., Abdelwahab H., Classification of five-dimensional nilpotent Jordan algebras, Linear Algebra and its Applications, 494 (2016), 165–218.

5. Jumaniyozov D., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A., The algebraic and geometric classification of nilpotent noncommutative Jordan algebras, Journal of Algebra and its Applications, doi:10.1142/S0219498821502029

6. Karimjanov I., Kaygorodov I., Khudoyberdiyev A., The algebraic and geometric classification of nilpotent Novikov algebras, Journal of Geometry and Physics, 143 (2019), 11–21.

Carleman's formula of a solutions of the Poisson equation in bounded domain

Sattorov E. N. [1], **Ermamatova Z. E.**[2]
Samarkand State University , Samarkand, Uzbekistan,
e-mail1: Sattorov-e@rambler.ru;
Samarkand State University , Samarkand, Uzbekistan,
e-mail2: zuxroermamatova@rambler.ru

Poisson equation or potential equation [1]

$$-\triangle U(x) \equiv -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = f(x), \tag{1}$$

is the classical example for second order elliptic partial differential equations and it is a mathematical model to some important physical phenomena. It has applications in many different areas such as plasma physic, electrocardiography, and corrosion non-destructive evaluation (e.g., [2], [3],[4], [5], [6]).

In this paper, we offer an explicit formula for reconstruction of a solution of the Poisson equation in bounded domain from its values and the values of its normal derivative on part of the boundary, i.e., we give an explicit continuation formula for a solution to the Cauchy problem for the Poisson equation.

Let R^3 is the third dimensional real Euclidean space,

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ \ y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3,\ \ x' = (x_1, x_2),\ \ y' = (y_1, y_2) \in R^2,$$

$$s = \alpha^2 = |y'-x'| = (y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2,\ \ r^2 = s+(y_3-x_3)^2 = |y-x|^2, \tau = tg\frac{\pi}{2\rho},\ \ \rho > 1,$$

$$G_\rho = \{y : |y'| < \tau y_3,\ \ y_3 > 0\},\ \ \partial G_\rho = \{y : |y'| = \tau y_3,\ \ y_3 > 0\},\ \ \overline{G}_\rho = G_\rho \cup \partial G_\rho,\ \ \varepsilon, \varepsilon_1$$

and ε_2 sufficiently small positive constants,

$$G_\rho^\varepsilon = \{y : |y'| < \tau(y_3 - \varepsilon)\},\ \ \partial G_\rho^\varepsilon = \{y : |y'| = \tau(y_3 - \varepsilon)\}\ \ \overline{G}_\rho^\varepsilon = G_\rho^\varepsilon \cup \partial G_\rho^\varepsilon,$$

$$C = \{\varsigma : \varsigma = \xi + i\eta,\ \ -\infty < \xi < \infty,\ \ -\infty < \eta < \infty, \}.$$

$\Omega_\rho-$ is a bounded simply connected domain whose boundary in R^3 whose boundary $\partial\Omega_\rho$ consists of a part of the conic surface $T \equiv \partial G_\rho$ and a smooth surface S, lying inside the cone $\overline{G}_\rho$. The case $\rho = 1$ is the limit case. In this case G_1 is the half-space $y_3 > 0, \partial G_1$ is the hyperplane $y_3 = 0$, and Ω_1 is a bounded simply connected domain whose boundary consists of a compact connected part of the hyperplane $y_3 = 0$ and a smooth surface S in the half-space $y_1 \geq 0$, $\overline{\Omega}_\rho = \Omega_\rho \cup \partial\Omega_\rho$, S_0, is the interior of S, and function f Hölder continuous with exponent $\lambda \in (0, 1)$, i.e., $f \in C^{s,\lambda}(\overline{\Omega}_\rho)$ and $s \in Z_+$.

Problem. Let we know the Cauchy data for a solution to system (0.1) on the surface S:

$$U(y) = f_1(y), \frac{\partial U(y)}{\partial n} = f_2(y), y \in S \tag{2}$$

where $n = (n_1, n_2, n_3)$ is the unit outward-pointing normal to the surface $\partial\Omega$ at a point y, and f_1, f_2 are continuous vector-functions. Given $f_1(y)$ and $f_2(y)$ on S, find $U(x)$ $x \in \Omega$.

The Cauchy problem (2)for the Poisson equation (1) is well-known to be ill-posed [7], [8]. Hadamard [9] noted that solution to problem is not stable. Possibility of introducing a positive parameter σ, depending on the accuracy of the initial data, was noticed by M. M. Lavrent'ev [10]. Uniqueness of the solution follows from the general theorem by Holmgren [11]. Traditionally, regularization techniques, such as Tikhonov regularization [12].

We suppose that a solution to the problem exists (in this event it is unique) and continuously differentiable in the closed domain and the Cauchy data are given exactly. In this case we establish an explicit continuation formula. This formula enables us to state a simple and convenient criterion for solvability of the Cauchy problem.

The result established here is a multidimensional analog of the theorems and Carleman-type formulas [13], by G.M.Goluzin, V.I.Krylov, V.A.Fok, and F.M.Kuni in the theory of holomorphic functions of one variable [14],[15].

REFERENCES

1. Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic partial differential equations of second order, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, Tokyo 1983
2. Blum J., Numerical simulation and optimal control in plasma physics, New York, NY; John Wiley and Sons Inc., 1989.
3. Chen G. and Zhou J. , Boundary Element Methods, Academic Press, London, 1992.
4. Colli-Franzone P., Guerri L., Tentoni L., Viganotti L., Baruffi S., Spaggiari S., and Taccardi B., A mathematical procedure for solving the inverse potential problem of electrocardiography. Analysis of the time-space accuracy from in vitro experimental data, Mathematical Biosciences, 77 (1985), pp. 353-396.
5. Fasino D. and Inglese G., An inverse Robin problem for Laplace's equation: theoretical results and numerical methods, Inverse problems, 15 (1999), p. 41.
6. Inglese G., An inverse problem in corrosion detection, Inverse problems, 13 (1997), p. 977.
7. Alessandrini G., Rondi L., Rosset E., and Vessella S., The stability for the Cauchy problem for elliptic equations, Inverse problems, 25 (2009), p. 123004.
8. Belgacem F. B., Why is the Cauchy problem severely ill-posed?, Inverse Problems, 23 (2007), p. 823.
9. Hadamard J., Lectures on the Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale University Press, New Haven, 1923.
10. Lavrentev, M. M. Some Improperly Posed Problems in Mathematical Physics (Springer, Berlin, 1967).
11. Bers, L., John, F., Schechter, M. Partial Differential Equations (Interscience, New York, 1964).
12. Tikhonov A. N. and Arsenin V. Y., Solutions of ill-posed problems, Winston, 1977.
13. Arbuzov, E. V., Bukhgeim, A. L. ЎThe Carleman Formula for the MaxwellЎs Equations on a PlaneЎ, Sib. Elektron. Mat. Izv., No. 5, 448-455 (2008) [in Russian].
14. Goluzin G. M. and Krylov V.I., "A generalized Carleman fornula and its application to analytic continuation of functions,"Vat.Sb., 40, No.2, (1933), p.144-149 .
15. Fok V.A. and Kuni F.M., "On the introduction of a 'suppressing' function in dispersion relations,"Dokl. Akad. Nauk SSSR, 127, No. 6, (1959), p. 1195-1198.

A new integral criterion for m - subharmonic functions

Shopulatov Sh. Sh.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics AS RUz, Tashkent, Uzbekistan,
shopulatov@mathinst.uz;

Subharmonic functions play an important role in the classical potential theory. They defined by harmonic majorants (see [2], [6]), by the Laplace differential operators (see [6]), by mean value inequalities (see [4]) and by the generalised Laplace operators (see [1-3], [7], [9-10]), so on. The idea of defining subharmonic functions with the mean value inequalities over the spheres or balls led us to give an integral criterion for both plurisubharmonic and m - subharmonic functions. In the recent work (see [8]) given subharmonic-like definition for plurisubharmonic functions, i.e. the criterion by mean value inequalities over special ellipsoids in $\mathbb{C}^n$.

m - subharmonic functions are defined by the subharmonicity on m - dimensional complex planes (see below Definition 1 and [5]). The main goal of the work is to give an integral criterion for m - subharmonic functions in terms of special complex ellipsoids. For the first we recall the definition of m - subharmonic functions.

Definition 1. The function $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ given in the domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is called m-*subharmonic* (shortly $m - sh$) in D (subharmonic function on m - dimenisonal complex planes, where $1 \leq m \leq n$), if

a) it is upper semi-continuous in D, in other words the following inequality holds:

$$\overline{\lim_{z \to z^0}} u(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{B(z^0,\varepsilon)} u(z) \leq u(z^0);$$

b) for any m - dimensional complex plane $\Pi \subset \mathbb{C}^n$ the restriction $u|_\Pi$ is subharmonic function on $\Pi \bigcap D$, i.e. $u|_\Pi \in sh(\Pi \bigcap D)$.

Now we consider in $\mathbb{C}^n$ the following class of ellipsoids

$$E(R,r) = \left\{ \frac{|z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2}{R^2} + \frac{|z_{m+1}|^2 + \ldots + |z_n|^2}{r^2} \leq 1 \right\}.$$

When $m = n$ the class of $n - sh$ functions is the same as the class of sh functions. For subharmonic functions the problems considered below trivially follow from the definition of subharmonic functions. Therefore, here we will consider the case when $1 \leq m < n$. We note that for the m - dimensional complex plane $\Pi_0 = \{z_{m+1} = ... = z_n = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ passing through origin $E(R,r)) \cap \Pi_0$ is a ball in Π_0. In addition, for each m - dimensional complex plane $\Pi \subset \mathbb{C}^n$ passing through origin there exists an unitary matrix T such that $T \circ \Pi_0 = \Pi$, so that $(T \circ E(R,r)) \cap \Pi$ is a ball in Π. Similarly, for any unitary matrix T there exists an m - dimensional complex plane $\Pi \subset \mathbb{C}^n$ passing through origin such that $(T \circ E(R,r)) \cap \Pi$ is a ball in Π.

Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a domain. For the function $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ we consider the following mean value over $E(R,r)$

$$M_u(z^0, T, E(R,r)) = \frac{1}{V(R,r)} \int\limits_{z^0 + T \circ E(R,r)} u(\xi) dV(\xi),$$

where $V(R,r) = \int\limits_{E(R,r)} dV(\xi) = \frac{\pi^n R^{2m} r^{2(n-m)}}{n!}$ is the volume of $E(R,r)$.

The following theorem states that m - subharmonic functions satisfy the integral mean value inequality in terms of $E(R,r)$ ellipsoids.

Theorem 1. Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a domain and $u(z) \in m - sh(D)$. Then for any $z^0 \in D$ and for any unitary matrix T with $z^0 + T \circ E(R,r) \subset D$ and $0 < r \leq R$ the following inequality holds

$$u(z^0) \leq M_u(z^0, T, E(R,r)). \tag{1}$$

The next theorem states that an upper semi-continuous function satisfying the integral mean value over the ellipsoid $E(R,r)$ is $m - sh$.

Theorem 2. Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a domain and u be an upper semi-continuous function on D. If for any $z^0 \in D$ and for any unitary matrix T if there exists $r_0 > 0$ such that the following

$$u(z^0) \leq M_u(z^0, T, E(R,r)), \forall R, r : r \leq R \leq r_0, T \circ E(R,r) \subset D \tag{2}$$

is true then $u(z) \in m - sh(D)$.

As a result of Theorems 1 and 2 we get directly the following theorem. It can be used for $m - sh$ functions as an integral criterion in terms of ellipsoids $E(R,r)$.

Theorem 3. Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a domain and u be an upper semi-continuous function on D. Then u is $m - sh$ if and only if for any $z^0 \in D$ and for any unitary matrix T with $z^0 + T \circ E(R,r) \subset D$ and $0 < r \leq R$ the following inequality holds

$$u(z^0) \leq M_u(z^0, T, E(R,r)).$$

REFERENCES

1. Blaschke W. Ein Mittelwertsatz und eine kennzeichnende Eigenschaft des logarithmischen Potentials // Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. 1916. V.68. P. 3–7.
2. Brelot M. Elements de la Theorie Classique Du Potentiel. Paris.: Centre du documentation universitaire, 4e edition, 1969.
3. Privalov I.I. Sur la définition d'une fonction subharmonique // Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. 1941. V.5. P. 281–284.
4. Demailly J-P. Complex Analytic and Differential Geometry. Grenoble.: Universite de Grenoble I, 1997.
5. Sadullaev A. Further Developments of the Pluripotential Theory (Survey) // Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. USUZCAMP 2017, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2018. V.264. P. 167–182.
6. Sadullaev A., Pluripotential theory and its applications. Saarbrücken, Deutschland.: Palmarium academic publishing, 2012.
7. Sadullaev A., Shopulatov Sh.Sh. The generalised Laplace operator and the topological characteristic of removable $\overline{S}$ - singular sets of subharmonic functions // Complex Anal. Oper. Theory. 2021. V.15, №50. P. 10.
8. Rakhimov K., Shopulatov Sh. A mean value criterion for plurisubharmonic functions // Complex Variables and Elliptic Equations. 2021. P. 13. DOI: 10.1080/17476933.2021.1954623
9. Shopulatov Sh.Sh. On a weak criterion for the subharmonicity of functions in $\mathbb{R}^n$ // Uzbek Mathematical Journal. 2018. V.2. P. 136–141.
10. Shopulatov Sh.Sh. On the properties of singular removable sets of subharmonic functions // Rep. AS RUz. 2019. V.2. P. 3–6.

Uniqueness of interior fixed point of the operator related to epidemic SISI model

Shoyimardonov S. K.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
shoyimardonov@inbox.ru

In the SISI model, an individual is initially susceptible, at some stage becomes infected, after an infectious period becomes completely susceptible again, but after recovery, an individual can become infected a second time also. The main example of SISI epidemic model was discussed as bovine respiratory syncytial virus (BRSV) amongst cattle in continuous time.

In [1] and [2] the following discrete-time version of the SISI model it was studied:

$$V:\begin{cases} x^{(1)}=x+b-bx-\beta_1A(u,v)x\\ u^{(1)}=u-bu-\alpha u+\beta_1A(u,v)x\\ y^{(1)}=y-by+\alpha u-\beta_2A(u,v)y\\ v^{(1)}=v-bv+\beta_2A(u,v)y\end{cases} \tag{1}$$

where $A(u,v)=k_1u+k_2v$.

Proposition. [1] We have $V\left(S^3\right)\subset S^3$ if and only if the non-negative parameters $b,\alpha,\beta_1,\beta_2,k_1,k_2$ verify the following conditions

$$\begin{array}{ccc} \alpha+b\le 1, & \beta_1k_2\le 2, & \beta_2k_1\le 2,\\ b+\beta_2k_2\le 1, & |b-\beta_1k_1|\le 1, & |b-\beta_2k_2|\le 1,\\ |b-\beta_1k_2|\le 1, & |\alpha+b-\beta_1k_1|\le 1, & |\alpha-b-\beta_2k_1|\le 1. \end{array} \tag{2}$$

Let λ be the following fixed point of the operator V (which is found in the work [1]):

$$\lambda=\left(\frac{b}{b+\beta_1A};\frac{b\beta_1A}{(b+\beta_1A)(b+\alpha)};\frac{\alpha b\beta_1A}{(b+\beta_1A)(b+\beta_2A)(b+\alpha)};\frac{\alpha\beta_1\beta_2A^2}{(b+\beta_1A)(b+\beta_2A)(b+\alpha)}\right),$$

and A is a positive solution of the equation

$$\frac{b\beta_1k_1}{(b+\beta_1A)(b+\alpha)}+\frac{\alpha\beta_1\beta_2k_2A}{(b+\beta_1A)(b+\beta_2A)(b+\alpha)}=1. \tag{3}$$

We are interested to the existence and number of solutions of the equation (3).

Note that, if there exists a positive solution A then based on conditions (2) for parameters, λ belongs to the interior of the simplex S^3.

Theorem. For the equation (3) the following cases hold:
(i) If $\beta_1k_1=b+\alpha$ and $\alpha\beta_2k_2>b\beta_1k_1$ then the equation (3) has unique positive solution;
(ii) If $\beta_1k_1>b+\alpha$ the the equation (3) has unique positive solution;
(iii) If $\beta_1k_1<b+\alpha$ then the equation (3) does not have positive solution.

REFERENCES

1. Shoyimardonov S.K. A non-linear discrete-time dynamical system related to epidemic SISI model. //Communications in mathematics. Accepted, December 4, 2020.
2. Shoyimardonov S.K. A discrete-time epidemic SISI model. //Uzbek Mathematical Journal. Preprint.

The development of surfaces in Galilean space

Sultanov B.M.

Urgench state university, Khorezm, Uzbekistan, Street Hamid Olimjon 14, 220100, bek_4747@bk.ru;

Galilean space R_3^1 is a three-dimensional affine space with a degenerate metric [1].

The basic geometric elements of a straight line, plane, and parallelism in Galilean space do not differ from these concepts of Euclidean space. Significantly different spatial motions of these spaces, that is, the transformation of space that preserves the distance between points.

Under the development of surface we mean a uniquely mapping of pieces of the surface at which the distance between the points and the angle between the lines are preserved. It is allowed to cut the surface into pieces and indicate the gluing methods [2].

B.M. Sultanov studied the development of surfaces consisting only of parabolic points [3]. These are cylinders and cones. It is shown that parabolic points of the surface are divided into two classes: parabolic and special parabolic.

It is proved that they have a different development on the plane. An example is given of cylinders equal in Euclidean space, but in the Galilean space one of them is a parabolic surface, the other is special parabolic. Moreover, they have different developments on the plane.

In this article, a surface development is obtained that is uniquely projected onto a general position plane in Galilean space.

Definition 1. If between the points of the surface $F \subset R_3^1$ and the points of the domain G in the plane Oxy, there is an unambiguous mapping, the distance between the corresponding points have the same order and equal, then the domain G - development is called a surface F in the plane Oxy.

In Euclidean space has a development only convex polyhedral cylindrical surface, cone. The degeneracy of the Galilean space metric allows for the unfolding of surfaces of a wider class.

Theorem 1. The surface $F \in R_3^1$ - width $[a,b]$ and uniquely projected on the Oxy plane, has a development G on the band $a \leq x \leq b$ of the Oxy plane.

Let D be a domain on the plane in general position Oxy, and $D = \{(x,y) \in R_2^1 : a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, where $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ are continuous functions in $[a,b]$.

Consider a surface $F : z = f(x,y) \quad (x,y) \in D$ with a boundary uniquely projecting onto the boundary of the domain D.

Theorem 2. The surface $F : z = f(x,y)$ is deployed to the area $G = \{(x,y) \in R_2^1 : a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 + f_y^2(x,y)dy}\}$ on the plane Oxy.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artykbaev A., Sokolov D.D. Geometry as a Whole in Flat Spacetime, - "Fan Tashkent, 1991.
2. Alexandrov A.D. Convex Polyhedra, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2005).
3. Artykbaev A., Sultanov B.M. Research of parabolic surface points in Galilean space. // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. Volume 2. Issue 4, pp. 231-245, 2019.

On the mathematical model SARS-COV-2 inside the object

Takhirov J. O.[1], Asrakulova D. S.[1]
Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
prof.takhirov@yahoo.com

Around the world, research is underway to combat this epidemic from various points of view, such as microbiology [1], mathematics [2], and so on. To date, several mathematical models have been proposed to study the population dynamics of the coronavirus. Only a few object-level models [2] have been developed to understand the SARS CoV-2 replication cycle and its interaction with the immune system. Currently, there is no clinically developed effective remedy for removing the virus from the human body. However, research is ongoing. Researchers have proposed various treatments (eg plasma therapy, monoclonal antibody therapy, etc.) that are effective in the early stages of the disease.

Research has shown that there is an efficient T-cell response to S and other structural proteins (including M and N proteins), allowing the development of a SARS vaccine by combining viral structural proteins. These types of vaccines can provide a strong, effective and long-term response to the human memory virus. In addition, clinical trials show that monoclonal antibody therapy is an effective treatment that responds to SARS-CoV-2.

The authors of paper [1] propose an ODE system for simulating the growth of coronavirus in the lungs

$$\frac{dE_p(t)}{dt} = d_E(E_p(0) - E_p(t)) - \beta E_p(t)\nu(t),$$
$$\frac{dE_p^*(t}{dt}) = \beta E_p(t)\nu(t) - d_{E^*}E_p^*(t),$$
$$\frac{d\nu(t)}{dt} = \pi\nu E_p^*(t) - d_\nu \nu(t),$$

where $E_p(t), E_p^*(t)$ and $\nu(t)$ - the number of uninfected epithelial cells of the lungs, infected epithelial cells of the lungs and the virus. β is the rate of viral infection, π is the rate of virus production, $E_p(0)$ is the number of uninfected epithelial cells without virus, and the term $d_E E_p(0)$ means continuous regeneration of uninfected epithelial cells. d_E, d_{E^*} and d_ν are the mortality rates of uninfected lung epithelial cells, infected lung epithelial cells and virus, respectively.

But mathematical modeling with spatial effects plays an important role in the behavior and understanding of a particular infectious disease. To understand the impact of heterogeneous systems on the dynamics of COVID-19, we needed to build a mathematical model consisting of systems of nonlinear parabolic equations.

In our article, we studied a model of viral kinetics in the host organism, which is the response of SARS-CoV-2 to epithelial cells.

REFERENCES

1. Li, C., Xu, J., Liu, J., Zhou, Y. The within-host viral kinetics of SARS-CoV-2 // Math. Biosci. Eng. 2020. 17(4), 2853Ц2861.

2. Yang, C.Y., Wang, J. A mathematical model for the novel coronavirus epidemic in Wuhan // China. Math. Biosci. Eng. 2020. 17(3), 2708Ц2724.

Structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the impurity Hubbard model. First triplet state

Tashpulatov S. M.[1], Parmanova R. T.[1]

Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republik of Uzbekistan, Tashkent, sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru;, togaymurodota@gmail.com

We consider four-electron systems in the impurity Hubbard model and investigated the structure of essential spectra and discrete spectrum of the system in the first triplet state. The Hamiltonian of considering system has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0 - A)\times$$

$$\times\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} + (B_0 - B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0 - U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \quad (1)$$

Here A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; $B > 0$ $(B_0 > 0)$ is the transfer integral between (between electron and impurities) neighboring sites, $\tau = \pm e_j, j = 1, 2, ..., \nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons in the regular (impurity) sites, γ is the spin index, $\gamma =\uparrow$ or $\gamma =\downarrow$, $\uparrow$ and $\downarrow$ denote the spin values $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$.

The four electron systems have a quintet state, three type triplet states, and two type singlet states. Hamiltonian H commutes with all components of the total spin operator $S = (S^+, S^-, S^z)$, and the structure of eigenfunctions and eigenvalues of the system therefore depends on S. The Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $\mathcal{H}_{as}$.

Let φ_0 be the vacuum vector in the space $\mathcal{H}_{as}$. The first triplet state corresponds the basic functions $t^1_{n,k,p,q\in Z^\nu} = a^+_{n,\uparrow}a^+_{k,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\downarrow}\varphi_0$. The subspace $\mathcal{H}^t_1$, corresponding to the first triplet state is the set of all vectors of the form $\psi^t_1 = \sum_{n,k,p,q\in Z^\nu} f(n,k,p,q)t^1_{n,k,p,q\in Z^\nu}$, $f \in l_2^{as}$, where l_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in the space $l_2((Z^\nu)^4)$.

Theorem 1. *The subspace $\mathcal{H}^t_1$ is invariant under the operator H, and the restriction H^t_1 of operator H to the subspace $\mathcal{H}^t_1$ is a bounded self-adjoint operator. It generates a* *bounded self-adjoint operator* $\overline{H}_1^t$ *acting in the space* $l_2^{as}((Z^\nu)^4)$. *The operator* H_1^t *acts on a vector* $\psi_1^t \in \mathcal{H}_1^t$ *according to the formula*

$$H_1^t\,\psi_1^t = \sum_{n,k,p,q\in Z^\nu} (\overline{H}_1^t f)(n,k,p,q)t^1_{n,k,p,q\in Z^\nu}. \tag{2}$$

Let $\mathcal{F} : l_2((Z^\nu)^4) \to L_2((T^\nu)^4) \equiv \widetilde{\mathcal{H}}_1^t$ be the Fourier transform, where T^ν is the $\nu-$dimensional torus endowed with the normalized Lebesgue measure $d\lambda$, i.e. $\lambda(T^\nu) = 1$.

We set $\widetilde{H}_1^t = \mathcal{F}\overline{H}_1^t\mathcal{F}^{-1}$. In the quasimomentum representation, the operator $\overline{H}_1^t$ acts in the Hilbert space $L_2^{as}((T^\nu)^4)$, where $L_2^{as}((T^\nu)^4)$ is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^4)$.

Theorem 2. *Let* $\nu = 1$, *and* $\varepsilon_2 = -B$, *and* $\varepsilon_1 < -2B$ *(respectively,* $\varepsilon_2 = -B$, *and* $\varepsilon_1 > 2B$*). Then the essential spectrum of the operator* H_1^t *is consists of the union of* N_1 *segments, where* $4 \le N_1 \le 8 : \sigma_{ess}(H_1^t) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z, 3A-6B+z]\cup[2A-4B+2z, 2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z, A+2B+3z]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_3, A+2B+z+z_3]\cup[A-2B+z+z_4, A+2B+z+z_4]$ *and discrete spectrum of the operator* H_1^t *is consists of a* N_2 *eigenvalues, where* $1 \le N_2 \le 3 : \sigma_{disc}(H_1^t) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4\}$, *where* $z = A+\varepsilon_1$, *and* z_3, *and* z_4 *are the additional eigenvalues of operator* H_1^t.

Theorem 3. *Let* $\nu = 1$, *and* $\varepsilon_2 > 0$, *and* $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B} < \varepsilon_1 < \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$, *then the essential spectrum of the operator* H_1^t *is consists of the union of the* N_1 *segment, where* $10 \le N_1 \le 16 : \sigma_{ess}(H_1^t) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z_1, 3A-6B+z_1]\cup[3A-6B+z_2, 3A-6B+z_2]\cup[2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1]\cup[2A-4B+2z_2, 2A+4B+2z_2]\cup[2A-4B+z_1+z_2, 2A+4B+z_1+z_2]\cup[A-2B+3z_1, A+2B+3z_1]\cup[A-2B+3z_2, A+2B+3z_2]\cup[A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2]\cup[A-2B+z_1+2z_2, A+2B+z_1+2z_2]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3]\cup[A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4]\cup[A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4]$ *and discrete spectrum of the operator* H_1^t *is consists of* N_2 *eigenvalues, where* $5 \le N_2 \le 11 : \sigma_{disc}(H_2^q) = \{4z_1, 4z_2, 3z_1+z_2, z_1+3z_2, 2z_1+2z_2, 2z_1+z_3, z_1+z_2+z_3, 2z_2+z_3, 2z_1+z_4, z_1+z_2+z_4, 2z_2+z_4\}$.

Theorem 4. *If* $-2B < \varepsilon_2 < 0$, *then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_1^t$ *is consists of a* N_1 *segments, where* $1 \le N_1 \le 3 : \sigma_{ess}(\widetilde{H}_1^t) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]$ *and discrete spectrum of the operator* $\widetilde{H}_1^t$ *is empty set.*

Theorem 5. *If* $\varepsilon_2 > 0$ *and* $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $\varepsilon_1 < -\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_1^t$ *is consists of the union of* N_1 *segments, where* $4 \le N_1 \le 8 : \sigma_{ess}(\widetilde{H}_1^t) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z_1, 3A+6B+z_1]\cup[2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1]\cup[A-2B+3z_1, A+2B+3z_1]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4]$, *and discrete spectrum of the operator* $\widetilde{H}_1^t$ *is consists of a* N_2 *point, where* $1 \le N_2 \le 3 : \sigma_{disc}(\widetilde{H}_1^t) = \{4z_1, 2z_1+z_3, 2z_1+z_4\}$, *where* z_1, *is the eigenvalue of the energy operator* $\widetilde{H}_1$, *of one-electron systems, and* z_3, *and* z_4 *are the additional eigenvalues of operator* H_1^t.

Theorem 6. *If* $\varepsilon_2 > 0$ *and* $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2 < -2B$ *and* $\varepsilon_1 > \frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the essential spectrum of the operator* $\widetilde{H}_1^t$ *is consists of the union of* N_1 *segments, where* $4 \le N_1 \le 8 : \sigma_{ess}(\widetilde{H}_1^t) = [4A-8B, 4A+8B]\cup[3A-6B+z_1, 3A+6B+z_1]\cup[2A-4B+2z_1, 2A+4B+2z_1]\cup[A-2B+3z_1, A+2B+3z_1]\cup[2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3]\cup[A-$

$2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3]\cup[2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4]$, *and discrete spectrum of the operator* $\widetilde{H}_1^t$ *is consists of a* N_2 *point, where* $1 \leq N_2 \leq 3$: $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_1^t) = \{4z_1, 2z_1 + z_3, 2z_1 + z_4\}$, *where* z_1, *is the eigenvalue of operator* $\widetilde{H}_1$, *and* z_3, *and* z_4 *are the additional eigenvalues of operator* H_1^t.

REFERENCES

1. Tashpulatov S.M. The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state.// Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. V.38, №3. P. 530–541.

2. Tashpulatov S.M. Spectra of the energy operator of four-electron systems in the triplet state in the Hubbard model.// Journal of Physics: Conference Series. 2016. V. 697. P. 012025. doi:10.1088/1742- 6596/697/1/012025.

Boundedness of p-adic ART quasi Gibbs measures

Tukhtabaev A. M.

Namangan state university, Namangan, Uzbekistan,
akbarxoja.toxtaboyev@mail.ru

It is always interesting to study non-periodic Gibbs measures. In [1] some non-periodic Gibbs measures that are called ART measures were investigated. In [3], [4] p-adic ART generalized Gibbs measures for the Ising model on the Cayley tree were studied. In this paper we are going to study p-adic ART quasi Gibbs measures for 3-state Potts model using by translation-invariant and G_2-periodic solutions on the Cayley tree of order k $(k \geq 3)$.

A p-adic Potts model on a Cayley tree is given with following the formal Hamiltonian

$$H(\sigma) = J \sum_{<x,y>\in l} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}$$

where $J \in B(0, p^{-1/(p-1)})$ is a coupling constant, $\langle x,\, y\rangle$ stands for nearest neighbor vertices and δ_{ij} is the Kronecker's symbol.

A p-adic probability measure $\mu_{h,\sigma}^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu_h^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{Z_n^{(h)}} \exp\{H_n(\sigma)\} \prod_{x\in W_n} h_{\sigma(x),x},$$

Here, $\sigma \in \Omega_{V_n}$, and $Z_n^{(h)}$ is the corresponding normalizing factor.

Theorem 1.[2] The measure $\mu_h^{(n)}(\sigma)$ associated with q-state Potts model is compatibly if and only if for any $n \in \mathbb{N}$ the following equation holds:

$$\widehat{\mathbf{h}_x} = \prod_{y\in S(x)} F(\widehat{\mathbf{h}_y}, \theta), \tag{1}$$

here $\widehat{h}=\left(\widehat{h}_1,\widehat{h}_2,...,\widehat{h}_{q-1}\right)\in\mathbb{Q}_p^{q-1}$, a mapping F is defined by $F(x;\theta)=(F_1(x;\theta),...,F_{q-1}(x;\theta))$ with

$$F_i(x;\theta)=\frac{(\theta-1)x_i+\sum\limits_{j=1}^{q-1}x_j+1}{\sum\limits_{j=1}^{q-1}x_j+\theta},\ \ x=\{x_i\}\in\mathbb{Q}_p^{q-1},\ i=1,2,...,q-1.$$

Let $k=2$, $q=3$, $\widehat{h}=(h,1,...,1)$ then we have translation-invariant solutions $h_0=1$, h_1, h_2 and G_2-periodic solutions h_3, h_4 (see [5]).

For $k\geq 3$ we set up some solutions of (1) using h_0,h_1,h_2 and h_3,h_4.

(a_1). Let V^k be the set of all vertices of the Cayley tree Γ^k. Since $k>2$ one can consider V^2 as a subset of V^k. Define the following function

$$\widetilde{h}_x^{(i)}=\begin{cases} h_i^{(2)}, & \text{if } x\in V^2,\\ 1, & \text{if } x\in V^k\setminus V^2,\end{cases} \tag{2}$$

where $i=\overline{0,2}$. $\widetilde{h}_x^{(i)}$ satisfies equation (1) on Γ^k.

(a_2). Let $k\geq 3$. We shall construct new p-adic (non-periodic) Gibbs measures using by $h_0=1,\ h_3\,h_4$. Define the following function

$$h_x^{(i)}=\begin{cases} h_i^{(2)}, & if\ x\in V^2\cap G_2,\\ F^2(h_i^{(2)},\theta), & if\ \ x\in V^2\cap(G^k\backslash G_2),\\ 1, & if\ \ x\in V^k\backslash V^2,\end{cases} \tag{3}$$

where $i=0,3,4$.

We denote by $\mu_{\widetilde{h}_x^{(i)}}, i=\overline{0,4}$ the Gibbs measures corresponding to $\widetilde{h}_x^{(i)}, i=\overline{0,4}$ and those measures we called p-adic ART quasi Gibbs measures.

Theorem 2. *Let $q=3$ and $k\geq 3$. Following statements are true for p-adic Potts model on a Cayley tree of order k*

1) *if $p=2$ or $p\equiv 5(\bmod 8)$ or $p\equiv 7(\bmod 8)$, then ART quasi Gibbs measure $\mu_{\widetilde{h_0}}$ is unbounded;*
2) *if $p\neq 3$, $p\equiv 1(\bmod 8)$ or $p\equiv 3(\bmod 8)$ then only ART quasi Gibbs measure $\mu_{\widetilde{h_0}}$ is bounded;*
3) *if $p=3$, then all ART quasi Gibbs measures constructed by rules (a_1) and (a_2) are unbounded.*

Corollary 3. *Let $q=3,k\geq 3$. For p-adic ART quasi Gibbs measures constructed by rules (a_1) and (a_2) there exist the phase transition occurrence if and only if $p\neq 3$, $p\equiv 1(\bmod 8)$ or $p\equiv 3(\bmod 8)$.*

REFERENCES

1. H.Akin, U.A.Rozikov, S.Temir, A new set of limiting Gibbs measures for the Ising model on a Cayley tree, J.Stat. Phys. 142:314-321, (2011).
2. F. Mukhamedov, On dynamical system appoach to phase transitions p-adic Potts model

on the Cayley tree of order two, Rep. Math. Phys. 70,385-406 (2012).
3. M.M.Rahmatullaev, O.N.Khakimov, A.M.Tukhtaboev, A p-Adic generilazed Gibbs measure for the Ising model on a Cayley tree, Theor. Math.Phys.201(1),1521-1530 (2019).
4. M.M.Rahmatullaev and A.M.Tukhtabaev, "Non periodic p-adic generilazed Gibbs measure for the Ising model p-Adic Numbers Ultrametric Anal.Appl.2019, Vol.11, No. 4, pp. 319-327.
5. A.M.Tukhtabaev, On G_2-periodic quasi Gibbs Measures of p-adic Potts Model on a Cayley Tree, p-Adic Numbers Ultrametric Anal.Appl.2021(Accepted)

The Neumann problem for a multidimensional elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain

Tulakova Z.R.

Ferghana branch of the TUIT, Ferghana, Uzbekistan,
ziyodacoders@gmail.com

Let $\mathbb{R}_m$ be the m -dimensional Euclidean space $(m \geq 2)$, $x := (x_1, ..., x_m)$ - arbitrary point in it and n is a natural number, and $n \leq m$. The 2^n -th part of the Euclidean space $\mathbb{R}_m$ is defined as follows:

$$\Omega \equiv \Omega_m^{n+} = \{x \in \mathbb{R}_m : x_i > 0,\, i = 1, ..., n;\, -\infty < x_j < +\infty,\, j = n+1, ..., m\}.$$

Fundamental solutions have an essential role in studying partial differential equations. The explicit form of the fundamental solution makes it possible to correctly formulate the problem statement and to study in detail the various properties of the solution of the equation under consideration. Fundamental solutions of singular elliptic equations are directly connected with multiple hypergeometric functions, the number of variables of which is determined by the number of singular coefficients. Indeed, all fundamental solutions of the following elliptic equation with n singular coefficients

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{2\alpha_j}{x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

in the hyperoctant Ω are expressed [1] by the Lauricella hypergeometric function $F_A^{(n)}$ in n variables [2] where $m2$ is a dimension of the Euclidean space; $n1$ is a number of the singular coefficients; mn; α_j are real constants and $0 < 2\alpha_j < 1$ $(j = \overline{1, n})$.

We introduce the following notation:

$$x := (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}_m;\;\; R^2 := \sum_{i=1}^{m} x_i^2;\;\; dx := \prod_{i=1}^{m} dx_i;\;\; x^{(2\alpha)} := \prod_{j=1}^{n} x_j^{2\alpha_j};$$

$$\tilde{x}_k := (x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_m) \in \mathbb{R}_{m-1};\;\; d\tilde{x}_k := \frac{dx}{dx_k};\;\; \tilde{x}_k^{(2\alpha)} := \frac{x^{(2\alpha)}}{x_k^{2\alpha_k}};$$

$$x_k^0 := (x_1, ..., x_{k-1}, 0, x_{k+1}, ..., x_m) \in \mathbb{R}_m;$$

$$S_k = \{x : x_1 > 0, ..., x_{k-1} > 0,\, x_k = 0,\, x_{k+1} > 0, ..., x_n > 0,$$

$$-\infty < x_{n+1} < +\infty, ..., -\infty < x_m < +\infty\}, \ m \geq 2, \ 1 \leq k \leq n \leq m.$$

The Lauricella hypergeometric function $F_A^{(n)}$ in n variables is defined as following [2]:

$$F_A^{(n)}(a, b_1, ..., b_n; c_1, ..., c_n; x_1, ..., x_n) = \sum_{k_1,...,k_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{k_1+...+k_n}(b_1)_{k_1}...(b_n)_{k_n}}{k_1!...k_n!(c_1)_{k_1}...(c_n)_{k_n}} x_1^{k_1}...x_n^{k_n}$$

$$\left[c_i \neq 0, -1, -2, ...; \ i = \overline{1, n}; \ |x_1| + ... + |x_n| < 1\right].$$

Here $(a)_m$ is a Pochhammer symbol, for which the equality $(a)_{m+n} = (a)_m(a+m)_n$ and its particular case $(a)_{2m} = (a)_m(a+m)_m$ is true.

The Neumann problem. Find a regular solution $u(x)$ of equation (1) from the class $C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$, satisfying the conditions:

$$\left.\left(x_k^{2\alpha_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\right|_{x_k=0} = \nu_k(\tilde{x}_k), \ \tilde{x}_k \in S_k, \tag{2}$$

$$\lim_{R\to\infty} u(x) = 0, \qquad , \tag{3}$$

where $\nu_k(\tilde{x}_k) \in$ are given continuous functions. The functions $\nu_k(\tilde{x}_k)$ can also turn to infinity of order less than $1 - 2\alpha_k$ and for sufficiently large values of R the inequaliities are valid

$$|\nu_k(\tilde{x}_k)| \leq \frac{c_k}{\left(1 + x_1^2 + ... + x_{k-1}^2 + x_{k+1}^2 + ... + x_m^2\right)^{(1 - 2\alpha_k + \varepsilon_k)/2}}, \tag{4}$$

where $c_k = const > 0$, $0 < 2\alpha_k < 1$, and ε_k are small enough positive numbers $\left(k = \overline{1, n}\right)$.

Theorem. The solution of the Neumann problem (1)–(4) exists and is defined by formula

$$u(\xi) := u(\xi_1, ..., \xi_m) = -\sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \tilde{x}_k^{(2\alpha)} \nu_k(\tilde{x}_k)\, q\left(x_k^0, \xi\right) dS_k,$$

where $\nu_k(\tilde{x}_k) \in C(S_k)$ are functions, defined in (2) and (4), and $q(x, \xi)$ is fundamental solution of equation (1) [1]:

$$q(x, \xi) = \gamma\, r^{-2\beta} F_A^{(n)}\left(\beta, \alpha_1, ..., \alpha_n; \ 2\alpha_1, ..., 2\alpha_n; -\frac{4x_1\xi_1}{r^2}, ..., -\frac{4x_n\xi_n}{r^2}\right),$$

$$\beta := \frac{m-2}{2} + \alpha_1 + ... + \alpha_n, \ \gamma = 2^{2\beta - m}\frac{\Gamma(\beta)}{\pi^{m/2}}\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma(\alpha_k)}{\Gamma(2\alpha_k)}, \ r^2 = \sum_{i=1}^{m}(x_i - \xi_i)^2.$$

Here

$$\int_{S_k} f(x, \xi)\, dS_k := \underbrace{\int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty}}_{n-1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty}}_{m-n} f(x, \xi)\, dx_1 ... dx_{k-1} dx_{k+1} ... dx_n dx_{n+1} ... dx_m.$$

REFERENCES

1. Ergashev T.G. Fundamental Solutions for a Class of Multidimensional Elliptic Equations with Several Singular Coefficients //J.Sib. Fed. Univ., Math. Phys.2020. Vol. 13, №1, P. 48–57.

2. Appell P., Kampé de Fériet J. Fonctions Hypergéometriques et Hypersphériques: Polynômes d'Hermite, Gauthier-Villars, Paris, 1926.

On wave solutions for a class of nonlinear viscoelastic media

Umirkhonov M. T.[1]
Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,
masudxonumirxonov@mail.ru

The paper investigates the dynamics of a viscoelastic medium and the solution in the form of a traveling wave of the equation

$$T_{xx} + \nu T_{xxt} + T_x = g(T)_{tt}, \tag{1}$$

where $T(x,t)$ is the Cauchy stress at point x and at time t, $g(\bullet)$ is a nonlinear function, and $\nu > 0$ is a constant. Equation (1) is a one-dimensional nonlinear differential equation with respect to T and is obtained from the equation of motion and the basic equation relating stress, linearized strain and strain rate. Unlike classical models of mechanics, strain can be written as a function of stress rather than expressing stress in terms of kinematic variables. This idea belongs to Rajagopal [1,2], who introduced a generalization of the theory of elastic materials by proposing implicit models that admit approximations in which the linearized strain is a nonlinear function of stress. The advantage of this new idea is that it maintains a small displacement gradient so that linearized deformation can be handled even for arbitrarily large stress values.

Thus, let us investigate the solutions of a traveling wave of a nonlinear differential equation describing the behavior of a one-dimensional viscoelastic medium. Traveling waves are solutions of the form

$$T = T(\xi),\ \xi = x - ct, \tag{2}$$

where the wave propagation speed c is a constant, which will be defined below. Substitution of (2) into (1) reduces the third-order partial differential equation to the third-order ordinary differential equation with respect to the variable ξ given by the formula

$$T'' - \nu c T''' + T' = c^2[g(T)]'', \tag{3}$$

We focus on considering the wave solutions of equations (3), which correspond to heteroclinic couplings between two constant states. Obviously, $T(\xi) \equiv constant$ is a trivial solution to equation (3), so we will assume that

$$\lim_{\xi\to-\infty} T(\xi) = T_\infty^-,\ \lim_{\xi\to+\infty} T(\xi) = T_\infty^+ \tag{4}$$

with $T_\infty^- \neq T_\infty^+$, where T_∞^- and T_∞^+ are constants that will be defined later. Our main task is to find constraints on the nonlinear function $g(T)$, which guarantees the existence of such a solution with a traveling wave, and consists in discussing the defining functions from this point of view.

Referenses

1. Rajagopal K.R. On implicit constitutive theories.Appl. Math., 48: 279-319, 2003.
2. Rajagopal K.R. The elasticity of elasticity. ZAMP, 58: 309-317, 2007.

Maximal operators associated with surfaces

Usmanov Salim

Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,
usmanov-salim@mail.ru

We study maximal operators defined by

$$\mathcal{M}f(y) := \sup_{t>0} |\mathcal{A}_t f(y)|,$$

where

$$\mathcal{A}_t f(y) := \int\limits_S f(y - tx)\psi(x)dS(x)$$

is the averaging operator, S is a hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$, ψ is a fixed non-negative smooth function with compact support, that is, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ and $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Let us given singular surface $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ defined by the parametric equations

$$x_1(u_1,u_2) = u_1^{a_1}u_2^{a_2}g_1(u_1,u_2),\ x_2(u_1,u_2) = u_1^{b_1}u_2^{b_2}g_2(u_1,u_2),\ x_3(u_1,u_2) = 1+u_1^{c_1}u_2^{c_2}g_3(u_1,u_2),$$

where $u_1 \geq 0, u_2 \geq 0$ and $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ are non-negative rational numbers, $\{g_k(u_1,u_2)\}_{k=1}^3$ are fractional power series, satisfying conditions $g_k(0,0) \neq 0$.

A definition of fractional power series is already in [1].

For S_1 we define the averaging operator $\mathcal{A}_t f$ in the following way

$$\mathcal{A}_t^\mu f(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^2_{>0}} f\big(y_1 - tx_1(u_1,u_2), y_2 - tx_2(u_1,u_2), y_3 - t(1 + x_3(u_1,u_2))\big)\times$$

$$\times\psi_1(u_1,u_2)u_1^{d_1}u_2^{d_2}\sqrt{\mu(u_1,u_2)}du_1du_2,$$

where $\mu(u_1,u_2)$ is a fractional power series, $0 \leq \psi_1\big(u_1,u_2\big) = \psi\big(x_1(u_1,u_2), x_2(u_1,u_2), 1 + x_3(u_1,u_2)\big)$ and $\psi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. The associated maximal operator is given by

$$\mathcal{M}^\mu f(y) := \sup_{t>0} |\mathcal{A}_t^\mu f(y)|,\ y \in \mathbb{R}^3.$$

Also we use the following denotions

$$B = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ B_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},\ B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Theorem. Let $\{g_i(u_1,u_2)\}_{i=1}^3$ be fractional power series in a small neighborhood of the origin in $\mathbb{R}^2$, satisfying conditions $g_i(0,0) \neq 0$ and $\mu(0,0) \neq 0$, $d_1 > -1$, $d_2 > -1, B \neq 0, B_1 \neq 0, B_2 \neq 0$. Then there exists a sufficiently small neighborhood U of the origin in

$\mathbb{R}^2$, such that for every function $\psi_1 \in C_0^\infty(U)$ the maximal operator $\mathcal{M}^\mu f$ is bounded on $L^p(\mathbb{R}^3)$ whenever $p > \max\{c_1(d_1+1)^{-1}, c_2(d_2+1)^{-1}, 2\}$. Moreover, if $\psi_1(0,0) > 0$ and $\max\{c_1(d_1+1)^{-1}, c_2(d_2+1)^{-1}\} > 2$, then the maximal operator $\mathcal{M}^\mu f$ is unbounded on $L^p(\mathbb{R}^3)$ whenever $2 < p \leq \max\{c_1(d_1+1)^{-1}, c_2(d_2+1)^{-1}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Collins T., Greenleaf A., Pramanik M.** A multi-dimensional resolution of singularities with applications to analysis, Amer. J.of Math. 135 (2013), no. 5, 1179-1252.

Sug'urta kompaniyasining sug'urta mukofot pulini to'lay olmaslik riski va uning erkin zahiralari

Arabboyev A. B.
National Universite of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
azimjonarabboyev1777@gmail.com

Faraz qilamiz, U-sug'urta portfelining boshlang'ich qiymati, X_i-mijozlarning bog'liqsiz, bir xil taqsimlangan sug'urta badallarining miqdori $(i = 1, 2, ..., N)$ bo'lsin.

$$E(X_1) = m, \quad E(X_1^2) = \alpha_2$$

Bu yerda N-matematik kutilmasi n bilan Puasson taqsimlangan tasodifiy miqdor. Shuningdek, P-yil boshida qabul qilingan umumiy sug'urta mukofatini va

$$C = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

sug'urta badalining jami miqdori bo'lsin.

Yuqoridagi belgilashlardan quyidagi kelib chiqadi:

$$E(C) = nm$$

Puasson taqsimlangan tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyasi tengligidan foydalanib, quyidagi natijani olamiz:

$$D(C) = E(N)D(X_i) + D(N)[E(X_i)]^2 = nE(X_i^2) = n\alpha_2$$

Ushbu portfelning mukofat riski matematik kutilma $E(C) = nm$ ga teng va mukofat riski uchun quyidagicha ifodani olish mumkin:

$$P = (1+\lambda)nm$$

Bu yerda $\lambda > 0$ zaruriy xavfsiz yuklama. Amaliyotda, bu aksiyadorlarning qaytib kelishini ta'minlaydigan, odatda sof sug'urta puli miqdorining foizi sifatida ifodalanadigan va yutuqli aksiyalar uchun mo'ljallangan qiymatdir. Shunday qilib, sug'urta badalining sotiladigan narxi quyidagicha:

$$U + (1+\lambda)nm$$

va sug'urtalovchi yil oxirida bankrotlik holatiga tushishi mumkin, agar quyidagi tengsizlik bajarilsa:

$$U + (1+\lambda)nm - C \leq 0$$

Boshqa tamondan, bu eng katta zahira jamg'arilishiga mutonasib emas. Asosiy muammo bu-to'lov qobiliyatsizligi ehtimolligini minimallashtirish, ya'ni

$$P\{U + (1+\lambda)nm - C < 0\} \leq \epsilon$$

Bu yerda, ϵ-to'lov qobiliyatsizligi uchun mumkin bo'lgan eng katta ehtimollik. Ushbu tengsizlikni quyidagicha o'zgartirishimiz mumkin:

$$P\{C > U + (1+\lambda)nm\} \leq \epsilon$$

Endi quyidagi standart ko'rinishga keltiramiz:

$$P\left\{\frac{C - nm}{\sqrt{n\alpha_2}} > \frac{U + \lambda nm}{\sqrt{n\alpha_2}}\right\} \leq \epsilon.$$

Agar sug'urta portfeli yetarlicha katta bo'lsa, C ning taqsimoti Normal taqsimot qonuniga yaqinlashadi (Raeva, Pavlov 2015). Ya'ni

$$P\left(\frac{C - nm}{\sqrt{n\alpha_2}}\right) \approx 1 - \Phi(\dots)$$

bu yerda

$$x_\epsilon = \frac{U + \lambda nm}{\sqrt{n\alpha_2}}$$

yordamida belgilab, $\Phi(x_\epsilon) = 1 - \epsilon$ ekanligini ta'minlaymiz. Endi quyidagini yozib olamiz:

$$U \geq x_\epsilon \sqrt{n\alpha_2} - \lambda nm$$

Agar biz sug'urta badali miqdori uchun Normalning quvvatini o'zgartirishdan foydalanib, Kornish-Fisher tarqalishining birinchi qoidasidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$Z_\epsilon = x_\epsilon + \frac{\gamma(x_\epsilon^2 - 1)}{6}$$

bu yerda, γ-yuqorida ko'rilgan taqsimotning assimetriya koeffitsiyenti. Bundan erkin zahiralar uchun quyidagiga egamiz:

$$U = \left(x_\epsilon + \frac{\gamma(x_\epsilon^2 - 1)}{6}\sqrt{n\alpha_2} - \lambda nm\right)$$

Adabiyotlar

1. Raeve E., Pavlov V. Some Approaches for Modeling Claims Process in General Insurance, Mathematics and Education in Mathematics, Proceedings of the Forty Fourth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, 2015, pp. 233-238.
2. Fisher R.A., Cornish E.A. The Percentile Points of Distribution Having Knon Cumulants, USA, 1960.
3. Hart D., Buchanan R., Howe B. Actuarial Practice in General Insurance, Institute of Actuaries of Australia, Sydney, 1996.

Involyutiv algebra ustida aniqlangan o'z-o'ziga qo'shma matritsalar Yordan algebrasi 2-lokal differensiallashlari tavsifi haqida

Arzikulov F. N.[1], Husanova N. T.[2]
O'zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti,
arzikulovfn@rambler.ru
Namangan davlat universiteti, Namangan;
naziraxonhusanova@gmail.com

Ushbu maqola Yordan algebralarida 2-lokal differensiallashlarni tavsiflashga bag'ishlangan. Eslatib o'tamiz, 2-loka l differensiallashga quyidagicha ta'rif berilgan: $\Re$ algebra berilgan bo'lsa, $\Delta : \Re \longrightarrow \Re$ akslantirish (chiziqli bo'lishi shart bo'lmagan) 2-lokal differensiallash deyiladi, agar har bir $x,\ y \in \Re$ elementlar juftligi uchun $D_{x,y} : \Re \longrightarrow \Re$ differensiallash mavjud bo'lib, $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$ va $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$ tengliklar bajarilsa. 1997-yilda P.Shemrl 2-lokal differensiallash tushunchasini kiritdi va H cheksiz o'lchamli separabel Hilbert fazosidagi barcha chegaralangan chiziqli operatorlar $B(H)$ algebrasidagi 2-lokal differensiallashlarni tavsifladi. Chekli o'lchamli holat uchun tavsif keyinchalik S. Kim va J. Kimlar tomonidan berildi. Y. Lin va T.Wong chekli o'lchamli bo'linishli algebralar ustidagi matritsali algebralarda 2-lokal differensiallashlarning tavsifini berishdi. Sh. Ayupov va K. Kudaybergenovlar yangi tadqiqot texnikasini taklif qildilar va yuqorida keltirilgan natijalarni ixtiyoriy Hilbert fazosi uchun umumlashtirdilar. Ular ixtiyoriy H (separabel bo'lishi shart bo'lmagan) Hilbert fazosidagi barcha chegaralangan chiziqli operatorlarning $B(H)$ algebrasida 2-lokal differensiallashlarni ko'rib chiqdilar va $B(H)$ algebrada har bir 2-lokal differensiallash differensiallash ekanligini isbotladilar. Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov va F.Arzikulovlar yuqoridagi natijalarni kengaytirdilar va ixtiyoriy fon Neyman algebralari uchun mos teoremalarni isbotladilar.

Bir qator maqolalar har xil turdagi algebralar, assotsiativ algebralar, Banax algebralari va Banax fazolari ustida aniqlangan 2-lokal akslantirishlarga bag'ishlandi.

Ushbu maqolada Yordan algebralarida differensiallash va 2-lokal differensiallashlarni tavsiflashda algebraik yondashuv ishlab chiqildi. Berilgan maqolada e'tibor asosan ichki differensiallashlar va 2-lokal ichki differensiallashlarga qaratilgan.

Aytaylik $\Re$ algebra va unda o'zini o'ziga akslantiruvchi chiziqli D akslantirish berilgan bo'lsin. Agar har bir $x,\ y \in \Re$ elementlar juftligi uchun $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ o'rinli bo'lsa, u holda D akslantirish diffferensiallash deyiladi. $\Re$ algebraning o'zini o'ziga akslantiruvchi Δ akslantirish berilgan bo'lsin. Agar $\Re$ algebraning har bir $x,\ y \in \Re$ elementlar juftligi uchun $\Re$ algebraning shunday $\Delta(x) = D(x)$,$\Delta(y) = D(y)$ bo'ladigan D differensiallashi mavjud bo'lsa, u holda Δ 2-lokal differensiallash deb ataladi.

Endi $\Re$ algebrani assotsiativ deb hisoblaymiz. $\Re$ algebraning a elementi berilgan bo'lsin. U holda $D_a(x) = ax - xa$, $x \in \Re$ akslantirish differensiallash bo'ladi. Bunday differensiallashga ichki differensiallash deyiladi. Δ $\Re$ algebraning 2-lokal differensiallashi bo'lsin. Agar $\Re$ algebraning har bir $x,\ y \in \Re$ elementlar juftligi uchun $\Re$ algebraning shunday $\Delta(x) = D(x), \Delta(y) = D(y)$ bo'ladigan D ichki differensiallashi mavjud bo'lsa, u holda
Δ 2-lokal ichki differensiallash deyiladi.

Aytaylik J Yordan algebrasi va $D : J \to J$ differensiallash berilgan bo'lsin. Agar J algebrada

$$D(x) = \sum_{k=1}^{m}[a_k(b_k x) - b_k(a_k x)], x \in J.$$

bo'ladigan $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_m \in J$ elementlar mavjud bo'lsa, D differensiallash J algebrada ichki differensiallash deyiladi.

J Yordan algebrasining Δ 2-lokal differensiallashi berilgan bo'lsin. Agar har bir $x,\ y \in J$ elementlar juftligi uchun J algebraning shunday $\Delta(x) = D(x)$,$\Delta(y) = D(y)$ bo'ladigan D ichki differensiallashi mavjud bo'lsa, u holda Δ 2-lokal ichki differensiallash deyiladi.

Aytaylik $\mathbf{H}$ kvaternionlar tanasi berilgan bo'lsin, ya'ni $\mathbf{H} = \{a + ib + jc + kd : a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$, bu yerda $i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = k,\ jk = i,\ ki = j,\ ji = -k,\ kj = -i,\ ik = -j$. $M_2(\mathbf{H})$ bu $\mathbf{H}$ kvaternionlar tanasi ustida aniqlangan barcha ikki o'lchovli matritsalar assotsiativ algebrasi bo'lsin. U holda

$$H_2(\mathbf{H}) = \{a \in M_2(\mathbf{H}) : a^* = a\}$$

vektor fazosi Yordan ko'paytirishi $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, $a,\ b \in H_2(\mathbf{H})$ amali bilan aniqlangan Yordan algebrasi bo'ladi. Bu Yordan algebrasi $H_2(\mathbf{H})$ bilan belgilanadi.

Lemma 1. $\mathbf{H}$ kvaternionlar tanasi berilgan bo'lsin, Δ $H_2(\mathbf{H})$ Yordan algebrasida 2-lokal ichki differensiallash va $\sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}$, $\sum_{k=1}^{l} D_{c_k,d_k}$ yig'indilar $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$,$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_l \in H$ elementlardan

$$\Delta(\bar{e}_{1,2}) = \sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}(\bar{e}_{1,2}) = \sum_{k=1}^{l} D_{c_k,d_k}(\bar{e}_{1,2}).$$

kabi hosil qilingan ichki differensiallashlar bo'lsin.U holda

$$e_{1,1}(\sum_{k=1}^{m}[a_k, b_k])e_{2,2} = e_{1,1}(\sum_{k=1}^{l}[c_k, d_k])e_{2,2},$$

$$e_{2,2}(\sum_{k=1}^{m}[a_k, b_k])e_{1,1} = e_{2,2}(\sum_{k=1}^{l}[c_k, d_k])e_{1,1}$$

va

$$\sum_{k=1}^{m}[a_k, b_k]^{1,1} - \sum_{k=1}^{m}[a_k, b_k]^{2,2} = \sum_{k=1}^{l}[c_k, d_k]^{1,1} - \sum_{k=1}^{l}[c_k, d_k]^{2,2}$$

tengliklar assotsiativ ko'paytirish amaliga nisbatan o'rinli boladi.

Δ - $H_2(\mathbf{H})$ Yordan algebrasida 2-lokal ichki differensiallash va $\sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}$ $H_2(\mathbf{H})$ algebrada $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m \in H_2(\mathbf{H})$ elementlardan

$$\Delta(\bar{e}_{1,2}) = \sum_{k=1}^{m} D_{a_k,b_k}(\bar{e}_{1,2})$$

kabi hosil qilingan ichki differensiallash bo'lsin. Agar

$$a_{ij} = e_{ii}\frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{m}[a_k, b_k])e_{jj}, a^{ij}e_{ij} = \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{m}[a_k, b_k])^{ij}e_{ij},$$

$$a^{ij} \in \mathbf{H}, (\sum_{k=1}^{m}[a_k, b_k])^{ij} \in \mathbf{H}, i, j = 1, 2.$$

bo'lsa, u holda

$$\Delta(\bar{e}_{1,2}) = \sum_{k=1}^{l} D_{c_k,d_k}(\bar{e}_{1,2})$$

shartni qanoatlantiruvchi barcha $c_1, c_2, \ldots, c_l, d_1, d_2, \ldots, d_l \in \mathbf{H}$ elementlar uchun, lemma.1 ga ko'ra

$$a_{12} = e_{11}\frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{l}[c_k, d_k])e_{22}, a_{21} = e_{22}\frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{l}[c_k, d_k])e_{11},$$

$$a^{11} - a^{22} = \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{l}[c_k, d_k])^{11} - \frac{1}{4}(\sum_{k=1}^{l}[c_k, d_k])^{22}$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Quyidagi lemma o'rinli bo'ladi.

Lemma 2. $H_2(\mathbf{H})$ Yordan algebrasida Δ 2-lokal ichki differensiallash quyidagi

$$\Delta(x) = D_{\frac{1}{4}[a,b]}(x), x \in H_2(\mathbf{H})$$

shartni qanoatlantiradi.

Teorema 3. $H_2(\mathbf{H})$ Yordan algebrasida har qanday 2-lokal ichki differensiallash ichki differensiallash bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. Ayupov Sh.A., Arzikulov F.N. 2-Local derivations on associative and Jordan matrix rings over involutive commutative rings // Linear Algebra Appl. 2017. V.522, P. 28–50.

2. Ayupov Sh.A., Arzikulov F.N. 2-Local derivations on algebras of matrix-valued functions on a compact // Vladikavkaz Mathematical journal. 2018. V. 20, №1. P. 38–49.

Pedagogik va psixologik jarayonlarni o'rganishda nazorat kartalardan foydalanish haqida

Axmedov S. A.[1], Yuldashev X. D.[2], Shukurillayeva K. N.[3]

Andijon davlat universiteti

akhmedov.soxibjon@gmail.com, yuldashevx266@gmail.com, shukurillayevahmadillo@gmail.com

Ma'lumki jarayondagi muammoga mos, uni ilmiy tahlil qiluvchi statistik gipotezalar va ularni tekshiruvchi kriteriylar mavjud (Qaralsin [1] va [2]).

Axborotda shu kabi muammolarni tahlil qilishda ishlatiladigan statistik gipotezalarga asoslangan nazorat karta (NK) [3] nomli statistik instrumentni bir turi haqida fikr beriladi.

Aytaylik pedagogik yoki psixologik tajribada ikki guruh insonlar qatnashsin va jarayonni o'rganish uchun biror effekt aniqlangan bo'lsin. Ma'lumotlar asosida α qiymatdorlik darajasida quyidagi bosh va alternativ gipotezalarni tekshirish talab qilinsin:

H_0: 1-tanlamadagi kuzatilgan insonlarda effekt sodir bo'lganlarining foizlardagi ulushi P_1, 2-tanlamadagi P_2 dan ko'p emas;

H_1: 1-tanlamadagi kuzatilgan insonlarda effekt sodir bo'lganlarining foizlardagi ulushi P_1, 2-tanlamadagi P_2 dan ko'p.

Bu gipotezalar α qiymatdorlik darajasida Fisherning quyidagi alomati bilan tekshiriladi:

$$\varphi^* = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \sqrt{\tfrac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}},$$

bu yerda $\varphi_i = 2 \arcsin \sqrt{P_i}$, $i = 1, 2$, φ_1 - katta foiz ulushiga mos burchak; φ_2 - kichik foiz ulushiga mos burchak; n_1 va n_2 mos ravishda 1 chi va 2 chi tanlama hajmlari.

Agar $\varphi^*_{emp} < \varphi^*_{kr}$ bo'lsa H_0, aks holda H_1 gipoteza qabul qilinadi.

Endi shu gipotezalarni ketma-ket tekshirish printsipiga aoslangan NK ni xarakteristikalarini aniqlaymiz. Muammo mazmuniga asosan bir tomonlama chegarali NK qurish kerak. Kuzatilayotgan effektni aniqlovchi statistika qilib $\varphi_t = \varphi_{1t} - \varphi_{2t}$ ni olamiz, bu yerda $t = 1, 2, ..., k$ tajriba o'tkazilgan birlik vaqtlar.

Yuqori nazorat chegara (UCL_φ) ni aniqlashga oid quyidagi tasdiq o'rinli.

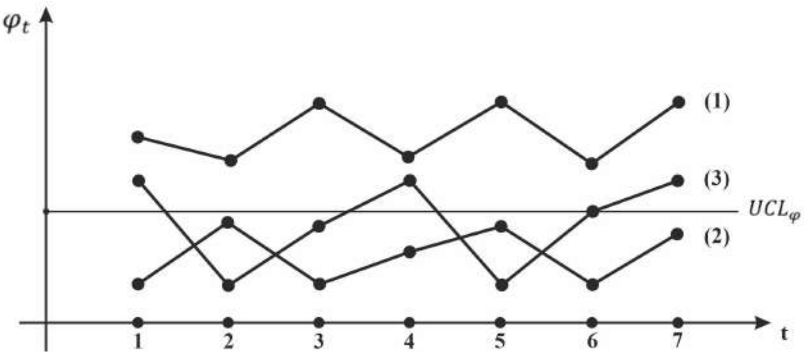
Tasdiq. $\alpha = 0,01$ qiymatdorlik darajasida φ NK uchun

$$UCL_\varphi = 2,31 \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

tenglik o'rinli.

Amalda φ NK ni qo'llash uchun $t = 1, 2, \ldots, k$ birlik vaqtlarda tajribalar o'tkazish zarur bo'ladi.

Masalan, $k = 7$, $n_1 = n_2$ bo'lganda quyidagi uchta holatdan 1 tasi bo'lishi mumkin.



φ - Nazorat karta diagrammasi

Rasmdagi (1)-holatda H_1 gipoteza, (2)-holatda H_0 gipoteza o'rinli. (3)-holatda tajriba natija bermagan.

Ba'zi hollarda φ NK ni ishlatishdan avval λ NK ni (Qaralsin [4]) qo'llash kerak bo'ladi.

ADABIYOTLAR

1. М.И. Грабарь, К.А.Краснянская. Применение математической статистики в педогогических исследованиях. М.: Педагогика, 1977.

2. Е.В. Сидеренко. Методы математической оброботки в психологии. Речь.: Санк-Петербург, 2003.
3. Х.-Й.Миттаг, Х.Ринне. Статистические методы обеспечения качества. М.: Машиностроение, 1995.
4. С. А. Ахмедов, Х.Д.Юлдашев. О контрольных картах проверяющие однородности двух выборок. //Актуальные проблемы стохастического анализа. 20-21 февраля 2021 г. Ташкент. (Часть I). С. 116–118.

Ba'zi yechiluvchanga yaqin Li algebrasining differensiallashlar fazosi

Davlatova D. Q.[1], **Solijanova G. O.**[2]
Namangan davlat Universiteti, Namangan, O'zbekiston;
Durdonadavlatovaunique@gmail.com[1]
O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O'zbekiston;
gulhayo.solijonova@mail.ru[2]

K biror maydon bo'lsin.

Ta'rif 1. K maydon ustida aniqlangan L algebraning ixtiyoriy $x, y, z \in L$ elementlari uchun quyidagi ayniyatlar bajarilsa,

$$[x, x] = 0, -\text{antikommutativlik ayniyati}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 - \text{Yakobi ayniyati}$$

u holda, L algebrasiga Li algebrasi deyiladi, bu yerda $[-, -]$ $-L$ algebrada aniqlangan ko'paytirish amali

Aytaylik, $L-$ Li algebrasi bo'lsin. $L-$ Li algebrasi uchun quyi markaziy va hosilaviy qatorlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$L^1 = L, \ L^{k+1} = [L^k, L], \ k \geq 1, \quad L^{[1]} = L, \ L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}], \ s \geq 1.$$

Ta'rif 2. [2] Agar $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^i = 0$ (mos ravishda, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^{[i]} = 0$) o'rinli bo'lsa, u holda, L Li algebrasiga nilpotentga yaqin (mos ravishda, yechiluvchanga yaqin) Li algebrasi deyiladi.

Ta'rif 3. [3] Agar ixtiyoriy $i > 1$ uchun, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^i = 0$ (mos ravishda, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^{[i]} = 0$) va $\dim L/L^i < \infty$ (mos ravishda, $\dim L/L^{[i]} < \infty$) o'rinli bo'lsa, u holda, L Li algebrasi pro-nilpotent (mos ravishda, pro-yechiluvchan) deyiladi.

Ta'rif 4. L algebrada aniqlangan $d : L \to L$ chiziqli almashtirish L algebraning ixtiyoriy x, y elementlari uchun ushbu

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$$

differensiallash qoidasini qanoatlantirsa, u holda $d : L \to L$ chiziqli almashtirishga differen-siallash deyiladi.

Aytaylik, $\mathfrak{m}_0$ model filiform Li algebrasining cheksiz o'lchamli analogi bo'lsin bo'lsin, ya'ni

$$\mathfrak{m}_0 : [e_i, e_1] = e_{i+1}, \ i \geq 2.$$

Quyidagi maksimal pro-nilpotent ideali $\mathfrak{m}_0$ bo'lgan yechiluvchanga yaqin Li algebralari oilasini tahlil qilaylik [1]:

$$R_3(\mathfrak{m}_0, 1, \beta): \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & i \geq 2, \\ [e_i, x] = e_i + \sum\limits_{k=3}^{t} \beta_k e_{i+k-2}, & i \geq 2, \end{cases}$$

bu yerda, $\beta = (\beta_3, \beta_4, \dots, \beta_t) \in \mathbb{C}^{t-2}$ va $t \in \mathbb{N}$.

Teorema 1. $R_3(\mathfrak{m}_0, 1, \beta)$ oiladan olingan ixtiyoriy algebraning differensiallashlar fazosi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$Der(R_3(\mathfrak{m}_0, 1, \beta)): \begin{cases} d(e_1) = \sum\limits_{k=3}^{s} a_k e_k, \\ d(e_i) = \sum\limits_{k=2}^{s} b_k e_{k+i-2}, \quad i \geq 2, \\ d(x) = a_3 e_2 + \sum\limits_{k=3}^{s-1} (a_{i+1} + \sum\limits_{k=3}^{i} a_k \beta_{i-k+3}) e_k + \sum\limits_{k=3}^{s} a_k \beta_{s-k+3} e_s. \end{cases}$$

bu yerda, biror $i \geq 4$ uchun $\beta_i \neq 0$.

$$Der(R_3(\mathfrak{m}_0, 1, \beta)): \begin{cases} d(e_1) = a_1 e_1 + \sum\limits_{i=3}^{s} a_i e_i + ax, \\ d(e_i) = (i-2)(a e_{i-1} + (a_1 + \beta_3 a) e_i + \sum\limits_{k=2}^{s} b_k e_{k+i-2}, \ i \geq 2, \\ d(x) = \beta a_1 e_1 + a_3 e_2 + \sum\limits_{k=3}^{s-1} (\beta_3 a_i + a_{i+1}) e_k + \beta_3 a x. \end{cases}$$

bu yerda, barcha $i \geq 4$ uchun $\beta_i = 0$.

ADABIYOTLAR

1. Abdurasulov K.K., Omirov B.A., Rakhimov I.S., Solijanova G., Residually solvable extensions of an infinite dimensional filiform Leibniz algebra, Journal of Algebra. 2021, vol. 585, P. 697-722.

2. Millionschikov D.V., Cohomology of graded Lie algebras of maximal class with coeficients in the adjoint representation, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2008, 263, P. 99-111.

3. Millionshchikov D.V., Naturally graded Lie algebras of slow growth, Mat. Sb. 210(6) (2019) 111-160 (in Russian).

Elliptik silindr ustida Yakobi vektor maydoni

Ibragimov J. O.[1]

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston milliy universtiteti, Toshkent;

javlonbekibragimov3008@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu ishda elliptik silindrdagi geodezik chiziqlar topilgan va bu sirt ustida Yakobi vektor maydoniga misol qurilgan. Bundan tashqari Yakobi va solenoidal vektor maydonlar orasidagi bog'lanish o'rganilgan.

Ma'lumki, analitik geometriya kursida ikkinchi tartibli sirtlar o'rganiladi. Differensial geometriyada esa sirtlar ustida egri chiziqlar ichki geometriyasini o'rganish muhim masalalardan biri hisoblanadi. Sirt ustidagi geodezik chiziqlar fanning amaliy sohalarida keng tadbiqqa ega. Masalan, ellipsoid ustidagi geodezik chiziqni o'rganish yer sirtidagi ikki nuqta orasidagi eng qisqa trayektoriyani topish imkonini beradi.

Umumiy holda geodezik chiziqni ko'pxillikda aniqlaymiz. Bizga silliq, bog'lanishli riman ko'pxilligi M berilgan bo'lsin. Har qanday riman ko'pxilligida Levi-Chivita deb nomlanuvchi ∇ simmetrik bog'lanish mavjud.

Bizga Φ sirt va unda yotuvchi ikki marta differensiallanuvchi paramertlangan γ egri chiziq $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin.

1- tarif. Berilgan γ chiziq parameter t ning har bir qiymatida $\frac{d^2\vec{\rho}(t)}{dt^2}$ vektor sirtning $\gamma(t)$ (bu yerda $\gamma(t)$ radius vektori $\vec{\rho}(t)$ bo'lgan nuqta) nuqtadagi urunma tekisligiga perpendikulyar bo'lsa, bunday chiziq geodezik chiziq deyiladi.

Bizga elliptik silindrning

$$\begin{cases} x = acosu \\ y = bsinu \\ z = cv \end{cases}$$

parametrik tenglamasi berilgan bolsin.

Yuqoridagi parametrik tenglamalar bilan berilgan elliptik silindr uchun geodezik chiziqlarni topish uchun tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{(a^2-b^2)\sin 2u}{a^2\sin^2(u)+b^2cos^2(u)} = 0 \\ \frac{d^2v}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

ko'rinishga ega.

Bu sirtning uchta geodezik chizig'i mavjud ular to'g'ri chiziq, ellips va vint chizig'i

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = acost \\ y = bsint \\ z = c \end{cases}, \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = acosu_0 \\ y = bsinu_0 \\ z = ct \end{cases}, \gamma_3 : \begin{cases} x = acost \\ y = bsint \\ z = ct \end{cases}.$$

2-tarif. Har bir $p \in M$ nuqta va ixtiyoriy urinma $u, v \in M$ vektorlar uchun egrilik almashtirishi deb nomlanuvchi $R(u, v) : T_pM \to T_pM$ akslantirishni quyidagi qoida yordamida aniqlaymiz

$$R(u, v)\omega = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

bu yerda X, Y, Z vektor maydomlar M ko'pxillikdagi $X_p = u, Y_p = v, Z_p = \omega$ shartlarni qanoatlantiruvchi silliq vektor maydonlar, $[\cdot, \cdot]$ esa vektor maydonlarning Li qavsi.

3- tarif. M Riman ko'pxillikda γ geodezik chiziq bo'ylab berilgan Y vektor maydon

$$Y'' + R(Y, \gamma')\gamma' = 0 \tag{3}$$

tenglamani qanoatlantirsa, u Yakobi vektor maydoni deyiladi. (3) tenglama Yakobi tenglamasi deyiladi.

Elliptik silindrda γ_3 geodezik chiziq bo'ylab urinma vektor maydon ekanligidan uning parallel bo'lishi kelib chiqadi. Shuning uchun kovariant differensial nolga teng $\frac{DY}{dt} = 0$ Shuningdek,

$$R(Y, \gamma')\gamma' = \nabla_Y \nabla_{\gamma'}\gamma' - \nabla_{\gamma'}\nabla_Y\gamma' - \nabla_{[\gamma', \gamma']}\gamma'$$

munosabat o'rinli.

Yuqoridagilardan Y vektor maydon γ_3 geodezik chiziq bo'ylab Yakobi vektor maydoni ekanligi kelib chiqadi.

4-tarif Agar X vektor maydon uchun shunday Y maydon topilib $X = rotY$ bo'lsa, X vektor maydonga solenoidal maydon deyiladi. Y esa X vektor maydonning potensiali deyiladi.

Bizga M silliq riman ko'pxilligi va $\gamma : [a, b] \to M$ geodezik chiziq berilgan bo'lsin.

5-tarif. M da berilgan Y vektor maydon va har qanday γ geodezik chiziq uchun $\widetilde{Y} = Y|_\gamma$ vektor maydon Yakobi vektor maydoni bo'lsa, Y vektor maydon global Yakobi maydoni deyiladi.

Silliq kompakt riman ko'pxilligida berilgan global Yakobi vektor maydoni va solenoidial vektor maydonlari uchun quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. Silliq kompakt riman ko'pxilligida berilgan har qanday global Yakobi vektor maydoni solenoidial vektor maydoni boladi.

ADABIYOTLAR

1. Бураго Ю.Д, Залгаллер В.А. Введение в риманову геометрию. СПб:Наука, 1994, 318с.

2. Аслонов Ж.О. Геометрия орбит векторных полей Киллинга // Уз.Мат.Журнал, Ташкент, 2011. С.129-135.

3. Narmanov A.Ya. Differensial geometrya. Universitet, Toshkent. 2003.

4. Постников М.М. Введение в теорию морса. М.: 1971.

5. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989, 635 стр.

6. Чешкова М.А. К геометрии векторного поля на римановом многообразии// Матем. заметки 54:5 (1993), 153-155.

Simplektik gruppaning haqiqiy tasvirlari gruppasi ta'siriga nisbatan differensial invariantlari

Jo'raboyev S.S.

Farg'ona davlat universiteti, Farg'ona, O'zbekiston;
saidaxbor.juraboyev@mail.ru

H^n- H kvaternion sonlar jismi ustida aniqlangan n o'lchovli vektor fazo bo'lsin. $GL(H^n)$ orqali H^n fazoning barcha teskarilanuvchi chiziqli almashtirishlari gruppasini belgilaymiz.

$\langle x, y\rangle$ funksiya $H^n \times H^n$ dekart ko'paytmani H ga akslantiruvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi akslantirish bo'lsin:

$$\begin{cases} \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha \langle x, z\rangle + \beta \langle y, z\rangle, \ \alpha, \beta \in H, \ x, y, z \in H^n; \\ \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle} \\ \langle x, x\rangle > 0, \ barcha \ x \in H^n, \ x \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

H^n fazoning (1) bichiziqli formani o'zida invariant saqlovchi barcha chiziqli almashtirishlari gruppasi *simplektik gruppa* deyiladi va $Sp\,(n)$ ko'rinishida belgilanadi [2], ya'ni

$$Sp\,(n) = \{\sigma \in GL\,(H^n) : \langle x\sigma, y\sigma\rangle = \langle x, y\rangle\}\,.$$

Ma'lumki [2], H^n fazoni aynan $4n$ o'lchovli haqiqiy fazo sifatida qarash mumkin. Bunday haqiqiy fazoni V ko'rinishida belgilaymiz. Bu holda, har bir $x \in H^n$ vektorga $\hat{x} \in V$ vektor, har bir $\sigma \in GL\,(H^n)$ almashtirishga $\sigma' \in GL\,(V)$ almashtirish bir qiymatli mos qo'yiladi va $GL\,(H^n)$ gruppaning har qanday qism gruppasi $\sigma \to \sigma'$ izomorfizm yordamida $GL\,(V)$ gruppaning qandaydir qism gruppasiga izomorf bo'ladi. Demak, $Sp\,(n)$ gruppa ham $GL\,(V)$ gruppaning ma'lum qism gruppasiga mos keladi. Odatda bunday qism gruppa $Sp\,(n)$ gruppaning *haqiqiy tasvirlari gruppasi* deyiladi. Uni quyidagicha aniqlaymiz: $\langle x, y\rangle$ formani 1, i, j, k birliklari oldidagi koeffitsientlarni mos holda $\Omega_0\,(\hat{x}, \hat{y})\,,\, \Omega_1\,(\hat{x}, \hat{y})\,,\, \Omega_2\,(\hat{x}, \hat{y})\,,$
$\Omega_3\,(\hat{x}, \hat{y})$ ko'rinishida belgilaymiz, ya'ni

$$\langle x, y\rangle = \Omega_0\,(\hat{x}, \hat{y}) - \Omega_1\,(\hat{x}, \hat{y})\,i - \Omega_2\,(\hat{x}, \hat{y})\,j - \Omega_3\,(\hat{x}, \hat{y})\,k \tag{2}$$

bu yerda $x, y \in H^n$, $\hat{x}$, $\hat{y} \in V$, $x \approx \hat{x}$, $y \approx \hat{y}$, shuningdek $\Omega_0\,(\hat{x}, \hat{y})$-simmetrik, $\Omega_\alpha\,(\hat{x}, \hat{y}) -$ kososimmetrik bichiziqli formalarni ifodalaydi, $\alpha = \overline{1, 3}$.

Ma'lumki, $Sp\,(n)$ gruppa $\langle x, y\rangle$ bichiziqli formani o'zida invariant saqlaydi, u holda uning haqiqiy tasvirlari gruppasi (2) munosabatga asosan bir vaqtda $\Omega_0\,(\hat{x}, \hat{y})$, $\Omega_1\,(\hat{x}, \hat{y})$, $\Omega_2\,(\hat{x}, \hat{y})$, $\Omega_3\,(\hat{x}, \hat{y})$ bichiziqli formalarni o'zida invariant saqlaydi, ya'ni

$$G = \left\{\sigma \in GL\,(V) : \Omega_\alpha\,(\sigma\hat{x}, \sigma\hat{y}) = \Omega_\alpha\,(\hat{x}, \hat{y})\,, \ \hat{x}, \hat{y} \in V, \ \alpha = \overline{0, 3}\right\}. \tag{3}$$

$V-$ $4n$ o'lchovli haqiqiy vektor fazo, $GL\,(V)$ orqali V fazoning barcha teskarilanuvchi chiziqli almashtirishlari gruppasi bo'lsin. V fazo elementlarini $4n$ o'lchovli ustun vektorlar ko'rinishida olamiz. $G \subset GL\,(V)$ gruppaning V fazoga ta'siri sifatida $(g, x) \to gx$ ko'payt- mani qaraymiz, bu yerda $g \in G$, $x \in V$. Shuningdek $R\,[x_1, x_2, ..., x_m, ..]$ orqali chiziqli erkli $x_1, x_2, ..., x_m, .. \subset V$ vektor argumentlarning $f\,[x_1, x_2, ..., x_m, ..]$ ko'phadlari halqasini belgilaymiz. Agar $\forall g \in G$ uchun $f\,[gx_1, gx_2, ..., gx_m, ..] = f\,[x_1, x_2, ..., x_m, ..]$ tenglik o'rinli bo'lsa, $f\,[x_1, x_2, ..., x_m, ..]$ ko'phad $G-$*invariant* deyiladi. Barcha $G-$invariant ko'phadlar to'plamini $R[x_1, x_2, ..., x_m, ..]^G$ ko' rinishida belgilaymiz. Bu holda, $R[x_1, x_2, ..., x_m, ..]^G$ to'plam $R\,[x_1, x_2, ..., x_m, ..]$ halqada aniqlangan amallarga nisbatan, qism halqani ifodalaydi, ya'ni $R[x_1, x_2, ..., x_m, ..]^G \subset R\,[x_1, x_2, ..., x_m, ..]$.

1-teorema. *$G-$simplektik gruppaning haqiqiy tasvirlari gruppasi bo'lsin. U holda, ixtiyoriy $G-$ invariant $f\,[x_1, x_2, ..., x_m, ..]$ ko'phad $\Omega_\alpha\,(x_s, x_t)\,,$ $\left(\alpha = \overline{0, 3}\right)$ $G-$invariant ko'phadlar sistemasining chekli sondagi elementlariga halqa amallarini chekli marta qo'llash orqali hosil bo'ladi, bu yerda $s, t \in N$.*

Quyida, sanoqli sondagi

$$x_1, x_2, ..., x_{4n},\, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_{4n}^{(1)}, ..., x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, ..., x_{4n}^{(r)}, ...$$

o'zgaruvchilarning R sonlar maydoni ustida aniqlangan barcha ko'phadlari halqasini qaray- miz va $R\{x\} = R\left\{x, x^{(1)}, ..., x^{(r)}, ...\right\}$ ko'rinishida belgilaymiz. Aytaylik, $R\{x\}$ halqada quyidagi, $d\left(x_j^{(r)}\right) = \left(x_j^{(r+1)}\right)$, $x_j^{(0)} = x_j, j = \overline{1, 4n}$, $r \in Z_0^+$ shartlarni qanoatlantiruvchi $d : R\{x\} \to R\{x\}$ amal berilgan bo'lsin. Ma'lumki, $d-$amalni $R\{x\}$ halqa differensiali- gacha bir qiymatli davom etdirish mumkin, u holda bunday halqa *d-halqa*, uning elementlari esa *d-ko'phadlar* deyiladi. Shuningdek, $R\{x\}$ halqaning d-differensialini maydon munosa- batlarining differensiallariga mos holda yagona ko'rinishda davom etdirish mumkin. Bunday maydon $d-$*maydon* deyiladi va $R\langle x\rangle$ ko'rinishida belgilanadi, uning elementlari esa *d-ratsional funksiyalar* deyiladi va ularni $f\langle x\rangle$ ko'rinishida belgilaymiz. Agar ixtiyoriy $g \in G$ uchun $f\{x\} = f\{gx\}$ (mos holda $f\langle x\rangle = f\langle gx\rangle$) shart o'rinli bo'lsa, u xolda $f\{x\} \in R\{x\}$(mos holda $f\langle x\rangle \in R\langle x\rangle$) $d-$ko'phad ($d-$ratsional funksiya) $G-$*invariant* deyiladi, [1]. Barcha $G-$ invariant d-ko'phadlar halqasini $R\{x\}^G$ (mos holda $G-$invariant $d-$ratsio- nal funksiyalar maydonini $R\langle x\rangle^G$) ko'rinishida belgilaymiz.

$A = \{\alpha_i\}_{i\in\Delta}$ to'plam $R\{x\}^G$ $d-$ halqa elementlaridan tuzilgan bo'lsin, bu yerda Δ chekli, tartiblangan natural sonlar to'plami. Agar shunday $P[x_1, x_2, ..., x_s]$ ko'phad mavjud bo'lib, $P(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s) = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \in A$ elementlar *algebraik bog'liq*, aks holda *algebraik bog'lanmagan (transsendent)* deyiladi. Agar $R\{x\}^G$ $d-$ halqaning ixtiyoriy elementi $A = \{\alpha_i\}_{i\in\Delta}$ to'plam elementlariga $d-$halqa amallarini chekli marta qo'llash orqali hosil bo'lsa, $A = \{\alpha_i\}_{i\in\Delta}$ to'plam $d-$*tashkil etuvchilar sistemasi* deyiladi, algebraik bog'liq bo'lmagan tashkil etuvchilari sistemasi $R\langle x\rangle^G$ $d-$maydonning *d-ratsional bazisi* deyiladi, [1].

2-teorema. *$G-$simplektik gruppaning haqiqiy tasvirlari gruppasi bo'lsin. U holda, quyidagi*

$$\Omega_0\left(x^{(i)}, x^{(i)}\right), \ \Omega_\alpha\left(x^{(i)}, x^{(i+1)}\right), \ \left(\alpha = \overline{1, 3}\right) \tag{4}$$

$G-$invariant $d-$ ko'phadlar sistemasi $R\langle x\rangle^G$ $d-$ maydonning $d-$ ratsional bazisini ifodalaydi, bu yerda $i = \overline{0, n-1}$.

ADABIYOTLAR

1. Муминов К.К., Чилин В.И. Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах. LAP LAMBERT Academic Publishing. Deutschland (Германия). 2015.

2. Nagayoshi IWAHORI. Some remarks on tensor invariants of O(n), U(n), Sp(n).// Journal of the Mathematical Society of Japan. 1958 . Vol. 10, No. 2, C. 145-160.

IKKI ARMIYANING JANGOVAR HARAKATLARI MODELI DISKRET BOSHQARUVLI SISTEMA SIFATIDA

Karimov N. M.

O'zbekiston Respublikasi Jamoat xavfsizligi universiteti, Toshkent, O'zbekiston
matematik-uz@mail.ru

Ushbu ishda ikki armiyaning jangovar harakatlarini ko'rsatuvchi Lanchester chiziqli modelining diskret analogi qaraladi [1]. Tomonlarning asosiy xarakteristikasi ularning soni hisoblanadi $x_1(t)0, \ x_2(t)0,$. Muntazam harbiy qismlar orasidagi harakat holida, ular sonining o'zgarish dinamikasi quyidagi uch faktor yordamida aniqlanadi:

1. Tarkib sonining kamayish tezligi $\alpha_i\,(i=1,\,2)$, bevosita jangovar harakatlar bilan bog'liq bo'lmagan sabablar tufayli (kasallik, qochoqlik).

2. O'zaro jang qiluvchi tomonlarning harakatlari bilan yuzaga kelgan, ularning strategiyasi, taktikasi va qurollanishiga bog'liq yo'qotishlar tezligi *(sur'ati)* $\beta_i(i=1,\,2)$.

3. Boshqariluvchi ta'sir deb yuritiluvchi yordamchi kuchlarning kelish tezligi.

Qilingan taxminlar asosida $x_1(t)$ va $x_2(t)$ lar uchun birinchi ayirmalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1(t+1)-x_1(t)=-\alpha_1x_1(t)-\beta_2x_2(t)+\gamma_1(t)\\ x_2(t+1)-x_2(t)=-\alpha_2x_2(t)-\beta_1x_1(t)+\gamma_2(t).\end{cases} \tag{1}$$

Bu yerda, t —vaqtning diskret davrlari (masalan, oy raqami), va soddalik uchun α_i va β_i koeffitsiyentlarni o'zgarmas deb hisoblaymiz.

Faraz qilaylik $\alpha_1=0,1;\ \alpha_1=0,05;\ \beta_1=0,2;\ \beta_2=0,3$ bo'lsin.

Qandaydir uchinchi tomon har bir armiya uchun yordamchi kuchlarni keltiradi deb hisoblaylik, xususan uning 1-armiyaga yordami, 2-armiyaga qaraganda ikki barobar (tezroq). U holda yordamchi kuchlarni boshqaruv funktsiyasi sifatida keltirish mumkin:

$\gamma_1(t)=u(t),\quad \gamma_2(t)=0,5u(t)$, bu yerda $u(t)\in$ R.

Bu holda birinchi ayirmalar sistemasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{cases} x_1(t+1)=0,9x_1(t)-0,3x_2(t)+u_1(t)\\ x_2(t+1)=-0,2x_1(t)+0,95x_2(t)+0,5u_2(t).\end{cases} \tag{2}$$

Aytaylik, $t=0$ boshlang'ich vaqt momentida har bir armiyaning soni aniq bo'lsin:

$$x_1(0)=500,\ \ x_2(0)=250. \tag{3}$$

$u(t)$, $(t=0,\,1,\,...,\,4)$ boshqaruvni shunday tanlash kerakki, $t=4$ vaqt momentida quyidagi shart bajarilsin:

$$x_1(5)=3000,\ \ x_2(5)=0. \tag{4}$$

Boshqacha qilib aytganda, shunday uchinchi tomon mavjud bo'lishi mumkinki, u jang qiluvchi tomonlardan birinchisining g'alabasiga yordam beradi, lekin yordamchi kuchlarni ikki tomonga ham etkazadi (iqtisodiy foyda ko'rish maqsadida).

Masalaning echimi chiziqli diskret sistemada optimal boshqaruvni topishdan iborat. Yuqorida keltirilgan ko'rinishdagi masala chiziqli diskret sistemada optimal boshqaruvni topish masalasi sifatida qo'yilishi mumkin:

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu(t),\qquad t=0,\,1,\ldots 4.$$

Chiziqli diskret sistema $A=\begin{bmatrix}0,9 & -0,3\\ -0,2 & 0,95\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\ 0,5\end{bmatrix}$ matritsalarga va $x(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$ fazali koordinata vektoriga ega.

Sifatning kvadratik kriteriyasiga ega optimal programmali boshqaruvni tuzamiz [2], yani shunday $u(t),\ t=0,\,1,\ldots 4$, to'plamni qidirish kerakki, bunda $\sum_{t=0}^{4}u^2(t)$ kattalik minimal bo'lsin.

Ko'rsatilgan turdagi sifat kriteriyasi odatda, boshqaruv resurslarini tejash kerak bo'lgani-da ishlatiladi (berilgan holda, har bir armiyaga yo'naltirilgan yordamchi kuchi).

Bunda ko'rsatilgan boshqariluvchi ta'sir, (2) sistemani, berilgan (3) boshlang'ich $x(0)$ holatdan, (4) oxirgi $x(5)$ holatga o'tkazishi kerak.

[2, 3] ga ko'ra optimal programmali boshqariluvchi ta'sir quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$u^0(t) = S^T(t)D^{-1}C, \quad t = 0,\, 1,\, ...4,$$

bu yerda

$$S(t) = A^{4-t}B, \quad D = \sum_{t=0}^{4} S(t)S^T(t), \quad C = x(5) - A^5x(0).$$

Kerakli hisoblashlarni bajargan holda quyidagi natijaga erishamiz:

$$u(0) = 1897, \;\; u(1) = 1483, \;\; u(2) = 1065, \;\; u(3) = 613, \;\; u(4) = 87$$

optimal programmali boshqaruvdan foydalanib, sistema $t = 4$ momentida oxirgi holatga keltiriladi (u va x ning qiymatlari butungacha yaxlitlangan holda berilgan, chunki yordamchi kuch bu - odamlar):

$$x^T(1) = \left(\, 2272; \;\; 1086 \,\right), \;\; x^T(2) = \left(\, 3201; \;\; 1319 \,\right), \;\; x^T(3) = \left(\, 3551; \;\; 1145 \,\right),$$
$$x^T(4) = \left(\, 3465; \;\; 684 \,\right), \;\; x^T(5) = \left(\, 3000; \;\; 0 \,\right).$$

Ikkala armiya ham janchilari sonini bir-biriga va qandaydir boshqa tomonga bog'liq bo'lmagan holda o'z armiyasini o'zi to'ldirganida, boshqaruvlar vektori va B matritsa mos holda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aytib o'tish kerakki, bu holda masalani ikki o'yinchining optimal boshqaruv strategiyalarini qurish masalasi sifatida qarash o'rinli.

Huddi shu jarayondan foydalangan holda, yordam sonining kerak bo'ladigan qiymatlari-ni topish mumkin. Masalan, qandaydir sharoitlarda ikki armiya ham bir vaqtning o'zida mag'lub bo'lishini aniqlash mumkin.

Lanchester modellari doirasida hujum va mudofaa kuchlarini taqsimlashni optimallashtirish masalasining ko'p turlari mavjud. Shuningdek, Lanchesterning harbiy harakatlar modellari va biologiyadagi populyatsiya modellari orasida bog'liqlik mavjudligiga e'tibor qaratish lozim. Lanchester turidagi tenglamalarga zahirani kiritish, kuchlar va vositalarni taqsimlashni aks ettiruvchi boshqariluvchi o'zgaruvchilarni va boshqalarni kiritish optimal-lashtirish modellarida optimal boshqaruv o'yin masalalariga keladi.

ADABIYOTLAR

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. – М.: Наука Физ-матлит, 1997. – С.150-153.

2. Альбрехт Э.Г., Сазанова Л.А. Синтез оптимального управления в линейных дискретных системах // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2000. – Т. 6 є1-2. – Екатеринбург. С. 477-496.

3. Сазанова Л.А. Дискретный вариант модели Ланчестера // Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. Материалы 7-й научно-практической internet-конференции. – 2016. – С. 38-39.

4. Lanchester F. Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm. – London: Constable and Co, 1916. – 243 p.

Nomanfiy yadroli Fridrixs modeli xos qiymatlari

Kucharov R. R.[1], Xushvaqtov N. X.[2]
O‘zbekiston Milliy universiteti, Toshkent, O‘zbekiston;
[1]ramz3364647@yahoo.com [2]nuriddinh@gmail.com

Aytaylik $\Omega \subset \mathbb{R}^{\nu}$ – bo‘sh bo‘lmagan kompakt to‘plam va bu to‘plamda $u(x)$ uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiya berilgan bo‘lsin. $L_2(\Omega)$ fazoda $k(x,s)$ yadroli K kompakt integral operatorni qaraylik. $L_2(\Omega)$ fazoda H operator quyidagi formula bilan aniqlaymiz:

$$H = U - K \tag{1}$$

bu yerda

$$(Uf)(x) = u(x)f(x), \quad f \in L_2(\Omega).$$

Kvant mexanikasi va statistik fizikaning ba’zi masalalari H operatorning spektrini o‘rganishga olib kelinadi. Kompakt operator qo‘zg‘alishi haqidagi Viell teoremasiga ko‘ra

$$\sigma(U) = \sigma_{ess}(U) = [u_{\min}, u_{\max}], \quad u_{\min} = \inf_{x\in\Omega} u(x), \quad u_{\max} = \sup_{x\in\Omega} u(x).$$

Dastlab H operator muhim spektr qo‘zg‘alish nazariyasi K.O.Fridrixs tomonidan o‘rganilgan. (1) tenglik bilan aniqlangan operator Fridrixs modeli deb nomlanadi. $u(x) = x \in [0,1]$ bo‘lganda va $K : L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ kompakt integral operator yadrosi, $\mu > \frac{1}{2}$ bo‘lganda ko‘rsatkichli Gyoldr yadrosi bo‘lsa, u holda H operator muhim spektrining tashqarisida chekli xos qiymatga ega bo‘lishi [1], [2] da o‘rganilgan.

Bir o‘lchamli Fridrixs modeli [2], [3] ishlarida qaralgan. Agar $u(x)$ funksiya kritik nuqtaga ega bo‘lsa, ya’ni $x \in [a,\, b]$ uchun $u'(x) = 0$ hamda chekli va har biri aynimaydigan bo‘lsa, u holda H operator diskret spektri chekli bo‘lishi [4], [5] da isbotlangan.

H modelning muhim spektrdan tashqarida yotuvchi xos qiymatlari soni cheksizligi haqidagi savol kam o‘rganilgan bo‘lib, matematik nuqtai nazardan Yefimov effekti paydo bo‘lishini kutish mumkin. Muhim spektrdan tashqarida yotuchi bir o‘lchamli (1) modelning xos qiymatlari soni cheksizligi haqidagi savol [2], [6] da o‘rganilgan.

Bizga $\Omega = [a,\, b]^{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}$ to‘plam va bu to‘plamda $u(x) = u(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_\nu)$ uzluksiz haqiqiy qiymatli funksiya berilgan bo‘lsin. Mos ravishda $U : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ va $K : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ operatorlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$(Uf)(x) = u(x)f(x), \quad (Kf)(x) = \int_{\Omega} k(x,s)f(s)ds, \quad f \in L_2(\Omega), \quad x,\, s \in \Omega,$$

bu yerda $k(x,s) = \overline{k(s,x)}$ va kvadrati bilan integrallanuvchi funksiya.

Aytaylik $\Omega = [0,1]$ da

$$k(x,s) = \alpha_1\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s_1)} + \alpha_2\varphi_2(x)\overline{\varphi_2(s_1)} + \alpha_3\varphi_3(x)\overline{\varphi_3(s_1)}$$

funksiyani aniqlaymiz, bunda $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$, $\varphi_i \in L_2[0,1]$, $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,3$, $\|\varphi_i\| = 1$, $i = 1,2,3$.

Teorema 1.[5] Agar $\forall n \in \mathbb{N}$ uchun shunday $\{h_k\}_{k=\overline{1,n}} \subset L_2(\Omega)$ ortonormal sistema mavjud bo‘lib, hamda $\int\limits_{\Omega} u(x)|h_k(x)|^2dx < c_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $c_k = (Kh_k, h_k)$, shartni qanoatlantirsa, u holda H (1) operator manfiy sanoqli sondagi xos qiymatlarga ega bo‘ladi.

Faraz qilaylik

$$\int_0^1 u(x)|\varphi_1(x)|^2 dx < \alpha_1 \tag{2}$$

$$\int_0^1 u(x)|\varphi_2(x)|^2 dx < \alpha_2 \tag{3}$$

$$\int_0^1 u(x)|\varphi_3(x)|^2 dx < \alpha_3 \tag{4}$$

bo‘lsin.

Teorema 2.

1) Agar (2), (3) va (4) tengsizliklar bir vaqtda bajarilsa, H (1) operator uchta manfiy xos qiymatga ega bo‘ladi.

2) Agar (2), (3) yoki (2), (4) yoki (3), (4) tengsizliklar bir vaqtda bajarilsa, H (1) operator ikkita manfiy xos qiymatga ega bo‘ladi.

3) Agar (2) yoki (3) yoki (4) tengsizlik bajarilsa, u holda H (1) operator bitta manfiy xos qiymatga ega bo‘ladi.

ADABIYOTLAR

1. Ладыженская О.А., Фаддеев Л.Д. К теории возмущений непрерывного спектра //Докл.АН СССР. 1962. Т.145, №2. С. 301-304.

2. Эшкобилов Ю.Х. О бесконечности числа отрицательных собственных значений модели Фридрихса //Наносистемы: физика, химия, математика, 2012, 3(6), С. 16-24.

3. Минлос Р.А., Синай Я.Г. Исследование спектров стохаетических операторов, возникающих в решет частых моделях газа //ТМФ. 1970. Т.2. №2. С. 230-243.

4. Лакаев С.Н. О дискретном спектре обобщенной модели Фридрихса //Докл. АН УзССР. 1979. №4. С.9-10.

5. Яковлев С.И. Теорема единственности и сингулярный спектр в модели Фридрихса около особой точки //Алгебра и анализ. 2003. Т.15. №1. С. 215-239.

6. Эшкобилов Ю.Х. О бесконечности дискретного спектра операторов в модели Фридрихса //Мат.труды. 2011. Т.14. №1. С. 195-211.

Ba’zi yechiluvchanga yaqin Li algebrasining quyi tartibli kogomologik gruppalari

Mahmudjonova Z.O.[1] Solijanova G. O.[2],

Namangan davlat Universiteti, Namangan, O’zbekiston;
zumradmahmudjonova@gmail.com[1]
O’zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O’zbekiston;
gulhayo.solijonova@mail.ru[2]

Ushbu ishda maksimal pro-nilpotent ideali model filiform Li algebraning cheksiz o’lchamli analogi bo’lgan ba’zi Li algebralari oilasining quyi tartibli kogomologik gruppalari o’rganilgan.

F biror maydon bo'lsin.

Ta'rif 1. F maydon ustida aniqlangan L algebraning ixtiyoriy x, y, z elementlari uchun quyidagi ayniyatlar bajarilsa,

$$[x, x] = 0, -\text{antikommutativlik ayniyati}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 - \text{Yakobi ayniyati}$$

u holda, L algebrasiga Li algebrasi deyiladi, bu yerda $[-, -]$ $-L$ algebrada aniqlangan ko'paytirish amali

Ta'rif 2. L algebrada aniqlangan $d : L \to L$ chiziqli almashtirish L algebraning ixtiyoriy x, y elementlari uchun ushbu

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$$

differensiallash qoidasini qanoatlantirsa, u holda $d : L \to L$ chiziqli almashtirishga differen- siallash deyiladi.

Berilgan $x \in L$ va barcha $y \in L$ elementlar uchun $ad_x : L \to L$ akslantirishni quyidagicha aniqlaylik

$$ad_x(y) = [x, y].$$

Tekshirib ko'rish mumkinki, bu ad_x akslantirish differensiallash bo'ladi. Bunday aniqlangan differensiallashga ichki differensiallash deyiladi. Ichki bo'lmagan differensiallashga tashqi differensiallash deyiladi.

Ta'rif 3. Agar $L-$ Li algebrasi uchun $Center(L) = 0$ va barcha differensiallashlari ichki bo'lsa, u holda, $L-$ Li algebrasi to'liq deyiladi.

Bu yerda, $Center(L) = x \in L | [x, y] = [y, x] = 0, \text{barcha} y \in L.$

Ma'lumki, $L-$ Li algebrasining nolinchi tartibli kogomologik gruppasi bu $L-$ algebraning markazi bo'lsa, birinchi tartibli kogomologik gruppasi $L-$ algebraning tashqi differensiallashlar fazosi bo'ladi.

Aytaylik, $L-$ Li algebrasi bo'lsin. $L-$ Li algebrasi uchun quyi markaziy va hosilaviy qatorlarni quyidagicha aniqlaymiz:

$$L^1 = L,\ L^{k+1} = [L^k, L],\ k \geq 1, \quad L^{[1]} = L,\ L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}],\ s \geq 1.$$

Ta'rif 4. [2] Agar $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^i = 0$ (mos ravishda, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^{[i]} = 0$) o'rinli bo'lsa, u holda, L Li algebrasiga nilpotentga yaqin (mos ravishda, yechiluvchanga yaqin) Li algebrasi deyiladi.

Ta'rif 5. [3] Agar ixtiyoriy $i > 1$ uchun, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^i = 0$ (mos ravishda, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} L^{[i]} = 0$) va $\dim L/L^i < \infty$ (mos ravishda, $\dim L/L^{[i]} < \infty$) o'rinli bo'lsa, u holda, $L-$ Li algebrasi pro-nilpotent (mos ravishda, pro-yechiluvchan) deyiladi.

Aytaylik, $\mathfrak{m}_0$ model filiform Li algebrasining cheksiz o'lchamli analogi bo'lsin, ya'ni

$$\mathfrak{m}_0 : [e_i, e_1] = e_{i+1},\ i \geq 2.$$

[1] ishda ko'rsatilgan quyidagi maksimal pro-nilpotent ideali $\mathfrak{m}_0$ bo'lgan yechiluvchanga yaqin Li algebralari oilasini tahlil qilaylik:

$$R_1(\mathfrak{m}_0,1,\beta):\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1},\ i\geq 2,\\ [e_1,x]=e_1,\\ [e_i,x]=(i-2)e_i+\sum\limits_{k=3}^{t}\beta_k e_{k+i-2},\ i\geq 2,\end{cases}$$

bu yerda, $\beta=(\beta_3,\beta_4,\dots,\beta_t)\in\mathbb{C}^{t-2}$ va $t\in\mathbb{N}$.

Tekshirib ko'rish mumkinki, $R_1(\mathfrak{m}_0,1,\beta)$ oiladan olingan ixtiyoriy algebraning markazida $\{e_2\}$ element yotadi. Ya'ni quyidagi xossa o'rinli.

Xossa 1. $\dim(H^0(R_1(\mathfrak{m}_0,1,\beta),R_1(\mathfrak{m}_0,1,\beta)))=1$.

Teorema 1. $R_1(\mathfrak{m}_0,1,\beta)$ oiladan olingan ixtiyoriy algebraning differensiallashlar fazosi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$Der(R_1(\mathfrak{m}_0,1,\beta)):\begin{cases}d(e_1)=a_1e_1+\sum\limits_{i=3}^{s}a_ie_i,\\ d(e_i)=((i-2)a_1+b_2)e_i+(a_1\beta_3-\gamma_1)e_{i+1}+a_1\sum\limits_{k=4}^{s}\beta_k e_{k+i-2},\ i\geq 2,\\ d(x)=\gamma_1e_1+\sum\limits_{i=3}^{s-1}((i-2)a_{i+1}+\sum\limits_{k=3}^{i}a_k\beta_{i-k+3})e_i+\sum\limits_{k=3}^{s}a_k\beta_{s-k+3}e_s.\end{cases}$$

bu yerda, $\sum\limits_{k=p}^{s}a_k\beta_{s-k+p}=0,\ 4\leq p\leq s.$

[1] maqolada $R_1(\mathfrak{m}_0,1,\beta)$ oiladan olingan ixtiyoriy algebraning tashqi differensiallashlari mavjudligi ko'rsatilganligidan quyidagi xossa o'rinliligi kelib chiqadi.

Xossa 2. $\dim(H^1(R_1(\mathfrak{m}_0,1,\beta),R_1(\mathfrak{m}_0,1,\beta)))\neq 0$.

ADABIYOTLAR

1. Abdurasulov K.K., Omirov B.A., Rakhimov I.S., Solijanova G., Residually solvable extensions of an infinite dimensional filiform Leibniz algebra, Journal of Algebra. 2021, vol. 585, P. 697-722.

2. Millionschikov D.V., Cohomology of graded Lie algebras of maximal class with coeficients in the adjoint representation, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2008, 263, P. 99-111.

3. Millionshchikov D.V., Naturally graded Lie algebras of slow growth, Mat. Sb. 210(6) (2019) 111-160 (in Russian).

ℓ_p fazosidagi birlik shar ekstremal nuqtalarining bir xossasi

Mavlonov I.M.[1], Aminov B.R.[2]

O'zbekiston Milliy Universiteti, 100174, Toshkent, O'zbekiston;
[1]mavlonovismoilmurodulla97@gmail.com [2]aminovbehzod@gmail.com

$(X,\|\cdot\|)$ normalangan fazo bo'lsin. X fazodagi birlik sharni va birlik sferani mos ravishda $B(X)$ va $S(X)$ orqali belgilaymiz, ya'ni $B(X)=\{x\in X|\|x\|\leq 1\}$ va $S(X)=\{x\in X|\|x\|=1\}$. Agar $e=\frac{1}{2}(x+y)$, $x,y\in B(X)$ tengligidan $e=x=y$ munosabati kelib chiqsa, u holda e nuqta $B(X)$ birlik sharning ekstremal nuqtasi deyiladi. $B(X)$ birlik sharning barcha ekstremal nuqtalari to'plamini $extr(B(X))$ kabi belgilaymiz. Ravshanki, $extr(B(X)) \subset S(X)$. $(X, \|\cdot\|)$ normalangan fazo qat'iy normalangan deyiladi, agar $x, y \in X$ elementlar uchun $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ tengligidan x, y elementlarining chiziqli bog'liq ekanligi kelib chiqsa. Agar $(X, \|\cdot\|)-$qat'iy normalangan fazo bo'lsa, u holda $extr(B(X)) = S(X)$ tengligi o'rinli bo'ladi.

ℓ_∞ bu barcha chegaralangan ketma-ketliklar to'plami bo'lsin, ya'ni $\ell_\infty = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \mid \sup\limits_{n\geq 1} |x_n| < \infty\}$. Ushbu ℓ_∞ to'plamning $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ elementlari uchun $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{def}{=} \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ kabi binar amal va $\lambda \cdot \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\lambda x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ kabi songa ko'paytirish amali aniqlansa, ℓ_∞ chiziqli fazo bo'ladi. ℓ_∞ chiziqli fazosi quyidagicha aniqlangan $\|\cdot\|_\infty$ normaga nisbatan Banax fazosi bo'ladi:

$$\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|, \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty.$$

$p \geq 1$ soni uchun ℓ_p orqali ℓ_∞ fazosining quyidagicha aniqlangan qism-fazosini belgilaymiz:

$$\ell_p = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}.$$

ℓ_p fazosi $\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_p = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ kabi aniqlangan normaga nisbatan Banax fazosi bo'ladi. c_0 orqali nol soniga intiluvchi barcha ketma-ketliklar to'plamini belgilaymiz. Ravshanki, c_0 to'plami $\|\cdot\|_\infty$ normasiga nisbatan ℓ_∞ ning normalangan qism fazosi bo'ladi.

Ma'lumki, X fazoda aniqlangan chiziqli chegaralangan $f \in X^*$ funksionalning normasi $\|f\| = \sup\limits_{x\in B(X)} |f(x)|$ formula yordamida aniqlanadi. Funksional f ni chiziqli ekanligidan foydalanib, ushbu formulada $B(X)$ ni o'rniga $S(X)$ yozish mumkin ekanligini ko'rsatish qiyin emas. Agar X chekli o'lchamli normalangan fazo bo'lsa, u holda $B(X)$ to'plami qavariq kompakt to'plam bo'ladi va Bauerning maksimum printsipiga ko'ra ([2], §7.69) formuladagi $S(X)$ to'plamni yanada toraytirish mumkin, ya'ni ixtiyoriy $f \in X^*$ uchun $\|f\| = \sup\limits_{x\in extr(B(X))} |f(x)|$ tengligi o'rinli bo'ladi. Agar X cheksiz o'lchamli normalangan fazo bo'lsa, u holda yuqoridagi tenglik umuman olganda o'rinli emas. Masalan, $(X, \|\cdot\|) = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ bo'lsa, u holda $extr(B(X)) = \emptyset$ bo'ladi ([1], 118-bet) va shuning uchun $\|f\| = \sup\limits_{x\in extr(B(X))} |f(x)|$ tengligi o'rinli bo'lmaydi.

Teorema 1. ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ fazosida aniqlangan ixtiyoriy chegaralangan chiziqli $f \in (\ell_p)^*$ funksional uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi

$$\|f\| = \sup_{x\in extr(B(X))} |f(x)|.$$

Adabiyotlar

1. Ayupov Sh.A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K., *Funksional analizdan misol va masalalar*. "Bilim". Nukus - 2009.
2. Charalambos D.A., Kim C.B., *Infinite Dimensional Analysis*, Third Edition. Springer - 2006.

Diskret Laplasianning Green funksiyasi uchun asimptotika

Mo'minov Z. E.[1]**, Madatova F. A.**[2]
National Universitety of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
zimuminov@gmail.com[1]; fotimamadatova2@gmail.com[2]

Kirish

Atom va molekulyar fizika, qattiq jismlar fizikasi va kvant maydonlar nazariyasining asosiy muammolaridan biri Schrödinger operatorlarining xususiyatlarini o'rganishdir. Bu sohada olingan ko'plab natijalar M. Reed and B. Simon [1] ishlarida berilgan. Panjaradagi zarrachalar sistemasiga mos Schrödinger operatorlari D. S. Mattis (1976) va A.I.Mogilner (1991) tomonidan o'rganilgan.

Bu ishda biz ikki o'lchovli panjaradagi Diskret Laplasianni qaraymiz va bu Laplasianning Green funksiyasi uchun asimptotikani o'rganamiz.

Discrete Schrödinger operatorining berilishi

$\mathbb{Z}^2$-ikki o'lchovli panjara, $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 = (-\pi;\pi]^2$-ikki o'lchovli tor bo'lsin. Har bir $\beta > 0$ uchun Diskret Laplasian Δ quyidagicha aniqlanadi:

$$\Delta = \sum_{|s|=1} \Big((\hat{T}(s) - \hat{T}(0)) + \beta(\hat{T}(2s) - \hat{T}(0)) \Big),$$

bu yerda $\hat{T}(y)$ operator $\ell^2(\mathbb{Z})$ fazoda $y \in \mathbb{Z}$ga siljitish operatori.

H operator impuls tasvirda $\mathbb{T}^2$ dagi L^2 funksiyalar Hilbert fazosida

$$(Hf)(p) = \varepsilon(p)f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^2), \quad p \in \mathbb{T}^2,$$

fo'rmula bilan aniqlanadi. Bunda

$$\varepsilon(p) = \sum_{j=1}^{2}((1-\cos p_j) + \beta(1-\cos 2p_j)), \quad p \in \mathbb{T}^2, \quad \beta \geq 0;$$

Fizik adabiyotlarda $\varepsilon(p)$ funksiya $\mathbb{T}^2$ da haqiqiy qiymatli funksiya bo'lib, $-\Delta$ Diskret Laplasianning dispersion munosabati deb ataladi.

Muhim spektr

Ma'lumki H funksiyaga ko'paytirish operatori bo'lganligi sababli H operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(H)$ haqiqiy o'qdagi quyidagi kesmadan iborat:

$$\sigma_{ess}(H) = [\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}],$$

bu yerda

$$\varepsilon_{min} = 0 \quad \varepsilon_{max} = \begin{cases} 4, & 0 \leq \beta \leq \frac{1}{4} \\ \frac{(1+4\beta)^2}{4\beta}, & \beta > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

H operatorning Green funksiyasi quyidagi integral yordamida aniqlanadi:

$$\hat{r}_0(x,z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} \frac{e^{ixp}}{\varepsilon(p)-z}dp, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{min}, \varepsilon_{max}], \quad x \in \mathbb{Z}^2,$$

i- mavhum birlik.

Ishimizdagi asosiy natija quyidagidan iborat.

Teorema. Har bir $x \in \mathbb{Z}^2$ uchun

$$\hat{r}_0(x,z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}^2} \frac{e^{i(x,p)}}{\varepsilon(p)-z}dp, \quad \text{bunda} \quad z \in (-\infty; 0),$$

funksiya $(-\infty; 0)$ intervalda z ning funksiyasi sifatida musbat va monoton o'suvchi.

a) $\beta > 0$ bo'lganda quyidagi asimptotika o'rinli

$$\hat{r}_0(x,z) = O\Big(\frac{1}{|z|^{n_0+1}}\Big) \quad z \longrightarrow -\infty$$

bunda

$$n_0 = \Big[\frac{|x_1|+1}{2}\Big] + \Big[\frac{|x_2|+1}{2}\Big]$$

b) $\beta = 0$ bo'lganda quyidagi asimptotika o'rinli

$$\hat{r}_0(x,z) = O\Big(\frac{1}{|z|^{n_0+1}}\Big), \quad bunda \quad z \longrightarrow -\infty$$

bunda

$$n_0 = |x_1| + |x_2|.$$

c) Bundan tashqari quyidagi tenglik o'rinli

$$\lim_{z \longrightarrow \varepsilon_{min}^-} \hat{r}_0(x,z) = +\infty, \quad d = 2.$$

Adabiyotlar

1). c Rid. M., Saymon B. Metodiy sovremennoy matematicheskoy fiziki. T.I. Funksionalniy analiz. M.: Mir.1977

2). Rid. M., Saymon B. Metodiy sovremennoy matematicheskoy fiziki. T.4. Analiz operatorov. M.: Mir. 1982.

3). J.I.Abdullayev, R. N. G'anixo'jayev, M. H.Shermatov, O. I. Egamberdiyev, Funksional analiz va integral tenglamalar, Toshkent 2013, Yangi asr avlodi nashriyoti.

4) Sarimsoqov T.A. Funksional analiz kursi, Toshkent: O'qituvchi, 1986.

Raqobatlashuvchi SOS modeli uchun Keli daraxtida sanoqlita davriy bo'lmagan asosiy holatlar

Raxmatullayev M. M.[1], **Abrayev B. O'.**[2]

O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Toshkent, O'zbekiston[1]

e-mail:mrahmatullaev@rambler.ru;[1]

Chirchiq davlat pedagogika instituti, Chirchiq, O'zbekiston,[2]

e-mail:abrayev89@mail.ru[2]

Faraz qilaylik $\Gamma^k = (V, L, i)$, Keli daraxti berilgan bo'lsin, bu yerda $V - \Gamma^k$ ning uchlari to'plami $L-$ uning qirralar to'plami va $i-$ insidentlik funksiyasi, har bir $l \in L$ qirraga uning oxirgi nuqtalari $x, y \in V$ ni mos qo'yadi. Agar $i(l) = \{x, y\}$ bo'lsa, u holda x, y yaqin qo'shnilar deyiladi va $l = \langle x, y\rangle$ ko'rinishda yoziladi. Keli daraxtida $d(x, y)$ masofa deb x va y uchlarni tutashtiruvchi eng qisqa yo'ldagi qirralar soniga aytiladi:

$$d(x, y) = min\{d : \exists x = x_0, x_1, ..., x_{d-1}, x_d = y\},$$

bu yerda $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, ..., $\langle x_{d-1}, x_d\rangle$ yaqin qo'shnilardir.

Ma'lumki, Γ^k Keli daraxtini, barpo etuvchilari $a_1, a_2, a_3, ..., a_{k+1}$ bo'lgan ikkinchi tartibli $k + 1$ ta siklik gruppalarni erkin ko'paytmasidan iborat bo'lgan G_k gruppa orqali tasvirlash mumkin. ([1]-[3] ishga qarang). Fiksirlangan $x^0 \in V$ uchun quyidagicha belgilashni kiritamiz:

$$W_n = \{x \in V | d(x, x^0) = n\}.$$

$S(x)$ bilan $x \in W_n$ daraxt uchining to'g'ri avlodlar to'plamini belgilaylik, ya'ni $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$. $S_1(x)$ orqali $x \in G_k$ ga yaqin qo'shni nuqtalar to'plamini belgilaylik, ya'ni $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y\rangle\}$. Bu belgilashlardan yakkalangan element $x_\downarrow = S_1(x)\backslash S(x)$ ni hosil qilamiz.

Spin qiymatlari $\Phi = \{0, 1, 2, ..., m\}$ bo'lgan SOS modelini qaraymiz. $\sigma-$ konfiguratsiya V uchlar to'plami elementlarini $\Phi = \{0, 1, 2, ..., m\}$ to'plam elementiga mos qo'yuvchi akslantirishdir, ya'ni $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. Barcha konfiguratsiyalar to'plami $\Omega = \Phi^V$.

$G_k/G_k^* = \{H_1, H_2, ..., H_r\}$–faktor-gruppa bo'lsin, bu yerda G_k^*–normal bo'luvchi $r \geq 1$.

Ta'rif 1. Agar $\sigma(x) = \sigma_i$ shart $x \in H_i$ da o'rinli bo'lsa, u holda $\sigma(x)$, $x \in V$ konfiguratsiya G_k^* -davriy deyiladi. G_k davriy konfiguratsiya esa translatsion-invariant konfiguratsiya deyiladi.

Ta'rif 2. Agar $\sigma(x) = \sigma_{ij}$ shart $x_\downarrow \in H_i$ va $x \in H_j$ da o'rinli bo'lsa, u holda $\sigma(x)$, $x \in V$ konfiguratsiya G_k^* -kuchsiz davriy deyiladi.

Raqobatlashuvchi SOS modeli Gamiltoniani quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| - J_2 \sum_{\substack{x,y \in V: \\ d(x,y)=2}} |\sigma(x) - \sigma(y)|, \quad (1)$$

bunda $(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$.

V uchlari to'plamidan tuzilgan birlik sharlar to'plamini M bilan belgilaymiz. $b \in M$ shardagi konfiguratsiyani $x \in b \to \sigma(x) \in \Phi$ funksiya kabi aniqlaymiz. $b \in M$ sharning markazini c_b bilan belgilaylik. σ_b konfiguratsiya energiyasini quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$U(\sigma_b) \equiv U(\sigma_b, J_1, J_2) = -\frac{1}{2} J_1 \sum_{\substack{\langle x,y\rangle: \\ x,y \in b}} |\sigma(x) - \sigma(y)| - J_2 \sum_{\substack{x,y \in b: \\ d(x,y)=2}} |\sigma(x) - \sigma(y)|, \quad (2)$$

bu yerda $(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2$.

$k = 2$ va $m = 2$ bo'lsin. Ixtiyoriy σ_b konfiguratsiya uchun quyidagilar o'rinli bo'ladi.

$$U(\sigma_b) \in \{U_i : i = 1...10\}$$

bu yerda

$$U_1 = 0,\ U_2 = -\frac{1}{2}J_1 - 2J_2,\ U_3 = -J_1 - 2J_2,\ U_4 = -\frac{3}{2}J_1,\ U_5 = -J_1 - 4J_2,$$

$$U_6 = -2J_1 - 4J_2,\ U_7 = -3J_1,\ U_8 = -\frac{3}{2}J_1 - 4J_2,\ U_9 = -2J_1 - 2J_2,\ U_{10} = -\frac{5}{2}J_1 - 2J_2.$$

Ta'rif 3. Har bir $\forall b \in M$ va σ_b uchun $U(\varphi_b) = \min\{U_1, U_2, U_3, ..., U_{10}\}$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda σ konfiguratsiya H gamiltonianga nisbatan asosiy holat deyiladi.

Quyidagi [4] ishda $k = 2$ bo'lgan holda raqobatlashuvchi SOS modeli uchun davriy va kuchsiz davriy asosiy holatlar o'rganilgan.

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$A_m = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 \mid U_m = \min_{1\leq k\leq 10}\{U_k\}\}.$$

Hisob kitoblar A_m to'plamlarni quyidagicha bo'lishini ko'rsatadi:

$$A_1 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 \leq 0; J_2 \leq -\frac{1}{4}J_1\},\ A_2 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 \leq 0; J_2 = -\frac{1}{4}J_1\},$$

$$A_3 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 = 0; J_2 = 0\},\ A_4 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 = 0; J_2 \leq 0\},$$

$$A_5 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 \leq 0; J_2 \geq -\frac{1}{4}J_1\},\ A_6 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 \geq 0; J_2 \geq \frac{1}{4}J_1\},$$

$$A_7 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 \geq 0; J_2 \leq \frac{1}{4}J_1\},\ A_8 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 = 0; J_2 \geq 0\},$$

$$A_9 = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 = 0; J_2 = 0\}\},\ A_{10} = \{(J_1, J_2) \in R^2 \mid J_1 \geq 0; J_2 = \frac{1}{4}J_1\}$$

va $\bigcup_{i=1}^{10} A_i = \mathbb{R}^2$.

$GS(H)$- Gamiltonianning barcha asosiy holatlarining to'plami bo'lsin. [2] ishda Izing modeli uchun sanoqlita davriy bo'lmagan asosiy holatlar o'rganilgan va bu maqoladagi usullardan foydalanib quyidagi teorema isbot qilingan.

Teorema 1. (i) Agar $J = (0; 0)$ bo'lsa, u holda $\mathrm{GS}(H) = \Omega$.

(ii) Agar $J \in A_i \setminus \{(0, 0)\}$, $i = 2, 8, 10$ bo'lsa, unda sanoqlita davriy bo'lmagan asosiy holatlar mavjud.

Adabiyotlar

1. U.A.Rozikov *Gibbs measures on Cayley trees.*: World scientific.-2013.

2. U.A.Rozikov, *A Constructive Description of Ground States and Gibbs Measures for Ising Model with Two-Step Interactions on Cayley Tree,* Jurnal of Statistical Physics, Vol. 122, No.2, January 2006 DOI: 10.1007/s 10955-005-8029-3.

3. M.M.Rakhmatullaev, *Description of weak periodic ground states of Ising model with competing interactions on Cayley tree,* Appl. Math. Inf. Sci., **4**, (2010), 237.

4. B.U. Abraev, *On weakly periodic ground states for the SOS model,* Scientific Bulletin of Namangan State University, (2020) Vol 2. No.3 pp. 14-21.

Jamiyat diskret qism fazolar yordamida qurilgan fazo

Saitova S. S.[1], **Ergashova Sh. R.**[2]
O‘zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent, O‘zbekiston,
shohida.ergashova@mail.ru

Ta‘rif 1. Bizga biror X topologik fazoning A to‘plami va to‘plamning ixtiyoriy x_0 nuqtasi berilgan bo‘lsin. Agar x_0 nuqtaning shunday $\mathcal{U}$ atrofi topilib, bu atrof bilan A to‘plamning kesishmasi faqat x_0 nuqtadan iborat bo‘lsa, ya‘ni $A\bigcap\mathcal{U} = x_0$ bo‘lsa, X topologik fazoning x_0 nuqtasiga A **to‘plamning yakkalangan nuqtasi** deyiladi.

Ta‘rif 2. Yakkalangan nuqtalardan iborat to‘plamga **diskret to‘plam** deyiladi.

Ta‘rif 3. Ixtiyoriy $A \subset X$ to‘pam va uning ixtiyoriy $x \in \overline{A}$ nuqtasi berilgan bo‘lsin. $x \in \overline{A}$ uchun shunday $D \subset A$ diskret mavjud bo‘lib, x $\in \overline{D}$ bo‘lsa, X fazoga **diskret qism fazolar yordamida qurilgan topologik fazo** deyiladi.

Ushbu topologik tushunchalarni jamiyat bilan bog‘laymiz, ya‘ni **jamiyatni topologik modellashtiramiz.**

Bizda X fazo sifatida Jamiyat, elementlari sifatida jamiyatdagi muammolarni, yechimlarni olsak. Jamiyatning to‘plamlari esa ma‘lum soha doirasidagi bo‘laklari bo‘lsin.

Jamiyatning diskret qism fazolar yordamida qurilganlik xossasini ko‘ramiz. Buning uchun uning ixtiyoriy to‘plamini olamiz. Agar bu to‘plam elementlari yakkalangan nuqtalar bo‘lsa, ya‘ni har bir muammoning aniq yechimi mavjud bo‘lsa, u holda jamiyat diskret qism fazolar yordamida qurilgan fazo bo‘ladi. Bunday bo‘lmasachi?! U holda unga yaqinla- shuvchi nuqtalar ketma-ketligidan diskret qism to‘plam tuzib olamiz. Bu ketma-ketlikni esa shu kabi muammolarni yechishda ota-bobolarimizdan, onalarimizdan qolib kelayot an‘ana- larimiz, oilaviy udumlarimiz, olib borilgan ishlar, chiqarilgan qarorlarning ijrosi tashkil qilishi mumkin.

Hozirgi kunda butun dunyoda asosiy muammo bo‘layotgan va o‘z yechimini kutayotgan Covid-19 ni jamiyatning bir bo‘lagi, tibbiyot sohasining yopig‘idagi elementi sifatida qaray- lik. Muammo yangi, aniq yechimga ega emas. Unga yaqinlashuvchi ketma-ketlik orqali, ya‘ni shu doiradagi avval qo‘llangan usullar orqali yechimni qidiramiz. Shu o‘rinda mexani- kaning oltin qoidasi yodimizga keladi: Yo‘qdan bor bo‘lmaydi, bordan yo‘q bo‘lmaydi, u bir turdan boshqa turga aylanadi. Demak, bu muammo o‘z-o‘zidan paydo bo‘lmagan, o‘z-o‘zidan yo‘qolmaydi ham. Bu muammo ham avval amalga oshirilgan ishlar ketma-ketligida yechiladi, diskret to‘plamlar yordamida qurish modellashtiriladi. Qilingan va qilinayotgan ishlar algoritmi orqali modellimizni ko‘rib chiqamiz.

Birinchi element: o‘z-o‘zini yakkalash bo‘ldi, ya‘ni odamlar orasida diskret to‘plam qurildi. Gigiena talablariga to‘liq rioya qilish chora-tadbirlari ko‘rildi.

Ikkinchi element: kasallikka chalingan insonlar, ular bilan aloqada bo‘lgan insonlar bilan yakkalandi.

Uchinchi element: o‘z mehnat faoliyatini davom ettirayotgan korxona va tashkilot hodimlari, insonlar ijtimoiy masofa saqlashga chaqirildi.

To‘rtinchi element: kasallik o‘pkani zararlab, pnevmanik covidga aylanganligi sababli, kompleks antibiotiklar bilan davolash boshlandi.

Beshinchi element: kasallik qonning oʻta tez odimda quyilishiga olib kelganligi, endokrin kasalliklarini paydo qilganligi munosabati bilan, qon suyultirish tadbirlari olib borildi.

Va shu jarayonda kelib chiqayotgan xavflarni bartaraf etish orqali davolash algaritmi yaratilmoqda.

Keyingi element: Jahon sogʻliqni saqlash tashkiloti qarori bilan ommaviy tarzda vaksinatsiyalash ketmoqda.

Yaqinlashuvchi element: Bu kasallik insonda nosogʻlom hayot tarzini kechirish davomida surunkali kasalliklarni kuchaytirib, yondosh kasalliklari bor insonlar hayotida koʻproq xavf solayotganligini inobatga olib, sogʻlom turmush tarzi, toʻgʻri ovqatlanish kabi asosiy vazifalarni oldimizga qoʻymoqda.

Bu jarayonning borishini yanada chuqurroq koʻrib oʻtadigan boʻlsak. Tarixda roʻy bergan yuqumli kasalliklarning tarqalishida amalga oshirilgan karantin chora-tadbirlari yodga olindi. Kasallik yuqtirgan insonlarning sogʻlom aholidan izolyatsiya qilish tartibi shakllantirildi. Amalda qoʻllanilib kelinayotgan antibiotiklarning taʻsir kuchi oshirildi. Qizamiq, qizilcha kabi yuqumli kasalliklar ommaviy tarzda vaksinatsiya orqali yoʻq qilingan- ligi, bu kasallik uchun ham vaksina yaratish masalasini ilgari surdi. Bundan koʻrinadiki, bu kabi paydo boʻlgan muammolar tarixda qanday hal qilingan boʻlsa, shu tartibda, shu algoritmda yana yechilmoqda. Bu esa yuqoridagi topologik tushunchaning, asosiy xususiyati boʻlgan quyidagi tasdiqning modelini ham hosil qiladi.

Tasdiq: Diskret qism fazolar yordamida qurilgan struktura nasliy xususiyatga ega.

Xulosa sifatida, topologik tushunchalarni ham jamiyatdagi jarayonlarga madellashtirishimiz mumkin ekan.

Adabiyotlar

1. Engelking R. General Topology. Berlin.: *Berlin-West*, (1989).
2. Dow A., Tkachenko M.G., Tkachuk V.V., Wilson R.G. Topologies generated by discrete subspaces. *"Glasnik mathematicki Journal"*. (2002) №37(57), C. 189-212.

Заводдаги технологик операцияларда чиқаётган нуқсонлар улушини статистик методлар билан аниқлаш босқичлари ҳақида

Аблазова К.С.[1]
АДУ, Андижон, Ўзбекистон,
k.s.ablazova@gmail.com;

Ушбу тезисда илмий ишларимизни завод амалиётида қўллаш бўйича ҳамкорлик шартномаси асосида бажарилган баъзи масалалар таҳлили қисқа баён қилинган. Муаммони хал қилишда биз қуйидаги босқичларда ишларни амалга оширишни режалаштирдик:

1. Цеҳлардан муаммо билан боғлиқ сон белгининг қийматларидан иборат маълумотлар(танламалар) тўплаш;
2. Назорат карталар (НК) билан технологик жараённи турғун ҳолатга келтириш;
3. Ўрта қийматлар ва тарқоқлик кўлами НК лари билан жорий холатни ўрганиш. Турғунлик коэффициентларини топиш ва нуқсонларни фоизларда аниқлаш.

Ушбу босқичлар бўйича қуйидаги икки муаммо (кейс) таҳлил қилинди:

a) Асака шаҳридаги “Uz Avto Motors” Аж пайвандлаш цеҳида “Body shop” участкасидаги (B-RATE) Cobalt машинасининг кузов олд чап эшигининг ўлчаш маълумотларини қўйим бўйича сақланиши.

b) Бўёқ цеҳидаги Cobalt машинасиниг “Paint shop” участкасида грунтовка (ED+Primer) ўлчаш маълумотларини қўйим бўйича сақланиши. Кейсларни ҳал қилишда юқорида келтирилган боқичлар асосида қуйидаги ишлар амалга оширилди:

– Заводнинг пайвандлаш цеҳидан 2021 йил феврал ва март ойларидаги ҳамда бўёқ цеҳидан шу йилнинг май ойидаги бир хафталик ўлчаш маълумотлари тўпланди.

– Ассимметрия-экцесс($a-\gamma$) ва Колмогоров статистикасига асосланган (ρ) НКлар билан маълумотлар [1] ва [2] илмий натижаларимиз асосида нормалликка текширилди.

– Ўрта қийматлар ва тарқоқлик кђлами X-R қўшалоқ НК билан муаммо ўрганилди(Масалан, [3] га /каралсин). Натижалар куйидаги 1- жадвалда келтирилган.

Жадвалнинг биринчи сатрида танлама олинган бирлик вақтлар, иккинчи сатрида асиммерия-эксцесс НКнинг S^2 назорат қилувчи миқдорининг қийматлари, учинчи ва тўртинчи сатрларда мос равишда асимметрия ва эксцесс НКнинг қувват функциясининг фоизлардаги қийматлари, бешинчи сатрида (ρ) НКнинг назорат қилинувчи миқдори қийматлари, олтинчи ва еттинчи сатрларида мос равишда қўйим ўртачасини ҳисобга олинмаганда ва олингандаги турғунлик коэффициентининг қийматлари ва охирги сатрда нуқсонлар улушининг фоизлардаги улуши келтирилган. Асимметрия, эксцесс ва (ρ) НКларнинг чегаралари қуйидагича аниқланган: $LCL_a = 0$, $LCL_\gamma = 0.03$, $UCL_\gamma = 0.04$, $UCL_\rho = 0.13$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
S^2	0.053	0.175	0.104	0.068	0.051	0.221	0.132	0.120
$\sigma_a\%$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\sigma_\gamma\%$	89	100	99	99	86	100	99	99
ρ	0.20	0.12	0.83	0.87	0.20	0.16	0.18	0.24
C_p	0.7	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7	0.5	0.5
C_{pk}	0.7	0.3	0.4	0.5	0.7	0.3	0.4	0.4
$P\%$	3.08	24.34	13.45	7.34	3.08	29.9	59.85	17.07

Дастлабки хулосаларимиз қуйидагича: Пайвандлаш ва бўёқ цеҳларида RUN ва ON аномалийлари ҳисобига ўртача потенциал кўрсаткичлари мос равишда 19.8% ва 13.7% ни ташкил қилди.

Яна ҳам аниқроқ натижалар олиш учун текширишни давом эттириш ва мутахасислар билан фикр алмашиш зарур.

Адабиетлар

1. С.А.Ахмедов, К.С.Аблазова. “Некоторые статистические инструменты при исследовании устойчивости технологического процесса”. ДАН АН РУз,, 2019 , No3,с.16-19.

2. К.С.Аблазова Some control chart based on the consent criteria, “International Scientific Journal, Theoretical and Applied Science” USA, Philadelphia.pp 23-28, No. 11.2019.

3. Миттаг Й, Ринне Х. Статистические методы обеспечения качества. М: “Машиностроение”. 1995.

Индекси 3 булган нормал булувчига нисбатан даврий гармоник функциялар

Акмалова Р. А.[1], Файзиева Ф. А.[2]

Узбекистон Миллий университети, Тошкент, Узбекистон;
akmalovaroziya@gmail.com
Термиз Давлат университети, Термиз, Узбекистон
e-mail2@address2

Бизга (G, S) жуфтлик берилган бuлсин, бу ерда, G −граф ва S −G −графнинг учлар туплами $V(G)$ нинг бирор ,кисм туплами. Графлар назариясида гармоник функциянинг куйидаги таърифи бор[1].
Таъриф 1. Ушбу $h_x = \frac{1}{d(x)} \sum_{y \in S_1(x)} h_y$,
тенгликни каноатлантрувчи $h : V(G) \to R$ функция G нинг S чегараси буйича гармоник функция дейилади,бу ерда $x \in V(G) \backslash S,\ \ d(x)1,\ \ S_1(x)$ − xнинг энг якин кушни нукталар туплами. Кэли дарахтида гармоник функциянинг умумийрок таърифи берилган[2].
Таъриф 2. $A(x) \subseteq S_1(x)$ ва $f : R^{n+1} \times T^k \to R^n\,(n1)$ − кандайдир бирор функция булсин. куйидаги тенгламани каноатлантрувчи h_x функционалга гармоник функция дейилади $h_x \in R^n$.

$$h_x = \sum_{y \in A(x)} f\left(h_y, x, \theta\right), \tag{1}$$

бу ерда θ − параметр.
Таъриф 3[2]. H −F_n эркин группанинг кисм группаси бўлсин. $\forall\ \ x \in F_n$ ва $\forall\ \ y \in H$ учун $h_x = h_{yx}$ тенгликни каноатлантрувчи $\{h_x,\ x \in F_n\}$катталиклар жамланмаси H −даврий дейилади, бу ерда F_n Кэли дарахти группавий тасвири.
Масала: H ва f ларга шундай шартлар топингки (1) тенглама H − даврий ечимга эга булсин.
Биз бу ишда $A(x) = S_1(x),\quad f\left(h, x, a, b\right) = ah + b$ булган хол учун (1) тенгламанинг даврий ечимларини топиш масаласини курамиз. Бу хол учун (1) тенглама куйидаги куринишга эга

$$h_x = \sum_{y \in S_1(x)} \left(ah_y + b\right), \tag{2}$$

бу ерда $a, b \in R$.
Соддалик учун (2) тенгламанинг H− даврий ечимларини индекси 3 га тенг булган H нормал булувчилар учун топайлик. Бундан, F_n группанинг индекси 3 тенг булган ихтичрий нормал булувчиларидан бири куйидаги куринишда булади[3]:
$H = \left\{x = a^{\varepsilon_1} b^{\delta_1} a^{\varepsilon_2} b^{\delta_2} ... a^{\varepsilon_n} b^{\delta_n} / \, \varepsilon_i, \delta_j \in \mathbb{Z}\,,\, n \in \mathbb{N}\right\}$, Бунда (2) куйидаги куринишга келади:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0 = (2n-2)\left(ah_0 + b\right) + \left(ah_1 + b\right) + \left(ah_2 + b\right), \\ h_1 = \left(ah_0 + b\right) + (2n-2)\left(ah_1 + b\right) + \left(ah_2 + b\right), \\ h_2 = \left(ah_0 + b\right) + \left(ah_1 + b\right) + (2n-2)\left(ah_2 + b\right). \end{array} \right. \tag{3}$$

Бу системадан куйидаги теоремага эга буламиз.

Теорема 1. 1) Агар $n \neq \frac{1}{2a}$ 20 $n \neq \frac{1+3a}{2a}$ булса, у холда (3) тенгламалар системаси ягона ечимга эга ва унинг ечимилари

$h_0 = h_1 = h_2 = \frac{2bn}{1-2an}, \quad x \in F_n$, булади.

2) Агар $n = \frac{1}{2a}$ 20 $n \neq \frac{1+3a}{2a}$ бЂлса, у холда (3) тенгламалар системасининг ечими мавжуд эмас.

3) Агар $n \neq \frac{1}{2a}$ 20 $n = \frac{1+3a}{2a}$ бЂлса, у холда (3) тенгламалар системаси чексиз куп ечими эга булади.

Адабиетлар

1. Bollobas B. Modern Graph Theory (Graduate texts in mathematics;184). – Springer-Verlag. – №4. – 1998.

2. Норматов Э.П., Розиков У.А. Описание гармонических функций с применением свойств группового представления дерева Кэли. // Матем. заметки. – Москва, 2006. – Т.79. – №3. – С. 434–444.

3. Жиянбеков Э. Е , Акмалова Р.А. "Эркин группанинг индекси 3 булган нормал кисм группаси". "Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари"илмий анжуман. 1–2 июнь 2021 й., Тошкент, С. 157.