



ABSTRACTS

of the international conference

**MATHEMATICAL ANALYSIS AND ITS
APPLICATIONS IN MODERN
MATHEMATICAL PHYSICS**

PART II

**Samarkand
September 23-24, 2022**

MINISTRY OF HIGHER AND SECONDARY SPECIAL
EDUCATION OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SH.RASHIDOV
MATHEMATICS INSTITUTE OF THE ACADEMY OF SCIENCE OF
UZBEKISTAN

INTERNATIONAL CONFERENCE

MATHEMATICAL ANALYSIS AND ITS
APPLICATIONS IN MODERN MATHEMATICAL
PHYSICS

September 23-24, 2022; Samarkand, Uzbekistan

PART II

SAMARKAND – 2022

UDK 51:517

Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics:
international scientific conference (September 23-24, 2022 y. Samarkand).

Chief Editor Lakaev S.N. – Samarkand, 2022 y.

The collection of abstracts of the reports of the international scientific conference "Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics" contains scientific reports on the following areas: Mathematical analysis, differential equations, mathematical physics, algebra, geometry, numerical mathematics, mathematical modeling, probability theory, mathematical statistics, mathematical engineering and information technologies .

It is intended for specialists in the field of physical and mathematical sciences and information technologies, teachers, doctoral students and undergraduates of universities.

EDITORIAL TEAM:

Chief Editor:

Academician Lakaev S.N.

Members of the editorial board:

Prof. Khuzhayorov B.Kh.

Prof. Abdullaev J.I.

Prof. Khalkhuzhaev A.M.

Prof. Khushvaktov H.A.

Prof. Rasulov T.H

Prof. Muminov Z.E

Responsible for the issue:

Bozorov I.

Boltaev A.

Almuratov F.

Alladustova I.

ORGANIZING COMMITTEE OF THE CONFERENCE

Chairman:

Khalmuradov R.I. – *professor, rector of SamSU (Uzbekistan)*

Vice-chairman:

Soleev A.S. – *professor, vice-rector of SamSU (Uzbekistan)*

Khushvaktov Kh.A. – *DSc, vice-rector of SamSU (Uzbekistan)*

Members of the organizing committee:

Ayupov Sh.A. – *academician of the AS RUz, director of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky (Uzbekistan)*

Lakaev S.N. – *academician of the AS RUz, head of the Department of SamSU (Uzbekistan)*

Alimov Sh.A. – *academician of the AS RUz (Uzbekistan)*

Sadullaev A.S. – *academician of the AS RUz (Uzbekistan)*

Azamov A.A. – *academician of the AS RUz (Uzbekistan)*

Farmonov Sh.K. – *academician of the AS RUz (Uzbekistan)*

Motovilov A.K. – *professor, head of the Sector of the Laboratory of Theoretical Physics named after N.N. Bogolyubov (Russia)*

Makarov K.A. – *professor at the University of Missouri (USA)*

Kurasov P.B. – *professor at the Stockholm University (Sweden)*

Darus M. – *professor at the Kebangsaan University (Malaysia)*

Rakhimov I.S. – *professor at the MARA University of Technology (Malaysia)*

Turmetov B.X. – *professor at the International Kazakh-Turkish University named after H.A. Yassavi (Kazakhstan)*

Kholmatov Sh.Y. – *professor at the University of Vienna (Austria)*

Rozikov U.A. – *professor, deputy director of the at the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky (Uzbekistan)*

Ashurov R.R. – *professor at the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky (Uzbekistan)*

Khalkhuzhaev A.M. – *professor, head of Samarkand branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky (Uzbekistan)*

Akhatov A.R. – *professor, vice-rector of SamSU (Uzbekistan)*

Abdujabborov S.B. – *PhD, vice-rector of SamSU (Uzbekistan)*

Ruzimurodov Kh.Kh. – *dean of the Faculty of Mathematics, SamSU (Uzbekistan)*

Khasanov A.B. – *professor, head of the Department of SamSU (Uzbekistan)*

Khuzhayorov B.Kh. – *professor, head of the Department of SamSU (Uzbekistan)*

Ikromov I.A. – *professor at the Samarkand branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky (Uzbekistan)*

PROGRAM COMMITTEE OF THE CONFERENCE

Chairman:

Khalkhuzhaev A.M. – *professor, head of the Samarkand branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Members of the organizing committee:

Alimov Sh.A. – *academician of the AS RUz*

Ayupov Sh.A. – *academician of the AS RUz, director of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Ashurov R.R. – *professor, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Rozikov U.A. – *professor, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Yuldashev T.K. – *professor, Tashkent State University of Economics*

Khasanov A.B. – *professor, head of the Department of SamSU*

Khuzhayorov B.Kh. – *professor, head of the Department of SamSU*

Ikromov I.A. – *professor, Samarkand branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Imomkulov S.A. – *professor, head of the Urgench branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Muminov M.E. – *professor, SamSU*

Khayotov A.R. – *professor, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Abdullaev J.I. – *professor, SamSU*

Rasulov T.H. – *professor, Bukhara State University*

Kudaybergenov K.K. – *professor, Nukus branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Durdiev D.K. – *professor, head of the Bukhara branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Omirov B.A. – *professor, NUU*

Muminov Z.E. – *professor, TSUE*

Kholmatov Sh.Y. – *PhD, University of Vienna, Austria*

Botirov G.I. – *professor, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Zikirov O.S. – *professor, NUU*

Rahmatullaev M.M. – *professor, head of the Namangan branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Bozorov I.N. – *associate professor, SamSU*

Latipov Sh.M. – *associate professor, SamSU*

Alladustov Sh.U. – *professor, NUU*

Madrakhimov Sh. – *professor, NUU*

Kudaybergenov K.K. – *associate professor, NUU*

Saidov D. – *associate professor, NUU*

SECRETARIAT OF THE CONFERENCE:

PhD. Boltaev A., PhD. Khamidov Sh., PhD. Abdukhakimov S.,
Almuratov F., Alladustova I., Ismoilov G., Azizova M.

ORGANIZER OF THE CONFERENCE:

Samarkand State University named after Sh. Rashidov,
Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky

CONTENTS

SECTION III. NUMERICAL ANALYSIS AND MECHANICS

Azamov S., Nishanova G. Calculation of the coefficients of optimal quadrature formulas in the space $S_2(P_2)$	11
Babaev S.S, Kuvvatov B., Mirzoeva S. Construction natural spline in $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$ space	12
Dalabaev U., Hasanova D. Analysis of Difference Schemes for Differential Equations by the Moved Node Method	13
Hayotov A., Bozarov B. Optimal quadrature formulas for oscillatory integrals in the Sobolev space	15
Khayriev U. The exponentially weighted optimal quadrature formula in the space $\widetilde{W}_2^{(2,1)}$ of periodic functions	17
Khuzhayorov B.Kh., Kholiyarov E.Ch. Determination of Filtration Parameters of a Homogeneous Liquid in Fractured-Porous Media	18
Kuldoshev K. Calculation of the coefficients of optimal quadrature formulas in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$	19
Abdunazarov R. Shturm-Liuvill operatori parametrlarini tiklashda samarali hisoblash algoritmini qurish muammolari	21
Абираев И. М., Исмоилов М.М Теоретико числовые методы для решения одномерные интегральные уравнения Фредгольма второго рода	23
Абираев И. М., Мухторов Б. К Сведение сингулярного интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений	24
Абираев И. М., Тошпулатов С. Приближенное решение одномерного интегрального уравнения с ядром Гильберта теоретика-числовым	26
Абираев И. М. Приближенное решение системы многомерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода методом итерацию	28
Герасимов О.В., Рахматулин Р.Р., Саченков О.А. Автоматизация оценки прочности костей на основе цифрового прототипа	30
Жумаев Ж., Мухаммадова М. Численное моделирование неизотермической струи с помощью однопараметрической модели турбулентности	31
Жураев Г.У., Мусурмонова М.О. Нестационарное вращение абсолютно-жесткого шара в пористо-упругом полупространстве	33
Ишанкулов Т., Фозилов Д. Ш. Продолжение бианалитических функций многих комплексных переменных	34
Маматов А. Р. Алгоритм решения одной игровой задачи со связанными переменными ...	36
Наврузов К., Шарипова Ш.Б., Абдикаримов Н.И., Бегжанов А.Ш. Касательное напряжение сдвига при колебательном течении вязкоупругой несжимаемой жидкости в плоском канале	37
Нормуродов Ч.Б.,Турсунова Б.А Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной спектральным методом	38
Сафаров И. И., Тешаев М. Х., Болтаев З., Ахмедов М. Ш., Жураев Ш. И. Собственные колебания трубопроводов кругового поперечного сечения с внешним трением ...	40
Сулаймонов Ф.У., Абдукодирова М Вычисления поля скоростей фильтрации переноса веществ в цилиндрической двухзонной среде	42
Хаетов А., Курбонназаров А. Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления интегралов Фурье	43
Ходжиев С., Авезов А. Моделирование и численное исследование влияния геометрия сопла на параметры факела	44
Ходжиев С., Авезов А.Х. Численные результаты исследования струи на основе полной системы уравнений Навье-Стокса истекающие из коаксиальной щели	46

Ходжиев С., Салимов Ф., Жамолов У. Численные решения уравнения Бюргерса для вязкого течения	47
Шадиметов Х.М., Далиев Б.С. Алгоритм построения оптимальных квадратурных формул с производными для приближенного вычисления интегралов Абеля в пространстве Соболева	50
Шадиметов Х.М., Тошбоев О.Н. Оптимальная формула для приближенного вычисления слабо сингулярного интеграла	51

SECTION IV. PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

Abdullaev J.I., O'rolov F.R. Panjaradagi ikki zarrachali sistema energiyasining bir ehtimol bilan qabul qiladigan qiymatlari	53
Abdushukurov A., Erisbaev S. Estimation of cumulative hazard function by using of efficient estimator of regression parameter under random censoring from both sides	55
Begmatov A.S., Shadieva Sh.I. Interval akslantirishlari sistemalari uchun markaziy limit teorema	58
Bozorov S. B. A kernel estimates of distribution function under right random censoring	59
Khudoykulova H. The Use of Principal Components Analysis in the Assessment of Regional Development Processes	60
Kudratov Kh., Saydulloyeva Sh. Limit theorem for the critical Galton-Watson branching processes	62
Mansurov D. R. Proporsional intensivlik modeli bahosi uchun muvofiqlik kriteriysi	64
Ostonov Q., Abdusobirova M. Markov zanjirlarining amaliy mazmunli masalalarni yechishga qo'llanilishi	66
Quljonov O'N., Karimov I.T., Saydullayev A.J. Xarakteristik funksiyalar nazariyasining tadbiqlariga oid ba'zi natijalar	69
Ruzieva D.S. Law of large numbers for random fields with values in l_p ($1 \leq p \leq 2$)	71
Sharipov S., Toshqulov H. A central limit theorem for branching branching processes with immigration	73
Абдухакимов С.Х., Абдухакимова М.Г. Орбита критической точки и отображение первого возвращения	74
Гафуров М.У. Обобщенные варианты "r-быстро" сходимости В.Штрассена и их применения	75
Гафуров М.У., Такабаев У.А. Усиление теоремы Чжуна о равномерном законе больших чисел	76
Мамуров И.Н. Предельные распределения крайних членов вариационного ряда при случайном объеме выборки	77
Сайфуллоева Г.С. Проверка гипотезы о справедливости модели пропорциональных интенсивностей	79
Хамдамов И. М. Предельные теоремы для функционалов от случайных выпуклых оболочек в единичном круге	81
Шарипов О.Ш., Кушмуродов А.А. Усиленный закон больших чисел Марцинкевича–Зигмунда для слабо зависимых случайных величин со значениями в банаховых пространствах	83

SECTION V. ALGEBRA AND GEOMETRY

Abdullayev J.I., Ibragimov H.H. Katetlari ayirmasi bir xil bo'lgan Pifagor sonlarini topish usullari	84
Allambergenov A.A. 2-local derivations of Okubo algebra	86
Aslonov J. Lie algebra of solenoidal vector fields	87
Asrorov D. The matrix form of the operator Rota-Baxter	88
Beshimov R., Safarova D. P -precompact space and its hyperspace	89

Boltayev Sh.A., Ibragimov M.M. On idempotent elements of a three dimension genetic algebra	91
Iskenderov A.S., Kurbanbaev T.K. Almost inner derivations of solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length	93
Juraboyev S.S. Equivalence of Paths with respect to the Action of the Group Complex Representation of $Sp(n)$	95
Khadjiev D., Beshimov G.R. Complete systems of invariants of parametric topological figures in the two-dimensional Euclidean space	96
Kudaybergenov K. Derivations on algebras of measurable functions	97
Mukhamadiev F., Sadullaev A., Meyliev Sh. Some Network-Type Properties of the Space of Permutation Degree	97
Narmanov A., Diyarov B. On the geometry of curvature lines	98
Normatov Z., Abdumutalov J. The second Calogero–Moser space over $\mathbb{Q}_p$	100
Normatov Z., Nuritdinova M. An algorithm to decide whether an endomorphism is a tame automorphism	102
Paluanov S.A. , Alauadinov A.K. Lokal derivations of the Schrödinger algebra	103
Rasulova F. The example of Sasakian manifold	105
Safarov T. Saddle surfaces and solutions of the Hyperbolic equation in Galilean space	107
Seypullaev J., Menglibaev N. Local and 2-local derivations of complex spin-factors	108
Sharipov X. On the geometry of submersion	110
Shukrulloev B.R., Xo‘jamqulov B.T. Olti o‘lchamli filiform Li algebralarida transposed Poisson algebralar tuzilmalari	112
Tursunov D. $n = 8$ dimensional Filiform Leibniz Algebras and their basis	114
Yusupov B.B. Local automorphism on simple Leibniz algebras	115
Yusupov B.B. , Yuldashev I.G. Local derivations of rank one solvable Lie algebra with a filiform nilradical	117
Артикбаев А., Ибодуллаева Н. Геометрический смысл условной и обобщенной внешней кривизны поверхности	119
Аюпов Ш.А., Жураев Т.Ф. О шейповых и C –свойствах подпространства $P_f(X)$ пространства вероятностных мер для бесконечного компакта X	119
Брюно А.Д., Азимов А.А. Локальная параметризация алгебраического многообразия вблизи его особых точек	121
Брюно А.Д., Азимов А.А. Вычисление унимодулярных матриц степенных преобразований	122
Буриев Т.Э., Хасанова Д.В. Некоторые операции над сверхгруппами	122
Давлетов Д.Э., Жувонов К.Р. О некоторых бесконечномерных многообразиях являющиеся подпространствами пространства полных сцепленных систем	124
Джумамуратов Р.Т. Топологии на центральных расширениях алгебр фон Неймана	126
Зайтов А.А., Эшкобилова Д.Т. Субметризуемость и пространство идемпотентных вероятностных мер	127
Касимов О.Ю. Геометрия сингулярных римановых слоений в евклидовом пространстве	128
Курбонов Э., Ботиров Д. Внешняя геометрия поверхности в R_3^1	130
Курбонов Э.К., Урокова Ю.С. Геодезические линии циклических поверхностей в R_3^1	131
Мамадалиев Н.К., Манасыпова Р.З. О сохранении плотности пространства при действии функтора $I_n(X)$	132
Султанов Б.М., Атабаев М.У. Класс поверхностей рассматриваемых в Галилеевом пространстве	133
Шамшиев А. Основные геометрические характеристики многогранников	136

SECTION VI. MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION TECHNOLOGIES

Amirali Baniyasadi Algorithm vs Data: who wins the Super Resolution Game?	138
--	-----

Aripov M., Matyakubov A.S., Khasanov J.O. To the qualitative properties of self-similar solutions of parabolic system not in divergence form with in variable density	138
Bakoyev M., Umarova Sh. Student's digital trajectory: E-learning analysis with LMS	140
Chupanov A., Seytov A., Ruzmetov Q., Esonturdiyev M., Haydarova R., Xonimqulov B Models Of Forming Surface Water Resources In The Republic Of Uzbekistan	142
Djaykov G., Pirimbetov A. Numerical solution of the problem of integral geometry on a family of hyperbolic curves	144
Djaykov G., Uteuliev N., Seidullaev A. Reconstruction of a function from their integral data on a family of parabolas	145
Elmurodov A. N. Note on a two-species predator-prey model with two free boundaries	145
Eshmamatova D.B., Yusupov F. A. Dynamics of trajectories of compositions of some Lotka-Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex	147
Eshmamatova D.B. Discrete models of viral diseases transmitted by airborne capillaries ...	149
Eshmamatova D. B., Tadzhieva M. A., Ganikhodzhaev R. N. Behavior dynamics of the Lotka-Volterra mapping composition, with transitive tournaments describing models of sexually transmitted diseases	152
Fayziev B. Mathematical model of suspension filtration in porous media	154
Fazilov Sh.Kh., Abdieva Kh.S, Sobirova G.D Fuzzy Divergence Method for Medical Image Thresholding	155
Fazilov Sh.Kh., Abdieva Kh.S., Sobirova G.D Structured Support Vector Machine (SSVM) optimization problem for segmentation mammogram images	156
Fazilov Sh.Kh., Yusupov O.R., Eshonqulov E.Sh Superpikselli segmentlash usuli asosida giperspektral tasvirlarda tasniflash	158
Fazilov Sh.Kh., Yusupov O.R., Eshonqulov E.Sh Klaster tahlilning ansambli yondashuvi asosida giperspektral tasvirlarni segmentlash	159
Ibragimov A., Khamroeva D. On a method for solving a generalized eigenvalue problem under interval uncertainty	162
Ibragimov A., Mamurov T. Newton-Raphson method for calculation of steady state modes of electric systems under conditions of interval data uncertainty	164
Jumanov I., Kholmonov S Identification of micro-objects based on the use of unique properties of images and neural networks	166
Jumanov I.I, Safarov R Mechanisms of using excessive information structure of images in recognition of micro-objects	167
Khudaybergenov K., Saidov D. Adaptive activation functions in multiple weight neural networks	168
Madrakhimov Sh., Makharov K. Search for hidden patterns in the diagnosis of aging index	170
Mamatov A., Nurumova A. Asymptotic property and localization of solutions of mutual cross-diffusion systems	172
Marakhimov A., Khudaybergenov K. Choosing the structure of convolutional neural networks for face recognition	173
Panahov G., Abbasov E., Sultanov B. Capillary instability control under hydrodynamic impact on the reservoir	176
Saidov D., Khudaybergenov K. Using the random forest algorithm in different type feature space	177
Salaev U. Uzbek word game modeling using character level n-gram and statistics	178
Samandarov B.S. Dynamic algorithm of automated educational systems account objects classification	179
Sattorov E., Ermamatova Z., Israilov S. Carleman's formula for the solutions of the Poisson equation	182
Seytov Sh.J. Kutlumuratov R.R. Dynamics of some two-dimensional cubic mappings	184
Urazboev G. U, Baltaeva I. I, Shamuratov E.A. Integration of the loaded modified KdV equation with source	185

Uteuliev N., Djaykov G., Seidullaev A Regularization of the problem of integral geometry on families of semicircles and parabolas	186
Акифьев К.Н., Саченков О.А., Стаценко Е.О., Смирнова В.В., Большаков П.В., Прунов В.В Оценка структурных свойств материалов при нагружении	188
Арипов М.М., Нигманова Д.Б Численное моделирование диффузионных процессов в двухкомпонентных нелинейных средах с переменной плотностью и источником	189
Большаков П.В., Харин Н.В., Акифьев К.Н., Рудый Е.А., Саченков О.А. Новые подходы к проектированию изделий для аддитивного производства.	191
Дакинова М.В., Смирнова В.В., Прунов В.В., Балтина Т.В., Саченков О.А. Методы обработки и анализа данных стабиллометрии	192
Иванова А.Д., Харин Н.В., Вансков П.С., Хаматнурова Р.А., Саченков О.А. Моделирование биомеханических систем на основе спайковых нейронных сетей	194
Игнатьев Н.А., Рахимова М.А., Рахимов Б.Б. Вычисление индекса здоровья больных COVID-19 в собственном признаковом пространстве объекта	195
Каххоров А.Э., Соатов У.А., Хусанов Д.Х. Устойчивость нелинейной модели Лотки-Вольтерра с запаздыванием	196
Каюмов Ш., Арзикулов Г. П., Марданов А. П., Хаитов Т. О., Бекчанов Ш. Э. Построение многопараметрической математической модели фильтрации нелинейных флюидов в двухслойной пористой среде.	198
Маматкабилов А. Х. Об устойчивости криволинейного движения автомобиля с учетом упругости и деформируемости шин	200
Мансимов К. Б., Алиева С.Т. Об одной задаче оптимального управления дискретными нелинейными уравнениями дробного порядка с функциональными ограничениями типа равенств и неравенств	202
Матякубов А.С., Раупов Д.Р., Нортиллаев К.Н. Оценка для blow-up решения нелинейного параболического уравнения нелинейного вида с граничными условиями	203
Махмудов Ж.М., Усмонов А.И., Кулжонов Ж.Б. Численное решение задачи аномальной фильтрации и переноса вещества в пористой среде	205
Наврузов К., Шарипова Ш.Б. , Абдикаримов Н.И Математическое моделирование гидродинамического сопротивления в колебательном потоке вязкоупругой жидкости	207
Полатов А.М., Икрамов А.М Концентрация напряжений в волокнистой пластине с упрочняющими отверстиями	208
Kabulov A., Baizhumanov A., Saymanov I., Berdimurodov M. Method logical recognition systems by solving systems of Boolean equations	211
Сабиржанов Т. М Механика масалаларини математик моделлаштириш ва MAPLE дастурида ечиш	212
Семенова Е.В. , Ахметзянова А.И., Шарафутдинова К. Р., Саченков О. А. Представление внутренней архитектуры биологических объектов через аппроксимирующий тензор структуры	214
Смирнова В.В., Семенова Е.В., Балтина Т.В., Саченков О.А., Гордиенко К.В Методы автоматизации и объективизации обработки гистологических данных	215
Харин Н.В., Большаков П.В., Саченков О.А., Герасимов О.В. Определение механических свойств костного органа по данным компьютерной томографии	216
Хужаёров Б. Х., Холияров Э. Ч., Хайдаров О. Ш. Обратная задача переноса загрязняющих веществ в пористых средах	217
Эсонтурдиев М.Н., Сейтов А., Хайдарова Р, Эргашев И Алгоритм расчета потребности водных ресурсов участков магистрального канала	219
Ядгаров Т.Г., Аликулов А.Х. Об одном решении устранения проблемы в кредитной системе обучения	220

SECTION III. NUMERICAL ANALYSIS AND MECHANICS

Calculation of the coefficients of optimal quadrature formulas in the space $S_2(P_2)$

¹Azamov S., ²Nishanova G.

¹ *Tashkent state transport university, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: azamovs@mail.ru

² *Tashkent state transport university, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: nishanovagulnoza1977@gmail.com

We consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(x_\beta) \quad (1)$$

with the error functional

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - x_\beta) \quad (2)$$

where C_β are the coefficients and x_β are the nodes of formula (1), $x_\beta \in [0, 1]$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the indicator of the interval $[0, 1]$, $\delta(x)$ is Dirac's delta-function, a function φ belongs to the Hilbert space $S_2(P_2)$. The norm of functions in this space is defined by the following equality

$$\|\varphi(x)|_{S_2(P_2)}\| = \left\{ \int_0^1 (\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x))^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

The error of the quadrature formula (1) is the difference

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(x_\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx. \quad (4)$$

The error of the formula (1) defines a linear functional in $S_2^*(P_2)$, where $S_2^*(P_2)$ is the conjugate space to the space $S_2(P_2)$.

By Cauchy-Schwartz inequality

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\varphi|_{S_2(P_2)}\| \cdot \|\ell|_{S_2^*(P_2)}\|$$

the error (4) of formula (1) is estimated with the help of the norm

$$\|\ell|_{S_2(P_2)^*}\| = \sup_{\|\varphi|_{S_2(P_2)}\|=1} |(\ell, \varphi)|.$$

of the error functional (2). Consequently, estimation of the error of the quadrature formula (1) on functions of the space $S_2(P_2)$ is reduced to finding the norm of the error functional ℓ in the conjugate space $S_2^*(P_2)$.

The main aim of the present paper is to solve the Sard problem in the space $S_2(P_2)$ using S.L.Sobolev's method [1-4] for any number $N + 1$ of the nodes x_β , i.e. finding the coefficients C_β satisfying the following equality

$$\|\mathring{\ell}|_{S_2^*(P_2)}\| = \inf_{C_\beta} \|\ell|_{S_2^*(P_2)}\|. \quad (5)$$

Thus, in order to construct an optimal quadrature formula in the sense of Sard in the space $S_2(P_2)$ we need consequently to solve the following problems.

Problem 1. Find the norm of the error functional ℓ of the quadrature formula (1).

Problem 2. Find the coefficients C_β which satisfy equality (5) when the nodes x_β are fixed. In the present work we solve Problem 2 and for optimal coefficients we prove the following.

Theorem 1. The coefficients of optimal quadrature formulas in the sense of Sard of the form (1) in the space $S_2(P_2)$ have the following form

$$\begin{aligned} C_0 &= e^{-1} + \frac{4(he^h - he^{h-1} - e^h + 1)}{e^{2h} + 2he^h - 1} + \frac{e^{2h} - 2he^h - 1}{he^h(e^{2h} + 2he^h - 1)(\lambda_1^N + 1)} \times \\ &\quad \times \left(he^h - he^{h-1}\lambda_1^N - e^h + \lambda_1 + he^h\lambda_1^N - he^{h-1} - \lambda_1^N e^h + \lambda_1^{N-1} \right), \\ C_\beta &= \frac{4(e^h - 1)^2}{e^{2h} + 2he^h - 1} + \frac{(e^{2h} - 2he^h - 1)((e^h - \lambda_1)^2\lambda_1^\beta + (\lambda_1 e^h - 1)^2\lambda_1^N)}{h\lambda_1 e^h(e^{2h} + 2he^h - 1)(\lambda_1^N + 1)}, \beta = \overline{1, N-1}, \\ C_N &= e^1 - 2 + \frac{4(he^{h+1} - he^h - e^{2h} + e^h)}{e^{2h} + 2he^h - 1} + \frac{e^{2h} - 2he^h - 1}{h(e^{2h} + 2he^h - 1)(\lambda_1^N + 1)} \times \\ &\quad \times \left(he^1 - h\lambda_1^N - e^h\lambda_1^{N-1} + \lambda_1^N + he^1\lambda_1^N - h - \lambda_1 e^h + 1 \right), \end{aligned}$$

here $|\lambda_1| < 1$.

References

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул.- М.: Наука, 1974,- 808 с.
2. *Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Azamov S.S.* Optimal quadrature formula in $K_2(P_2)$ space, Applied Numerical Mathematics. 62 (2012) 1893-1909.
3. *Kuldoshev H. M., Azamov S. S.* Calculation of the coefficients of optimal quadrature formulas in space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$, AIP Conference Proceedings, 2021, v.2365, 020034:1–15.
4. *Azamov S.S.* An Optimal Quadrature Formula in $K_2(P_3)$ Space, Computational models and technologies (CMT). -2365, 020024 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0057078>.

Construction natural spline in $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$ space

^{1,2}Babaev S., ²Kuvvatov B., ² Mirzoeva S.

V.I.Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 46, University str., Tashkent 100170, Uzbekistan,
email:bssamandar@gmail.com.

Bukhara State University, 11, M.Ikbol str., Bukhara 200114, Uzbekistan.

We consider a natural spline the following form

$$S_2(x) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta G_2(x - x_\beta) + ae^{-\sigma x} + b. \quad (1)$$

Here, C_β and $x_\beta (\in [0, 1])$ are the coefficients and the nodes of the interpolation formula (1), respectively.

By $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)$ we denote the class of all functions φ defined on $[0, 1]$ which possess an absolutely continuous $(m - 1)$ th derivative on $[0, 1]$ and whose m -th derivative is in $L_2(0, 1)$. The class $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)$ under the inner product

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}} = \int_0^1 (\varphi''(x) + \sigma\varphi'(x)) (\psi''(x) + \sigma\psi'(x)) dx$$

is a Hilbert space. Here we consider the norm

$$\|\varphi\|_{W_{2,\sigma}^{(2,1)}} = \left\{ \int_0^1 (\varphi'' + \sigma\varphi')^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

here $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$. We got expressions for C_β

$$\begin{aligned} C_0 &= h \left[A_1 M_1 + A_1 \lambda_1^N N_1 + e^{\sigma h} (a^+ (e^{\sigma h} - 1) + \varphi(0)(1 - P) \right. \\ &\quad \left. + \varphi(h)) - \varphi(0)(1 + e^{\sigma h})^2 + \frac{A_1}{\lambda_1} \sum_{\gamma=0}^N \lambda_1^\gamma \varphi(h\gamma) \right], \\ C_\beta &= h \left[A_1 \lambda_1^\beta M_1 + A_1 \lambda_1^{N-\beta} N_1 + e^{\sigma h} (\varphi(h(\beta - 1)) + \varphi(h(\beta + 1)) - P\varphi(h\beta)) \right. \\ &\quad \left. - \varphi(h\beta)(1 + e^{\sigma h})^2 + \frac{A_1}{\lambda_1} \sum_{\gamma=0}^N \lambda_1^{|\beta-\gamma|} \varphi(h\gamma) \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \\ C_N &= h \left[A_1 \lambda_1^N M_1 + A_1 N_1 + e^{\sigma h} (\varphi(1 - h) - P\varphi(1) + a^- e^{-\sigma} (e^{-\sigma h} - 1) + \varphi(1)) \right. \\ &\quad \left. - \varphi(1)(1 + e^{\sigma h})^2 + A_1 \lambda_1^{N-1} \sum_{\gamma=0}^N \lambda_1^{-\gamma} \varphi(h\gamma) \right], \end{aligned}$$

here A_1 , M_1 , N_1 , λ_1 , P , a^- and a^+ are known quantities.

Analysis of Difference Schemes for Differential Equations by the Moved Node Method

¹Dalabaev U., ² Hasanova D.

¹ *University of World Economy and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan*,
e-mail: udalabaev@mail.ru

² *University of World Economy and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan*,
e-mail: hasanovadilfuza@inbox.ru

The methods of numerical solution of differential equations are based on the transformation of a differential problem into a difference problem, called approximation. In simple words: to solve differential equations, you need to know the approximation of differential equations. Approximation of a differential equation by a difference - approximation of a differential equation by a system of algebraic equations with respect to the values of the desired functions on some grid. On the basis of the movable node, an approximate analytical expression for the difference solution of the differential problem [1] was obtained. This paper describes the application of the moving nodes method to the calculation of the approximation error. When a two-point boundary value problem is solved by difference methods, the question of the degree of approximation usually appears. For the closeness of the exact and approximation of the solution, and the quality of the difference scheme are evaluated based on the degree of this parameter [2]. With such an analysis, other parameters (the coefficients of the differential equation) are not explicitly involved in the approximation error expression. Obtaining an explicit expression for the approximation error makes it possible to analyse it.

Let we have a differential equation

$$Lu = f, \tag{1}$$

where L is a differential operator, f is a known function, and u is an unknown function. (1) the equation is considered in some domain D with appropriate boundary conditions. The differential equation (1) is replaced by the difference equation [2]:

$$L_h u_h = f_h, \tag{2}$$

where L_h is the difference operator, u_h is the unknown grid function, and f_h is the approximation of the function f at the grid nodes.

Usually, the approximation error is given as [2]:

$$Q_h = L_h[u]_h - f_h, \quad (3)$$

where $[u]_h$ is the exact solution of (1) at the grid nodes. Using the Taylor series, from (3) one obtains that, $Q_h = O(h^m)$, where h is the grid step and m is the degree of approximation.

You can determine an explicit approximation error if you use the method of a moving node, which allows you to extend the definition to the entire area D . This allows you to introduce an approximation error like this:

$$R_h = L_h u_h - f_h, \quad (4)$$

Here u_h is a predefined continuous function by means of a moveable node.

The method of moving nodes allows the calculation of an explicit expression for the approximation error when replacing differential equations with difference schemes. Based on the method of moving nodes, it is possible to construct a differential analogue of the difference scheme. The differential analogue of the difference scheme in simple cases allows the construction of an exact difference scheme

In particular, there is a conclusion.

Theorem 1. *Given a two-point boundary value problem*

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f^*(x), \quad u(0) = u_0, u(1) = u_1,$$

and $f^*(x)$ can be represented as

$$f^*(x) = -\frac{1}{2}f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)(x_i - x_{i-1}) - f'(x_i)(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + f(x_i),$$

then the difference scheme

$$\frac{2}{x_{i+1} - x_{i-1}} \left(\frac{U_{i+1} - U_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{U_i - U_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right) = f(x_i), i = 1, 2, \dots, N-1$$

gives a grid solution coinciding with the exact solution at the nodal points.

Based on the moving node technique, it is possible to build accurate circuits. There is a conclusion.

Theorem 2. *The differential equation*

$$\left(\epsilon + \frac{x}{2} \right) u'' + u' = 0, \quad u(0) = u_0, u(1) = u_1,$$

is exactly approximated by the scheme

$$2\epsilon \left(\frac{U_1 - U}{1-x} - \frac{U - U_0}{x} \right) + \frac{U_1 - U}{1-x} = 0.$$

In the convection-diffusion equations, the issue of approximating the convective term is the dominant factor. In the concept of a roaming node, various single- and multi-point schemes are recommended [3-6]. Here we also consider a special kind of approximation of derivatives based on a moving node.

References

1. Dalabaev Umuridin. Moving Node method, Generics Publishing, 2022.
2. Samarskiy, A. A. Introduction to the theory of difference schemes, Nauka, 1971.

3. *Rasulov Abdujabar, Dalabaev Umurdin.* Computational technology for improving the quality of difference schemes based on moving nodes , Journal of Physics: Conference Series, 1860, 2021, 012026 IOP Publishing.
4. *Dalabaev Umurdin.* Increasing the Accuracy of the Difference Scheme Using the Richardson Extrapolation Based on the Movable Node Method. Academic Journal of Applied Mathematical Sciences. ISSN(e): (2020), pp 2415-2188
5. *Dalabaev Umurdin.* Difference-Analytical Method Of The One-Dimensional Convection-Diffusion equation IJISSET – International Journal of Innovative Science. Engineering and Technology. Vol. 3. Issue 1. – Индия, 2016. January. ISSN 2348 – 7968. – pp. 234-239
6. *Dalabaev Umurdin.* Computing Technology of a Method of Control Volume for Obtaining of the Approximate Analytical Solution to One-Dimensional Convection-Diffusion Problems. Open Access Library Journal, 2018. <https://doi.org/10.4236/oalib.1104962> (2018).

Optimal quadrature formulas for oscillatory integrals in the Sobolev space

^{1,2} Hayotov A., ^{1,3} Bozarov B.

¹ *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Uzbekistan,*

² *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,*

³ *Ferghana Polytechnical Institute, Ferghana, Uzbekistan),*

e-mail: hayotov@mail.ru, b.bozarov@mail.ru, b.bozarov@ferpi.uz

Methods based on the Fourier transform are virtually used in many areas of engineering and science. And it is known that, one of the most important and interesting discoveries in mathematics is that many math functions can be approximated by a series of sinusoids, called Fourier series. Furthermore, we know that the Fourier coefficients

$$F_s(\omega) = \int_0^1 f(t) \sin(2\pi\omega t) dt, \quad F_c(\omega) = \int_0^1 f(t) \cos(2\pi\omega t) dt$$

are strongly oscillating integrals for sufficiently large values of ω . Moreover, these weighted integrals can be applied to reconstruct the X-ray Computed Tomography images [1,2]. It should be noted that standard methods are not suitable for numerical calculation of these integrals. Therefore, it is necessary to develop special methods for approximate calculation of such integrals. It should be noted that one of the first numerical integration formula for the integral

$$I[f, \omega] = \int_a^b e^{2\pi i \omega x} f(x) dx,$$

The present work is devoted to numerical calculation of the integrals $F_s(\omega)$ and $F_c(\omega)$ with high accuracy.

For this here in the space $L_2^{(m)}(0, 1)$, we consider quadrature formulas of the forms

$$\int_0^1 \sin(2\pi\omega x) \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_s[\beta] \varphi[\beta] \quad (1)$$

and

$$\int_0^1 \cos(2\pi\omega x) \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_c[\beta] \varphi[\beta], \quad (2)$$

where $C_s[\beta]$ and $C_c[\beta]$ are coefficients, $[\beta] = h\beta$, $h = \frac{1}{N}$, N is a natural number, $\omega \in \mathbb{R}$ and $\omega \neq 0$. $L_2^{(m)}(0, 1)$ is the Sobolev space of function φ which are square integrable with m -th generalized

derivative and equipped with the norm

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m)}(0,1)} = \left(\int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) \right)^2 dx \right)^{1/2}.$$

In the present paper, we give the coefficients for optimal quadrature formulas of the form (1) and (2).

The following theorems hold.

Theorem 1. The optimal quadrature formulas in the sense of Sard of the form (2) in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ when $\omega \in \mathbb{R}$ and $\omega h \notin \mathbb{Z}$ have the coefficients with the following analytic expressions

$$\begin{aligned} \dot{C}_s[0] &= h \left[\frac{1}{2\pi\omega h} - K_{m,\omega} \frac{\cos(\pi\omega h)}{2\sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k}q_k - n_{s,k}q_k^N}{q_k - 1} \right], \\ \dot{C}_s[\beta] &= h \left[K_{m,\omega} \sin(2\pi\omega h\beta) + \sum_{k=1}^{m-1} \left(m_{s,k}q_k^\beta + n_{s,k}q_k^{N-\beta} \right) \right], \beta = \overline{1, N-1}, \\ \dot{C}_s[N] &= h \left[-\frac{\cos(2\pi\omega)}{2\pi\omega h} + K_{m,\omega} \frac{\cos(2\pi\omega - \pi\omega h)}{2\sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{-m_{s,k}q_k^N + n_{s,k}q_k}{q_k - 1} \right], \end{aligned}$$

where

$$K_{m,\omega} = \left(\frac{\sin(\pi\omega h)}{\pi\omega h} \right)^{2m} \frac{(2m-1)!}{2 \sum_{k=0}^{m-2} a_{k,2m-2} \cos(2\pi\omega h(m-1-k)) + a_{m-1,2m-2}},$$

q_k are the roots of the Euler-Frobenius polynomial $E_{2m-2}(x)$ with $|q_k| < 1$, $a_{k,\alpha}$ is k -th coefficients of the Euler-Frobenius polynomial of degree α , $m_{s,k}$ and $n_{s,k}$ satisfy the system of linear equations

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k}q_k - (-1)^j n_{s,k}q_k^{N+1}}{(q_k - 1)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) &= -\frac{(-1)^j j! \cos(\frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}} \\ &\quad - \frac{(1 + (-1)^j) K_{m,\omega} e^{2\pi i \omega h}}{2i(e^{2\pi i \omega h} - 1)^{j+1}} E_{j-1}(e^{2\pi i \omega h}), j = \overline{1, m-1}, \\ \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{s,k}q_k^{N+1} - (-1)^j n_{s,k}q_k}{(1 - q_k)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) &= \frac{j! \cos(2\pi\omega + \frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}} \\ &\quad - \frac{(e^{2\pi i \omega} + (-1)^j e^{-2\pi i \omega}) K_{m,\omega} e^{2\pi i \omega h}}{2i(1 - e^{2\pi i \omega h})^{j+1}} E_{j-1}(e^{2\pi i \omega h}), j = \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

Theorem 2. The optimal quadrature formulas in the sense of Sard of the form (2) in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ when $\omega \in \mathbb{R}$ and $\omega h \notin \mathbb{Z}$ have the coefficients with following analytical expressions

$$\begin{aligned} \dot{C}_c[0] &= h \left(\frac{K_{m,\omega}}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k}q_k - n_{c,k}q_k^N}{q_k - 1} \right), \\ \dot{C}_c[\beta] &= h \left(K_{m,\omega} \cos(2\pi\omega h\beta) + \sum_{k=1}^{m-1} \left(m_{c,k}q_k^\beta + n_{c,k}q_k^{N-\beta} \right) \right), \beta = \overline{1, N-1}, \\ \dot{C}_c[N] &= h \left(-\frac{\sin(2\pi\omega)}{2\pi\omega h} - K_{m,\omega} \frac{\sin(2\pi\omega - \pi\omega h)}{2\sin(\pi\omega h)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{-m_{c,k}q_k^N + n_{c,k}q_k}{q_k - 1} \right), \end{aligned}$$

where $m_{c,k}$ and $n_{c,k}$ satisfy the following system of linear equations

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k}q_k - (-1)^j n_{c,k}q_k^{N+1}}{(q_k - 1)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) = \frac{(-1)^j j! \sin(\frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{(1-(-1)^j)K_{m,\omega}e^{2\pi i\omega h}}{2(e^{2\pi i\omega h}-1)^{j+1}}E_{j-1}(e^{2\pi i\omega h}), j = \overline{1, m-1}, \\
 & \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m_{c,k}q_k^{N+1} - (-1)^j n_{c,k}q_k}{(1-q_k)^{j+1}} E_{j-1}(q_k) = -\frac{j! \sin(2\pi\omega + \frac{\pi j}{2})}{(2\pi\omega h)^{j+1}} \\
 & -\frac{(e^{2\pi i\omega} - (-1)^j e^{-2\pi i\omega})K_{m,\omega}e^{2\pi i\omega h}}{2(1-e^{2\pi i\omega h})^{j+1}} E_{j-1}(e^{2\pi i\omega h}), j = \overline{1, m-1}.
 \end{aligned}$$

q_k are the roots of the Euler-Frobenius polynomial $E_{2m-2}(x)$ with $|q_k| < 1$, $a_{k,\alpha}$ is k -th coefficient of the Euler-Frobenius polynomial of degree α , $K_{m,\omega}$ is defined in Theorem 1.

Multiplying both sides of the approximate equality (1) by i (where $i^2 = -1$) and adding to the left and right-hand sides of the approximate equality (2), respectively, we get the quadrature formula of the following form

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi[\beta]. \quad (3)$$

It should be noted that the construction of optimal quadrature formulas of the form (3) in the space $L_2^{(m)}$ was solved in [2]. The coefficients of the optimal quadrature formulas in the form (2) can be also defined as follows

$$\mathring{C}[\beta] = \mathring{C}_c[\beta] + \mathfrak{B}\mathring{C}_s[\beta], \quad \beta = 0, 1, \dots, N,$$

where the optimal coefficients $\mathring{C}_s[\beta]$ and $\mathring{C}_c[\beta]$ are given in Theorems 1 – 2.

Thus, from the results of the present work one can get the results on optimal quadrature formulas of the form (3) of the work [2] with more simplified system of linear equations for determining the optimal coefficients.

References

1. A. R. Hayotov, S. Jeon, C.-O. Lee. On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $L_2^{(1)}$. Journal of Computational and Applied Mathematics, 372, 112713, (2020).
2. A. R. Hayotov, S. Jeon and Kh.M. Shadimetov. Application of optimal quadrature formulas for reconstruction of CT images. Journal of Computational and Applied Mathematics, 388, 113313, (2021).

The exponentially weighted optimal quadrature formula in the space $\widetilde{W}_2^{(2,1)}$ of periodic functions Khayriev U.

V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Uzbekistan,
e-mail: khayrievu@gmail.com.

We consider a quadrature formula of the following form

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^N C_k \varphi(hk), \quad (1)$$

where $\varphi(x) \in \widetilde{W}_2^{(2,1)}(0, 1]$, C_k are coefficients of the quadrature formula and $N \in \mathbb{N}$, $h = 1/N$.

We denote by $\widetilde{W}_2^{(2,1)}(0, 1]$ the subspace of $W_2^{(2,1)}(0, 1]$ [1,2] consisting of real-valued, 1-periodic functions (see [1] for details).

This space under the pseudo-inner product

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\widetilde{W}_2^{(2,1)}} = \int_0^1 (\varphi''(x) + \varphi'(x)) (\bar{\psi}''(x) + \bar{\psi}'(x)) dx,$$

where $\bar{\psi}$ is the complex conjugate to the function ψ .

The error of quadrature formula (1) is the following difference

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^N C_k \varphi(hk),$$

and the corresponding error functional is

$$\ell(x) = e^{2\pi i \omega x} - \sum_{k=1}^N C_k \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta(x - hk - \beta), \quad (2)$$

where δ is Dirac's delta-function and $\varphi \in \widetilde{W}_2^{(2,1)}$.

The problem of constructing optimal quadrature formulas in the space $\widetilde{W}_2^{(2,1)}$ is calculation of the following quantity:

$$\|\ell\|_{\widetilde{W}_2^{(2,1)*}} = \inf_{C_k} \sup_{\varphi, \|\varphi\|_{\widetilde{W}_2^{(2,1)}} \neq 0} \frac{|(\ell, \varphi)|}{\|\varphi\|}.$$

The main result is:

Theorem 1. *The following formulas are valid for the optimal coefficients of the quadrature formula (1) with the error functional (2)*

$$\dot{C}_k = \frac{4}{(2\pi\omega)^4 + (2\pi\omega)^2} \left[\frac{h}{\sin^2 \pi\omega h} - \frac{2(e^{2h} - 1)}{e^{2h} + 1 - 2e^h \cos 2\pi\omega h} \right]^{-1} \cdot e^{2\pi i \omega h k},$$

for $k = 1, 2, \dots, N$.

References

1. *U.N. Khayriev*, Construction of the exponentially weighted optimal quadrature formula in a Hilbert space of periodic functions, Problems of computational and applied mathematics, Tashkent 2022, issue 4, (accepted).
2. *S.S. Babaev, A.R. Hayotov and U.N. Khayriev* On an optimal quadrature formula for approximation of Fourier integrals in the space $W_2^{(1,0)}$, Uzbek Mathematical Journal, 2020, no.2, value 3, pp. 23–36.

Determination of Filtration Parameters of a Homogeneous Liquid in Fractured-Porous Media

¹Khuzhayorov B.Kh., ²Kholiyarov E.Ch.

¹ Samarkand State University, University blv, 15, Samarkand, 140100, Uzbekistan,
e-mail: b.khuzhayorov@mail.ru

² Termez State Pedagogical Institute, Islam Karimov street 288, Termez, Uzbekistan,
e-mail: e.kholiyarov@mail.ru

The theory of filtration of homogeneous liquids in fractured-porous media (FPM) was developed in [1, 2]. In [3, 4], models of relaxation filtration of homogeneous liquids in FPM were derived. The systems of filtration equations in the FPM in the one-dimensional plane-parallel case have the form [1, 2]:

$$\begin{cases} \beta_1^* \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{k_1}{\mu} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \frac{\alpha_0}{\mu} (p_2 - p_1), \\ \beta_2^* \frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{k_2}{\mu} \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} - \frac{\alpha_0}{\mu} (p_2 - p_1), \end{cases} \quad (1)$$

where $\beta_l^* = \beta_{cl} + m_{0l}\beta_f$, α_0 is the flow coefficient characterizing the exchange of fluid between fractures and porous blocks; k_l is permeability, m^2 ; m_{0l} is porosity at $p_l = p_0$; p_l is pressure, MPa; β_f is fluid compressibility factor, MPa^{-1} ; β_{cl} is medium compressibility factor, MPa^{-1} ; μ is fluid viscosity, index $l=1$ corresponds to cracks, $l=2$ is porous blocks.

The initial and boundary conditions of the system of equations (1) are set as follows

$$p_1(0, x) = p_2(0, x) = p_0, \quad p_0 = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2)$$

$$-\frac{k_1}{\mu} \frac{\partial p_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = v_0 = \text{const}, \quad p_1(t, L) = p_0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$-\frac{k_2}{\mu} \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = v_0 = \text{const}, \quad p_2(t, L) = p_0, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

where v_0 is speed filtration, m/s.

Additionally, we know the pressure change in the well:

$$p_1(t, 0) = z(t). \quad (5)$$

The solution of the inverse problem (1) - (5) for determining the flow coefficients α_0 , fracture permeability k_1 and porous blocks permeability k_2 , leads to minimizing the discrepancy functional

$$J(\alpha_0, k_1, k_2) = \int_0^T [p_1(t, 0) - z(t)]^2 dt, \quad (6)$$

where $z(t)$ are the observed values of the bottom hole pressure, $p_1(t, 0)$ are the calculated values of the bottom hole pressure.

Results. In this work, the inverse problem of determining the flow parameters and filtration permeability of a homogeneous fluid in fractured-porous media is posed and numerically solved. To solve the problem, the first-order identification method was used. It has been established that these coefficients at various initial approximations with unperturbed initial data are restored in almost eight to ten iterations. At a more distant initial approximation from the equilibrium point, the iterative procedure converges to the shifted values of the desired parameters. The optimal range of regularization parameter values is determined.

References

1. Barenblatt G., I., Zheltov Yu. P. On the basic equations of filtration of homogeneous fluids in broken rocks, DAN USSR., 132, no. 3, 1960, pp. 545-548.
2. Barenblatt G.I., Zheltov Yu.P., Kochina I.N. On the basic ideas of the theory of filtration of homogeneous fluids in fractured rocks, DAN USSR., Vol. 24 issue. 5, 1960, pp 852-864.
3. Khuzhayorov B. Kh., Bobokulov E., Khudoerov Sh. Ch. Relaxation filtration of homogeneous fluids in racked-porous media. Journal of engineering physics and thermophysics, DAN USSR., V 2001. Vol. 74. No. 5, 2001, Pp 1073-1082.
4. Khuzhayorov B. Filtration Equations for Relaxing fluids in Fractured-Porous Media, Reports of the Academy of Sciences, no., 7-8., 1995.

**Calculation of the coefficients of optimal quadrature formulas
in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$**

¹**Kuldoshev Kh.**

¹*Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan,
hakimkhm1971@mail.ru*

In the present work we consider the following quadrature formula

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_\beta f(x_\beta) \quad (1)$$

with the error functional

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x - x_\beta) \quad (2)$$

where C_β are the coefficients and x_β are the nodes of formula (1), $x_\beta \in [0, 1]$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ is the indicator of the interval $[0, 1]$, $\delta(x)$ is Dirac's delta-function, a function $f(x)$ belongs to the Hilbert space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)$. The norm of functions in this space is defined by the following equality

$$\|f(x)|W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)\| = \left\{ \int_0^1 (f''(x) + \sigma f'(x))^2 dx \right\}^{1/2}, \text{ where } \sigma > 0. \quad (3)$$

The error of the quadrature formula (1) is the difference

$$(\ell, f) = \int_0^1 f(x)dx - \sum_{\beta=0}^N C_\beta f(x_\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)f(x)dx. \quad (4)$$

The error of the formula (1) defines a linear functional in $W_{2,\sigma}^{(2,1)*}(0, 1)$, where $W_{2,\sigma}^{(2,1)*}(0, 1)$ is the conjugate space to the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)$.

By Cauchy-Schwartz inequality

$$|(\ell, f)| \leq \|f(x)|W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)\| \cdot \|\ell(x)|W_{2,\sigma}^{(2,1)*}(0, 1)\|$$

the error (4) of formula (1) is estimated with the help of the norm

$$\|\ell|W_{2,\sigma}^{(2,1)*}\| = \sup_{\|f|W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0,1)\|=1} |(\ell, f)|.$$

of the error functional (2). Consequently, estimation of the error of the quadrature formula (1) on functions of the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)$ is reduced to finding the norm of the error functional $\ell(x)$ in the conjugate space $W_{2,\sigma}^{(2,1)*}(0, 1)$.

The main aim of the present paper is to solve the Sard problem in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)$ using S.L.Sobolev's method for any number $N + 1$ of the nodes x_β , i.e. finding the coefficients C_β satisfying the following equality

$$\|\ell|W_{2,\sigma}^{(2,1)*}\| = \inf_{C_\beta} \|\ell|W_{2,\sigma}^{(2,1)*}\|. \quad (5)$$

Thus, in order to construct the optimal quadrature formula in the sense of Sard in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)$ we need consequently to solve the following problems.

Problem 1. Find the norm of the error functional $\ell(x)$ of quadrature formula (1) in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}(0, 1)$.

Problem 2. Find the coefficients C_β which satisfy equality (5) when the nodes x_β are fixed.

In the present paper we solve Problems 1 and 2.

The main result of the work is the following.

Theorem 1. *The coefficients of optimal quadrature formulas in the sense of Sard of the form (1) in the space $W_{2,\sigma}^{(2,1)}$ have the following form*

$$C_\beta = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} - \frac{h}{1 - e^{\sigma h}} - M(h)(\lambda_1^N - \lambda_1), & \beta = 0, \\ h + M(h) \left((\lambda_1 - e^{\sigma h})\lambda_1^\beta + (\lambda_1 e^{\sigma h} - 1)\lambda_1^{N-\beta} \right), & \beta = \overline{1, N-1}, \\ -\frac{1}{\sigma} + h \frac{e^{\sigma h}}{e^h - 1} - M(h)(\lambda_1^N - \lambda_1), & \beta = N, \end{cases}$$

where

$$M(h) = \frac{[\sigma h(e^{\sigma h} + 1) + 2(1 - e^{\sigma h})](\lambda_1 - 1)}{2\sigma(e^{\sigma h} - 1) \left[\lambda_1(e^{\sigma h} - 1) - \lambda_1^{N+1}(e^{\sigma h} + 1) + 2\lambda_1^N \right]},$$

$$\lambda_1 = \frac{\sigma h(e^{2\sigma h} + 1) + e^{2\sigma h} - 1 + (e^{\sigma h} - 1)\sqrt{(e^{\sigma h} + 1)^2(\sigma h)^2 + 2(\sigma h)(e^{2\sigma h} - 1)}}{e^{2\sigma h} + 2\sigma h e^{\sigma h} - 1},$$

and $|\lambda_1| < 1$.

Shturm-Liuvill operatori parametrlarini tiklashda samarali hisoblash algoritmini qurish muammolari

¹Abdunazarov R.

¹ O'zbekiston milliy universiteti Jizzax filiali, Jizzax, O'zbekiston

e-mail: rabimkulabdunazarov@gmail.com

Oldindan berilgan $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ va $0 < \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots$ sonlar ketma ketligi mos ravishda quyidagi

$$y'' - [\lambda + q(x)]y = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y'(0) - h_1y(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

chegaraviy masalaning xos qiymatlari bo'lsin. Ushbu berilganlarga ko'ra (1)-(2)-(3) tengliklardagi $q(x)$, h , h_1 , H larni topish masalasi nazariy jihatdan yetarlicha o'rganilgan va masala Gelfand-Levitan integral tenglamasini yechishga keltiriladi [1]. Ammo amaliyotda shunday nokorrekt holatlar, masalan, ma'lumotlarning to'liq berilmasligi, ma'lumotlarning ma'lum bir aniqlikdagi xatoliklar bilan berilishi va boshqa shunday holatlar kuzatiladiki, yuqorida keltirilgan teskari masalani yechishda qo'shimcha ilmiy izlanishlarni talab qiladi.

Ushbu maqolada $O(N^{-6})$ aniqlikda berigan dastlabki N ta $\{\lambda_k\}_0^N$ va $\{\mu_k\}_0^N$ xos qiymatlar ketma ketligi asosida (1)-(2) uchun teskari masala yechimini $O(N^{-6})$ aniqlikda topish, ixcham va samarali hisoblash algoritmini qurish masalasi muhokama qilinadi.

Klassik usuldan chetlashgan holda, izlanayotgan noma'lumlarni topish masalasi quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi.

$$\begin{aligned} \alpha_k - \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi s_k}{4s_k} &= \frac{2A}{s_k^2} + \frac{B}{s_k^4} + \int_0^\pi \psi_0(t) \frac{\sin(2s_k t)}{s - k} dt \\ &+ \frac{1}{2s_k^2} \int_0^\pi f_1(t)(\cos(2s_k t) - 1)dt + \frac{1}{s_k^3} \int_0^\pi f_2(t)(\sin(2s_k t))dt + \\ &+ \frac{1}{2s_k^4} \int_0^\pi f_3(t)(\cos(2s_k t) - 1)dt + \frac{1}{s_k^5} \int_0^\pi f_4(t)\sin(2s_k t)dt + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Ushbu tenglamalar sistemasida $\psi_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... noma'lum funksiyalar sifatida qatnashadi. A , B lar esa bir marta aniqlanadigan noma'lum konstantalardir. Olingan (4) sistemani ba'zi shakl almashtirishlardan so'ng noma'lumlari va tenglamalari soni $m(N_1 + 1) + 2$ ga teng bo'lgan chiziqqli algebraik tenglamalar sistemasiga yoki tur Fredgolm integral tenglamasiga keltirish mumkin. Yuqori aniqlik talab etilmagan hollarda yoki N ning kichik qiymatlarida chiziqqli algebraik tenglamalar sistemasidan foydalanish yaxshi samara beradi. qurilgan integral tenglama esa hisoblash jarayoni va yechimlarni tahlil qilishda qulaylik beradi.

Yuqoridagi (4) sistemani qurishda (1) ning λ_n ga mos keluvchi xos funksiyasi

$$y_n = \cos(s_n x) \left(1 + \frac{\phi_1(x)}{s_n^2} + \frac{\phi_2(x)}{s_n^4} + \dots\right) + \sin(s_n x) \left(\frac{h + \psi_0(x)}{s_n} + \frac{\psi_1(x)}{s_n^3} + \dots\right)$$

ko'rinishda tanlangan. Bu yerda

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt, \\ \phi_1(x) &= \frac{1}{2} [f_1(x) + \psi_0^2(x)], \quad \psi_1(x) = [f_2(x) - \psi_0(x)\phi_1(x)], \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{2} [f_3(x) + 2\psi_0(x)\phi_1(x) - \phi_1^2(x)], \quad \psi_2 = [f_4(x) - \psi_0(x)\phi_2(x) - \psi_1(x)\phi_1(x)], \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Ushbu rekurrent tengliklarda qatnashayotgan $\psi_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... funksiyalar (4) sistema yordamida aniqlanadi.

Hisoblashlar davomida quyidagi belgilashlar kiritilgan: $N_1 - (4)$ da qatnashayotgan integrallarni integral yig'indi bilan almashtirishda $[0; \pi]$ oraliqning bo'linishlari soni,

$$\begin{aligned} m &\approx \frac{6 \ln(N)}{\ln(s_k)}, \quad H = -\frac{y'(\pi, \lambda_n)}{y(\pi, \lambda_n)}, \\ h &= -\sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{2}{\pi}\right) - \sum_{n=0}^N \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\pi} [1 + \sqrt{2\pi a'_0} \operatorname{cth} \sqrt{2\pi a'_0}], \\ \alpha_n &\approx \frac{c}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0, k \neq n}^N \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \prod_{k=0}^N \left(\frac{k^2 + \lambda'_n}{k^2 + \lambda''_n} \right) \frac{\operatorname{sh}(\pi \sqrt{\lambda''_n}) \sqrt{\lambda''_n}}{\operatorname{sh}(\pi \sqrt{\lambda'_n}) \sqrt{\lambda'_n}} + O(N^{-6}) \\ \lambda'_n &= 2c_0 - \lambda_n, \quad \lambda''_n = 2c'_0 - \lambda_n, \quad s_n = \sqrt{\lambda_n}, \end{aligned} \quad (6)$$

o'zgarmlar c_0 , c'_0 , a'_0 sonlar mos ravishda λ_n , μ_n va α_n uchun chiqarilgan

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{c_0}{n} + \frac{c_1}{n^3} + \dots, \quad \sqrt{\mu_n} = n + \frac{c'_0}{n} + \frac{c'_1}{n^3} + \dots, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a_0}{n^2} + \frac{a_1}{n^4} + \dots$$

asimptotik formulalarning koeffitsiyentlaridir. c_0 , c'_0 o'zgarmlarini $\{\lambda_k\}_0^N$ va $\{\mu_k\}_0^N$ xos qiymatlar yordamida [2], [3] da keltirilgan usullardan foydalanib hisoblash mumkin. a'_0 ni esa (6) formula bo'yicha hisoblab topilgan $\{\alpha_n\}_0^N$ lar yordamida aniqlash hisoblash ketma ketligini keskin qisqartirish hisobiga yuqori samaradorlikni ta'minlaydi.

Maqolada tavsiya qilingan hisoblash usulning ahamiyatli jihatlari shundaki, unda hisoblash jarayonida uchraydigan cheksiz qatorlar, cheksiz ko'paytmalar, noaniqliklar va boshqa barcha shu kabi holatlar kompyuterga tushuntirish mumkin bo'lgan qulay alternativlar bilan almashtirilgan, hisoblash ketma ketligi ixchamlashtirilgan. Eng muhimi, noma'lumlar izlanadigan nochiqliq tenglamalar sistemasi (5) almashtirish yordamida chiziqqli tenglamalar sistemasiga o'tkazilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Левитан Б.М. Сарксян И.С. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. Москва (МГУ). 1984 г.
2. Антекарев А.И. Сходимость аппроксимаций Паде и совместных аппроксимаций для некоторого класса целых функций. Автореферат. 1983.

3. Абдуназаров Р. О численной решение обратной спектральной задачи для оператора Дирака. Журнал "Вопросы вычислительной и прикладной математики". Выпуск 95. Ташкент 1993. Стр. 10-20.

Теоретико числовые методы для решения одномерные интегральные уравнения Фредгольма второго рода

¹ Абираев И. М., ² . Исмоилов М.М.

¹ Узбекистан, Денау, Денауский институт предпринимательства и педагогики,
e-mail: imamali.abirayev@gmail.com

² Узбекистан, Термез, Термезский государственный университет,

Приведем некоторые вспомогательные утверждения и определения

Определение 1. Будем говорить ,что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ принадлежит классу E_n^α если выполняется оценка

$$C_f(m_1, \dots, m_n) = O((\overline{m}_1, \overline{m}_2 \dots \overline{m}_n)^{-\alpha}),$$

где α — действительное число, больше единицы, и константа в символе "О" не зависит от $m_1, \dots, m_n$.

В тех случаях, когда нужно указать величину этой константы будем вместо E_n^α написать $E_n^{\alpha(C)}$ и заминять предыдущую оценку неравенством

$$|C_f(m_1, m_2, \dots, m_n)| \leq \frac{C}{(\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_n)^{-\alpha}}.$$

Определение 2. Целые $a_1, \dots, a_n$ называются оптимальными коэффициентами по модулю N , если существуют константы $\beta = \beta(n)$ и $C_0 = C_0(n)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется неравенство

$$\sum_{m_1, \dots, m_n = -(N-1)}^{N-1'} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \dots + a_n m_n)}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_n} \leq C_0 \frac{\ln^\beta(N)}{N},$$

где штрих в сумме означает, что суммирование ведется по всем $(m_1, \dots, m_n) \neq (0, \dots, 0)$. В этом случае константа β называется индексом оптимальных коэффициентов.

Лемма. Пусть функции $f_1(x_1, \dots, x_s)$ и $f_2(x_1, \dots, x_s)$ принадлежит соответственно классам $E_s^a(C_1)$ и $E_s^a(C_2)$. Тогда при любых B_1 и B_2 $f_1 f_2 E_s^a(AC_1 C_2)$ и $B_1 f_1 + B_2 f_2 \in E_s^a(|B_1|C_1 + |B_2|C_2)$, где $A \leq [2^{(\alpha+1)}(3 + 2/(\alpha - 1))]^n$. Сочетая метод итерации с методом оптимальных коэффициентов , рассмотрим приближенное решение следующей интегральные уравнение Фредгольма 2-го рода

$$y(x) = f(x) + \gamma \int_0^1 K(x, t)y(t)dt. \quad (1)$$

Пусть в уравнению (1) свободный член и ядра удовлетворяют условиям:

$$f(x) \in E_1^a(C_1), \quad K(x, t) \in E_2^a(C_2). \quad (2)$$

Решение уравнение (1) будем искать в виде рядов Неймана

$$y(x) = \sum_1^\infty \lambda^n \varphi(x). \quad (3)$$

Здесь λ — малый параметр, а функции $\varphi_j(x)$ подлежат определению. Подставляя (3) в (1), переставляя порядок интегрирования и суммирования (законность такой перестановки не трудно показать), получим

$$\sum_0^\infty \lambda^{n=1} \varphi_j(x) = f(x) + \sum_1^\infty \sum_{j=1}^q \lambda^n \int_0^1 K_j(x, t) \varphi_{n-1}(x) dx. \quad (4)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях n , после некоторых преобразований, получим

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

$$\varphi_n(x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{j_1, \dots, j_n}^q K_{j_1}(x, t_1) \prod_{l=2}^n K_{j_{l-1}j_l}(t_{l-1}t_l) f_{j_n}(t_n) dt_1 \dots dt_n. \quad (5)$$

или $\varphi_n(x) = \int_{G_n} \varphi_n(x, t) dt$, где G_n — единичный n мерный куб.

Используя лемму, можно показать, что $\Phi_n(x, t)$ как функция $t_1, \dots, t_n$ принадлежит классу $E_n^\alpha(q^n A^n C_2^n C_1)$, а как функция $x, t_1, \dots, t_n$ классу $E_{n+1}^\alpha(q^n A^{n+1} C_2^{n+1} C_1)$, где

$$A = 2^{\alpha+1} \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)$$

Пусть N — растущее натуральное число и $|\lambda| < ((3\alpha q A^2 C_2)/2(\alpha - 1))^{-1}$. Натуральные числа N_1 и M определяем следующим образом

$$N_1 = [N^{1/2} \log_{-\beta/2} N], \quad M = \left\lceil \frac{(\alpha - 1) \log N - (\alpha\beta - \beta + 2) \log \log N}{2(\log \log N - \log(|\lambda| q A^2 C_2))} \right\rceil \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть $N \geq 2^\alpha, \alpha > 1$, выполняются условия (2). Тогда для решения уравнение (1) справедливы равенства

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^M \lambda^n \sum_{k=1}^N \Phi_n(x, M_{kn}) + R_N,$$

где

$$R_N = O D N^{-\frac{\alpha-1}{2}} \log^{0.5(\alpha-1)\beta+M-1} N, \quad |0| < 1,$$

$D = D(\alpha, \lambda, q, A, C_1, C_2)$ — постоянная, не зависящая от N .

Литературы

1. Коробов Н.М. Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. —М.: Физматгиз. 1963.
2. Коробов Н.М. О вычислении оптимальных коэффициентов. ДАН СССР. 1982, том 267. №2. С.
3. Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. —М.: “Наука”, 1989. 237 с.
4. Исраилов М.И., Шадиметов Х.М. Оптимальные коэффициенты Весовых квадратурных формул для сингулярных интегралов типа Коши. ДАН УзССР. 1991. №11. С. 7-9.

Сведение сингулярного интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений

¹Абираев И. М., ² Мухторов Б. К.

¹ Узбекистан, Денау, Денауский институт предпринимательства и педагогики
e-mail: imamali.abirayev@gmail.com

² Узбекистан, Термез, Термезский государственный университет,

Способ приближенного решения сингулярных интегральных уравнений, рассматриваемый в этой работа, основан на сведении сингулярного интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений путем применения квадратурных формул с теоретико числовыми сетками.

Рассмотрим многомерное сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта

$$\varphi(P) = \int_{G_s} \prod_{j=1}^s \operatorname{ctg} \pi(x_j - y_j) K(P, Q) \varphi(Q) dQ + f(P), \quad (1)$$

**Приближенное решение одномерного интегрального уравнения с ядром
Гильберта теоретика-числовым**

¹Абираев И.М., ²Тошпулатов С.

¹ Узбекистан, Денау, Денауский институт предпринимательства и педагогики,
e-mail: imamali.abirayev@gmail.com

² Узбекистан, Термез, Термезский государственный университет,

Приведем некоторые вспомогательные утверждения и определения

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ принадлежит классу E_n^α , если выполняется оценка

$$C_f(m_1, \dots, m_n) = O((\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_n)^{-\alpha}),$$

где α — действительное число, больше единицы, и константа в символе "O" не зависит от $m_1, \dots, m_n$.

В тех случаях, когда нужно указать величину этой константы будем вместо E_n^α написать $E_n^{\alpha(C)}$ и замещать предыдущую оценку неравенством

$$|C_f(m_1, \dots, m_n)| \leq \frac{C}{(\overline{m}_1, \dots, \overline{m}_n)^a}.$$

Определение 2. Сетки вида

$$M_{kn} = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{a_n k}{N} \right\} \right), \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

в которых величины $a_1, \dots, a_n$ являются оптимальными коэффициентами по модулю N , будем называть параллелепипедальными сетками. Здесь x означает дробную долю числа x .

Лемма. Если $f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_t) \in E_{n+t}^\alpha(C_1)$ и $f_2(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_{t'}) \in E_{n+t'}^\alpha(C_1)$, то $f_1 f_2 \in E_{n+t'+t}^\alpha(AC_1 C_2)$, где $A \leq (2^{\alpha+1}(3 + 2/(\alpha - 1)))^n$.

Здесь применяем теоретика-числовые методы для приближенного решения следующего сингулярного интегрального уравнения

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \text{ctg} \pi(t - x) K(x, t) y(t) dt. \quad (2)$$

Предположим, что свободные члены $f(x)$ и ядра $K(x)$ системы (1) принадлежат соответственно классам E_1^α и E_1^α , $\alpha > 1$.

Пусть $A = 2^{\alpha+1}(3 + 2/(\alpha + 1))$ и параметр λ удовлетворяет условию $|\lambda| < (\alpha - 1)/3sAC_2$, C_2 константа класса $E_2^\alpha(C_2)$. Пусть числа N_1 , M определены равенствами

$$N_1 = [N^{1/2} \log^{\text{beta}/2} N], \quad M = \left\lceil \frac{(\alpha - 1) \log N - (\alpha\beta - \beta + 2) \log \log N}{2(\log \log N - \log((3\alpha - 1)|\lambda|sAC_2))} \right\rceil. \quad (3)$$

Решение системы (1) будем искать в виде рядов Неймана

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x) \quad (4)$$

Здесь функции $\varphi_j(x)$ подлежат определению.

Подставляя (4) в (1) переставляя порядок интегрирования и суммирования получим.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^q \lambda^n \int_0^1 \text{ctg} \pi(t - x) K_j(x, t) \varphi_{j,n-1}(t) dt,$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых λ после некоторых преобразований находим

$$\begin{aligned} & \varphi_0(x), \quad \varphi_n(x) = \\ & = \int ctg\pi(t_1 - x) \prod_{l=1}^n ctg\pi(t_l - t_{l-1}) K(x, t_1) \prod_{l=2}^n K(t_{l-1}, t_l) ctg\pi(t_l - t_{l-1}) f_{jn}(t_n) dt_1 \cdots dt_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Для краткости введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \prod_n(x, \bar{t}) &= ctg\pi(t_1 - x) \prod_{l=1}^n ctg\pi(t_l - t_{l-1}), \\ F_n(x, \bar{t}) &= K(x, t_1) \prod_{l=1}^n K(t_{l-1}, t_l) f(t_n). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тогда из (5) имеем

$$\varphi_n(x) = \int_{G_n} \prod_n(x, \bar{t}) F_n(x, \bar{t}) d\bar{t} \quad (7)$$

Используя лемму можно показать что $F_n(x, \bar{t})$ как функция $t_1, \dots, t_n$ принадлежит классу $E_n^\alpha(A^n C_2^n C_1)$, а как функция $t_1, \dots, t_n$ классу $E_{n+1}^\alpha(A^{n+1} C_2^{n+1} C_1)$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть $N \geq 2^\alpha, \alpha > 1$. Пусть функции $f(x)$ и $K(x, t)$ принадлежат классам $E_1^\alpha(C_1)$ и $E_1^\alpha(C_1)$ соответственно и величины N_1 и M определены равенствами (3). Если параметр λ удовлетворяет условию $|\lambda| < (\alpha - 1)/(3\alpha AC_2)$, то при любом для решения уравнения (1) справедливы равенства

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^M \lambda^n \sum_{k=1}^M F_n(x, M_{kn}) \Psi_{knN_1}(x) + O \left[N^{-\frac{\alpha-1}{2}} \log^{0.5(\alpha-1)\beta+M-1} N \right] \quad (8)$$

где

$$\Psi_{knN_1}(x) = \sum_{k(\bar{m}) < N_1} \text{sign} \left[\prod_{j=1}^n \sum_{s=1}^{j-1} m_{n-s} \right] e \quad (9)$$

Литература

1. Коробов Н.М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел. ДАН СССР, -М.:1957, 115, №6 С.1062-1065.
2. Коробов Н.М. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах. Тр. Матем.Ин-та АН СССР, -М.:1961, 60, С. 195-210.
3. Полянина А.Д., Манжиров А.В. Справочник по интегральным уравнениям. -М; Физмат, 2003.
4. Сумин Е.В., Шерстюков В.Б., Шерстюкова О.В. Интегральные уравнение Фредгольма и Вольтерра, краевые задачи и методы их решения. Учебно-методические пособия. Москва 2016. -96 с.

**Приближенное решение системы многомерных интегральных уравнений
Фредгольма второго рода методом итерации**

Абираев И. М.

*Денауский институт предпринимательства и педагогики, Узбекистан,
e-mail: imamali.abirayev@gmail.com*

Сочетая метод итерации с методом теоретикочисловых сеток, рассмотрим приближенное решение следующей системы многомерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Пусть дано следующая система многомерных интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_1, \dots, x_s) = f_i(x_1, \dots, x_s) \\ + \lambda \sum_{j=1}^q \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{ij}(x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_s) \times \varphi_j(y_1, \dots, y_s) dy_1 \dots dy_s, \quad (i = 1, 2, \dots, q). \end{aligned} \quad (1)$$

Будем предполагать, что свободный член и ядро этой системы принадлежат соответственно классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_{2s}^\alpha(C_2)$.

Для решение (1) приведем некоторые вспомогательные утверждения и определения.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_s)$ принадлежит классу E_s^α , если выполняется оценка $|C_f(m_1, \dots, m_n)| \leq O((\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n)^{-\alpha})$, где α — действительное число, больше единицы, и константа в символе "O" не зависит от $m_1, \dots, m_n$. В тех случаях, когда нужно указать величину этой константы, будем вместо E_s^α написать $E_s^\alpha(C)$ и заменять оценку неравенством

$$|C_f(m_1, \dots, m_n)| \leq \frac{C}{(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n)^\alpha}.$$

Определение 2. Целые $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется оптимальными коэффициентами по модулю N , если существуют константы $\beta = \beta(n)$ и $C_0 = C_0(n)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется неравенство

$$\sum_{m_1, \dots, m_n = -(N-1)}^{N-1} \frac{\delta_N(a_1 m_1 + a_n m_n)}{\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_n} \leq C_0 \frac{\ln^\beta N}{N},$$

где штрих в сумме означает, что суммирование ведется по всем $(m_1, \dots, m_n) \neq (0, \dots, 0)$. В этом случае константа β называется индексом оптимальных коэффициентов.

Определение 3. Сетки вида

$$M_{nk} = (\{\frac{a_1 k}{N}\}, \dots, \{\frac{a_n k}{N}\}), \quad k = 1, 2, \dots, N$$

в которых величины $a_1, a_2, \dots, a_n$ являются оптимальными коэффициентами по модулю N , будем называть параллелепипедальными стеками. Здесь $\{x\}$ означает дробную долю числа x .

Лемма 1. Если $\Phi \in E_s^\alpha(C)$, то какого бы ни была $\varepsilon_1 \in (0; \alpha - 1)$ для погрешности квадратурной формулы

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \Phi(x_1, x_2, \dots, x_s) dx_1 dx_2 \dots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \Phi(\{\frac{a_s(\vartheta-1)+1}{N}k\}, \dots, \{\frac{a_{sn}}{N}k\}) - R,$$

построенной при $N = p$ с помощью оптимальных коэффициентов, справедлива оценка

$$|R| \leq C \frac{(6a + \frac{12\alpha^2}{\varepsilon_1})^{2\alpha s}}{p^{\alpha - \varepsilon_1}}.$$

Для удобства введем обозначения:

$$\bar{a} = (a_1, \dots, a_n), \quad \bar{l} = (l_1, \dots, l_n), \quad \bar{m} = (m_1, \dots, m_n), \quad \bar{t} = (t_1, \dots, t_n), \quad d\bar{t} = dt_1, \dots, dt_n, \quad \bar{p} = (x_1, \dots, x_s), \quad (\bar{a}, \bar{m}) = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_n m_n, \quad K(\bar{m}) = \prod_{i=1}^n \max(1, |m_i|), \quad M_{kn} = (\{\frac{am}{N}\}), \quad Q_j = (y_{(j-1)s+1}, \dots, y_{js}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \bar{Q} = (Q_1, \dots, Q_n), \quad dQ = dy_1 dy_2 \dots dy_n = dQ_1 dQ_2 \dots dQ_n,$$

$$\Phi_{in}(x, \bar{t}) = \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^q K_{ij_1}(x, t_1) \prod_{l=2}^n K_{j_{l-1}j_l}(t_{l-1}, t_l) f_{jn}(t_n)$$

G_{ns} —единичный ns —мерный куб, m_1 —целые числа. Тогда рассматриваемую систему мы можем переписать в виде

$$\varphi_i(P) = f_i(P) + \lambda \sum_{j=1}^q \int_{G_S} K_{ij}(P, Q) \varphi_j(Q) dQ, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (2)$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Если $\gamma > 0$, $\gamma_0 = 2s(\alpha + \ln(3 + \frac{2}{\alpha-1})) + \ln(sC_2)$ и $|\lambda| = e^{-(\gamma+\gamma_0)}$, то при $n \rightarrow \infty$ решение системы уравнений (1) удовлетворяет соотношению

$\varphi_i(P) = f_i(P) + \int_{G_S} \Phi_{in}(P, Q) dQ + \theta D e^{-\gamma M}$. $D = (3 + \frac{2}{\alpha-1})^s e^{-\gamma} C_1$, $|\theta| < 1$, функция $\Phi_{in}(P, Q)$ определена равенство

$$\Phi_{in}(P, Q) = \sum_{n=1}^M \lambda^n \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^q K_{ij_1}(P, Q_1) \prod_{l=2}^n K_{j_{l-1}j_l}(Q_{l-1}, Q_l) \text{ и принадлежит класс } E_{ns}^\alpha(C_1).$$

Теорема 2. Если $f_i(P) \in E_s^\alpha(C_1)$ и $K_{ij}(P, Q) \in E_{2s}^\alpha(C_2)$ и $|\lambda| \leq e^{-\gamma(1+\frac{1}{\varepsilon})}$ то при произвольно малом ε для решения системы уравнений (1) выполняется равенства

$$\begin{aligned} \varphi_i(P) = f_i(P) \\ + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{n=1}^M \lambda^n \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^q K_{ij_1}(P, M_{k,1}) K_{j_1j_2}(M_{k,1}, M_{k,2}) \dots \\ \dots K_{j_{n-1}j_n}(M_{k,(n-1)}, M_{k,n}) f_{jn}(M_{k,n}) + \theta(C_1 + D) N^{-\alpha+\varepsilon}, \quad i = 1, \dots, q, \end{aligned}$$

где $M_{k,v} = (\{\frac{\alpha_{sv}(v-1)+1}{N}k\}, \dots, \{\frac{\alpha_{sv}v}{N}k\})$, $v = 1, 2, \dots, n$, α_τ —оптимальные коэффициенты в смысле Коробова $\gamma_1 = 4\alpha^2 s \ln(6a + \frac{24\alpha^2}{\varepsilon}) + \ln(sC_2)$, $|\theta| < 1$, $M = [\frac{\alpha\varepsilon \ln N}{\gamma_1}]$, $D = (3 + \frac{2}{\alpha-1})^s e^{-\gamma} C_1$.

Литература

1. Коробов Н.М. Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах // Тр. Матем.Ин-та АН СССР, -М.:1961, 60, С. 195-210.
2. Коробов Н.М. Приближенное вычисление кратных интегралов спомощью методов теории чисел // ДАН СССР, -М.:1957, 115, 6, с.1062-1065.
3. Асанов, Авыт Приближенное вычисление линейного итегрального уравнение Вольтерра-Стильтеса второго рода обобщенным методом трапеции. Молодой ученый.-2014. 6(65).-С. 3-9.
4. Абдурашидов А.А. Приближенное решение линейных и нелинейных интегральных уравнений Вольтерра методом вариационных итераций. Молодой ученый.-2017. 6(140) С.8-12.

Автоматизация оценки прочности костей на основе цифрового прототипа**¹Герасимов О.В., ²Рахматулин Р.Р., ³Саченков О.А.***Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Республика Татарстан, Россия,**e-mail: ¹valeriy.karasikov@gmail.com, ²rrahmatulin852@gmail.com, ³4works@bk.ru*

Моделирование негомогенных структур на основе данных с изображений выступает одним из основных подходов к оценке их поведения в условиях действия внешних сил [1]. В этом случае оказывается актуальным исследование многосвязных пористых материалов в клинической практике, так как предполагает построение модели на основе метода неразрушающего контроля. Целью исследования является реализация методики оценки прочности конечного объёма негомогенной среды путём применения данных его компьютерной томографии. Таким образом, предполагается построение трёхмерной сетки на основе восьмиузлового изопараметрического конечного элемента линейной аппроксимации методом взвешенного интегрирования локальной матрицы жёсткости по данным цифрового прототипа.

Построение цифрового двойника представляет собой процесс восстановления его свойств на основе данных с изображений. Наивысшая точность вычислений в этом случае может быть достигнута путём моделирования каждого микрообъёма (вокселя) отдельным элементом, что влечёт за собой значительные расчёты [2]. Увеличение размера элемента позволяет включать заданное количество вокселей, что определяет возможность интегрирования методом средних прямоугольников с выбором весовой функции таким образом, чтобы каждой узловой точке соответствовало обработанное значение данных томографии [3].

В качестве модельного образца рассматривалась плечевая кость свиньи. Протокол эксперимента был одобрен Комитетом по уходу за животными Казанского государственного медицинского университета (протокол №5 от 20 мая 2020 года) [4]. Образец подвергался испытанию на трёхточечный изгиб с приложением поперечной нагрузки в области диафиза. Построение конечной расчётной сетки проводилось методом удаления элементов с низким содержанием костного вещества ($<5\%$). Полученные данные сопоставлялись с результатами натурного эксперимента. Оценка объёмно-усреднённого напряжённо-деформированного состояния производилась путём вычисления значений нормированной ошибки энергии [5].

На основе полученных результатов было установлено, что максимальная ошибка энергии соответствовала граничным элементам, что объясняется неравномерным объёмным распределением костного материала. Минимальная ошибка энергии ($\sim 6\%$) и максимальные напряжения по Мизесу (500 МПа) определялись областью нагружения. Образование трещины в натурном эксперименте соответствовало максимальным показателям первой компоненты главных напряжений (400 МПа) и минимальным – третьей (-400 МПа) [6]. Относительная погрешность численных результатов с данными натурного эксперимента составила не более 15%. Полученные результаты расчётов показали сходимость метода численного моделирования с показателями натурного эксперимента, а также подтвердили применимость представленного подхода к расчёту негомогенных костных структур.

Работа выполнена при поддержке стипендии Президента Российской Федерации молодым учёным и аспирантам (СП-4182.2022.4).

Литература

1. Kichenko, A.A., Tverier, V.M., Nyashin, Y.I., Zaborskikh, A.A. Experimental determination of the fabric tensor for cancellous bone tissue, *Russ. J. Biomech.*, 2011, Vol. 15(4), P. 66-81.
2. O. Gerasimov, N. Kharin, O. Vorobyev, O. Sachenkov. Determination of the mechanical properties distribution of the sample by tomography data, *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, Vol. 1158, 022046.
3. E. Nadal, J. J. Rodenas, J. Albelda, M. Tur, J. E. Tarancon, F.J. Fuenmayor. Efficient finite element methodology based on cartesian grids: application to structural shape optimization, *Abstr. Appl. Anal.*, 2013, 953786.
4. F. Fadeev, A. Ereemeev, F. Bashirov, R. Shevchenko, A. Izmailov, V. Markosyan, M. Sokolov, J. Kalistratova, A. Khalitova, R. Garifulin, R. Islamov, I. Lavrov. Combined Supra- and Sub-Lesional

- Epidural Electrical Stimulation for Restoration of the Motor Functions after Spinal Cord Injury in Mini Pigs, Brain Sci., 2020, Vol. 10(10), P. 744.
5. Giovannelli, L., Rodenas, J.J., Navarro-Jimenez, J.M., Tur, M. Direct medical image-based Finite Element modelling for patient-specific simulation of future implants, Finite Elem. Anal. Des., 2017, Vol. 136, P. 37–47.
 6. Imai, K. Computed tomography-based finite element analysis to assess fracture risk and osteoporosis treatment, World J. Exp. Med., 2015, Vol. 5(3), P. 182–187.

Численное моделирование неізотермической струи с помощью однопараметрической модели турбулентности

¹Жумаев Ж., ²Мухаммадова М.Д.

¹Узбекистан, Бухара, Бухарский государственный университет

²Узбекистан, Бухара, Бухарский государственный университет

Турбулентное перемешивание и распространение свободных турбулентных струй в спутном потоке широко распространено в химико-технологических процессах, пищевой промышленности, поливке полей методом капельных орошений, энергетике и других отраслях техники и народного хозяйства. В последнее время сфера интенсивного исследования и применения процессов тепло- и массообмена чрезвычайно расширилась. Она включает как ведущие направления техники (химические технологии, нефтепереработки и т.д.), так и основные естественные науки (биологию, статистическую физику и др.).

Особую важность приобретает законов движения в тепло- и массообменных процессах в вышеуказанных отраслях. В основном эти процессы происходят по законам распространения турбулентных струй газов в изотермических и неізотермических случаях. Такие течения изучены достаточно широко с целью определения их переносных свойств. Теоретический и практический интерес представляет выяснение одной из основных характеристик переноса - коэффициента турбулентной вязкости. Применяемые в теоретических расчетах полуэмпирические модели турбулентной вязкости в основном описывают основной участок свободной турбулентной струи.

В настоящей работе рассмотрено истечение неізотермической турбулентной струи из круглого сопла радиусом a и распространяющегося в спутном потоке воздуха на основе однопараметрической модели турбулентности, исследованы влияния степени неізотермичности исходного потока на длину начального участка, а также на основные параметры струи: дальность, падение скорости и температуры вдоль оси струи, границы динамического и теплового пограничных слоев.

Считаем, что истечение струи ступенчатое и однородное, статическое давление в струе и в спутном потоке одинаково и равно атмосферному. Для облегчения решения задачи ось направим вдоль струи, а ось перпендикулярно к струи, это позволяет рассмотреть одну половину струи.

Исходные значения задавали ступенчатыми и однородными, или из экспериментальных данных работ.

Систему дифференциальных уравнений в приближении теории турбулентного пограничного слоя в безразмерном виде можно записать в виде [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v y)}{\partial y} &= 0, \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} (\rho \varepsilon y \frac{\partial u}{\partial y}), \\ \rho u \frac{\partial(c_p T)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial(c_p T)}{\partial y} &= \frac{1}{y \cdot Pr} \frac{\partial}{\partial y} (\rho \varepsilon y \frac{\partial(c_p T)}{\partial y}) + \rho \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \\ P &= \rho R T \end{aligned}$$

В (1) неизвестными являются $u, \vartheta, T, \rho, \varepsilon$. Здесь u - продольное составляющее скорости, ϑ - поперечное составляющее скорости, T - температура среды, ρ - плотность, ε - коэффициент турбулентной вязкости. Как видно, число уравнений 4, а число неизвестных 5. Для замыкания системы нужно найти соотношение для коэффициента турбулентной вязкости.

В последнее время все чаще используется дифференциальные уравнения при определении турбулентной вязкости, так как они позволяют учитывать предысторию потока. А также позволяет моделировать начальный участок струи. Из-за преимущества дифференциального подхода определения коэффициента турбулентной вязкости здесь используем однопараметрическую модель турбулентности, предложенное в [2] и модифицированное для неизотермических течений:

$$\rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho \varepsilon y}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \rho \varepsilon k_0 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| + C_0 \varepsilon \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (2)$$

В (2) Pr_ε, k_0, C_0 - постоянные величины, которые определяются экспериментально.

Граничные условия, при котором решается система дифференциальных уравнений (1) с учетом (2) имеет вид;

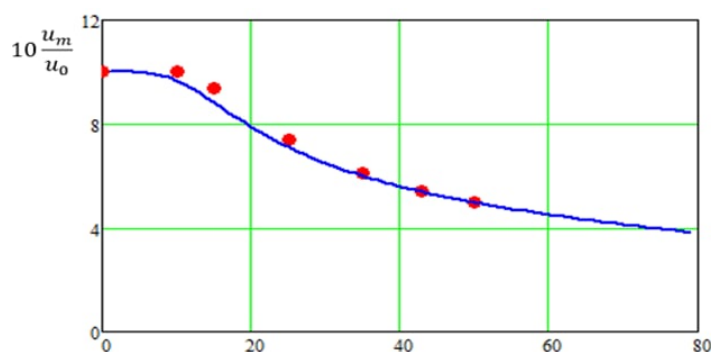
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 : \left\{ \begin{array}{l} u = u_2, \quad T = T_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_2, \quad \vartheta = 0 \text{ при } 0 \leq y \leq a \\ u = u_1, \quad T = T_1, \quad \varepsilon = \varepsilon_1, \quad \vartheta = 0 \text{ при } a < y \leq \infty \end{array} \right. \\ x > 0 : \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dy} = \vartheta = \frac{dT}{dy} = \frac{d\varepsilon}{dy} = 0, \quad \text{при } y = 0 \\ u \rightarrow u_1, \quad \vartheta \rightarrow 0, \quad T \rightarrow T_1, \quad \varepsilon \rightarrow \varepsilon_1 \text{ при } y \rightarrow y_\infty \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь индексом "2" обозначены параметры струи, индексом "1" параметры спутного потока. Предполагается, что спутный поток продолжиться до бесконечности.

Система дифференциальных уравнений (1) с учетом (2-3) решалась численно с использованием двухслойной, неявной четырехточечной конечно-разностной схемы и методом прогонки с итерациями.

Постоянные уравнения для турбулентной вязкости определены из условия наилучшего совпадения продольной скорости струи с экспериментальными данными [1]. На рис.1. приведены значения продольной скорости на оси симметрии. При этом постоянные для уравнения турбулентной вязкости принимали следующие значения:

$$Pr_\varepsilon = 0,7; \quad k_0 = 0,02; \quad C_0 = 0,5.$$



Определены параметры поля течения, влияние неизотермичности на длину начального участка, влияние спутности на параметры струи.

Литература

1. Jumayev J., Shirinov Z., Kuldashev H. Computer simulation of the convection process near a vertically located source.// International conference on information Science and Communications Technologies (ICISCT) 4-6 november. 2019. Tashkent. Conference Proceedings. pp. 635-638.

2. Секундов А.Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений /МЖГ. - 1971., № 5., ст. 114–127.

Нестационарное вращение абсолютно-жесткого шара в пористо-упругом полупространстве

¹Жураев Г.У., ²Мусурмонова М.О.

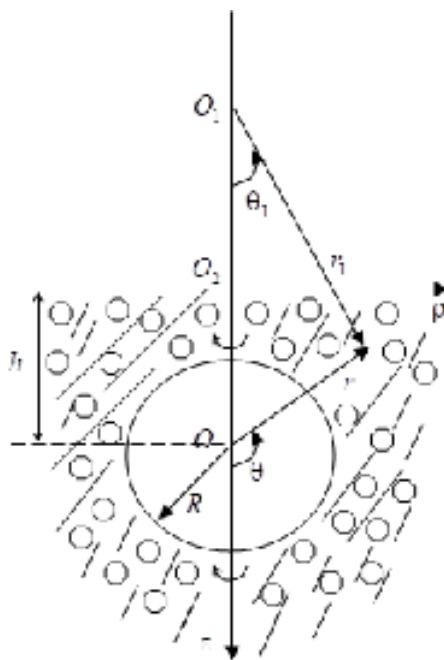
¹Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,
e-mail: gjuraev@mail.ru

²Каришинский государственный университет, Карши, Узбекистан,
e-mail: mmo_2704@mail.ru

Математическое моделирование и исследование распространения нестационарных волновых процессов в сплошных средах представляет собой сложное и, вместе с тем, актуальное направление волновой динамики сплошных сред. Актуальность проблем динамики сплошной среды обусловлена развитием различных областей техники, созданием новых конструкций, работающих при динамических нагрузках, а также проблемы геофизики, сейсмологии, газоразведки, нефтеразведки, добывающей промышленности, строительства гражданских и промышленных сооружений.

В работе рассматривается задача о нестационарном вращении абсолютно-жесткого шара в насыщенном пористо-упругом полупространстве со свободной плоскостью.

Пусть в однородном изотропном насыщенном пористо-упругом полупространстве $z \geq 0$ на расстоянии h от плоскости $z = 0$ на оси O_2z (точка O_2 лежит на границе полупространства) расположен центр O абсолютно жесткого неподвижного шара радиуса R ($R < h$) (Рис. 1).



В начальном моменте времени $\tau = 0$ абсолютно жесткий шар вращается вокруг оси O_2z по закону $V(\tau, \theta)$ при полном сцеплении с окружающей средой.

$$u_\theta|_{r=R} = V(\tau, \theta). \quad (1)$$

С учётом осевой симметрии задачи движение среды относительно ненулевой компоненты ψ упругого векторного потенциала смещения описывается волновым уравнением

$$\gamma^2 \ddot{\psi} = \Delta \psi - \frac{\psi}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (2)$$

где Δ - оператор Лапласа в сферической системе координат r, θ, ϑ .

Плоская граница полупространства является свободной поверхностью.

Начальные условия – однородные и на бесконечности отсутствует возмущение.

Начально-краевая задача решается с применением интегрального преобразования Лапласа по времени τ . С учётом отсутствия возмущения на бесконечности решение уравнения разыскивается в виде суммы двух бесконечных рядов по полиномам Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x)$ [2]. В ней первый бесконечный ряд соответствует расходящемуся волнам от полости, а второй ряд – сходящемуся волнам в дополнительной сферической системе координат $(r_1, \theta_1, \vartheta_1)$, полученной переносом вдоль оси O_2z центра O исходной сферической системы в точку O_1 , симметричную точке O относительно плоскости $z = 0$.

В результате задача с применением теоремы сложения для сферических волновых функций [1] сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, решение которой разыскивается в виде ряда по экспонентам. Для коэффициентов бесконечного ряда получены рекуррентные соотношения и начальные условия к ним. Эти соотношения позволяют определить все искомые изображения без использования редукции бесконечной системы уравнений. Анализ рекуррентных соотношений показывает, что изображения есть рациональные функции параметра преобразования Лапласа, который дает возможность вычислить их оригиналы, а следовательно, и оригиналы коэффициентов перемещения и напряжения в среде с помощью теории вычетов [3].

Получены формулы для изображений коэффициентов рядов по полиномам Гегенбауэра компонент перемещения и напряжения. Численные результаты представлены в виде графиков, которые показывают влияние отраженных от свободной поверхности волн на напряженно-деформированное состояние среды.

Литература

1. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.
2. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1985. – 423 с.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

Продолжение бианалитических функций многих комплексных переменных

¹Ишанкулов Т., ²Фозилов Д. Ш.

¹Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан
e-mail: tolibi@mail.ru

²Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий,
e-mail: davron_fozilov87@mail.ru

Пусть D – полицилиндр в комплексном n –мерном пространстве $\mathbb{C}^n$ переменных

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n), \quad z_k = x_k + iy_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

То есть $D = D_1 \times \dots \times D_n$, где D_k – плоские односвязные области с кусочно-гладкими границами ∂D_k . E_k – множества положительной меры на ∂D_k , $k = 1, \dots, n$. Остов полицилиндра D обозначим через

$\Gamma = \partial D_1 \times \dots \times \partial D_n$. Ясно, что $E_1 \times \dots \times E_n = E \subset \Gamma$.

Следуя П. Бургатти [1], приведем определение бианалитической функции:

Определение. Функция $w(z) = w(z_1, \dots, z_n) \in C^2(D)$ называется бианалитической в полицилиндре D если она удовлетворяет следующим $\frac{n(n+1)}{2}$ уравнениям с частными производными

$$\frac{\partial^2 w(z)}{\partial \bar{z}_k \partial \bar{z}_l} = 0, \quad k \leq l, \quad k, l = \overline{1, n}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + i \frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

Класс функций бианалитических в области D обозначим через $\Pi_2(D)$.

Рассматривается задача определения бианалитической функции $w(z) \in \Pi_2(D) \cap C^1(\bar{D})$ в полицилиндре D по её значениям и значениям производных первого порядка на множестве E :

$$w(z) = f_0(z), \quad \frac{\partial w(z)}{\partial \bar{z}_k} = f_k(z), \quad k = \overline{1, n}, \quad z \in E.$$

Здесь граничные значения функций в точках остова полицилиндра понимается как по координатное угловые пределы и:

$$f_0 \in C^1(E), \quad f_k \in C(E), \quad k = \overline{1, n}.$$

Задача (1), (2) является некорректной [2]. Решение единственно, но неустойчиво.

Для полианалитических функций одной комплексной переменной задача (1), (2) рассматривалась в [3]. Интегральная формула Коши для полианалитических функций одной переменной в первый получил Н. Теодореско [1]. Приведем аналог формулы Коши для бианалитических функций многих переменных в полицилиндре D .

Теорема 1. Для функции $w(z) \in \Pi_2(D) \cap C^1(\bar{D})$ имеет место формула

$$w(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \left[w(t) + \sum_{k=1}^n (\bar{z}_k - \bar{t}_k) \frac{\partial w(t)}{\partial \bar{t}_k} \right] \frac{dt}{t - z}, \quad z \in D.$$

Для аналитических функций одной комплексной переменной решение граничной задачи продолжения (1), (2) дает формула Карлемана [2]. В работе [4] получен формула Карлемана в подобласти полицилиндра. В данной работе используя результат работы [4], получен аналог формулы Карлемана для полианалитических функций, который дает решение задачи (1), (2) в подобласти полицилиндра.

Следуя [4], вводим обозначения:

$$h(z) = \sum_{k=1}^n h_k(z_k),$$

$h_k(z_k)$ — гармоническая мера $\partial D_k \setminus E_k$ относительно области D_k , $k = \overline{1, n}$. $B = \{z \in D : h(z) < 1\} \subset D$, $H = \text{int} B$ (внутренность B в $\mathbb{C}^n$), $g(z) = \sum_{k=1}^n g_k(z_k)$, $\text{Reg}_k = h_k$.

Теорема 2. Пусть бианалитическая в полицилиндре D функция $w \in \Pi_2(D) \cap C^1(\bar{D})$ удовлетворяет условиям (2). Тогда имеет место формула Карлемана

$$w(z) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_E \left[f_0(\zeta) + \sum_{k=1}^n (\bar{z}_k - \bar{\zeta}_k) f_k(\zeta) \right] \frac{e^{-\sigma[g(\zeta) - g(z)]}}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in H.$$

Литература

1. Балк М. Б. Полианалитические функции и их обобщения, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем. Фундам. направления 85, 187–246 (1991).
2. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа (Наука, М., 1980).
3. Ишанкулов Т., Фозилов Д. Ш. Продолжение полианалитических функций. Известия вузов. Математика 2021. №8, С. 37–45.
4. Gonchar A. A. On analytic continuation from the edge of wedge. Ann. Acad. Sci. Fennic. Ser. AI: Mathem. 10, 221–225 (1985).

Алгоритм решения одной игровой задачи со связанными переменными
Маматов А.Р.

*Самаркандский государственный университет имени Ш. Рашидова, 140100, Узбекистан,
 Самарканд, Университетский бульвар, 15,
 e-mail: akmm1964@rambler.ru*

Пусть имеется два игрока, которые выбирают векторы x и y соответственно из множеств

$$X = \{x \mid f_* \leq x \leq f^*\}, Y(x) = \{y \mid g_* \leq y \leq g^*, \quad Ax + By = b\},$$

поочередно, сначала первый игрок выбирает x , затем, зная x , второй игрок выбирает y с целями :

первого игрока - максимизировать функцию

$$\varphi(x) = \min_{y \in Y(x)} \Psi(x, y),$$

второго игрока - минимизировать $\Psi(x, y)$:

$$\Psi(x, y) = c'x + d'y, \text{ если } x \in X, y \in Y(x); \Psi(x, y) = +\infty, \text{ если } x \in X, Y(x) = \emptyset.$$

Здесь

$$\begin{aligned} c &= c(J), x = x(J), \quad f_* = f_*(J), \quad f^* = f^*(J) \in \mathbb{R}^n; \\ d &= d(K), y = y(K), g_* = g_*(K), g^* = g^*(K) \in \mathbb{R}^l; \\ b &\in \mathbb{R}^m, A = A(I, J) \in \mathbb{R}^{m \times n}, B = B(I, K) \in \mathbb{R}^{m \times l}, \text{rank } B < l; \\ I &= \{1, 2, \dots, m\}, J = \{1, 2, \dots, n\}, K = \{1, 2, \dots, l\}. \end{aligned}$$

Тогда имеем максиминную задачу со связанными переменными [1,2]:

$$\varphi(x) = \min_{y \in Y(x)} \Psi(x, y) \rightarrow \max_{x \in X} \quad (1)$$

Вектор $x \in X$ называется стратегией первого игрока, а вектор $y \in Y(x)$ — x -стратегией второго игрока.

Стратегия $\hat{x}$ первого игрока называется оптимальной, если $\varphi(x) \leq \varphi(\hat{x})$ для всех $x \in X$.

В работе [2] двойственными методами был исследован и разработан алгоритм решения задачи (1).

В данной работе предлагается совершенствованный вариант алгоритма [2], в котором значительно уменьшалось число математических операций для построения оптимальной стратегии первого игрока задачи (1).

Алгоритм иллюстрируется на примере при следующих значениях параметров задачи (1):

$$c' = (1; -1; 0), f_* = (-5; -30; 0), f^* = (3; 25; 40), d' = (1; 0; -1; 1; 5),$$

$$g_* = (-109; -6; -101; -10; -3), g^* = (44; 6; 298; 10; 15),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b = (5; 4), I = \{1, 2\}, J = \{1, 2, 3\}, K = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Литература

1. *Иванов Ю.П.* Двойственные полуигры, Известия АН СССР. Серия техническая кибернетика 1972. № 4. С. 3–9.

2. Маматов А.Р. Алгоритм решения одной игры двух лиц с передачей информации, Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, Т.46, № 10, С. 1784-1789.

Касательное напряжение сдвига при колебательном течении вязкоупругой несжимаемой жидкости в плоском канале

Наврузов К.¹, Шарипова Ш.Б.¹, Абдикаримов Н.И.¹, Бегжанов А.Ш.¹

¹ Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан ;
qurol_46@mail.ru, shshb1990@gmail.com, nabijon.88@mail.ru

Исследование колебательное течение вязкой и вязкоупругой жидкости в плоском и прямоугольном канале под действием гармонических колебаний расхода жидкости, могут быть применены в биологической механике, в частности для работы системы микрочипов. Эти системы предназначены для диагностики работы различных органов человека, а также адресной доставке к ним лекарственных препаратов. Кроме этого с целью обеспечения постоянного расхода жидкости, часто используется медико-биологических установках пневматические микронасосы с периодическим вытеснением жидкости из свободных объемов. В таких системах экономически выгодным могут быть установка с пульсирующим расходом. В связи с этим в данной работе, решены задачи колебательного течения вязкоупругой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями. Обозначены расстояния между стенками через $2h$. Ось ox проходит горизонтально в середине канала вдоль потока. Ось oy направлено перпендикулярно k оси ox . Течение вязкоупругой жидкости происходит симметрично по оси канала. Дифференциальное уравнение движения вязкоупругой несжимаемой жидкости в напряжении имеет следующие вид [1]

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (1)$$

где u -продольная скорость; p -давление; ρ -плотность; τ -касательная напряжения; t -время. Реологическое уравнения состояния жидкости принимается в виде уравнение Максвелла [2, 3]

$$\rho(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t})\tau(y, t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

Здесь λ -время релаксация; μ -динамическая вязкость. В (2) при $\lambda = 0$ получаем закон вязкого трения Ньютона. Подставляя (2) в уравнение движения для скорости жидкости, получаем

$$\rho(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u}{\partial t} = -(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

Считаем, что колебательное течение вязкоупругой жидкости происходит за счет заданного гармонического колебание расхода жидкости или продольной скорости осреднённой по сечению канала.

$$Q = a_Q \cos \omega t = \text{Re} a_Q e^{i\omega t}, \quad \langle u \rangle = a_u \cos \omega t = \text{Re} a_u e^{i\omega t}$$

где a_Q и a_u - амплитуды расхода жидкости и амплитуды продольной скорости осредненной по сечению канала. В данном случае течение происходит симметрично по оси канала, а стенке канала удовлетворяется условия прилипание. В силу линейности уравнение (1) продольной скорости, давление, касательное напряжение на стене можно записывать в следующем образом

$$u(y, t) = \text{Re} u_1(y) e^{i\omega t}, \quad p(x, t) = \text{Re} p_1(x) e^{i\omega t}, \quad \tau(t) = \text{Re} \tau_1 e^{i\omega t}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (3), получаем

$$\frac{\partial^2 u_1(y)}{\partial y^2} - \frac{\rho i \omega \eta^2(i\omega)}{\mu} u_1(y) = \frac{\eta^2(i\omega)}{\mu} \frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \quad (4)$$

Здесь $\eta^2(i\omega) = (1 + i\omega\lambda)$ Решения уравнение (4) будет

$$u_1(y) = \frac{1}{\rho i\omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{\cos(i^{\frac{3}{2}}\alpha_0\eta(i\omega)\frac{y}{h})}{\cos(i^{\frac{3}{2}}\alpha_0\eta(i\omega))} \right) \quad (5)$$

где $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu_0}}h$ - колебательное число Уомерсли (безразмерная частота колебаний); ν_0 - кинематическая вязкость раствора. С помощью решение (5) определяем передаточную функцию $W_{\tau,u}(i\omega)$ для касательного напряжения на стенки, как

$$W_{\tau,u_1}(i\omega) = \frac{h}{3\eta_0} \frac{\tau_1(i\omega)}{<u_1>(i\omega)} = -\frac{(i^{\frac{3}{2}}\alpha_0)^2 \sin(i^{\frac{3}{2}}\alpha_0\eta(i\omega))}{3(i^{\frac{3}{2}}\alpha_0\eta(i\omega) \cos(i^{\frac{3}{2}}\alpha_0\eta(i\omega)) - \sin(i^{\frac{3}{2}}\alpha_0\eta(i\omega)))} \quad (6)$$

Передаточная функция (6), иногда называется амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ). Эти функции позволяет определить изменение касательного напряжения сдвига при заданном законе изменение во времени продольной скорости осредненной по сечению канала.

Лителатура

1. *Casanellas L., Ortin J.* Laminar oscillatory flow of Maxwell and Oldroyd-B fluids J. Non-Newtonian Fluid. Mechanics. 166. (2011). – p.1315-1326.
2. *Ding Z., Jian Y.* Electrokinetic oscillatory flow and energy microchannelis: a linear analysis. J. Fluid. Mech., 2021.,vol. 919, A20. Doi:10.1017/j fm. 2021. 380 A20.1-31.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа.– М.: Дрофа, 2003.-840 с.

Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной спектральным методом

Нормуродов Ч.Б.,Турсунова Б.А.

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан,
e-mail: choribegaliyovich53@mail.ru

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан,
e-mail: barno.tursunova.2016@mail.ru

Проблема построения равномерно-сходящегося алгоритма численного решения двухточечной краевой задачи с малым параметром при старшей производной была поставлена и решена в [1] с помощью специальной разностной схемы с весами на равномерной сетке. В [2]-[4] метод предложенный в работе [1] распространяется на решение более сложных (параболических,многомерных) краевых задач. Численный счет на равномерной сетке плохо описывает пограничный слой, поскольку при достаточно малом параметре уже первый узел сетки лежит вне погранслоя. Так как для практических приложений важно знать структуру погранслоя, то разностную сетку нужно строить на равномерную, а сгущающуюся в области погранслоя. Рассмотрим следующую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной

$$v \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = x, u(0) = u(1) = 0 \quad (1)$$

Для решения задачи (1) ранее был применен разностный метод [5] с одним погранслоем возле границы отрезка. В этой работе для выделения пограничного слоя строится специальное отображение и с помощью которого получается монотонная разностная схема. В данной работе для решения уравнения (1) применяется спектральный метод [6]. В спектральном методе зоны пограничного слоя не выделяются и приближенное решение задачи ищется в виде конечного

ряда по полиномамы Чебышева первого рода. Известно, что полиномы Чебышева определены на отрезке $[-1, 1]$. Поэтому задачу (1) с помощью отображения

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y, x \in [0, 1], y \in [-1, 1]$$

записываем для отрезка $[-1, 1]$

$$v \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{2} \frac{du}{dy} = \frac{1}{8}(y+1), u(-1) = u(+1) = 0 \quad (2)$$

Приближенное решение задач (2) ищется в виде ряда

$$u(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(y) \quad (3)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{2}{c_n} \sum_{p=n+1(p+n \equiv 1 \pmod{2})}^N p a_p \right) T_n(y) \\ \frac{d^2 u}{dy^2} &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{c_n} \sum_{p=n+2(p \equiv n \pmod{2})}^N p(p^2 - n^2) a_p \right) T_n(y), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$c_n = 0, n < 0$$

$$c_0 = 2, n = 0$$

$$c_n = 1, n > 0.$$

Подставляя ряды (3),(4) в дифференциальное уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях полиномов имеем алгебраическую систему для определения коэффициентов ряда(3):

$$Ax = B \quad (5)$$

где

$$x^T = (a_0, a_1, \dots, a_N),$$

$$B^T = (b_0, b_1, \dots, b_N),$$

здесь A -заданная квадратная матрица, B - заданный вектор правой части. Решая систему (5) находим компоненты вектора x и по формуле (3) приближенное решение задачи (2).

Литература

1. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной.-Матем. Заметки,1969,т.6,вып.2.с.237-248
2. Титов В.А.,Шиликин Г.И. О численном решении параболического уравнения с малыми параметрами при производных по пространственным переменным.- Разностные методы решения краевых задач с малым параметром и разрывными краевыми условиями, Свердловск, 1976. С.38-43.
3. Емельянов Н.В. Разностная схема для трехмерного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных.- Краевые задачи для уравнений математической физики, Свердловск, 1973. с.30-42.
4. Шиликин Г.И. Численное решение эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных.- Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, Б.и.,1979,т.10,№ 4, с.107-124.

5. Лисейкин В.Д., Яненко Н.Н. О равномерно-сходящемся алгоритме численного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной.- Численные методы механики сплошной среды, Новосибирск, 1981, т.12, №2, с.45-56.
6. Абуталиев Ф. Б., Нармурадов Ч. Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости, Ташкент, Fan va texnologiya, 2011. 188 с.

Собственные колебания трубопроводов кругового поперечного сечения с внешним трением

¹Сафаров И.И., ²Тешаев М.Х., Болтаев З.И., Ахмедов М.Ш., ³Жураев Ш.И.

¹ Ташкентский химико-технологический институт,

² Бухарский инженерно-технологический институт

³ Бухарский государственный университет.

Исследование колебаний трубопроводов, находящихся в упругой среде рассмотрены различными методами. В настоящей работе колебания трубопроводов моделируются как цилиндрическое тело с радиусом $\bar{r}$ и R , находящегося в деформируемой среде. Среда заменяется вязким демпфером в радиальном и касательном направлениях. Основной целью работы, является исследование собственных колебаний цилиндра с внешним трением. При исследовании выше определены оптимальные значения коэффициентов демпфирования, при которых колебания трубопроводов максимально затухают

Рассмотрим задачу о колебаниях бесконечного упругого цилиндра с внешним трением на границе (рис.1). Замкнутая система уравнений свободных малых колебаний упругого цилиндрического тела имеет вид:

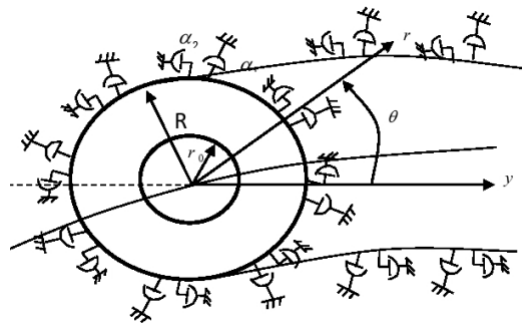


Рис.1 Расчетная схема цилиндрических тел с вязким внешним трением.

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2},$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

где $\vec{u}$ - вектор перемещений; λ, μ - коэффициенты Ламе; ρ - плотность цилиндра; σ_{ij} - тензор напряжений; ε_{ij} - тензор деформаций. На части границы r_0 заданы перемещения $\vec{u} = 0$; на части R - напряжения $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$. А также заданы начальные условия:

$$\vec{u}|_{t=0} = 0; \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим задачу в цилиндрической системе координат (r, θ, z) . Предполагая, что координата z не влияет на процесс колебаний, получим систему уравнений, распадающуюся на две независимые задачи [1]:

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = f,$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right); \sigma_{\theta z} = \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad (3, a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} - \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} &= f_r \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} - \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} &= f_\theta, \\ \sigma_{rr} &= 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right). \end{aligned} \quad (3, b)$$

С краевыми условиями при $r = R$:

$$\sigma_{rz} = -\alpha \frac{\partial u_z}{\partial t}; \sigma_{rr} = -\alpha_1 \frac{\partial u_r}{\partial t}; \sigma_{r\theta} = -\alpha_2 \frac{\partial u_\theta}{\partial t}, \quad (3, c)$$

где R – радиус цилиндра; $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ – параметры внешнего трения. При $r_0 = \varepsilon \rightarrow 0$:

Тогда назовем краевую задачу (3,а) – анти плоской, а (3,б) – плоской или задачей о плоских колебаниях цилиндра.

Собственные колебания. Назовем собственными колебаниями упругого цилиндра решение краевой задачи (2 и 3,а) ($f=0$) для анти плоского случая вида:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_r(r) \\ \sigma_\theta(r) \\ v(r) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (4)$$

где $\sigma_{rr}(r), \sigma_{r\theta}(r), s_{rr}(r), s_{r\theta}(r), v_r(r), v_\theta(r)$ – неизвестные функции радиальной формы колебаний; $\omega = \omega_R + i\omega_I$ – комплексная собственная частота колебаний цилиндра, действительная часть которой характеризует частоту колебаний цилиндра, а мнимая часть (ω_I) – скорость затухания, $n=0, 1, 2, \dots$ [1]. Подставляя представление (4) в уравнения (2) и краевые условия (3), получим спектральную задачу для (двух) обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенную относительно первых производных по радиальной координате r : для случая плоских колебаний.

При $\alpha \neq -1$ существует счетное множество собственных значений, определяемых с помощью многозначной функции логарифма:

$$i\omega_n = \lambda_n = \frac{1}{1-a} \left\{ \ln \left| \sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \right| + \begin{cases} 2\pi n i & \alpha > 1 \\ 2\pi(n+1)i & \alpha < 1 \end{cases} n = 0, \pm 1, \pm 2 \right\}$$

Значит нули характеристического определителя $\Delta(i\omega)$ асимптотически простые и отделены друг от друга некоторым положительным δ их действительные части одинаковы, а мнимые отстоят друг от друга на 2π .

Литература

1. Авлиякулов Н.Н., Сафаров И.И. Современные задачи статики и динамики подземных трубопроводов. Ташкент, Fan va texnologiya 2007. 306 с.

Вычисления поля скоростей фильтрации переноса веществ в цилиндрической двухзонной среде

Сулаймонов Ф.У., Абдукодирова М.

Джизакский государственный педагогический университет

e-mail: fozil.sulaymonov@mail.ru

РПоставлена и численно решена задача переноса вещества и движения жидкости в цилиндрической двухзонной среде с учетом неоднородного распределения поля скоростей фильтрации. Математическое описание движения жидкости и переноса вещества в цилиндрической двухслойной среде при упругом режиме включает в себя следующие уравнения:

$$\theta_1 \frac{\partial c_1}{\partial t} + v_{1x} \frac{\partial c_1}{\partial x} + v_{1r} \frac{\partial c_1}{\partial r} = \theta_1 D_1 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} \right\}, \quad (r, x) \in \Omega_1, \quad (1)$$

$$\theta_2 \frac{\partial c_2}{\partial t} + v_{2x} \frac{\partial c_2}{\partial x} + v_{2r} \frac{\partial c_2}{\partial r} = \theta_2 D_2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2} \right\}, \quad (r, x) \in \Omega_2, \quad (2)$$

где θ_1 и θ_2 – пористости; c_1, c_2 – объемные концентрации; D_1, D_2 – коэффициенты диффузии в Ω_1 и Ω_2 , соответственно (здесь и далее 1 – макропора, 2 – окружающая пористая среда).

Начальные и граничные условия для (1) – (2) имеют вид:

$$c_1(0, r, x) = 0, \quad c_2(0, r, x) = 0, \quad (3) \quad c_1(t, 0, 0) = c_0, \quad c_0 = \text{const}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial x}(t, r, 0) = 0, \quad 0 < r \leq a, \quad (5) \quad \frac{\partial c_1}{\partial x}(t, r, \infty) = 0, \quad 0 < r \leq a, \quad (6)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial r}(t, 0, x) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (7) \quad \frac{\partial c_2}{\partial x}(t, r, 0) = 0, \quad a < r \leq b, \quad (8)$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial x}(t, r, \infty) = 0, \quad a < r \leq b, \quad (9) \quad \frac{\partial c_2}{\partial r}(t, b, x) = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (10)$$

$$D_1 \theta_1 \frac{\partial c_1}{\partial r}(t, a, x) = D_2 \theta_2 \frac{\partial c_2}{\partial r}(t, a, x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (11)$$

$$c_1(t, a, x) = c_2(t, a, x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (12)$$

Система уравнений (1), (2) решается при условиях (3) – (12) с учетом неоднородного распределения поля скоростей фильтрации. Эта задача решается при известных значениях компонента скорости фильтрации, которые определены в [2],[3].

Для решения задачи (1) – (2) применим метод конечных разностей [1].

Приведена серия вычислительных экспериментов при следующих значениях исходных параметров:

$\mu = 10^{-1}$ Па·с, $\beta^* = 10^{-9}$ Па $^{-1}$, $k_1 = 10^{-14} \div 2,5 \cdot 10^{-14}$ м 2 , $k_2 = 10^{-15} \div 2,5 \cdot 10^{-15}$ м 2 , $\theta_1 = 0,2$, $\theta_2 = 0,01$, $D_1 = 2,5 \cdot 10^{-5} \div 5 \cdot 10^{-5}$ м 2 /с, $D_2 = 2,5 \cdot 10^{-6} \div 5 \cdot 10^{-6}$ м 2 /с, $c_0 = 0,01$, $p_c = 1,5 \cdot 10^5$ Па, $p_0 = 0$ Па, $T = 2700$ с, $h_1 = 0,1$ м, $h_2 = 0,05$ м, $\tau = 1$ с, $L = 4$ м, $r_0 = 0,05$ м, $R = 0,25$ м.

По этих указанных значениях параметра определено 2-х и 3-х мерная векторная поля скоростей фильтрации переноса веществ в неоднородной пористой среде. От полученных результатов расчета заметно, что распределения концентраций при различных временах фронт продвижения концентрации намного отстает от фронта продвижений скорости и давления.

Распределение давления, скорости и концентрации при увеличении значений коэффициента проницаемости k_1 и k_2 приводит к ускорению продвижения фронта давления. Исходя, из этого можно сделать вывод о значительности влияния проницаемости на распределения давления и скорости вещества в пористой среде. При этом на распространение концентраций изменение коэффициентов проницаемостей особого влияния не оказывает [3].

Обобщая полученные результаты можно заключить, что наличие зон с различными характеристиками существенно меняет как фильтрационные характеристики среды, так и параметры переноса вещества.

Литература.

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
2. Хужайёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Сулаймонов Ф.У. Задача переноса вещества в цилиндрической среде с цилиндрической макропорой // Журнал кДоклады академии наук Республики Узбекистанъ е6, 2010. Ташкент. С.30-33.

3. Хужаёров Б.Х., Махмудов Ж.М., Сулаймонов Ф.У. Фильтрация и перенос вещества в цилиндрической двухзонной среде с учетом неоднородности поля скоростей фильтрации. Узбекский журнал "Проблемы механики". – Ташкент, 2018. – № 4. – С. 43-48 .

Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления интегралов Фурье

¹Хаётов А., ²Курбонназаров А.

¹Институт математики им. В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан,
e-mail: hayotov@mail.ru

²Институт математики им. В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан,
e-mail: mumini_1974@inbox.ru

При решении многих прикладных задач интегралы Фурье соответствующих функций имеют существенный роль. Как известно, коэффициенты и интегралы Фурье большинство функций вычисляются приближенно. При этом для приближенного вычисления коэффициентов и интегралов Фурье могут быть использованы квадратурные формулы разного типа.

Настоящая работа посвящена получению оптимальной квадратурной формулы для приближенного вычисления интегралов Фурье.

В связи с этим рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} f(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C_{\beta} f(x_{\beta}), \quad (1)$$

где $x_{\beta} = h\beta$ – узлы, $\beta = \overline{0, N}$, $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $\omega \neq 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, C_{β} – коэффициенты квадратурной формулы (1). Предположим, что функция f принадлежит пространству $K_2(P_2)$, которая является гильбертовым и определяется следующим образом

$$K_2(P_2) = \{f(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f - \text{абсолютно непрерывная, } f' \in L_2(0, 1)\},$$

Скалярное произведение двух функций f и g из этого пространства определяется как

$$\langle f, g \rangle_{K_2(P_2)} = \int_0^1 (f''(x) - f(x)) (g''(x) - g(x)) dx. \quad (2)$$

Соответствующая норма записывается следующим образом

$$\|f\|_{K_2(P_2)} = \left(\int_0^1 (f''(x) - f(x))^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Погрешность квадратурной формулы (1) определяет линейный функционал, так называемой *функционалом погрешности* формулы (1), над пространством $K_2(P_2)$. Коэффициенты, которые дают наименьшее значение нормы функционала погрешности, называются *оптимальными коэффициентами*, и соответствующая формула называется *оптимальной квадратурной формулой*.

В настоящей работе для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы (1) получена следующая система линейных уравнений

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} G_2(h\beta - h\gamma) + d_1 \sinh(h\beta) + d_2 \cosh(h\beta) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} G_2(x - h\beta) dx,$$

$$\sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \sinh(h\gamma) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \sinh(x) dx, \quad \sum_{\gamma=0}^N C_{\gamma} \cosh(h\gamma) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \cosh(x) dx,$$

где

$$G_2(x) = \frac{\text{sign}(x)}{4} (x \cosh(x) - \sinh(x))$$

Доказаны существование и единственность решения данной системы и получены следующие явные формулы для оптимальных коэффициентов

$$C_0 = q_c - \frac{\cosh 1}{\sinh 1} q_s - \sum_{\gamma=1}^{N-1} C_{\gamma} \cdot \frac{\sinh(1 - h\gamma)}{\sinh 1},$$

$$C_{\beta} = T(\omega) \cdot e^{2\pi i \omega h \beta} + \lambda_1^{\beta} \cdot m + \lambda_1^{N-\beta} \cdot n, \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$C_N = \frac{1}{\sinh 1} q_s - \frac{1}{\sinh 1} \sum_{\gamma=1}^{N-1} C_{\gamma} \cdot \sinh(h\gamma),$$

здесь

$$q_s = \frac{e^{2\pi i \omega} (\cosh 1 - 2\pi i \omega \cdot \sinh 1) - 1}{4\pi^2 \omega^2 + 1}, \quad q_c = \frac{e^{2\pi i \omega} (\sinh 1 - 2\pi i \omega \cdot \cosh 1) + 2\pi i \omega}{4\pi^2 \omega^2 + 1},$$

$T(\omega)$ и λ_1 — известные величины.

Моделирование и численное исследование влияния геометрии сопла на параметры факела

¹Ходжиев С., ²Авезов А.Х.

^{1,2}Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,

e-mail: ¹s.hodjiev@buxdu.uz, ²a.x.avezov@buxdu.uz

Самым актуальным является метод исследования горения неперемещаемых реагирующих газов, описанием его математической модели и численное решения эффективными методами и алгоритмами а также применением мощных современных ЭВМ.

В данной работе приводятся некоторые численные результаты исследования горючей смеси пропано-бутана вытекающую из прямоугольного сопла разными соотношениям сторон и распространяющуюся в спутном (затопленном) потоке воздуха.

Полную картину течения можно получить применением основные уравнения теории трехмерных струй реагирующих газов, может быть представлено в физических координатах в следующей форме [1,2].

Уравнение смеси для газов:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

Уравнение движения по координате x :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\mu_T \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_T \frac{\partial u}{\partial z}),$$

Уравнение движения по координате y :

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu_T \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_T \frac{\partial v}{\partial z}) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} (\mu_T \frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_T \frac{\partial w}{\partial y}).$$

Уравнение движения по координате z :

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_T \frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu_T \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu_T \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_T \frac{\partial v}{\partial y})).$$

Уравнение переноса энергии:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} + \rho w \frac{\partial H}{\partial z} = & \frac{1}{Pr_T} \frac{\partial}{\partial y} (\mu_T \frac{\partial H}{\partial y}) + \frac{1}{Pr_T} \frac{\partial}{\partial z} (\mu_T \frac{\partial H}{\partial z}) + (1 - \frac{1}{Pr_T}) [\frac{\partial}{\partial y} (\mu_T u \frac{\partial u}{\partial y}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_T u \frac{\partial u}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_T v \frac{\partial v}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu_T w \frac{\partial w}{\partial y})] + (\frac{4}{3} - \frac{1}{Pr_T}) [\frac{\partial}{\partial y} (\mu_T v \frac{\partial v}{\partial y}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_T w \frac{\partial w}{\partial z})] - \frac{\partial}{\partial y} (\frac{2}{3} \mu_T v \frac{\partial w}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mu_T v \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu_T w \frac{\partial w}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z} (\frac{2}{3} \mu_T w \frac{\partial v}{\partial y}). \end{aligned}$$

Полная энтальпия:

$$H = c_p T + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \sum_{i=1}^{N_k} C_i h_i^*.$$

Уравнение состояния газовой смеси:

$$P = \rho T R \sum_{i=1}^{N_k} \frac{C_i}{m_i}.$$

Для трехмерной случае уравнении концентрации i -й компонент имеет вид:

$$\rho u \frac{\partial C_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial C_i}{\partial y} + \rho w \frac{\partial C_i}{\partial z} = \frac{\partial C_i}{\partial z} = \frac{1}{Sc_T} (\mu \frac{\partial C_i}{\partial y}) + \frac{1}{Sc_T} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial C_i}{\partial z}) = \dot{\omega}_i.$$

Численные результаты получены по методу и алгоритма расчета приведенные в работах [1,2]. Для вычисления турбулентной вязкости использован "К - Е" модели турбулентности [1,2].

Параметры горючей струи и окислителя на срезе сопла задавались однородными и ступенчатыми значениями, давления между собой равны.

Рассматривалось диффузионное горение смеси пропана-бутана в воздухе со следующими исходными данными:

1. I. В зоне окислителя: $U_i = 0$ (5, 10, 18, 25/), $T_1 = 300K$; $(C_1)_1 = 0,232$; $(C_2)_1 = 0$; $(C_3)_1 = 0$; $(C_4)_1 = 0,88$.
2. II. В зоне окислителя: $U_2 = 61/$; $T_2 = 1200K$; $(C_1)_2 = 0$; $(C_2)_2 = 0,12$; $(C_3)_2 = 0$; $(C_4)_2 = 0,88$.

С точки зрения математического расчета, рассмотрим четырёхкомпонентную смесь газов в зоне смешения состоящую из кислорода $_2$ - индекс "1 смеси пропана-бутана ($_{38} + _{410}$) - "2 продуктов горения $_2 + _{92}$ - "3 инертного газа N_2 - "4".

Численные исследования проведены при соотношения длин сторон как (1:1); (1:2), (1:3) и (1:4).

Выявлено, что при отношение сторон длин сопла (1:2) и отношение скоростей окислителя горючего и в пределе $0 \leq u_1/u_2 \leq 0,41$ длина факела увеличивается, а дальнейшее увеличение приводит к укорачивание длины факела, что подтверждается экспериментальными данными.

Численные результаты показали, что в случае соотношения сторон сопла (1:4) и при разных входных условиях тангенциальной скорости при одинаковых исходных значениях доугих параметров струи и окислителя приводит к уменьшению длина факела при неполных $u_2 = 6,1/$.

1. *Ходжиев С., Аvezов А.Х., Муродов Ш.Н.* Численное моделирование трехмерных турбулентных струй реагирующих газов, истекающих из сопла прямоугольной формы, на основе алгебраической модели турбулентности. *Узбекский журнал "Проблемы информатики и энергетики"*. 2007. № 3.
2. *Ходжиев С., Аvezов А.Х., Муродов Ш.Н.* Численное моделирование трехмерных турбулентных струй реагирующих газов, истекающих из сопла прямоугольной формы, на основе " ϵ " модели турбулентности. *Научный вестник Бухарского государственного университета*. 2007. № 3. С. 81–87.

Численные результаты исследования струи на основе полной системы уравнений Навье - Стокса истекающие из коаксиальной щели

¹Ходжиев С., ²Аvezов А.Х.

^{1,2}Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,
e-mail: ¹s.hodjiev@buxdu.uz, ²a.x.avezov@buxdu.uz

Актуальность исследования струи, истекающие из коаксиальной щели, распространяющейся в комбинированном плоском канале, связаны широким применением в ракетной - космической техники, нефти - газовой промышленности, химической технологии, при создании смесительных, топочных устройств, решения задач экологии как выброса вредных веществ в атмосфере. Экспериментальные исследования сопряжено ряд трудностей связанные с малыми размерами сечения канала, вредности газовых потоков, а также он дорог, долговременен и опасен и т.п. Поэтому иногда основным инструментом является исследование таких течений с помощью описанием объекта его математической модели.

В данной работе приводятся и анализируются численные результаты исследования струи, истекающей из коаксиальной щели, распространяющейся в расширяющемся плоском канале.

При этом из центральной щели истекают струи основного потока, а по периферии - спутный поток воздуха. На входе в канал исходные значения параметров были заданы однородными и ступенчатыми значениями.

Для описание такого процесса используем нестационарные полные системы уравнений Навье - Стокса [1]. Граничные и начальные условия, а также метод и алгоритм расчета аналогичные как в работе [1 ÷ 2]. На основе составленной программы проведены многочисленные численные исследования, некоторые варианты из них приведены в таблице. При исследовании канал предполагался симметричным и течение рассматривался в области ограниченной осью симметрии и одной из стенок канала. Обозначениях f_0 полувысота входного сечения канала, R_1 - полувысота основного (центрального) потока (струи). В вариантах нижний индекс 1- указывает параметр основной струи, а 2 пристенной струи, L - длина канала. Безразмерная форма канала задавался в виде $f(x) = x + 1$ ($x = 0$ входное сечение, $x = 1$ выходное сечение канала).

N/N	$\varphi_1 = U_2/U_1$	$\varphi_2 = R_1/f_0$	$\varphi_3 = L/f_0$	$\varphi_4 = T_2/T_1$	$\varphi_5 = P_2/P_1$
1	44,4285	0,5	10	1	1
2	44,4285	0,26	10	1	1
3	71,4285	0,26	10	1	1
4	44,4285	0,26	5	1	1
5	44,4285	0,5	5	1	1
6	1,6077	0,26	10	1	1
7	1,6077	0,5	10	1	1
8	1,6077	0,5	5	1	1
9	10,6077	0,26	5	1	1

Результаты приводятся в виде графиков. Можно отметить, что развитие течения в расширяющемся канале при наборе параметров, приведенные в таблице, зоны рециркуляции не прослеживаются, скорости, температура плавно изменяются по поперечному направлению вдоль канала.

При входных щелях $R_1/f_0 = 0,5$ распределение продольной скорости и температуры на различных расстояниях вдоль канала плавно меняются. На варианте 2) поперечное изменение скорости плавное, т.е. в ядре потока скорость имеет максимальное значение, а на границе смешения наблюдается асимптотическое возрастание. При этом давление в зоне смешения двух потоков, из-за торможения скорости основного потока возрастает, а на стенке имеет максимум при $\bar{x} = 0.1$, а вдоль канала скорость падает и принимает постоянное значение. При варианте 3) соотношение щелей $R_1/f_0 = 0,26$ и скорости основного потока $U_1 = 500$, судя по результату графика, можно сказать, что при смешении и распространении двух потоков границы зоны смешения затяжные, т.е. шире, чем в предыдущем варианте, ядро струи меньше, а поперечные профили температуры в зоне смешения двух потоков увеличиваются. Это можно объяснить тем, что в зоне смешения двух потоков из-за трения двух вязких газов увеличивается температура, что приводит к уменьшению размеров зоны смешения основного потока. Это также можно заметить из осевого изменения продольной скорости. При небольших $\varphi_3 = 5$ (варианты 4) и 5)) при меньших значениях соотношение щелей наблюдается образование меньшего ядра струи и быстрое убывание осевого значения скорости при постоянных исходных значениях других параметров.

Численные результаты показали, что при небольших отношениях скоростей спутных потоков, $\varphi_1 = 1,6077$ (варианты 6 ÷ 9) поперечное распределение продольной скорости на выходе канала ($\bar{x} = 1$) при $R_1/f_0 = 0,5$ "кривые" более пологие, чем при $R_1/f_0 = 0,26$. Это объясняется тем, что увеличение входного размера основного потока приводит к расширению зоны смешения и к развитому течению.

Литература

1. *С.Ходжиев, З.Ш.Жумаев, О.О.Едгоров.* Численный расчет внутренних течений сжимаемого газа по неявно факторизованной разностной схеме. Изв.АН УзССР. Сер.техн.наук. Ташкент: Фан. 1990, №2, с. 28-34.
2. *Бил Р.М., Уорминг Р.Ф.* Неявная факторизованная разностная схема для уравнения Навье - Стокса течения сжимаемого газа. -Ракетная техника и космонавтике, 1978, №4, с. 145-150.
3. *С.Ходжиев, А.Х.Авезов, Ш.Н.Муродов.* Численное моделирование трехмерных турбулентных струй реагирующих газов, истекающих из сопла прямоугольной формы, на основе " - ε" модели турбулентности // Научный вестник Бухарского государственного университета. 2007.№3. С.81-87.

Численные решения уравнения Бюргерса для вязкого течения

¹Ходжиев С., ²Салимов Ф., ³Жамолов У.

¹Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,

²Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

e-mail: feruz2642198@gmail.com

³Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан

e-mail: jamolovutkir2001@gmail.com

Появление современных мощных вычислительных технологий и математического моделирования позволили широко исследовать любую отрасль науки и техники. На основе этого подхода лежит в замене исходного объекта его "образом математической моделью и дальнейшим изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов.

Математическая модель исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важные предпосылочные знания об объекте и является эффективным, иногда является единственным методом исследования некоторых объектов (процессов). Конечно процесс можно изучать натурным экспериментом, которое долго, дорог, часто либо ..., либо попросту невозможно, иногда многие из этих систем существуют в ограниченном экземпляре. Поэтому математическое моделирование является неизбежной составляющей научно-технического прогресса.

Основные уравнения гидроаэродинамики получены применением фундаментальных законов сохранения, как энергии, материи и импульса. Вместе эти законы в общем виде образуют системы нелинейных уравнений второго порядка. Обычно для описания вязких течений используется полная нестационарная система уравнений Навье-Стокса. Необходимо отметить, что численное интегрирование полной системы уравнений Навье-Стокса представляет собой чрезвычайно сложную и трудоёмкую задачу, решение которой находится на пределе возможностей современных ЭВМ, даже в случае расчета течений однородного вязкого газа.

В связи с этим важную роль играют так называемые приближенные модели, которые строятся на основе полных уравнений Навье-Стокса с использованием тех или иных допущений, отражающих специфические особенности конкретных процессов. Хотя эти модели, конечно, не обладают универсальностью, присущей полной системе уравнений Навье-Стокса, однако в тех случаях, когда принятые при их построении допущения выполняются, использование приближенных моделей является не только вполне оправданным, но и более целесообразным, чем применение полных уравнений Навье-Стокса.

Одна из модельных уравнений является уравнение Бюргерса. Оно используется для изучения свойств решений более сложных уравнений в частных производных. Эти уравнения имеют аналитические решения при некоторых граничных и начальных условиях. Зная эти решения, легко оценить и сопоставить различные конечно-разностные методы, используемые для решения более сложных уравнений в частных производных. Уравнение Бюргерса включает в себя члены, описывающие те же физические процессы что члены, входящие в уравнение гидроаэродинамики, т.е. конвективный, диффузионный или диссипативный и нестационарные члены.

Полное нелинейное уравнение Бюргерса имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

и является параболическим уравнением в частных производных.

Здесь, первое и второе слагаемые в левой части этого уравнения являются соответственно нестационарным и конвективным членами, а в правой части состоит вязкий член. Уравнения Бюргерса используется как модельное для уравнений пограничного слоя, "параболизированных" уравнений Навье-Стокса и полных уравнений Навье-Стокса. Для уравнения Бюргерса существуют точные аналитические решения, при некоторых начальных и граничных условиях уравнения Бюргерса схожи по виду с уравнениями нестационарного одномерного течения вязкой жидкости, с тем, однако, существенным упрощением. Многочисленные конечно-разностные методы разработанные для уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

т.е. множитель a в конвективном члене принят заранее известным.

С помощью уравнения (1) можно исследовать возможные скорости, т.е. распространение газа по маршевой координате X (ν – кинематическая вязкость).

Для численного решения уравнения (1) рассмотрим задачу газового потока истекающего из источника со скоростью u_0 и распространяющегося на расстоянии h . Уравнение (1) можно решать с помощью следующих граничных и начальных условий:

$$x = 0; \quad u(0; t) = u_0, \quad (3)$$

$$0 < x \leq L; \quad (x; t_0) = u_1. \quad (4)$$

Для численного решения уравнения (1) с условиями (3) и (4) обезразмериваем с помощью следующих масштабов длин, скорости и времени соответственно $L, u_0, L/u_0$ получим

$$\bar{x} = x/L; \quad \bar{u} = u/u_0, \quad \bar{t} = t/(L/u_0)$$

В безразмерном виде уравнение (1) имеет вид ν для привычности неизвестных черты над ними опускаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

где $Re = \frac{u_0 L}{\nu}$ - число Рейнольдса.

Граничные и начальные условия в безразмерном виде имеют вид:

$$x = 0 : u(0; t) = 1, \quad (7)$$

$$0 < x < 1 : u(x; t_0) = u_1/u_0 \quad (8)$$

В данной работе в частности приводятся результаты численного исследования решения уравнения Бюргерса (1) методом разностей вперед по времени и центральных разностей по пространству.

Полученная разностная схема имеет вид:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{1}{Re} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Это - явная одношаговая схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta x, (\Delta x)^2)$. Решение удобно написать в виде:

$$u_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{Re(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_i^n (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + u_i^n$$

Очень полезным параметром, который естественно появляется при численном решении уравнения Бюргерса, оказывается число Рейнольдса Re . Этот безразмерный параметр, характеризующий отношение конвекции к диффузии, играет важную роль при определении характера решения уравнения Бюргерса.

В данной работе устойчивость устойчивости накладывается на величину Re и выбор временного шага по условию

$$\Delta t \leq \min \left[\frac{(\Delta x)^2}{2\nu}; \frac{\Delta x}{|u^{n+1}|} \right]$$

который обновляется после каждой временной итерации.

Учитывая характерной особенностью аппроксимации является её многовариантность. Нами было рассмотрены варианты аппроксимации члена $\partial u / \partial x$ в некотором узле $x_i = i\Delta x$ равномерной разностной сетки с шагом Δx были выбраны в соответствии с принятым шаблоном, следующими выражениями

$$\begin{aligned} & 1) \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}; \quad 2) \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}; \quad 3) \frac{-3u_i + 4u_{i+1} - u_{i+2}}{2\Delta x} \\ & 4) \frac{3u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{2\Delta x}; \quad 5) S \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + (1 - \rho) \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \end{aligned}$$

Хорошие сходимые решения получены при одних и тех же параметрах исследования вариантах 3) и 4) и при $S = 0, 5, \rho = 0, 6$ вариантам 5. Вариантах 1) и 2) не всегда получаются сходимые решения.

Достоверность результатов было сопоставлены с точным решением уравнения Бюргерса с частным случаем.

Алгоритм построения оптимальных квадратурных формул с производными для приближенного вычисления интегралов Абеля в пространстве $L_2^{(3)}(0, t)$.

^{1,2} Шадиметов Х.М., ³ Далиев Б.С.

¹ *Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан*

² *Институт математики им. В.И. Романовского, Ташкент, Узбекистан,*

³ *Ферганский политехнический институт, Фергана, Узбекистан,*

e-mail: kholmatshadimetov@mail.ru, b.daliyev@ferpi.uz, bahtiyorjon@inbox.ru .

Уравнения вида $f(x) = \int_0^x \frac{\varphi(s)ds}{(x-s)^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ называют обобщенным интегральным уравнением Абеля. Решения обобщенного интегрального уравнения Абеля имеет вид

$$\varphi(s) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{s^{1-\alpha}} + \int_0^s \frac{f'(z)dz}{(s-z)^{1-\alpha}} \right].$$

Наша цель является в последнем равенстве с большой точностью вычислить интеграл. Для этого рассмотрим квадратурную формулу с производными следующего вида

$$\int_0^t \frac{\varphi(x)dx}{(t-x)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^N \left(C^{(0)}[\beta] \varphi(h\beta) + C^{(1)}[\beta] \varphi^{(I)}(h\beta) + C^{(2)}[\beta] \varphi^{(II)}(h\beta) \right) \quad (1)$$

В этом случае квадрат нормы функционала погрешности запишем в виде

$$\begin{aligned} \|l|L_2^{(3)*}\|^2 = & - \sum_{\beta'=0}^N \sum_{\beta=0}^N \sum_{\nu=0}^2 \sum_{\nu'=0}^2 C^{(\nu)}[\beta] C^{(\nu')}[\beta'] \frac{(h\beta - h\gamma)^{5-\nu-\nu'} \text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2 \cdot (5 - \nu - \nu')!} \\ & + 2 \sum_{\beta=0}^N C^{(\nu)}[\beta] \sum_{\nu=0}^2 (-1)^\nu f_3^{(\nu)}[\beta] - \frac{t^{2\alpha+5}}{[\alpha+5]!(\alpha+5)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$f_3^{(\nu)} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{5-\nu} \frac{(-1)^{\nu+j} (h\beta)^{4-j} t^{\alpha+j}}{(4-\nu-j)! [\alpha+j]!} + \frac{(t-h\beta)^{5+\alpha-\nu}}{[\alpha+5-\nu]!}$$

где $h = \frac{t}{N}$, $N = 2, 3, \dots$, $[\alpha+5]! = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)(\alpha+5)$. Квадрат нормы (2) минимизируем по коэффициентам $C^{(2)}[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$.

Для этого составим функцию Лагранжа

$$\Lambda = \|l|L_2^{(3)*}(0, t)\|^2 + \lambda_2 \left(\sum_{\beta=0}^N C^{(2)}[\beta] - \frac{2t^{\alpha+2}}{[\alpha+2]!} + \sum_{\beta=0}^N \left(\overset{\circ}{C}^{(0)}[\beta](h\beta)^2 + \overset{\circ}{C}^{(1)}[\beta](h\beta) \right) \right).$$

Вычисляя частные производные и приравняв к нулю получим

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial C^{(2)}[\beta]} = 0, \quad \beta = 0, 1, \dots, N,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_2} = 0.$$

Эти равенства дают нам систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $C^{(2)}[\beta]$ и λ_2 .

$$\sum_{\beta'=0}^N C^{(2)}[\beta] \frac{|h\beta - h\beta'|}{2} + \lambda_2 = F_2[\beta], \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (1)$$

$$\sum_{\beta=0}^N C^{(2)}[\beta] = \frac{2t^{\alpha+2}}{[\alpha+2]!} - \sum_{\beta=0}^N \left(\overset{\circ}{C}^{(0)}[\beta](h\beta)^2 + \overset{\circ}{C}^{(1)}[\beta](h\beta) \right). \quad (4)$$

Здесь

$$F_2[\beta] = f_3^{(2)}[\beta] - \sum_{i=0}^1 (-1)^i \sum_{\gamma=0}^N \overset{\circ}{C}^{(i)}[\gamma] \frac{(h\beta - h\gamma)^{3-i} \text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2(3-i)!}, \quad (5)$$

$$f_3^{(2)}[\beta] = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \frac{(-1)^j (h\beta)^{3-j} t^{\alpha+j}}{(3-j)! [\alpha+j]!} + \frac{(t-h\beta)^{\alpha+3}}{[\alpha+3]!}. \quad (6)$$

Решение системы (3)-(4), которые мы обозначим $\overset{\circ}{C}^{(2)}[\beta]$, $\overset{\circ}{\lambda}_2$ представляют собою стационарную точку для функции Лагранжа Λ .

Теорема. Оптимальные коэффициенты $\overset{\circ}{C}^{(2)}[\beta]$, $\beta = 0, 1, \dots, N$ квадратурных формул вида (1) в пространстве Соболева $L_2^{(3)}(0, t)$ имеют вид

$$\overset{\circ}{C}^{(2)}[0] = h^{-1} \left[F_2[1] - F_2[0] + \frac{hP}{2} \right],$$

$$\overset{\circ}{C}^{(2)}[\beta] = h^{-1} [F_2[\beta+1] - 2F_2[\beta] + F_2[\beta-1]],$$

при $\beta = 1, 2, \dots, N$,

$$\overset{\circ}{C}^{(2)}[N] = \frac{P}{2} + h^{-1} [F_2[N-1] - F_2[N]].$$

Остальные оптимальные коэффициенты т.е. $\overset{\circ}{C}^{(0)}[\beta]$, $\overset{\circ}{C}^{(1)}[\beta]$ приведены в [1].

References

1. *Kh. M. Shadimetov, B. S. Daliyev.* Composite optimal formulas for approximate integration of weight integrals. AIP Conference Proceedings, e 2365, 2021/7/16, 020025-1-18.

Оптимальная формула для приближенного вычисления слабо сингулярного интеграла

¹Шадиметов Х.М., ²Тошбоев О.Н.

¹Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан,
e-mail: kholmatshadimetov@mail.ru

²Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,
e-mail: otoshboyev@bk.ru

В настоящей работе мы рассмотрим следующую квадратурную формулу для приближенного вычисления слабо сингулярного интеграла

$$\int_t^1 \frac{\varphi(x)dx}{(x-t)^{1-\alpha}} \cong \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(x_\beta). \quad (3)$$

Здесь $\varphi(x) \in L_2^{(1)}(t, 1)$, C_β , $(\beta = 0, 1, \dots, N)$ - коэффициенты формулы (3), $h = \frac{1-t}{N}$, N - натуральное число, $t \leq 1$, $x_\beta = h\beta + t$. Напомним, что $L_2^{(1)}(t, 1)$ это пространство Соболева и оно является гильбертовым пространством функций первая производная которых интегрируемы с квадратом в интервале $[t, 1]$. Следующая разность называется погрешностью квадратурной формулы (1)

$$\int_t^1 \frac{\varphi(x)dx}{(x-t)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \varphi(x_\beta), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1)$$

Эта разность определяет линейный функционал над данным пространством

$$\ell(x) = \varepsilon_{[t,1]}(x) \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta \delta(x-x_\beta), \quad (2)$$

где $\varepsilon_{[t,1]}(x)$ – характеристическая функция интервала $[t, 1]$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Погрешность квадратурной формулы оценивается сверху с нормой функционала погрешности $\ell(x)$. Чтобы вычислить норму функционала погрешности используется экстремальная функция квадратурной формулы (1), имеющая следующий вид

$$\psi_\ell(x) = -\ell(x) * G_1(x) + p_0, \quad G_1(x) = \frac{|x|}{2}, p_0 - \text{константа.}$$

Тогда для нормы функционала погрешности имеем следующее выражение

$$\begin{aligned} \left\| \ell / L_2^{(1)*} \right\|^2 = (\ell, \psi_\ell) = & - \left[\sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta C_\gamma G_1(h\beta - h\gamma) - \right. \\ & \left. - 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta \int_t^1 (x-t)^{\alpha-1} G_1(x - (h\beta + t)) dx + \int_t^1 \int_t^1 (x-t)^{\alpha-1} (y-t)^{\alpha-1} G_1(x-y) dx dy \right]. \quad (3) \end{aligned}$$

Минимизируя норму (4) функционала погрешности (3) по коэффициентам C_β при условии

$$(\ell, 1) = 0,$$

для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы (1) получим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} G_1[\beta] * \overset{\circ}{C}_\beta + p_0 &= f_1[\beta], \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \\ \overset{\circ}{C}_\beta &= 0, \quad h\beta \notin [t, 1], \\ \sum_{\beta=0}^N \overset{\circ}{C}_\beta &= g_0. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} G_1[\beta] &= \frac{|h\beta|}{2}, \quad [\beta] = h\beta + t, \\ f_1[\beta] &= \int_t^1 (x-t)^{\alpha-1} G_1[x - (h\beta + t)] dx, \\ g_0 &= \int_t^1 (x-t)^{\alpha-1} dx. \end{aligned}$$

В настоящей работе, решая выше приведенную систему для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы (2), доказана следующая

Теорема 1. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы (2) в пространстве $L_2^{(1)}(t, 1)$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}, \\ C_\beta &= \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \left((\beta+1)^{\alpha+1} - 2\beta^{\alpha+1} + (\beta-1)^{\alpha+1} \right), \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1, \\ C_N &= \frac{(1-t)^\alpha}{\alpha} + \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \left((1-t-h)^{\alpha+1} - (1-t)^{\alpha+1} \right). \end{aligned}$$

SECTION IV. PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

Panjaradagi ikki zarrachali sistema energiyasining bir ehtimol bilan qabul qiladigan qiymatlari

¹Abdullaev J.I., ²O'rolov F.R.

¹ Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, Uzbekistan
e-mail: jabdullaev@mail.ru

² Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, Uzbekistan
e-mail: orolovfarhod41@mail.ru

Mikroobyektning qandaydir fizik miqdorini o'lchash uchun mikroobyektni asbob bilan o'zaro ta'sir qilishga majbur etish kerak. Bu o'zaro ta'sir natijasida asbobning makroskopik holati o'zgaradi, yani o'lchash akti yuz beradi. Odatda mikroobyekt asbob bilan o'zaro ta'sir qilganda ko'chkisimon jarayonni (masalan, Vilson kamerasida bug' kondensatsiyasini) chaqiradi, bu esa asbobning makroholatining o'zgarishiga olib keladi.

Umumiy holda o'lchash natijasini oldindan aniq aytib berish mumkin emas ekan (hatto o'lchash o'tkaziladigan sharoitlar haqida barcha mumkin bo'lgan ma'lumotlar to'planganda ham). O'lchash natijasi tasodifiy miqdor bo'lib, kvant mexanikasida bunday miqdorlarning taqsimot qonunlari o'rganiladi [1].

1-ta'rif. Qiymatlarini tajribada aniqlash mumkin bo'lgan fizik kattaliklar kuzatiluvchan miqdorlar deyiladi.

O'lchash natijalari haqiqiy sonlar deb hisoblanadi.

1-postulat. Kvant mexanikasidagi sistemaning holatlari Ω kompleks separabel Hilbert fazosining (birlik) vektorlari bilan ifodalanadi. Bunda ikkita vektor ayni bitta holatni faqat va faqat nolmas kompleks ko'paytuvchiga farq qilgandagina ifodalaydi. Har bir kuzatiluvchan miqdorga Ω da chiziqli o'z-o'ziga qo'shma operatorni bir qiymatli mos qo'yish mumkin.

a kuzatiluvchi miqdorga mos chiziqli o'z-o'ziga qo'shma operatorni A bilan, uning aniqlanish sohasini $D(A)$ bilan belgilaymiz.

Energiya har qanday kvantomexanik sistemada muhim fizik kattalik bo'lib hisoblanadi. Bu kuzatiluvchan miqdorga mos operatorni H orqali belgilaymiz. Quyidagi postulat H energiya operatori sistema evolyutsiyasining qonunini aniqlashini ta'kidlaydi [1].

2-postulat. Biror $t = 0$ vaqt momentida sistemaning holati ψ_0 vektor bilan tasvirlansin. U holda ixtiyoriy t vaqt momentida sistemaning holati $\psi(t) = U_t \psi_0$ vektor bilan tasvirlanadi, bu yerda U_t evolyutsiya operatori deb ataluvchi unitar operator. Agar $\psi(t)$ vektor-funksiya H operatorning $D(H)$ aniqlanish sohasiga aqalli $t = 0$ da tushsa, u differensiallanuvchi bo'ladi va

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t) \quad (1)$$

munosabat o'rinli, bu yerda $\hbar$ — Plank doimiysi.

(1) munosabat kvant mexanikasining asosiy tenglamasi bo'lib, u Shryodinger tenglamasi deyiladi.

2-ta'rif. Vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydigan holatlar statsionar (barqaror) holatlar deyiladi.

Energiya statsionar holatda ayni bitta qiymat, energiya operatorining xos qiymatini bir ehtimol bilan qabul qiladi.

3-ta'rif. Statsionar holatlarni (H energiya operatorining xos vektorlarini) ifodalovchi

$$H\psi = \lambda\psi \quad (2)$$

tenglama Shryodingerning statsionar tenglamasi deyiladi. Biror $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun (2) tenglama nolmas yechimga ega bo'lsa, ψ yechimga statsionar yechim deyiladi.

Boshqacha aytganda ψ holatda energiya 1 ehtimol bilan λ qiymatni qabul qiladi. Yuqoridagilardan quyidagi natijani olamiz.

1-natija. *Kuzatiluvchan a miqdor ψ holatda ma'lum λ qiymatni 1 ehtimol bilan qabul qilishi uchun ψ holat A operatorning λ xos qiymatiga mos xos vekori bo'lishi zarur va yetarli.*

Bu ishda bir o'lchamli panjarada harakatlanayotgan ikki zarrachali sistema energiyasining statsionar holatlari o'rganiladi. Panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos energiya operatori $\ell_2(\mathbb{Z}^2)$ Hilbert fazosida

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}_{12}$$

fo'rmla bilan o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan operator sifatida aniqlanadi. Bu yerda $\hat{H}_0$ ikki zarrachaning kinetik energiyasiga mos operator bo'lib, u quyidagicha beriladi:

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_1 - \frac{1}{2m_2}\Delta_2,$$

Bu yerda m_1 birinchi zarrachaning, m_2 ikkinchi zarrachaning massasi. $\Delta_1 = \Delta \otimes I$ va $\Delta_2 = I \otimes \Delta$ bo'lib, I — $\ell_2(\mathbb{Z})$ dagi birlik operator, panjaradagi Laplas operatori Δ ni quyidagi ko'rinishda tanlaymiz:

$$(\Delta\hat{\psi})(n) = \hat{\psi}(n+2) + \hat{\psi}(n-2) - 2\hat{\psi}(n), \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}).$$

Zarrachalarning o'zaro ta'sir energiyasi $\hat{V}_{12}$ esa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$(\hat{V}_{12}f)(n, m) = \hat{v}(n-m)f(n, m).$$

Potensial $\hat{v} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ni quyidagicha tanlaymiz:

$$\hat{v}(n) = \begin{cases} \mu_0, & n = 0 \\ \mu_1, & |n| = 1 \\ 0, & |n| \geq 2, \end{cases}$$

μ_0 va μ_1 lar musbat sonlar ($\mu_0 > \mu_1 > 0$).

Biz $L_2(\mathbb{T})$ bilan $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ da Lebeg manosida kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar sinfini belgilaymiz, $L_2(\mathbb{T}^2)$ bilan quyidagi tenzor ko'paytmani belgilaymiz $L_2(\mathbb{T}^2) = L_2(\mathbb{T}) \otimes L_2(\mathbb{T})$. Energiya operatori $\hat{H}$ ning koordinat tasviridan impuls tasviri $H = F\hat{H}F^{-1}$ ga Furiye almashtirishi $F : \ell_2(\mathbb{Z}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^2)$ orqali o'tiladi. Energiya operatori H va $L_2(\mathbb{T}^2)$ fazo quyidagicha to'g'ri integralga yoyiladi [2-5],

$$H = \int_{\mathbb{T}} \oplus H(k) dk, \quad L_2(\mathbb{T}^2) = \int_{\mathbb{T}} \oplus L_2(\mathbb{T}) dk.$$

Har bir tayinlangan $k \in \mathbb{T}$ da

$$H(k) = H_0(k) - V \tag{3}$$

operator $L_2(\mathbb{T})$ Hilbert fazosida aniqlangan bo'lib, uning qo'zg'almas qismi $H_0(k)$:

$$(H_0(k)f)(p) = \varepsilon_k(p)f(p), \quad \varepsilon_k(p) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(k-p), \quad \varepsilon(p) = 1 - \cos 2p.$$

Zarrachalar o'zaro ta'sirini ifodalovchi operator V esa:

$$(Vf)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} [\mu_0 + 2\mu_1 \cos(p-s)]f(s)ds.$$

Istalgan $k \in \mathbb{T}$ uchun $H(k) = H(k+\pi)$ tenglik o'rinli bo'lgani uchun $k \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ deyish mumkun. a deb quyidagi ifodani belgilaymiz:

$$a = \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \frac{2}{m_2} \cos 2k}.$$

Teorema. *Ixtiyoriy musbat μ_0, μ_1, m_1, m_2 va $k \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ lar uchun $H(k)$ operator ikkita*

$$\lambda_1 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - \sqrt{a^2 + \mu_0^2} \quad \text{va} \quad \lambda_2 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - a \cdot \frac{\mu_1^2 + (\mu_1 + a)^2}{\mu_1^2 - (\mu_1 + a)^2}$$

xos qiymatlarga ega. Agar $\mu_1 \geq a$ bo'lsa uchinchi xos qiymat

$$\lambda_3 = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - a \cdot \frac{\mu_1^2 + (\mu_1 - a)^2}{\mu_1^2 - (\mu_1 - a)^2}$$

paydo bo'ladi va bu qiymatlarga mos holat funksiyalari quyidagicha bo'ladi:

$$f_1(p) = \frac{1}{\varepsilon_k(p) - \lambda_1}, \quad f_2(p) = \frac{\cos p}{\varepsilon_k(p) - \lambda_2}, \quad f_3(p) = \frac{\sin p}{\varepsilon_k(p) - \lambda_3}.$$

2-natija. *Har bir $f_i (i = 1, 2, 3)$ holatda energiya o'zining λ_i qiymatini 1 ehtimol bilan qabul qiladi.*

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *Ф.А. Березин, М.А. Шубин.* Уравнение Шредингера. Изд. Московского университета. 1983. 394.
2. *Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д.* Связанные состояния системы двух бозонов на двумерной решетке. ТМФ. 2016. No. 2, С. 272-292.
3. *Абдуллаев Ж.И., Кулиев К.Д., Мамиров Б.У.* Бесконечность числа связанных состояний системы двух фермионов на двумерной решетке. Узбекский Математический Журнал, 2016, No. 4, С. 3-16.
4. *J.I. Abdullaev, A.M. Toshturdiyev* Bound States of a System of Two Fermions on Invariant Subspace. AIP Conference Proceedings. 2021. Vol 2365.
5. *Reed M. and Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics Ser 4: Analysis of Operators 1978.

Estimation of cumulative hazard function by using of efficient estimator of regression parameter under random censoring from both sides

¹Abdushukurov A., ²Erisbaev S.

¹ *Moskow State University named after M.V.Lomonosov, Tashkent Branch, (Tashkent, Uzbekistan),*
e-mail: a_abdushukurov@rambler.ru

² *Nukus State Pedagogical Institute named after Ajiniyaz (P.Seyitov s/n, Nukus, Uzbekistan),*
e-mail: sabitbekn@mail.ru

In the analysis of survival data one of widely applied models is the proportional hazards model of Cox (1972, 1975). According to this model, the relationship between a lifetime Z and the covariate V is modeled via cumulative hazard function $\Lambda(x/v)$ of Z given covariate $V = v$ as

$$\Lambda(x/v) = \Lambda(x/0) \exp((\beta^T, v)), \quad x \in \overline{R}^+ = [0, \infty), \quad (1)$$

where the unspecified baseline cumulative hazard function $\Lambda(x/0) = \Lambda_0(x)$ is assumed to be continuous,

$$\Lambda(x/v) = \lim_{h \downarrow 0} P(Z \leq x + h / Z \geq x, V = v) \quad (2)$$

and $V = (V_1, \dots, V_p)$ is the vector of covariate, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ is the vector of regression parameters. In this model of Cox the primary goal consist in estimation of cumulative hazard function from independent observations $\{(Z_i, V_i), i = 1, \dots, n\}$ of vector (Z, V) . At present time there is an enormous literature on researches of the above mentioned problem of estimation when a

random variables Z_i are either observed completely, or subject to random censoring from the right (see, for example, Badnarski (1993), Pons (2000) Tsiatis (1981), Breakers and Veraverbeke (2005) and others). We consider this problem when random variable Z is exposed to random censoring at the left and on the right by random variables L and Y correspondingly. In view of presence of censoring from the left the problem is reduced to estimation of truncated cumulative hazard function from the left at some point $\tau > 0$. Consider Cox's model under random censoring from both sides (see, [1-4]).

Let us denote joint distribution functions

$$\begin{aligned}\pi(v) &= P(V < v) = P(V_1 \leq v_1, \dots, V_p \leq v_p), \quad v = (v_1, \dots, v_p) \in R^p, \\ H(x/v) &= P(Z \leq x/V = v), \quad K(x/v) = P(L \leq x/V = v), \\ G(x/v) &= P(Y \leq x/V = v), \quad x \in \bar{R}^+.\end{aligned}$$

It is easy to see that according to (1) and (2): $H(x/v) = 1 - \exp\{-\exp((\beta^\tau, v)) \Lambda_0(x)\}$.

We consider the conditions, which assumed to hold:

(C1) Joint distribution of a vector (Z, L, Y, V) is such that components of vector (Z, L, V) are conditionally independent for given V ;

(C2) Joint distribution of a vector (Z, L, Y, V) is such that for numbers τ and T , $\tau < T$, $\Lambda_0(T) < \infty$ and

$$\inf_{\tau \leq x \leq T} \int_{R^p} P(L \leq x \leq \min(Z, Y)/V = v) d\pi(v) > 0; \quad (3)$$

According to (C1) the condition (3) one can represent as

$$\inf_{\tau \leq x \leq T} \int_{R^p} K(x/v) (1 - G(x/v)) (1 - H(x/v)) d\pi(v) > 0,$$

where $H(x-) = \lim_{u \uparrow x} H(u)$.

(C3) The observation is available for the $(\zeta, L, \chi_1, \chi_2, \chi_3, V)$, where $\zeta = \max(L, \min(Z, Y))$, $\chi_1 = I(\min(Z, Y) < L)$, $\chi_2 = I(L \leq Y < Z)$ and $\chi_3 = I(L \leq Z \leq Y)$. Here the random variable Z is observed only in case of $\chi_3 = 1$.

Let $S^{(n)} = \{(\zeta_j, L_j, \chi_{1j}, \chi_{2j}, \chi_{3j}, V_j), j = 1, \dots, n\}$ is observed vectors of independent sample. It is easy to establish the equality

$$E(x/v) = P(\zeta_j \leq x/V_j = v) = T_1(x/v) + T_2(x/v) + T_3(x/v), \quad (4)$$

where conditional subdistributions: $T_1(x/v) = \int_{[0, x]} (1 - (1 - G(u/v))(1 - H(u/v))) dK(u/v)$,

$T_2(x/v) = \int_{[0, x]} K(u/v)(1 - H(u/v)) dG(u/v)$, $T_3(x/v) = \int_{[0, x]} K(u/v)(1 - G(u/v)) dH(u/v)$. Then

according to (4) the distribution function of random variable ζ is

$$E(x) = P(\zeta_j \leq x) = \int_{R^p} E(x/v) d\pi(v) = T_1(x) + T_2(x) + T_3(x),$$

where $T_m(x) = \int_{R^p} T_m(x/v) d\pi(v)$, $m = 1, 2, 3$. Let us introduce corresponding empirical estimators

for $E(x)$, $T_m(x)$, $m = 1, 2, 3$ and $\pi(t)$ by sample $S^{(n)}$ (see, (3)):

$$\begin{aligned}E_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(\zeta_j \leq x) = \sum_{m=1,2,3} T_{mn}(x), \quad x \in \bar{R}^+, \\ \pi_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(V_{1j} \leq t_1, \dots, V_{pj} \leq t_p), \quad t \in R^p, \\ T_{mn}(x) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(\zeta_j \leq x, \chi_{mj} = 1), \quad m = 1, 2, 3; \quad x \in \bar{R}^+.\end{aligned}$$

For simplify of calculations we consider a case of one-dimensional covariates ($p = 1$). Let

$$w^{(s)}(u; \beta) = \int_R v^s \cdot \exp(\beta v) P(L_j \leq u \leq \min(Z_j, Y_j)/V_j = v) d\pi(v), \quad s = 0, 1, 2.$$

We estimate parameter β by solving the following log-likelihood function equation:

$$U_n^T(\beta) = \frac{d \log L_n(\beta)}{d\beta} = \sum_{i=1}^n \int_{[0, T]} \left(v_i - \frac{w_n^{(1)}(u; \beta)}{w_n^{(0)}(u; \beta)} \right) dN_i(u) = 0, \quad (5)$$

where $N_i(u) = I(L_j \leq Z_i \leq \min(Y_i, u))$ is the counting process. Let $\hat{\beta}_n$ is a solution of equation (5). Then a corresponding estimator of $\Lambda_{\tau 0}(x)$ we receive by substitution: $\hat{\Lambda}_{\tau 0}^{(n)}(x) = \Lambda_{\tau 0}^{(n)}(x; \hat{\beta}_n)$, $x \geq \tau$.

In following theorem we declare the consistency property of estimator $\hat{\beta}_n$ of parameter β .

Theorem 1. Assume the conditions (C1) – (C3) hold, distribution function is absolutely continuous and

$$\sup_{t \in B(\varepsilon_0; \beta)} E[V \exp(tV)]^2 \leq K < \infty, \quad (6)$$

where $B(\varepsilon_0; \beta)$ is the interval of length $2\varepsilon_0$ with the center at a point β (true value). Then equation (5) has a solution $\{\hat{\beta}_n, n \geq 1\}$ and $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta}_n = \beta\right) = 1$.

Define information function $J(\beta) = \int_{[0, T]} \left[\frac{w^{(2)}(u; \beta)}{w^{(0)}(u; \beta)} - \left(\frac{w^{(1)}(u; \beta)}{w^{(0)}(u; \beta)} \right)^2 \right] dT_3(u)$, and its intermediate estimator $J_n(\beta) = \int_{[0, T]} \left[\frac{w_n^{(2)}(u; \beta)}{w_n^{(0)}(u; \beta)} - \left(\frac{w_n^{(1)}(u; \beta)}{w_n^{(0)}(u; \beta)} \right)^2 \right] dT_{3n}(u)$.

Let us introduce also the following condition:

(C4) Functions $\{w^{(k)}(u; t), k = 0, 1, 2\}$ are uniform continuous functions on $u \in [0, T]$ and $t \in B(\varepsilon_0; \beta)$, and also are bounded on $[0, T] \times B(\varepsilon_0; \beta)$.

Theorem 2. Assume the conditions (C1) – (C4) and (6) are satisfied. Then at $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{D} N\left(0; (J(\beta))^{-1}\right).$$

References

1. Abdushukurov A. A. Nonparametric estimation based on incomplete observation. International Encyclopedia of Statistical Sciences. Berlin. Springer. (Part. 14), (2011), p. 962-964.
2. Abdushukurov A. A. Estimation of survival function in Cox regression model under random censoring from both sides. Commun. Statist. Theory & Methods. 44: (2015) p. 533-553.
3. Bednarski T. Robust estimation in Cox's regression model. Scandinavian Journal of Statistics. 20(3), (1993). p. 213-225.
4. Breakers R., Veraverbeke N. Cox's regression model under partially informative censoring. Commun. Statist. Theory & Methods. 34(8), (2005). p. 1793-1811.
5. Pons O. Nonparametric estimation in a varying-coefficient Cox model. Math. Math Statist. 9(4), (2000).: p. 376-398.
6. Tsiatis A. A. A large sample study of a Cox's regression model. Ann. Statist. 9(1), (1981). p. 93-106.

Interval akslantirishlari sistemalari uchun markaziy limit teorema

Begmatov A.S., Shadieva Sh.I.

Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy Universiteti, Toshkent.

e-mail: abdumajidb@gmail.com

Ushbu ishda ba'zi interval akslantirishlarining chekli oilalari orqali hosil qilingan tasodifiy iteratsiyali funksiyalar sistemasi uchun limit teoremlar o'rganiladi.

Aytaylik, (S, d) metrik fazo bo'lsin. S ning barcha Borel qism to'plamlari σ -algebrasi $B(S)$ dagi barcha chekli o'lchovlar to'plamini $M(S)$ orqali belgilaymiz. $M_1(S) \subseteq M(S)$ orqali S dagi barcha ehtimollik o'lchovlari qism to'plamini belgilaymiz. $C(S)$ orqali $\|\cdot\|$ supremum normal barcha chegaralangan uzluksiz funksiyalar oilasini belgilaymiz va $\langle \mu, f \rangle := \int_S f d\mu$ deb olamiz.

$P : M(S) \rightarrow M(S)$ operator **Markov operatori** deyiladi, agar u quyidagi ikkita shartni qanoatlantirsa:

(1) barcha $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \mu_1, \mu_2 \in M(S)$ lar uchun $P(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2) = \lambda_1P\mu_1 + \lambda_2P\mu_2$;

(2) $\mu \in M(S)$ uchun $P\mu(S) = \mu(S)$.

Agar shunday $U : C(S) \rightarrow C(S)$ chiziqli operator mavjud bo'lib, $U^* = P$, ya'ni $f \in C(S), \mu \in M(S)$ uchun $\langle \mu, Uf \rangle = \langle P\mu, f \rangle$, bo'lsa, P Markov operatori **Feller operatori** deyiladi. Agar $P\mu_* = \mu_*$ bo'lsa, μ_* o'lchov P Markov operatoriga nisbatan **invariant** deyiladi.

H^+ orqali barcha yo'nalishini saqlovchi aylana gomeomorfizmlari to'plamini belgilaymiz. Aytaylik, $\Gamma = \{g_1, \dots, g_k\} \in H^+$ gomeomorfizmlarning chekli to'plami bo'lsin. $\sum_n = \{1, \dots, k\}^n$ deb olamiz va $\sum_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_n$ elementlari $\{1, \dots, k\}$ to'plamdan bo'lgan barcha chekli so'zlar to'plami bo'lsin. $i \in \sum_*$, $i = (i_1, \dots, i_n)$ ketma-ketlik uchun, $|i|$ orali uning uzunligini (n ga teng) belgilaymiz. $\sum$ orqali $\{1, \dots, k\}^N$ ko'paytma fazoni belgilaymiz.

Endi Γ orqali hosil qilingan yarimgruppadahi akslantirishlarni qaraymiz, ya'ni barcha $g_i = g_{i_n, i_{n-1}, \dots, i_1} = g_{i_n} \circ g_{i_{n-1}} \circ \dots \circ g_{i_1}$ kompositsiyalar qaraymiz, bu yerda $i = (i_1, \dots, i_n) \in \sum_*$. $x \in S^1$ nuqtaning orbitasi ushbu $O(x) = \{g_1(x) : i \in \sum_*\}$ to'plam bo'ladi.

Aytaylik, $p = (p_1, \dots, p_n)$ berilgan $\{1, \dots, k\}$ dagi ehtimollik taqsimoti bo'lsin. $\mathbb{P}$ orqali $\sum$ ko'paytmadagi ehtimollik taqsimotini belgilaymiz. Tushunarliki, $p = (g_i) = p_j$ deb olsak, $\mathbf{p}$ vektor Γ da p ehtimollik taqsimotini aniqlaydi. Barcha p_i lar qat'iy musbat deb faraz qilamiz. $(\Gamma, \mathbf{p})$ juftlik *iteratsiyali funksiyalar sistemasi* deb ataladi. Ushbu

$$P\mu = \sum_{g \in \Gamma} p(g)\mu \circ g^{-1}$$

ko'rinishda berilgan $P : M(S^1) \rightarrow M(S^1)$ Markov operatori Feller operatori bo'lib, u Γ to'plamdan tasodifiy tanlangan akslantirish bo'yicha taqsimotning evolyutsiyasini ifodalaydi, bu yerda $\mu \circ g^{-1}(A) = \mu(g^{-1}(A))$, $A \in B(S^1)$.

Aytaylik, $\mu_* \in M(S^1)$ berilgan $(\Gamma, \mathbf{p})$ iteratsiyali funksiyalar sistemasi uchun invariant o'lchov bo'lsin. $(X_n)_{n \geq 0}$ orqali $(\Gamma, \mathbf{p})$ iteratsiyali funksiyalar sistemasiga mos Markov zanjirini belgilaymiz. Aytaylik, $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ funksiya $\int_{S^1} \phi d\mu_* = 0$ va Go'lder shartlarini qanoatlantiruvchi funksiyasi bo'lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$S_n := S_n(\phi) = \phi(X_0) + \dots + \phi(X_n), \quad S_n^* = \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$$

Teorema. Aytaylik, $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ixtiyoriy Go'lder uzluksiz funksiya bo'lsin. Agar $\Gamma = \{g_1, \dots, g_k\}$ akslantirishlar oilasi minimal bo'lsa va Γ ga nisbatan invariant o'lchov mavjud bo'lmasa, u holda ixtiyoriy $p = (p_1, \dots, p_k)$ ehtimollik vektori uchun $(\Gamma, \mathbf{p})$ iteratsiyali funksiyalar sistemasi uchun markaziy limit teorema o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$S_n^* \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma), \quad \sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} M(S_n^*)^2.$$

1. B. Deroin, V. Kleptsyn, and A. Navas, Sur la dynamique unidimensionnelle en regularite intermediaire, Acta Math. 199 no. 2, 199–262 (2007).
2. T. Komorowski and A. Walczuk, Central limit theorem for Markov processes with spectral gap in the Wasserstein metric, Stochastic Processes and Appl. 122, 2155–2184 (2012).
3. T. Szarek and A. Zdunik, Stability of iterated function systems on the circle, Bull. Lond. Math. Soc. 48, no. 2, 365–378 (2016).

A Kernel estimates of distribution function under right random censoring

Bozorov S.B.

Guliston State University, Gulistan, Uzbekistan

e-mail: suxrobbek_8912@mail.ru

Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be a sample of n i.i.d. survival times censored at the right by n i.i.d. random variables $C_1, C_2, \dots, C_n$, independent of the X_i 's. Let f and F be the density and distribution function of the X_i 's and G the distribution function of the C_i 's. The observed data are then the pairs (Z_i, δ_i) , $i = 1, \dots, n$ with $Z_i = \min\{X_i, Y_i\}$ and $\delta_i = I(X_i \leq Y_i)$ is the indicator of the event $\{X_i \leq Y_i\}$. The observed data form an i.i.d. sample with probability density h and distribution function H which satisfies $1 - H = (1 - F)(1 - G)$. The main problem consist in nonparametrical estimating of F with nuisance distribution function G based on censored sample $C^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i), i = \overline{1, n}\}$, where the number of observed X_i 's $\nu_n = \delta_1 + \dots + \delta_n$ is random. In [1] authors proposed presmoothed relative-risk power estimator $F_n^{PR}(t) = 1 - (1 - H_n(t))^{R_n^p(t)}$, $t \in R^1$ of $F(t)$, where $H_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(Z_i \leq t)$ is an empirical estimate of $H(t)$ and $R_n^p(t) = (\Lambda_n(t))^{-1} \cdot \Lambda_{1n}^p(t)$. Here $\Lambda_n(t) = \sum_{i=1}^n \frac{I(Z_i \leq t, \delta_i=1)}{n(1-H_n(Z_i)+1/n)}$, $\Lambda_{1n}^p(t) = \int_{-\infty}^t p_n(u) d\Lambda_n(u)$ and for a given kernel k and bandwidth sequence $\{h(n), n \geq 1\}$

$$p_n(t) = \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{nh(n)} k\left(\frac{t - Z_i}{h(n)}\right) \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{nh(n)} k\left(\frac{t - Z_i}{h(n)}\right) \right]$$

be Nadaraya-Watson estimator of regression function

$$p(t) = P(\delta_i = 1/Z_i = t) = E[\delta_i/Z_i = t], \quad t \in R^1.$$

It is not difficult to see that corresponding presmoothed relative-risk power estimator of d.f. $G(t)$ may be defined by formula $G_n^{PR}(t) = 1 - (1 - H_n(t))^{1-R_n^p(t)}$. Here an estimate of the unknown survival function $S(t) = P(X > t)$ for a continuous duration X is $S(t) = 1 - F(t)$ where

$$\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{1 - G_n^{PR}(Z_i)} W\left(\frac{t - Z_i}{h(n)}\right)$$

and $W(t) = \int_{-\infty}^t k(u) du$. Denote with $\mu_m(W)$ the m th moment, $m = 0, 1, 2$ of the kernel $W(\cdot)$ and with $R(W)$ the integral of function W^2 over it h domain. The following conditions are assumed throughout:

- (C1) $S(t)$ is twice differentiable and $S''(t)$ is bounded and uniformly continuous;
- (C2) For $m = 0, 1, 2$, the m th derivative of $W, W^{(m)}$, is bounded and absolutely integrable with finite second moments;
- (C3) $R(W) < +\infty$ and $\mu_0(W) = 1$, $\mu_1(W) < +\infty$, i.e. the kernel W is of order 2;
- (C4) There exists small enough h such that $W\left(\frac{t-x}{h(n)}\right) \cdot (1 - H(t))^{-1}$ is uniformly bounded for $|t - x| > M$, for any $M > 0$. Introduce the ISE:

$$I_n = ISE(\hat{S}, S) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{S}(t) - S(t))^2 dt.$$

Theorem. There exists the sequence $d(n)$ such that under condition (C1)–(C4) and $h(n) \rightarrow 0$, $nh(n) \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow \infty$ we have

$$d(n)(I_n - EI_n) \rightarrow C \cdot \xi.$$

Where constant C depends on distribution H and ξ is an standard normal random variable.

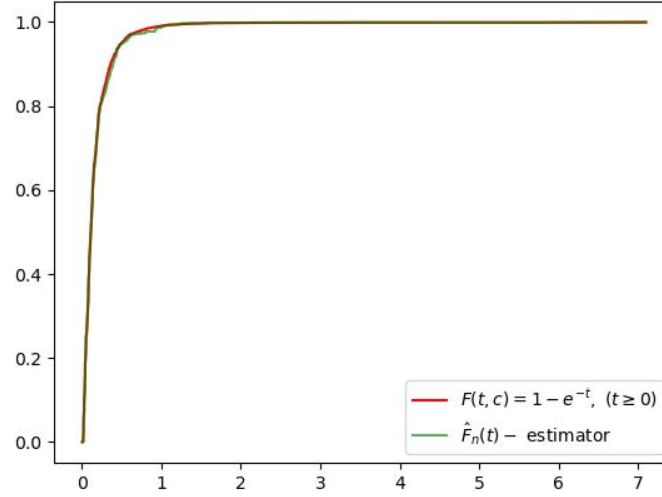


Fig. 1: $\hat{F}_n(t)$ – estimator

The model of this estimator is built using the Python programming language and we draw the following. Sample size $n = 1000$, degree of censorship 10%.

References

1. *Abdushukurov A.A. , Bozorov S.B. , Nurmukhamedova N.S.* Noparametric Estimation of Distribution Function Under Right Random Censoring Based on Presmoothed Relative - Risk Function // ISSN 1995-0802, Lobachevskii journal of mathematics, 2021, Vol. 42, No. 2, 257-268. Pleiades Publishing, Ltd., 2021.

The Use of Principal Components Analysis in the Assessment of Regional Development Processes

Khudoykulova H.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: hxb-2004@mail.ru

Socio-economic development is a multi-dimensional process that cannot be fully assessed by a single indicator. This requires the construction of a composite index (rating) of socio-economic development based on the optimal combination of various development indicators.

Principal components analysis (PCA) is justified by data set dimension (12 characteristics for the 14 regional administrative divisions of Uzbekistan), all the 12 variables being quantitative continuous. According to the principal component features and the component index value we use this formula to calculate composite score:

Formulas in the text are numbered as follows

$$CI = \sum_{i=1}^n (PCV_i * PCC_i) \quad (1)$$

where CI - composite index, PCVi - i -th principal components variance contribution rate, PCCi - i -th principal component coefficients, n - number of components.

Assign each of the composite Z -scores to a score in the range 0 to 1 by mapping to the cumulative normal distribution.

The inter-district variations are grouped into four categories of less developed region, moderate developed region, developed region and highly developed region on the basis of natural break (Jenks) method.

Statistical data processing was conducted using SPSS software.

By using the method of the composite index (CI) the level of development in terms of socio-economic development in Uzbekistan has been evaluated (table 1). The relation between the value of

Таблица 1: Composite index value matrix of socio-economic indicators

Composite index	Level of development	Name of regional administrative divisions
0.26–0.36	Very low	Surkhandarya(0.26), Kashkadarya(0.29), Namangan(0.33), Samarkand(0.30), Fergana(0.34)
0.36–0.52	Low	Andijan(0.36), Rep.of Karakalpakstan(0.39), Khorezm(0.42), Jizzakh(0.46)
0.52–0.90	Moderate	Bukhara(0.52), Syrdarya(0.58), Tashkent(0.64)
0.90–0.95	High	Navoi(0.90)
0.95–1	Very high	Tashkent city (0.95)

composite score and the level of development is direct for instance regional administrative divisions. With the greater value of composite score have the advanced level of development and the state having lesser value recognize the lower level of improvement.

In social sciences cluster analysis was recognized as the most suitable method of classifying units into groups of similar characteristics. Serving as input variables for cluster analysis were factor scores. For grouping objects into clusters. non-hierarchical clustering method, the "k-means" method was used. The main advantage of this cluster method is that it is more convenient to group the objects into clusters according to the measured characteristic. Most clustering methods are based on distance or similarity matrices calculated from the underlying data rather than from the original data. Here we shall concentrate on distance measures, of which the most common is the Euclidean distance given by:

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{l=1}^n (x_{il} - x_{jl})^2} \quad (2)$$

where d_{ij} is the Euclidean distance for two individuals i and j , each measured on n variables, x_{il}, x_{jl} , $l = 1, \dots, n$.

Decision on the number of clusters is based on the analysis of variance (ANOVA) (table 2). At the given significance level of 5 percent and empirical significance level of 0.000 for factor one

Таблица 2: ANOVA Results for Two Proposed Clusters

Factor	Means between clusters	s.s	Means within clusters	s.s	F ratio	p-value
Factor 1	2.439	5	0.101	8	24.167	0.000
Factor 2	2.397	5	0.127	8	18.856	0.000

and 0.0000 for factor two, hypothesis H1 is accepted, etc. we may say that the means between the six proposed clusters differ significantly (see Table 2 ANOVA results for six clusters). The results indicating grouping of regions into six different clusters are significant.

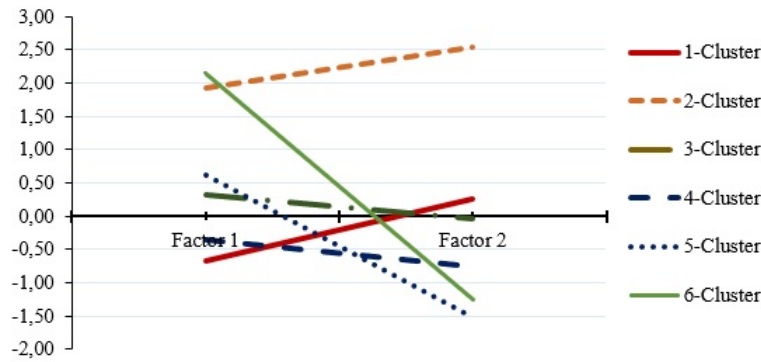


Fig. 2: Means of each Cluster

As this is confirmed by the significance test in ANOVA, the same can be verified by looking at the graph of means, etc. by factor analysis identified dimensions of socio-economic development and means of an individual cluster (see Figure 1).

According to the results of the cluster analysis, Khorezm, Andijan, Fergana, Namangan, Samarkand, Kashkadarya regions and the Republic of Karakalpakstan belong to cluster 1; Tashkent city to cluster 2; Tashkent and Bukhara regions to cluster 3; Jizzakh and Surkhandarya regions to cluster 4; Syrdarya region to cluster 5; Navoi region was classified as the regions belonging to cluster 6.

References

1. *Ivana Rasic Bakaric* Uncovering Regional Disparities – the Use of Factor and Cluster Analysis, Economic Trends and Economic Policy, 2005, 24 p.
2. *Sabine L., Brian S. E.*, A Handbook of Statistical Analyses using SPSS, Chapman and Hall/CRC Press LLC, 2004, 130 p.

Limit theorem for the critical Galton-Watson branching processes

¹Kudratov Kh., ²Saydulloyeva Sh

¹ Samarkand State University named after Sharof Rashidov (15, University street. Boulevard),
e-mail: qudratovh_83@mail.ru

² Samarkand State University named after Sharof Rashidov (15, University street. Boulevard),
e-mail: saydulloyevash1996@gmail.com

Suppose that $\{\xi(k, j), k, j \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of independent identically distributed random variables taking non-negative integer values. Let the random variable $\xi(1, 1)$ have the distribution

$$p_k = P(\xi(1, 1) = k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

with the generating function

$$F(s) := Es^{\xi(1,1)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

and $p_0 + p_1 \neq 1$. Consider the process $W(k)$, $k \geq 0$ defined by the following recurrent relation:

$$W(0) = \eta, \quad W(n) = \sum_{j=1}^{W(n-1)} \xi(n, j), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

here η is a random variable that takes positive integer values and independent on the sequence of random variables $\{\xi(k, j), k, j \in \mathbb{N}\}$.

We call the process $\{W(k), k \geq 0\}$ the Galton-Watson process starting with a random number of particles η . It is well known [1], the asymptotic state of the process $\{W(k), k \geq 0\}$ depends on the mean value of the random variable $\xi(1, 1)$, and it is divided into the classes as follows. It is clear that $F'(1) = E\xi(1, 1)$. The process (1) is called subcritical, critical and supercritical if $F'(1) < 1$, $F'(1) = 1$ and $F'(1) > 1$, respectively.

In this work, we consider only critical processes.

We denote the Galton-Watson process generated by the i -th particle in the initial state by $W_i(n)$, $n = 0, 1, \dots$. Obviously, $W_i(n)$, $n = 0, 1, \dots$, $i \geq 1$ form independent and identically distributed Galton-Watson branching processes. It is known [1] that $W(n)$ can be represented as

$$W(n) = \sum_{i=1}^{\eta} W_i(n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Independence of random variables η and $\xi(i, j)$, $i \geq 1, j \geq 1$ implies independence of $W_i(n)$ and the random variable η . Denote by $P(n)$ the probability of degeneration of the process $\{W(k), k \geq 0\}$ at the n -th step, i.e. $P(n) = P(W(n) = 0)$. We denote by $R(n)$ the probability of continuation of the process $W_1(n)$ at the n -th step, i.e. $R(n) = P(W_1(n) > 0)$. In what follows, we need the following designations:

$$Q(n) = 1 - P(n), \quad h(s) := Es^\eta, \quad H_n(s) := Es^{W(n)}, \quad A = h'(1), \quad \sigma^2 = F''(1),$$

$F_0(s) = s$, $F_1(s) = F(s)$, $F_n(s) = F(F_{n-1}(s))$ is the n -th iteration of $F(s)$.

Further the sign $a_n \sim b_n$ indicates that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

The case when the process $\{W(k), k \geq 0\}$ starts with one particle ($\eta = 1$) has been studied by many authors. So, in 1938, A.N. Kolmogorov [4] obtained the following famous result for the probability of continuation $R(n)$ of the critical Galton-Watson process:

$$R(n) \sim \frac{2}{\sigma^2 n}. \quad (3)$$

In 1947, A.M. Yaglom [5] studied the conditional distribution of the variable $W(n)$ given $W(n) > 0$ and obtained the following result:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{2}{\sigma^2 n} W(n) \leq y / W(n) > 0\right) = 1 - e^{-y}, \quad y > 0, \quad (4)$$

here it was required $F'''(1) < \infty$. The given results (3), (4) were later obtained by Kesten, Ney, Spitzer [6] under the condition $F''(1) < \infty$. In [7], V.M. Zolotarev obtained similar results for branching processes with continuous parameters.

In 1968, Slack [8] considered the case of

$$F(s) = s + (1 - s)^{1+\alpha} L(1 - s), \quad \alpha \in (0, 1], \quad (S)$$

here $L(x)$ is a slowly varying function on a neighborhood of zero, and obtained the following:

$$(1 - F_n(0))^\alpha L(1 - F_n(0)) \sim \frac{1}{\alpha n}, \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\lambda(1 - F_n(0))W(n)\} / W(n) > 0) = 1 - \lambda(1 + \lambda^\alpha)^{-1/\alpha}, \quad \lambda > 0. \quad (6)$$

This result implies the result by Yaglom (4) if $\alpha \equiv 1$ and $F''(1) < \infty$. It should be noted that in the case considered by Slack, the equality $F''(1) = \infty$ can be satisfied.

In [3], K.V. Mitov, G.K. Mitov, N.M. Yanev considered the critical case ($F'(1) = 1$) when the second factorial moment was finite: $F''(1) = \sigma^2 < \infty$, and the generating function of the number of particles in the initial state was satisfied the condition

$$h(s) = 1 - (1 - s)^\theta L_0\left(\frac{1}{1 - s}\right), \quad \theta \in (0, 1), \quad (M)$$

here $L_0(x)$ is a slowly varying function at infinity, and obtained the following results:

$$P(W(n) > 0) = 1 - h(F_n(0)) \sim (\sigma^2 n)^{-\theta} L_0(n), \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\lambda(1 - F_n(0))W(n)\} / W(n) > 0) = 1 - \lambda^\theta(1 + \lambda)^{-\theta}, \quad \lambda > 0. \quad (8)$$

With the help of Tauber's theorems, it is not difficult to see that condition (M) implies that the average number of particles in the initial state is infinitely. But it follows from (7) that in this case, too, the critical Galton-Watson process will degenerate with probability 1.

Theorem. *If the conditions (M) and (S) are satisfied, then*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\exp\{-\lambda(1 - F_n(0))W(n)\} / W(n) > 0) = 1 - \lambda^\theta(1 + \lambda^\alpha)^{-\theta/\alpha}, \quad \lambda > 0.$$

In the case of $F''(1) < \infty$, Theorem 4 implies the result by Mitov, Mitov, and Yanev. If we set formal $\theta = 1$, $\alpha = 1$ in the last Laplace substitution, we get the Laplace substitution $(1 + \lambda)^{-1}$ of the exponential distribution.

References

1. Harris T.E. The theory of branching processes. Springer - Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963. 355p.
2. Seneta. E. Regularly Varying Functions. Springer, Berlin. 1976.
3. Mitov K.V., Mitov G.K., Yanev N.M. Limit theorems for critical randomly indexed branching processes. Workshop on Branching Processes and Their Applications. Springer, 2010.
4. Kolmogorov A.N. K resheniyu odnoy biologicheskoy zadachi // Izv. NII mat. i. mex. Tomskogo Universiteta, 1938, t. 2, vip. 1. (in Russian)
5. Yaglom A. M. Nekotore predelnie teoremi teorii vetvyashchixsya sluchaynix protsessov // DAN SSSR, 1947, 56, 8, 795-798. (in Russian)
6. F. Spitzer., H. Kesten., P. Ney. The Galton-Watson process with mean one and finite variance // Theory of Probability and its Applications, 1966, 11:4, 513-540.
7. Zolotarev V.M. More exact statements of several theorems in the theory of branching processes // Theory of Probability and its Applications, 1957, 2:2, 245-253.
8. Slack R.S. A Branching Process with Mean One and Possibly Infinite Variance // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. 9, 139-145 (1968).

Proporsional intensivlik modeli bahosi uchun muvofiqlik kriteriysi

Mansurov D. R.

Navoiy davlat pedagogika instituti, Navoiy, O'zbekiston

e-mail: mathematicianmd@gmail.com

Medik-biologik tadqiqotlarda bemorning yashovchanligini tekshirishda, injenerlik tajribalarida texnik qurilmaning ishonchliligi o'rganilayotganda tekshirilayotgan obyekt haqidagi ma'lumotlar o'ng tomondan senzurlanishi mumkin. Bunga misol qilib biror klinikada davolanayotgan bemorning ma'lum sabablarga ko'ra (doimiy yashash manzili o'zgarganligi, boshqa klinikaga o'tganligi v.h.) klinikadan ketib qolishini keltirish mumkin. Bu holatda bemorning klinikaga kelgan vaqtdan boshlab, toki klinikani tark etganigacha bo'lgan ma'lumotlar bor. Ammo ketganidan keyingi ma'lumotlar mavjud emas. Klinikada faqatgina bemorning chiqib ketgan vaqt momentigina bor xolos. Shu va shu kabi misollar o'ng tomondan senzurlanishli ma'lumotlarga misol bo'la oladi.

Faraz qilaylik X —o'rganilayotgan obyektning umr davomiyligi bo'lib, u o'ng tomondan qandaydir Y tasodifiy miqdor bilan senzurlangan bo'lsin. Bu X va Y tasodifiy miqdorlar o'zaro bog'liqsiz bo'lib, ularning taqsimot fuksiyalari mos ravishda uzluksiz F va G bo'lsin.

Ushbu $\{(X_k, Y_k), k \geq 1\}$ ketma-ketlik (X, Y) juftlikning bog'liq bo'lmagan amaldagi qiymati va

$$S^{(n)} = \{(Z_i, \delta_i), i = 1, \dots, n\}$$

–kuzatilgan tanlanma bo'lsin. Bu yerda $Z_i = \min\{X_i, Y_i\}$, $\delta_i = I(X_i \leq Y_i)$, va $I(A) - A$ hodisaning indikator. Bu yerdagi asosiy statistik masala $S^{(n)}$ tanlanma yordamida F taqsimot funksiyani baholash. Bunday masala bilan bir-biridan bog'liqsiz ravishda [1] va [3] adabiyotlarda o'rganilgan bo'lib, [4] da uni ACL (Abdushukurov-Cheng-Lin) bahosi deb atalishi tavsiya qilingan:

$$F_n^{ACL}(t) = 1 - [1 - H_n(t)]^{p_n}, \quad t \in \mathbb{R}^1 \quad (1)$$

bu yerda $p_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i$ va $H_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(Z_i \leq t)$, $t \in \mathbb{R}^1$.

Endi ushbu (1) baho uchun Kolmogorov kriteriysini o'rganish maqsadida quyidagi statistikani kiritib olamiz:

$$D_n^{ACL} = \sup_T |F(t) - F_n^{ACL}(t)|, \quad (2)$$

bu yerda $T < T_H = \inf(x : H_n(t) = 1)$.

Yuqoridagi (2) ifoda uchun [4] adabiyotda ushbu intilish tezligi keltirib o'tilgan:

$$D_n^{ACL} = \sup_T |F(t) - F_n^{ACL}(t)| = O\left(\sqrt{\frac{\ln \ln n}{n}}\right). \quad (3)$$

Biz yuqoridagi (3) intilish tezligini hisobga olib,

$$\sqrt{\frac{n}{\ln \ln n}} \cdot \sup_T |F(t) - F_n^{ACL}(t)| \quad (4)$$

tasodifiy miqdorni hosil qilamiz. (4) tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi va limit taqsimoti haqida xulosa chiqarish maqsadida (4) ning ko'rinishida tanlanma beruvchi dastur tuzib, ushbu dastur yordamida turli $F(t)$ va n lar uchun tanlanmalar olamiz. Olingan tanlanmalar asosida xulosa chiqarishga urinamiz.

(4) ning limit taqsimoti olingan bosh to'plam taqsimoti $F(t)$ ning parametrlariga bog'liqmi yoki yo'q ekanligini tekshirish uchun $F(t)$ sifatida eksponensial taqsimotni tanlab, u yordamida $n = 500$ (Rasm 1.) hajmli (4) ko'rinishdagi tasodifiy miqdorni hosil qilib uning taqsimot funksiyasini chizib ko'ramiz.

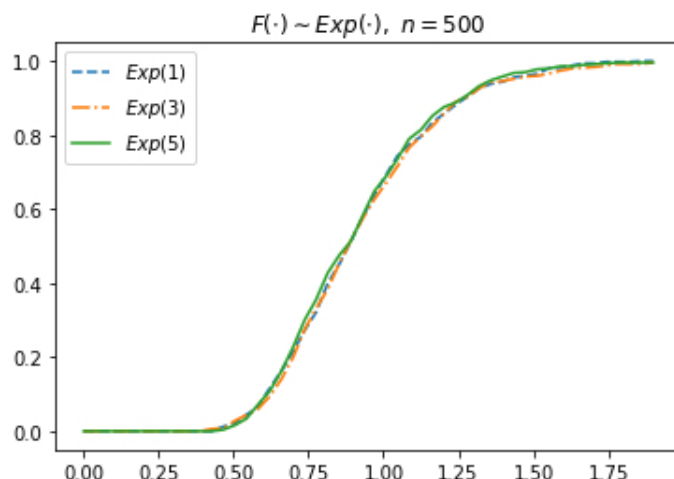


Fig. 3: $F(t)$ –eksponensial taqsimlangan (tanlanma hajmi $n=500$)

Yuqoridagi rasmdan (Rasm 1) ko'rinib turganidek tanlanma hajmi $n=500$ bo'lganda eksponensial taqsimotning parametrlarini $\lambda = 1, 2, 3$ olib, (4) ning taqsimot funksiyasi tasvirlangan. Undan $F(t)$ ning parametrlari turli bo'lganda ham (4) ning limit taqsimotiga ta'sir o'tkazmasligini xulosa qilishimiz mumkin.

Shunday qilib, $F(t)$ –sifatida bir turdagi va turli parametrlari taqsimot funksiyalarni olganimizda (4) ning limit taqsimotida o'zgarish bo'lmadi. Endi taqsimot funksiyalarni ham turli tanlab ko'ramiz. Yuqorida parametrlarga bog'liq emasligidan umumiylikka ziyon yetkazmagan holda barcha taqsimot funksiyalarni standart parametrda chizamiz.

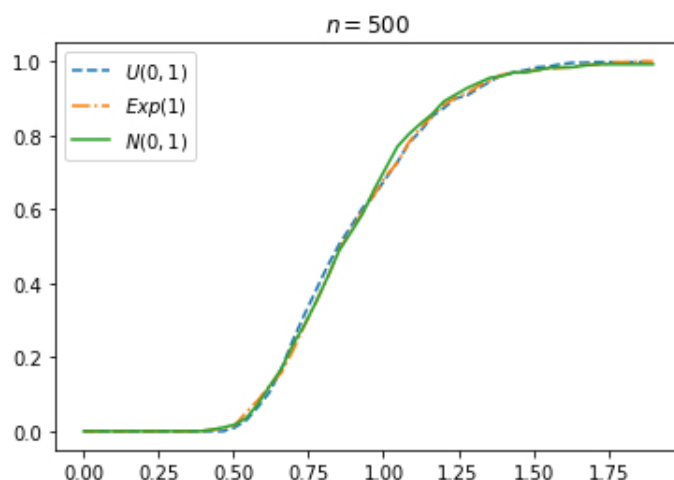


Fig. 4: Turli taqsimot funksiyalar ($n=500$)

Endi (Rasm 2) dan (4) ning limit taqsimoti tanlangan bosh to'planning taqsimot funksiyasini tekis, eksponensial va normal olganimizda (4) ning taqsimot funksiyasi deyarli usma-ust tushmoqda. Bu chizmalar asosida (4) $F(t)$ ga bog'liq emas yoki bog'liq bo'ladigan bo'lsa ham amaliy jihatdan sezilarli emas degan xulosa berishimiz mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *Abdushukurov A.A.* Nonparametric Estimation in Proportional Hazards Model of Random Censorship, VINITI, 3448, 1987.
2. *Абдушукуров А. А.* Обобщение степенной оценочной функции относительного риска при зависимых случайно цензурированных данных, Современная математика. Фундаментальные направления, Том 68, No. 1, 2020, 1–13.
3. *Cheng P.E. and Lin G.D.* Maximum Likelihood Estimation of Survival Function under the Koziol-Green Proportional Hazards Model, Statistics & Probability Letters, 5, 1987, 75–80
4. *Csorgo S.* Estimation in the Proportional Hazards Model of Random Censorship, Statistics, 19, 1988, 437–463

Markov zanjirlarining amaliy mazmunli masalalarni yechishga qo'llanilishi

Ostonov Q, Abdusobirova M

Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarkand, Uzbekistan

e-mail: ostonovk@mail.ru

e-mail: mabdusobirova@mail.ru

Ushbu maqolada biz Markov zanjirlari tushunchalaridan amaliy masalalarni yechishda foydalanish mumkin bo'lgan misollarini ko'rib chiqamiz. Bularning barchasi shuni ko'rsatadiki, insonning amaliy faoliyatida duch keladigan ko'plab hayotiy muammolarni hal qilish usullari Markov zanjirlaridan foydalanishni talab qiladi[1-5].

1. Markov zanjitlarining amaliy masalalarni yechishda qo'llanilishiga doir misollar.

1-misol. Avtomobillar taksi to'xtash joyiga bir vaqtning o'zida (bir vaqtning o'zida) etib kelishadi. Agar to'xtash joyida odamlar bo'lmasa, mashina darhol chiqib ketadi. Avtoturargohga k

vaqt momentida kelgan yo'lovchilar sonini η_k bilan belgilaymiz va $\eta_1, \eta_2, \dots$, larni bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar deb hisoblaymiz. K vaqt momentidagi navbat uzunligi ξ_k , $\xi_0 = 0$ bo'lsin. ξ_n , $n \geq 0$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi Markov zanjiri bo'ladimi?

Yechish. Agar $\xi_n = i$ bo'lsa, u holda $k+1$ momentda navbat uzunligi ξ_{k+1} ga teng, bu yerda

$$\hat{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \eta_{k+1}, & i = 0, \\ i - 1 + \eta, & i \geq 1 \end{cases}$$

ya'ni, $\xi_{k+1} = (\xi_k - 1)^+$, bu yerda $a^+ = \max(a, 0)$. U holda, η_n tasodifiy miqdorlarning bog'liqligiga ko'ra

$$P(\xi_{k+1} = j | \xi_k = i_k, \dots, \xi_0 = i_0) = P((\xi_k - 1)^+ \eta_{k+1} = j | \xi_k = i_k, \dots, \xi_0 = i_0) = P(\eta_{k+1} = j - (i_k - 1)^+)$$

Xuddi shunga o'xshash $P(\xi_{k+1} = j | \xi_k = i_k)$ ni hisoblaymiz.

2-misol. Sinaluvchilar oldida ko'k (s) va yashil (z) chiroqlari bo'lgan ikkita tablo bor. Chiroqlarning yonish ketma-ketligi bir qadamli o'tish matritsalariga ega Markov zanjirlari bilan tavsiflanadi

		z	s			z	s
1)	z	1/3	2/3	2)	z	1	0
	s	1/2	1/2		s	1/3	2/3

Sinaluvchi agar har ikkala panelda yashil chiroq yonib tursa, tugmani bosishi kerak. Tugmani ketma-ket ikkita to'g'ri bosgandan so'ng, u qanday ehtimol bilan, bosmasligi kerak bo'lgan vaziyatni kutishi mumkin?

Yechish. Agar sinaluvchi tugmachani birinchi marta bosgan bo'lsa, ikkinchi panelda yashil chiroq yonadi, u holda u yerda doimo yashil chiroq yonib turadi. Shuning uchun, izlanayotgan ehtimollik birinchi paneldagi yashil chiroq yonishi ehtimoli va uchinchi marta ko'k chiroqning yonishi ehtimoli ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$R\left(\frac{z}{z}\right) \cdot R\left(\frac{s}{z}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

3-misol. Uzoq vaqtdan keyin o'z shahringizga qaytib kelganingizdan so'ng, siz barcha eski do'stlaringizga qo'ng'iroq qilib, kelganingizni e'lon qilishga qaror qildingiz. Sizning qo'lingizda ikkita eskirgan telefon kitobi bor edi va siz ulardan birida barcha raqamlarning uchdan bir qismi noto'g'ri ekanligi haqida ogohlantirilgansiz, ikkinchisida esa choragi, ammo qaysi biri ekanligi noma'lum. Bunda ikkita taktikani tanlash mumkin:

1) kitob tasodifiy tanlanadi va agar sizga kerak bo'lgan telefon raqami to'g'ri bo'lsa, undan foydalanishda davom etasiz, bo'lmasa, boshqa kitobni olasiz;

2) ikkita sinov usul: "to'g'ri-to'g'ri", "to'g'ri-noto'g'ri" va "noto'g'rito'g'ri" hollarda kitob o'zgarmaydi, "noto'g'ri-noto'g'ri" bo'lsa, boshqa kitobga o'tish kerak.

Qanday xatti-harakatlar taktikasi ostida telefon ko'rsatkichlarining to'g'ri bo'lish ehtimoli yuqori? **Yechish.** Ikki holatga ega bo'lgan Markov zanjirini ko'rib chiqaylik: (k. 1, k. 2). Birinchi taktika uchun o'tish ehtimollari matritsasi quyidagi shaklga ega

	1 – kitob	2 – kitob
1)	$Kitob1$	$2/3$
	$Kitob2$	$1/4$
		$3/4$

chunki birinchi kitobda barcha raqamlarning uchdan bir qismi noto'g'ri, ikkinchisida esa - barcha raqamlarning to'rttdan biri. Bunday holda, statsionar taqsimot $(3/7, 4/7)$ shaklga ega, ya'ni birinchi kitob $3/7$, ikkinchisi - $4/7$ ehtimollik bilan tanlanadi. Keyin to'g'ri qo'ng'iroqlarning o'rtacha ulushi $2/3 \cdot 3/7 + 3/4 \cdot 4/7 \approx 0,714$ ni tashkil qiladi. Ikkinchi taktikasi uchun o'tish ehtimollari matritsasi quyidagi shaklga ega

	1 – kitob	2 – kitob
1) 1 – kitob	8/9	1/9
2 – kitob	16/16	5/16

chunki birinchi kitobdan ikkinchisiga o'tish ehtimoli $(1/3)^2$, ikkinchidan birinchisiga $(1/4)^2$. Bunday holda, statsionar taqsimot $(9/25, 16/25)$ ko'rinishga ega. Keyin to'g'ri qo'ng'iroqlarning o'rtacha ulushi $2/3 \cdot 9/25 + 3/4 \cdot 16/25 = 0,72$ ni tashkil qiladi.

2. Markov zanjirlari tushunchalaridan ehtimollar nazariyasining o'ziga tegishli masalalarni yechishda ham foydalanish mumkin.

2. 1, 2, 3 raqamlari bo'lgan uchta karta bo'lsin. Sistema holati - bu kartalarning raqamlari i_1, i_2, i_3 ketma-ketligi Faraz qilaylik $1/2$ ehtimollik bilan i_1, i_2, i_3 holat i_3, i_1, i_2 va i_1, i_3, i_2 o'tsin. Ushbu sistema Markov zanjiri ekanligini ko'rsating. Bir qadamda o'tish ehtimollari matritsasini tuzing va yakuniy taqsimotni toping.

Yechish. Sistema Markov zanjirini hosil qiladi, chunki ma'lum bir holatga tushish ehtimoli faqat oldingi holatga bog'liq. O'tish ehtimollari R matritsasi quyidagi ko'rinishga ega:

	123	132	231	231	312	321
123	0	1/2	0	0	1/2	0
132	1/2	0	1/2	0	0	0
213	0	0	0	1/2	0	1/2
231	1/2	0	1/2	0	0	0
312	0	0	0	1/2	0	1/2
321	0	1/2	0	0	1/2	0

Limitik ehtimolliklar

$$p_2 + p_4 = 2p_1, \quad p_1 + p_6 = 2p_2, \quad p_2 + p_4 = 2p_3, \quad p_3 + p_5 = 2p_4, \quad p_1 + p_6 = 2p_5, \quad p_3 + p_5 = 2p_6$$

sistemadan topiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Боровков А.А. Эргодичность и устойчивость случайных процессов. – М.: Эдиториал УРСС, 1999–440
2. Боровков А.А. Теория вероятностей: Учебное пособие. – Изд. 5-е, сущ. перераб. и доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 656 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568
4. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – Изд. 4-е, испр. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 400 с.
5. Денисенко Т.И. Использование марковских цепей при решении различных прикладных задач. Фундаментальные исследования. – 2009. – N 1. – С. 27-28;

Xarakteristik funksiyalar nazariyasining tadbiqlariga oid ba'zi natijalar

^{1,2}**Quljonov O'.N.**, ¹**Karimov I.T.**, ²**Saydullayev A.J.**

¹*Samarqand davlat universiteti, Samarqand, O'zbekiston,*

e-mail: uquljonov@mail.ru, tkarimov95@mail.ru, Saydullayevazamat0342@gmail.com

²*Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti Samarqand filiali, Samarqand, O'zbekiston,*

Annotatsiya

Ushbu ishda xarakteristik funksiyaning ta'rifi hamda uning asosiy xossalari keltirilgan. Diskret va absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorlarning xarakteristik funksiyalarini topish formulalari topilgan hamda ularga oid namuna-viy misollar yechib ko'rsatilgan. Shuningdek, xarakteristik funksiya orqali taqsimot funksiyani ifodalash formulasi, hamda tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi uning taqsimot funksiyasini bir qiymatli aniqlashi haqidagi teorema keltirilgan.

1. Xarakteristik funksiya ta'rifi. Haqiqiy $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorlar bilan bir qatorda xuddi shunga o'xshash kompleks qiymatli tasodifiy miqdorlarni ham qarash mumkin. Kompleks qiymatli tasodifiy miqdor deb $\xi_1(\omega) + i\xi_2(\omega)$ funksiyaga aytamiz, bu yerda $\omega \in \Omega$, $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega))$ - tasodifiy vektor. Ta'rifga asosan

$$M(\xi_1 + i\xi_2) = M\xi_1 + iM\xi_2$$

deb olamiz.

Kompleks qiymatli tasodifiy miqdor matematik kutilmasi uchun matematik kutilmaning barcha xossalari bajarilishini osongina tekshirib ko'rish mumkin.

1-ta'rif. *Haqiqiy $\xi(\omega)$ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi deb ushbu kompleks qiymatli funksiyaga aytiladi:*

$$\varphi(t) = Me^{it\xi} = \int_{\Omega} e^{it\xi(\omega)} dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{\xi}(x), \quad (1)$$

bu yerda t — haqiqiy son, $F_{\xi}(x)$ esa ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.

Agar ξ -diskret tasodifiy miqdor bo'lib, x_k qiymatni $A_k = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_k\}$ to'plamda qabul qilsa, u holda xarakteristik funksiya

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(t) &= \int_{\Omega} e^{it\xi(\omega)} dP(\omega) = \int_{\bigcup_k A_k} e^{it\xi(\omega)} dP(\omega) = \\ &= \sum_k e^{itx_k} \int_{A_k} dP(\omega) = \sum_k e^{itx_k} P(A_k) = \sum_k e^{itx_k} p_k \end{aligned} \quad (2)$$

tenglik orqali topiladi.

2. Xarakteristik funksiyaning xossalari. Endi tasodifiy miqdor xarakteristik funksiyasining xossalari keltirib o'tamiz. Bundan keyin $\varphi_{\xi}(t)$ xarakteristik funksiyada zarurat bo'lmasa ξ indeksni tushirib qoldirib, ξ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini $\varphi(t)$ shaklda yozamiz.

1. Ixtiyoriy ξ tasodifiy miqdor uchun $\varphi(0) = 1$ va barcha t larda $|\varphi(t)| \leq 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2. Ixtiyoriy a va b sonlar uchun $\varphi_{b\xi+a}(t) = e^{ita}\varphi_{\xi}(bt)$ tenglik o'rinli. Darhaqiqat,

$$\varphi_{b\xi+a}(t) = Me^{it(b\xi+a)} = e^{ita}Me^{ibt\xi} = e^{ita}\varphi_{\xi}(bt).$$

3. Agar $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ o'zaro bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda $S_n(\omega) = \xi_1(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)$ yig'indining xarakteristik funksiyasi uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\varphi_{S_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t)\dots\varphi_{\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{\xi_k}(t).$$

Ushbu xossaning isboti bog'liq bo'lmagan tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining matematik kutilmasi haqidagi xossadan kelib chiqadi. Haqiqatan ham,

$$\varphi_{S_n}(t) = Me^{it(\xi_1+\dots+\xi_n)} = Me^{it\xi_1} \cdot Me^{it\xi_2} \cdot \dots \cdot Me^{it\xi_n} = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) \cdot \dots \cdot \varphi_{\xi_n}(t).$$

4. Xarakteristik funksiya $\mathbb{R}$ tekis uzluksizdir. Agar $M|\xi|^k < \infty$ bo'lsa, u holda $\varphi(t)$ xarakteristik funksiya k - tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega va quyidagi tenglik o'rinli:

$$\varphi^{(s)}(0) = i^s \int_{\Omega} \xi^s(\omega) dP(\omega) = i^s \int_{-\infty}^{\infty} x^s dF_{\xi}(x) = i^s M\xi^s, \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

$$\varphi^{(s)}(t) = i^s \int_{\Omega} \xi^s(\omega) \cdot e^{it\xi(\omega)} dP(\omega) = i^s \int_{-\infty}^{\infty} x^s e^{itx} dF_{\xi}(x).$$

Binobarin, agar $M|\xi|^k < \infty$ bo'lsa, u holda $t = 0$ nuqta atrofida ushbu yoyilma o'rinli:

$$\varphi(t) = 1 + \sum_{s=1}^k \frac{(it)^s}{s!} M\xi^s + o(|t|^k), \quad t \rightarrow 0.$$

$$5. \overline{\varphi_{\xi}(t)} = \varphi_{\xi}(-t) = \varphi_{-\xi}(t)$$

6. Agar ξ tasodifiy miqdor absolyut uzluksiz bo'lsa, u holda $t \rightarrow \infty$ da $\varphi_{\xi}(t) \rightarrow 0$.

1-misol. Elementar hodisalar fazosi $\Omega = [0; 1)$ va ehtimollik o'lchovi $P(A) = \mu(A)$ bo'lsin. Bu yerda $A_1, A_2, \dots, A_n, A_k \in \Omega$ lar esa bog'liqsiz hodisalardir. ξ_n tasodifiy miqdor sifatida A_n hodisaning indikatorini olamiz, ya'ni

$$\xi_n(\omega) = I_{A_n}(\omega).$$

$$S_n(\omega) = \frac{2(\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)) - n}{\sqrt{n}}$$

$S_n(\omega)$ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini hisoblang.

Yechish. Dastlab ξ_n tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini topamiz:

$$M\xi_n = \int_{\Omega} \xi_n(\omega) d\omega = \int_{A_n} \xi_n(\omega) d\omega + \int_{A_n^c} \xi_n(\omega) d\omega = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2},$$

$$D\xi_n = M\xi_n^2 - (M\xi_n)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$S_n(\omega)$ tasodifiy miqdorni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$S_n(\omega) = \frac{2(\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \dots + \xi_n(\omega)) - n}{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_k(\omega)$$

bu yerda

$$\bar{\xi}_k(\omega) = \frac{2\xi_k(\omega) - 1}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \xi_k(\omega) - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ bog'liqsiz hodisalarning indikatorlari bo'lganligi uchun $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ lar ham bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar bo'ladi. Bundan tashqari barcha $n \in \mathbb{N}$ lar uchun $P(A_n) = \frac{1}{2}$ bo'lganligi sababli $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ tasodifiy miqdorlar bir xil taqsimlangan bo'ladi.

O'z navbatida $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ lar bog'liqsiz va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo'ladi. Endi $\bar{\xi}_k$ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasini hisoblaymiz. $\bar{\xi}_k = \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \xi_k - \frac{1}{\sqrt{n}}$ tenglikdan va xarakteristik funksiyalarning 2-xossasidan hamda quyidagini olamiz:

$$\varphi_{\bar{\xi}_k}(t) = M e^{it\bar{\xi}_k(\omega)} =$$

$$\int_{\Omega} e^{it\bar{\xi}_k(\omega)} d\omega = \int_{A_k} e^{it\bar{\xi}_k(\omega)} d\omega + \int_{A_k^c} e^{it\bar{\xi}_k(\omega)} d\omega = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{it}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{it}{\sqrt{n}}} = \frac{\cos t}{\sqrt{n}}.$$

Xarakteristik funksiyalarning 3 - xossasiga ko'ra S_n tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n \frac{\cos t}{\sqrt{n}} = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{n}} \right)^n.$$

3. Xarakteristik funksiya orqali taqsimot funksiyani ifodalash formulasi. Shunday qilib, har bir tasodifiy miqdor uchun unga mos xarakteristik funksiya aniqlanishini ko'rdik. Endi taqsimot funksiya xarakteristik funksiya orqali bir qiymatli aniqlanishini ko'rsatamiz. Bu fakti quyidaga teorema isbotlaydi:

1-teorema. ξ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi $\varphi(t)$ va $F_\xi(x)$ uning taqsimot funksiyasi bo'lsin. Agar x va y lar $F_\xi(x)$ funksiyaning uzluksizlik nuqtalari bo'lsa, u holda

$$F_\xi(y) - F_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \varphi(t) dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

1-natija (Yagonalik teoremasi). Tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi uning taqsimot funksiyasini bir qiymatli aniqlaydi.

Agar $F_\xi(y) - F_\xi(x)$ ayirma $F_\xi(x)$ funksiyani bir qiymatli aniqlashini e'tiborga olsak, u holda yuqoridagi teoremadan natijaning isboti kelib chiqadi.

Aytaylik, $\{\varphi_n(t)\}_{n=1}^\infty$ - xarakteristik funksiyalar ketma-ketligi, $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$ - taqsimot funksiyalar ketma-ketligi bo'lsin.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy uzluksiz va chegaralangan $g(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $F_n(x)$ taqsimot funksiyalar ketma-ketligi $F(x)$ taqsimot funksiyaga sust yaqinlashadi deyiladi.

Buni $F_n(x) \Rightarrow F(x)$ orqali belgilaymiz.

2-teorema (to'g'ri limit teorema). Agar $F_n(x) \Rightarrow F(x)$ bo'lsa, u holda ularga mos $\{\varphi_n(t)\}$ xarakteristik funksiyalar ketma-ketligi $\varphi(t)$ xarakteristik funksiyaga istalgan $t \in [-A; A]$ ning har bir chekli oralig'ida tekis yaqinlashadi.

3-teorema (teskari limit teorema). Agar $\{\varphi_n(t)\}$ ketma-ketlik uzluksiz va $t = 0$ da 1 qiymat qabul qiluvchi $\varphi(t)$ funksiyaga nuqtali yaqinlashsa, u holda $F_n(x) \Rightarrow F(x)$ va quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. S. X. Sirojiddinov, M. Mamatov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. Darslik. Toshkent, "O'qituvchi", 1980 y.
2. J. I. Abdullayev, O'. N. Quljonov. Ehtimollar nazariyasidan masalalar to'plami. O'quv qo'llanma. Samarqand, 2021 y.
3. A. A. Abdushukurov, T. Zuparov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, 2015 y.
4. O. Sahobov. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, Toshkent, 2014 y.

Law of large numbers for random fields with values in $l_p(1 \leq p \leq 2)$

Ruzieva D.S.

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan,

e-mail: dilmura.saidovna@gmail.com

Let $\{X(t), t \in \mathbb{Z}^2\}$ be a random field with values in space $l_p(1 \leq p \leq 2)$ (a space of the sequences $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$ such that $\sum_{i=1}^{\infty} |x^{(i)}|^p < \infty$ with a norm $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^{(i)}|^p\right)^{1/p}$).

$\{e_i, i \geq 1\}$ - is a standart basis of $l_p(1 \leq p \leq 2)$, i.e. $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ where i -th component is 1 and others are 0. Thus we can write

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} X^{(i)}(t) e_i, \quad t \in Z^2$$

Assume that the following representation holds

$$X^{(i)}(t) = g_i(\xi(t-s), \quad s \in Z^2) \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

where g_i is a measurable function and $\{\xi(t), t \in Z^2\}$ is a random field of independent random variables with values in $l_p(1 \leq p \leq 2)$.

Real-valued random fields of type (1) were considered in [1]. Let $\{\xi^l(t), t \in Z^2\}$ be an independent copy of $\{\xi(t), t \in Z^2\}$ and

$$\bar{X}^{(i)}(t) = g_i(\xi^*(t-s), \quad s \in Z^2)$$

where

$$\xi^*(j) = \begin{cases} \xi(j), & \text{if } j \neq 0, \\ \xi^l(0), & \text{if } j = 0. \end{cases}$$

$$\delta_i(t) = \left(E \left| X^{(i)}(t) - \bar{X}^{(i)}(t) \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$\Delta_i = \sum_{t \in Z^2} \delta_i(t).$$

Denote $S_n = S_{\Gamma_n} = \sum_{t \in \Gamma_n} X(t)$. We establish the moment inequality and the strong law of large numbers for $\{X(t), t \in Z^2\}$.

Teopema 1. Let $X(t), t \in Z^2$ be a random field with values in $l_p(1 \leq p \leq 2)$ space defined by equation (1).

Suppose it satisfies the following conditions:

$$EX(t) = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (\Delta_i)^{p/2} < \infty, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Then there is a constant $C > 0$ for which the following inequality holds:

$$E \|S_{\Gamma}\|^p \leq C |\Gamma|^{p/2} \sum_{i=1}^{\infty} (\Delta_i)^{p/2}, \quad (2)$$

where $|\Gamma| = \text{card} \Gamma < \infty$ and Γ is bounded subset of Z^2 .

Teopema 2. Suppose that $X(t), t \in Z^2$ $l_p(1 \leq p \leq 2)$ in space is a random field defined by equation (1) that satisfies the following conditions:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\Delta_i)^{p/2} < \infty.$$

Then as $n \rightarrow \infty$

$$\frac{(|\Gamma_n|)^{1/4}}{(\text{Log} |\Gamma_n|)^{1/2}} \left\| \frac{S_{\Gamma_n}}{|\Gamma_n|} \right\| \rightarrow \infty$$

a.s.

Reference

1. *Machkouri M.E., Volny D., Wu W.B.* A central limit theorem for stationary random fields. Stochastic Processes and their Applications 123(2013), 1-14.

A central limit theorem for branching processes with immigration

¹Sharipov S., ²Toshqulov H.

¹*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: sadi.sharipov@yahoo.com

²*National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.*

Let $\{\xi_{k,i}, k, i \geq 1\}$ and $\{\varepsilon_k, k \geq 1\}$ be two sequence of non-negative integer-valued random variables such that the two families $\{\xi_{k,i}, k, i \geq 1\}$ and $\{\varepsilon_k, k \geq 1\}$ are independent, $\{\xi_{k,i}, k, i \geq 1\}$ are independent and identically distributed (i.i.d.). We consider a sequence of branching processes with immigration $X_k, k \geq 0$ defined recursively as

$$X_0 = 0, \quad X_k = \sum_{i=1}^{X_{k-1}} \xi_{k,i} + \varepsilon_k, \quad k \geq 1. \quad (1)$$

We can interpret $\xi_{k,i}$ as the number of offsprings produced by the i -th individual belonging to the $(k-1)$ -th generation and ε_k is the number of immigrants in the k -th generation. We can interpret X_k as the number of individuals in the k -th generation.

Assume that $a = \mathbb{E}\xi_{1,1} < \infty$. Process X_k is called subcritical, critical or supercritical depending on $a < 1$, $a = 1$ or $a > 1$, respectively. We refer the reader to recent survey of [1] where one can find a historical overview of limit theorems for process (1).

The aim of this paper is to establish a CLT for fluctuations of supercritical process defined by (1) in the case when the immigration process satisfies ψ -mixing condition and the mean of immigrants tends to infinity. Theorem 1 (see below) extends the corresponding result of paper [2].

We present the mixing conditions involved in the paper.

Let $\{\xi_k, k \geq 1\}$ be a sequence of random variables with zero mean and finite variance and $\mathfrak{F}_a^b$ denotes σ -algebra generated by the random variables ξ_i , $a \leq i \leq b$. Given two σ -algebras $\mathcal{B}, \mathcal{R}$ in $\mathfrak{F}$, let

$$\psi(\mathcal{B}, \mathcal{R}) = \sup_{A \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{R}, \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) > 0} \left| \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)} - 1 \right|.$$

Given a sequence $\{\xi_k, k \geq 1\}$, we associate its sequences of ψ -mixing coefficient by letting

$$\psi(n) = \sup_{k \geq 1} \psi(\mathfrak{F}_1^k, \mathfrak{F}_{k+n}^\infty).$$

A sequence of random variables $\{\xi_k, k \in \mathbb{N}\}$ is said to be ψ -mixing if $\psi(n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. We also assume that $\alpha(n) = \mathbb{E}\varepsilon_n < \infty$ and $\beta(n) = \text{Var}(\varepsilon_n) < \infty$ for all $n \in \mathbb{N}$. Further, we set

$$\begin{aligned} A(a, n) &= \mathbb{E}X_n, \quad B^2(a, n) = \text{Var}(X_n), \\ p_k &= \mathbb{P}(\xi_{1,1} = k), \quad B = \mathbb{E}(\xi_{1,1})(\xi_{1,1} - 1), \quad b^2 = \text{Var}(\xi_{1,1}), \\ B_t &= \sum_{k=2}^{\infty} k^{t-1} (k-1) p_k < \infty, \quad t > 1. \end{aligned}$$

Our result reads as follows.

Theorem 1. Assume $a > 1$, $B_{2+\delta} < \infty$ for some $0 < \delta < 1$ and let $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ be a sequence of ψ -mixing random variables with $\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$. If $\chi(a, n) := \sum_{k=1}^n a^{-2k} \alpha(k) \rightarrow \infty$ and $\beta(n) = o(\chi(a, n))$ as $n \rightarrow \infty$ then

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n - A(a, n)}{B(a, n)} < x\right) \rightarrow \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. *Rahimov I.* Homogeneous branching processes with non-homogeneous immigration, *Stochastics and Quality Control* 36, 2021, 165–183.
2. *Sharipov S.O.* On limit theorems for branching processes with dependent immigration, *Global and Stochastic analysis*, 8, 2021, 151-160.

Орбита критической точки и отображение первого возвращения

¹Абдухакимов С.Х., ²Абдухакимова М.Г.

¹Джиззакский государственный педагогический университет,
e-mail: asaidahmat@mail.ru

²Джиззакский государственный педагогический университет,
e-mail: abduhakimova1995@gmail.com

В настоящей работе мы изучаем свойства динамических разбиений для критических отображений окружности. Следуя работы Остлунда и др. (см. [3]) определим пространство пар $(\xi(x), \eta(x))$ критических гомеоморфизмов прямой R^1 . Для каждого $n \geq 1$ определим множество X^{cr} , состоящее из пар $(\xi(x), \eta(x))$ аналитических, строго возрастающих гомеоморфизмов прямой R^1 удовлетворяющих следующим условиям:

- а) $0 < \xi(0) < 1$; б) $\xi(0) = \eta(0) + 1$; в) $\xi(\eta(0)) = \eta(\xi(0))$;
 г) $\xi(\eta(0)) < 0, \xi^2(\eta(0)) < 0, \dots, \xi^{k_1-1}(\eta(0)) < 0$; д) $\xi^{k_1}(\eta(0)) > 0$
 е) $\xi'(0) = \eta'(0) = \xi''(0) = \eta''(0) = 0$; $\xi'''(0) \neq 0, \eta'''(0) \neq 0$; ф) $(\xi \circ \eta)'''(0) = (\eta \circ \xi)'''(0)$

Пусть $(\xi, \eta) \in X^{cr}$. Заметим, что условия а)-д) позволяют построить гомеоморфизм окружности $[\eta(0), \xi(0))$

$$T_{\xi, \eta}(x) = \begin{cases} \xi(x) & \text{если } x \in [\eta(0), 0), \\ \eta(x) & \text{если } x \in [0, \xi(0)). \end{cases}$$

Теперь определим преобразование ренормгруппы $R_{k_i} : X^{cr} \rightarrow X^{cr}$ по формуле:

$$R_{k_i}(\xi, \eta) = (\alpha_i \xi^{k_i-1}(\eta(\alpha_i^{-1}x)), \alpha_i \xi^{k_i-1}(\eta(\xi(\alpha_i^{-1}x))))$$

где, $\alpha_i = \alpha_i(\xi, \eta) = (\xi^{k_i-1}(\eta(0)) - \xi^{k_i}(\eta(0)))^{-1} < -1$

Обозначим через $X^{cr}(\rho)$ подмножество X^{cr} , состоящие из таких пар $(\xi(x), \eta(x))$, что число вращения (см. [1])

$$\rho(\xi, \eta) = \rho = [k_1, k_2, \dots, k_s, k_1, k_2, \dots, k_s, \dots], \quad k_1 \geq 1, \quad s \geq 2.$$

Ренормгрупповое преобразование R_n в подмножестве $X^{cr}(\rho)$ имеет единственную гиперболическую неподвижную точку $(\xi(x), \eta(x))$ (см. [2]-[4])

Времена первого возвращения, т.е. числа $q_{sn} = q_{sn}(\rho), n \geq 1$, удовлетворяют разностному уравнению

$$q_{sn+1} = k_{sn+1}q_{sn} + q_{sn-1}, \quad q_{sn} = k_{sn}q_{sn-1} + q_{sn-2}, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = k_1, \quad q_2 = k_1k_2 + 1.$$

Отображения $T^{q_{sn}}, n \geq 1$, называются отображениями первого возвращения. Следующая теорема показывает поведение отображений $T^{q_{sn}}$ и $T^{q_{sn}+q_{sn-1}}$ в ренормгрупповой окрестности $[\eta(0), \xi(0))$, критической точки $x_0 = 0$.

Теорема 1. Для каждого $n \geq 1$ имеют место следующие соотношения:

$$T^{q_{sn}}(\alpha^{-n}x) = \alpha^{-n}\xi(x), \quad x \in [\eta(0), 0)$$

$$T^{q_{sn}+q_{sn-1}}(\alpha^{-n}x) = \alpha^{-n}\eta(x), \quad x \in [0, \xi(0))$$

где $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2$

Следствие 1. Пусть $x_0 = 0$ и $x_i = T^i(x)$, $i \geq 1$. Для всех $n \geq 1$ справедливы равенства

$$x_{q_{sn}} = \alpha^{-n}\xi(0), \quad x_{q_{sn}+q_{sn-1}} = \alpha^{-n}\eta(0)$$

где $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2$

ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория М.: Наука, 1980.
2. E. de Faria, W. de Melo. Rigidity of critical circle mappings I// Eur.Math. Soc. (JEMS). -1999. -No. 1(4). -P. 339-392.
3. Ostlund R., Rand D., Sethna J., Siggia E. Universal Properties of the transition from quasi periodicity to Chaos in dissipative Systems // Physica 8D.-1983.-P.303-342.
4. Dzhalilov A. A. Thermodynamic Formalism and Singular Invariant Measure for Critical Circle Maps, TMF, 2003, Volume 134, Numer 2, 191-206

Обобщенные варианты “г-быстро” сходимости В. Штрассена и их применения Гафуров М.У.

¹Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан,
 e-mail: mgafurov@rambler.ru

Предложены новые обобщенные варианты “г-быстро” сходимости В. Штрассена. Установлена “Ф-быстро” сходимость последовательности сумм случайных величин (с.в) с отброшенными экстремальными членами.

Пусть $\{\zeta_n; n \geq 1\}$ – последовательность с.в., $\forall \varepsilon > 0 \quad \chi(\varepsilon) = \sup \{n \geq 1, |\zeta_n| > \varepsilon\}$.

Величина $\chi(\varepsilon)$ было введена В. Штрассеном [1] в связи с новым понятием “г-быстро” (g-quickly) сходимости последовательности с.в. ζ_n к нулю.

Определение [1]. Последовательность с.в. $\{\zeta_n; n \geq 1\}$ при $n \rightarrow \infty$ “г-быстро” сходится к нулю если $E\chi^r(\varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$ и $r > 0$.

В частном случае $\zeta_n = n^{-1} \sum_{k=1}^n \xi_k$, где $\{\xi_k; k \geq 1\}$ – независимы и одинаково распределены в [1] установлено необходимое и достаточное условие гарантирующее $E\chi^r(\varepsilon) < \infty, \forall \varepsilon > 0$, и $r > 0$, и исследована асимптотика $P(\chi(\varepsilon) > n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Исследования [1] продолжались в [2]-[10] и других (список публикаций достаточно длинный и географически широк) в различных направлениях.

В настоящее время интересы специалистов вокруг этих исследований расширяются, особую активность проявляют китайские, индийские и немецкие специалисты.

Предлагаемая работа, результаты которой в идейном отношении близки к кругу выше цитированных исследований, основываются ниже предложенном [10] обобщенном определении “г-быстро” сходимости: пусть $\varphi(x)$ – некоторая неотрицательная функция, определенная на $[1, \infty)$,

$$\Phi(x) = \int_1^x \varphi(t) dt$$

Определение. Последовательность с.в. $\{\zeta_n; n \geq 1\}$ “Ф-быстро” сходится к нулю при $n \rightarrow \infty$, если

$$E\Phi(\chi(\varepsilon)) < \infty, \forall \varepsilon > 0$$

В предлагаемой работе при $n \rightarrow \infty$ и фиксированном $l \geq 0$ исследуется поведение суммы

$$\zeta_n(l) = \frac{1}{H(n)} \sum_{k=l+1}^n \xi_n^{(k)},$$

где $\xi_n^{(k)}; 1 \leq k \leq n$ – порядковые статистики индуцированные с.в. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ расположенные в порядке убывания, а функция $H(x)$ такова, что $x \in [1, \infty), H(x) > 0, H(x) \uparrow$.

Положим $\chi(\varepsilon, l) = \sup \{n \geq l; |\zeta_n(l)| > \varepsilon\}$.

1. Нами описан класс ф.р. с.в. ξ_1 и классов функций $\varphi(x)$ и $H(x)$ в которых при фиксированном $l \geq 0, n \rightarrow \infty \quad \zeta_n(l) \rightarrow 0$ “Ф-быстро”;

2. Приведены другие эквивалентные обобщенные варианты “Ф-быстро” сходимости

Литература

1. *Strassen V.* Almost sure behavior of sums of independent random variables and martingales. Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., 1967, Vol.2, No. 1, pp. 315-343.
2. *Lai T.L.* On r-quick convergence and a conjecture of Strassen. Ann. Prob. 1976, 4, pp. 612-627.
3. *Lai T. L.* Convergence rates and r-quick version of the strong law for stationary mixing sequences. Ann. Prob., 1977, 5, pp. 693-706.
4. *Meilijson I.* The average of the values of a function of a random points. Israel J. Math., 1973, 15, pp. 193-203.
5. *Bingham N. H., Goldie Ch. M.* Probabilistic and deterministic averages. Trans. Amer. Math. Soc., 1982, Vol.269, No. 2, pp. 453-479.
6. *Гафуров М.У., Слостников А.Д.* Некоторые задачи выхода случайного блуждания за криволинейную границу и большие отклонения. Теор. вер и примен., 1987, Т.32, No. 2, С. 327-348.
7. *Chow Y. S., Lai T. L.* Some one-sided theorems on the tail distribution of sample sums with applications to the last time and largest excess of boundary crossing. Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 208, pp. 51-72.
8. *Lai T. L.* On condence sequences. Ann. Stat., 1976, Vol.4, No. 2, pp. 265-280.
9. *Lui W. D. Lin Z. Y.* Some LIL type results on the partial sums and trimmed sums with multidimensional indexes. Elect. Comm. in Probab., 2007, 12, pp. 221-233.
10. *М. У. Гафуров.* Обобщенные варианты “т-быстро” сходимости В. Штрассена. Интеллектуальные системы. Теория и приложения, 2016, Т.20, No. 4, С. 25-29.

Усиление теоремы Чжуна о равномерном законе больших чисел

¹Гафуров М.У., ²Такабаев У.А.¹Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан,
e-mail: mgafurov@rambler.ru²Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан,
e-mail: umid1700731@gmail.com

Пусть $\{X_n; n \geq 1\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины (с.в) с общей функцией распределения (ф.р) $F(x)$.

Обозначим через K класс ф.р. $F(x)$ конечным математическим ожиданием, обладающий свойством:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{F \in K} \int_{|x| > a} |x| dF(x) = 0$$

В [1] Чжун доказал, что $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{F \in K} P_F(\sup_{j \geq n} |j^{-1} S_n - \mu_F| \geq \varepsilon) = 0,$$

где $S_j = X_1, X_2, \dots, X_j, j \geq 1, P_F, \mu_F = E_F X_1$ соответственно вероятностная мера и математическое ожидание, при котором X_1 имеет ф.р. $F(x)$. Этот факт им был назван равномерным вариантам усиленного закона больших чисел (у.з.б.ч) Колмогорова. Результат Чжуна оказался перспективным, в смысле применения в задачах последовательного статистического анализа, исследования распределений граничных функционалов для случайных блужданий и т.д. ([2],[3])

Целью настоящей работы является усиление и обобщение приведенного результата Чжуна и их применения в граничных задачах для случайных блужданий.

Один из основных результатов данной работы является описание класса $K_{\varphi, g}$ ф.р. X_1 и функций $g(x), \varphi(x)$ которые гарантирует

$$\sup_{F \in F_{\varphi, g}} \sum_{m=1}^{\infty} m^{k-1} g(m) P_F \left\{ \sup \left| \frac{S_j}{\varphi(j)} \right| > \varepsilon \right\} < \infty, \forall \varepsilon > 0.$$

Доказаны ряд утверждений о существовании обобщенных моментов некоторых функционалов индуцированные случайным блужданием $\{S_j; j \geq 1\}$ с подвижной границей.

Литература

1. *Chung K.L* The strong law of large numbers, Univ. of California Press, Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob., 1951, pp. 341-352.
2. *Lai T.L* Uniform Tauberian theorems and their applications to renewal theory and first passage problems. The Annals of Probability, 1976, Vol.4, No. 14, pp. 628-643.
3. *Sun Chan, Gafurov M.U* On some theorems of uniform complete convergence of random variables. Journal of Huaibei Teachers college (Natural Science Editions), 1990, Vol.11, No. 3, pp. 1-7.

Предельные распределения крайних членов вариационного ряда при случайном объеме выборки

¹Мамуров И.Н.

¹ Ташкентский финансовый институт, Узбекистан,
e-mail: imamurov58@gmail.com

Вариационный ряд является отправным пунктом для многих прикладных задач и само это понятие широко используется в вопросах математической статистике и других областях знания. Поэтому исследованию распределений членов вариационного ряда посвящено большое число работ. В классической математической статистике объем выборки по которой образуется вариационный ряд считается детерминированным.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ - последовательность независимых случайных величин (сл.вел.) с общей функцией распределения (ф.р.) $F(x) = P(X_1 < x)$ и $\xi_1^{(n)} \leq \xi_2^{(n)} \leq \dots \leq \xi_n^{(n)}$ - вариационный ряд (в.р.) построенный по сл. вел. $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Отношение $\frac{k}{n}$ назовем рангом члена $\xi_k^{(n)}$. Если при $n \rightarrow \infty$, $\frac{k}{n} \rightarrow \lambda$, $0 \leq \lambda \leq 1$, то λ называется предельным рангом последовательности $\xi_k^{(n)}$. Члены $\xi_k^{(n)}$, для которых предельный ранг $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$ называются крайними членами в.р..

Исследованию асимптотических распределений крайних членов в.р. -образованного из независимых одинаково распределенных сл.вел.- при детерминированном объеме выборки посвящены много работ.

В настоящей работе мы изучаем асимптотические распределения крайних членов вариационного ряда в том случае, когда объем выборки сам по себе является случайной величиной, т.е. рассматриваемые признаки генеральной совокупности наблюдаются (в силу тех или иных обстоятельств) в случайном числе испытаний. Такое положение часто встречается на практике и является более общим, чем детерминированный случай.

Случайный объем выборки появляется в статистических задачах теории надежности, теории массового обслуживания, последовательного анализа и др.[1]. При этом объем выборки как случайная величина может оказаться независимой (назовем этот случай "независимой схемой"), а в ряде случаев зависящей от самих наблюдаемых величин (назовем этот случай "зависимой схемой"). Д.М.Чибисовым [2] исследовались асимптотические распределения ч.в.р. в случае, когда $\xi_k^{(n)}$, $\frac{k}{n} \rightarrow 0$ (или $n - k \rightarrow \infty$, $\frac{n-k}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$). При этом на поведение рангового номера $k = k(n)$ налагается следующее условие, которое в дальнейшем будет обозначаться как (*):

при некотором α , $0 < \alpha < 1$ для любой целочисленной последовательности $m = m(n)$ удовлетворяющей соотношению $\frac{m(n)}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}} \rightarrow t$, $n \rightarrow \infty$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{k(n+m)} - \sqrt{k(n)}) = \frac{\alpha t}{2}$, где $l > 0$, t -некоторые константы.

В [2] приводятся необходимые и достаточные условия, для того, чтобы ф.р. $F(x)$ при $n \rightarrow \infty$ и $k(n)$, удовлетворяющая условию (*) принадлежала к области притяжения того или иного типа распределений.

Исследования асимптотических распределений членов в.р. при случайном объеме выборки, в отличие от детерминированного объема, являются весьма затруднительными.

Пусть ν_n – последовательность положительных целочисленных сл.всл.

Для крайних ч.в.р. рассмотренных в работе [2], без предположения независимости ν_n и X_m (“зависимая схема”) справедлива следующая теорема.

Теорема. При $n \rightarrow \infty$, $k(n) \rightarrow \infty$, $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 0$, $k(n)$ удовлетворяет условию (*) и при надлежащем выборе последовательностей $a_n > 0$, b_n имеет место

$$P\left(\frac{\xi_{k(n)}^{(n)} - b_n}{a_n} < x\right) \rightarrow \Phi(\nu(x)) \quad \text{и} \quad \frac{\nu_n - n}{n^{1-\frac{\alpha}{2}}} \rightarrow^p \nu,$$

где $0 < \alpha < 1$ - определяется из условия (*) и ν - собственная сл.всл. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$P\left(\frac{\xi_{k(\nu_n)}^{(\nu_n)} - b_n}{a_n} < x\right) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\nu(x) + l(1-\alpha)y) dP(\nu < y).$$

Здесь $\Phi(x)$ -стандартный нормальный закон распределения и функция $\nu(x)$ имеет один из следующих видов:

$$\nu_1(x) = \begin{cases} -\infty, & x \leq 0 \\ \beta \log x, & x > 0 \end{cases}, \quad \nu_2(x) = \begin{cases} -\beta \log |x|, & x < 0 \\ +\infty, & x \geq 0 \end{cases}, \quad \nu_3(x) = x, \quad -\infty < x < \infty.$$

В ходе доказательства теоремы применяется следующая лемма.

Лемма. Если при $n \rightarrow \infty$, $k(n) \rightarrow \infty$, $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 0$, то

$$R_{kn}(x) = \Phi_{kn}(a_n x + b_n) - \Phi(\nu_n(x)) \rightarrow 0 \text{ равномерно по } x, \text{ где}$$

$$\Phi_{kn}(x) = P(\xi_k^{(n)} < x) \text{ и } \nu_n(x) = \frac{nF(a_n x + b_n) - k(n)}{\sqrt{k(n)}}, \quad a_n > 0, \quad b_n - \text{произвольные константы.}$$

Из этой леммы следует, что для выполнения соотношения

$$\Phi_{kn}(a_n x + b_n) \rightarrow \Phi_0(x), \quad n \rightarrow \infty$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\nu_n(x) \rightarrow \nu(x),$$

где $\nu(x)$ определяется уравнением $\Phi_0(x) = \Phi(\nu(x))$.

Приведенная нами теорема является более общим исследованием предельных распределений членов вариационного ряда при случайном объеме выборки в “зависимой схеме”. Другие результаты также посвященные асимптотическим распределениям членов вариационного ряда при случайном объеме выборке в “зависимой схеме” приведены в [3] и [4].

Литература

1. Круглов В.М., Королев В.Ю. Предельные теоремы для случайных сумм. М.: МГУ, 1990. 269 с.
2. Чибисов Д.М. О предельных распределениях для членов вариационного ряда. Теор. вероятн. и ее примен. 1964. Т.9. № 1. С.159-165.
3. Джамирзаев А.А., Мамуров И.Н. Теоремы переноса. Монография. Ташкент, 2019.

4. *Mamurov I.N.* Asymptotic distribution of the central variation members in the case of random sampling volume. Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry. V.12, Issue 7, July 2021, pp.4626-4634.

Проверка гипотезы о справедливости модели пропорциональных интенсивностей Сайфуллоева Г.С.

Навоийский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан

e-mail: sayfullayevagulnoz@gmail.com

Следуя работам [1-3], определим общую модель случайного цензурирования следующим образом: пусть Z случайная величина (с.в.) с функцией распределения (ф.р.) $H(x) = P(Z \leq x), x \in R^1$. Для фиксированного целого числа $k \geq 1$, пусть $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$ попарно несовместные события. Введем субраспределения

$$H(x; i) = P(Z \leq x, A^{(i)}), i \in J = \{1, \dots, k\}.$$

Пусть $\{(Z_m, A_m^{(1)}, \dots, A_m^{(k)}), m \geq 1\}$ последовательность независимых реализаций с совокупности $(Z, A^{(1)}, \dots, A^{(k)})$ на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, A, P\}$. Пусть функции $H(x), H(x; i), i \in J$ непрерывны. Обозначим вероятности $p^{(i)} = P(A^{(i)})$ и пусть $0 < p^{(i)} < 1, i \in J$. В простой модели конкурентного риска через функцию распределения $H(x)$ выразим функции устойчивую $1 - F(x; i)$, соответствующую $(Z, A^{(i)})$ и представим равенством

$$1 - F(x; i) = (1 - H(x))^{p^{(i)}}, i \in J, x \in R^1. \quad (1)$$

Здесь $1 - F(x; i) = \exp(-\Lambda(x; i))$ и $\Lambda(x; i) = \int_{(-\infty, x]} \frac{dH(u; i)}{1 - H(u)}$. Приведем теперь лемму характеризующую МПИ.

Лемма. Равенства (1) равносильно независимости случайной величины Z и событий $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$.

Рассмотрим гипотезу H : "С.в. Z независит от полной группы событий $\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}\}$ ". Заметим, что гипотеза H эквивалентна независимости с.в. Z и вектора $(\delta^{(1)}, \dots, \delta^{(k)})$, где $\delta^{(1)} + \dots + \delta^{(k)} = 1$. При справедливости H имеем равенства $\Lambda(x; i) = p^{(i)} \Lambda(x), i \in J$ в $x < T_H = \inf\{x : H(x) = 1\}$ для интегральных функций интенсивности $\Lambda(x)$ и $\Lambda(x; i)$. Название модели происходит из этого равенства. Для проверки H составим статистику:

$$X_n(x) = [p_n^{(i)}(1 - p_n^{(i)})n\mu(n)h(x)]^{-1/2} \sum_{m=1}^n (\delta_m^{(i)} - p_n^{(i)}) K\left(\frac{x - Z_m}{\mu(n)}\right),$$

и введем следующие условия:

(У1) $h^{(i)}(x) = \frac{dH(x; i)}{dx} > 0, x \in (\tau_i, T_i)$ и $h^{(i)}(x) = 0, x \notin (\tau_i, T_i) \in (-\infty; \infty)$; функции $h^{(i)}(x), h^{(i)'}(x)$ и $h^{(i)''}(x)$ ограничены;

(У2) $K(x)$ – ограниченная плотность вероятности и

а) $K(x) = 0, x \notin [-A; A]$, $K(x)$ функция абсолютно непрерывна на $[-A; A]$, следующие пределы конечны $K(-A) = \lim_{x \downarrow -A} K(x), K(A) = \lim_{x \uparrow A} K(x)$; или

б) $K(x)$ функция, абсолютно непрерывная на интервале $(-\infty; \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K(x)|^s dx < \infty, s = 1, 2;$$

а также

$$\int_{-\infty}^{\infty} xK(x) dx = 0, \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |K(x)| dx < \infty$$

(У3) $\{\mu(n), n \geq 1\}$ последовательность чисел такова, что при $n \rightarrow \infty \mu(n) \downarrow 0$ и $n\mu(n) \rightarrow \infty$;

Кроме того, расширяющиеся интервалы (τ_{in}, T_{in}) таковы, что при $n \rightarrow \infty$ $(\tau_{in}, T_{in}) \subset (\tau_{in+1}, T_{in+1})$, $(\tau_{in}, T_{in}) \rightarrow (\tau_i, T_i)$ и $\log(T_{in} - \tau_{in}) = O(n)$. Также пусть $c_n \mu^2(n) \rightarrow 0$ для $c_n = \max_{i \in J} \sup_{\tau_{in} < x < T_{in}} |h^{(i)}(x)|^{-1/2}$ и

$$\mu(n) \left(1 - H(T_{in})^{-1}\right) \rightarrow 0, i \in J, n \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. Пусть условия (У1-У3) выполняются для $K(t)$, $h^{(i)}(x)$ и $\{\mu(n), n \geq 1\}$. Если последовательность интервалов (τ_n, T_n) для $\mu(n) = n^{-\varepsilon_0}$, $\frac{1}{5} < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$ выбрана при $n \rightarrow \infty$ такой, что условия

$$c_n^* = \sup_{\tau_n < x < T_n} [h(x)]^{-1/2} = O\left(n^{-1/2(1-\varepsilon_0-\varepsilon_1)}\right),$$

$$\sup_{\tau_n < x < T_n} \left| \frac{h'(x)}{h(x)} \right| = O\left(n^{1/2(\varepsilon_0-\varepsilon_1)}\right)$$

выполнены, $h(x) = \sum_{i=1}^k h^{(i)}(x)$ и условия $1 - \varepsilon_0 - \varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_0 - \varepsilon_1 > 0$ и $1 - 2\varepsilon_0 - \varepsilon_1 < 0$ для $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ должны быть справедливы. При справедливости гипотезы H

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ (2 \log \gamma_n)^{1/2} \cdot \left(\sup_{\tau_n < x < T_n} |X_n(x)| (\lambda(K))^{-1/2} - d_{on} \right) < y \right\} = \exp \{-2e^{-y}\}, y > 0.$$

$$\text{где } \gamma_n = \frac{T_n - \tau_n}{n^{-\varepsilon_0}},$$

$$d_{on} = \begin{cases} (2 \log \gamma_n)^{1/2} + (2 \log \gamma_n)^{-1/2} \{ \log \pi^{-1/2} N_1(K) + \frac{1}{2} \log \log \gamma_n \}, & \text{если } N_1(K) > 0, \\ (2 \log \gamma_n)^{1/2} + (2 \log \gamma_n)^{-1/2} \log [2\pi N_2(K)], & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $N_1(K) = \frac{[K^2(A) + K^2(-A)]}{2\lambda(K)}$, $N_2(K) = \left\{ \frac{1}{\lambda(K)} \int [K'(u)]^2 du \right\}^{1/2}$ и $p_n^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n \delta_m^{(i)}$ - оценка для $p^{(i)}$.

Литература

1. Abdushukurov A.A. Statistics of incomplete data. Tashkent. Unisersity Press, 2009, 269 p. (In Russian)
2. Abdushukurov A.A., Sayfulloyeva G.S. On approximation of empirical Kac processes under general random censorship model. Journal of Siberian Federal University «Mathematics and physics» (Scopus) ISSN 1997-1397. 2022. No. 3.
3. Burke M.D., Csörgő S., Horváth L. Strong approximations of some biometric estimates under random censorship. Z. Wahrschein. Verw. Gebiete. 1981, v.56, p.87-112.
4. Burke M.D., Csörgő S., Horváth L. A correction to and improvement of "Strong approximations of some biometric estimates under random censorship." Probab. Th. Rel. Fields. 1988, v.79. p.51-57.

Предельные теоремы для функционалов от случайных выпуклых оболочек в единичном круге

Хамдамов И.М.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

e-mail: khamdamov.isakjan@gmail.com

В настоящей работе доказаны центральные предельные теоремы для функционалов, таких, как число вершин и площадь выпуклой оболочки, в случае, когда случайные точки заданы в полярной системе координат, причем их компоненты независимы между собой, угловая координата равномерно распределена и хвост распределения радиальной координаты является правильно меняющейся функцией вблизи границы носителя – круга. Данное исследование является продолжением работ [1–6].

В работе Н.Сарнал [1] исследованы асимптотические выражения средних значений основных функционалов, таких, как число вершин, площадь и периметр выпуклой оболочки, порожденной независимыми наблюдениями над двумерными случайными точками, когда случайные точки даны в полярной системе координат, причем их компоненты независимы между собой, угловая координата распределена равномерно, и хвост распределения радиальной координаты является правильно меняющейся функцией в бесконечности (если носитель – R^2) или вблизи окружности (если носитель – единичный круг). Второй случай, в частности, включает равномерное распределение в единичном круге и обобщает ранее полученные результаты В.Ефрон [2].

Пусть A – единичный круг, центр которого находится в $(0, 1)$.

Предположим, что случайные точки (r_i, α_i) , $i = 1, \dots, n$ даны в полярной системе координат в A (начало координат находится в $(0, 1)$), где r_i и α_i независимы, причем α_i равномерно распределены в $[-\pi, \pi]$ и

$$\mathbb{P}(r_i > 1 - x) = x^\beta L\left(\frac{1}{x}\right), \quad 0 < x < 1, \quad \beta \geq 1, \quad (1)$$

здесь $L(x)$ – медленно меняющаяся функция в смысле Карамата, представляемая в виде

$$L(u) = \exp \left\{ \int_1^u \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \right\}, \quad \varepsilon(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

Далее положим $X_i = r_i \sin \alpha_i$, $1 - Y_i = r_i \cos \alpha_i$ и через C_n обозначим выпуклые оболочки, порожденные случайными точками $(X_1, Y_1); (X_2, Y_2); \dots; (X_n, Y_n)$, а через ν_n и s_n обозначим число вершин и площадь C_n соответственно.

Отметим, что в классе распределений (1) Н.Сарнал [1] установил асимптотику для средних значений указанных выше функционалов

$$\mathbb{E}\nu_n = \lambda_1(\beta) b_n^{\frac{1}{2}} (1 + o(1)) \quad \text{и} \quad \mathbb{E}s_n = \pi - \lambda_2(\beta) b_n^{-1} (1 + o(1)),$$

при $n \rightarrow \infty$, где b_n – наименьший корень уравнения

$$n x^{-(\beta + \frac{1}{2})} L(x) = 1,$$

$\lambda_1(\beta)$ и $\lambda_2(\beta)$ – абсолютные константы, зависящие лишь от переменных, указанных в скобках и

$$\lambda_1(\beta) = \frac{\sqrt{2}B(2\beta + 1; \frac{1}{2})}{2\pi} \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{B(\beta + 1; \frac{1}{2})} \right)^{2 - \frac{1}{2\beta + 1}} \Gamma\left(3 - \frac{1}{2\beta + 1}\right),$$

$$\lambda_2(\beta) = \frac{2\beta + 1}{2\beta + 3} \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{B(\beta + 1; \frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{2\beta + 1}} \Gamma\left(3 + \frac{1}{2\beta + 1}\right).$$

В данной работе проблема нахождения предельных распределений ν_n и s_n решена для класса распределений, задаваемых соотношением (1).

Приведем основные результаты работы.

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\frac{\nu_n - \lambda_1(\beta)b_n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\lambda_3(\beta)b_n^{\frac{1}{4}}}} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

где $\lambda_3(\beta)$ введена в работе [5], $\xrightarrow{d}$ означает слабую сходимость, $N(0, 1)$ – нормальная случайная величина с параметрами $(0, 1)$.

Далее пусть $\Delta_n = \pi - s_n$.

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\sqrt{\frac{\pi b_n^{\frac{5}{2}}}{2\lambda_4(\beta)}} \left(\frac{\Delta_n}{\pi} - \lambda_2(\beta)b_n^{-1} \right) \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

где $\lambda_4(\beta)$ введена в работе [6].

Приведенные нами результаты являются более общими и, в частности, из теоремы 1 и 2 в случае $\beta = 1$ следуют основные результаты работы [3] и [4] соответственно.

Из полученных результатов следует, что ожидаемое число вершин $n^{\frac{2}{2\beta+1}}$, математическое ожидание площади между границей выпуклой оболочки и окружности, имеют порядок $n^{-\frac{1}{2\beta+1}}$. Отсюда можно сделать вывод, что если хвост распределения вблизи границы тяжелее, то вблизи границы носителя располагается много элементов выборки, и это означает, что имеется много вершин, но область, ограниченная периметром выпуклой оболочки и окружностью, как и разница между периметром выпуклой оболочки и окружностью, становится незначительной.

В доказательствах теорем 1 и 2 используется одна и та же техника. Сначала исходная выпуклая оболочка аппроксимируется выпуклой оболочкой, порожденной пуассоновским точечным процессом в круге. Затем в круге рассматривается m_n непересекающихся сегментов E_k , $k = 1, \dots, m_n$ (больших блоков) с центральным углом $\frac{2\pi(\log n - \log^\delta n)}{\sqrt{b_n}}$ и аналогично рассматривается m_n непересекающихся сегментов E_k^* , $k = 1, \dots, m_n$ (маленьких блоков) с центральным углом $\frac{2\pi \log^\delta n}{\sqrt{b_n}}$, при $1 > \delta > \frac{2}{2\beta+1}$, в каждом из которых доказывается центральная предельная теорема для основных функционалов, где $m_n = \frac{n}{\log n}$. При этом основными средствами доказательства являются сильное перемешивание и мартингаловые свойства стационарных вершинных процессов, порожденных неоднородным пуассоновским точечным процессом. В конце доказательства аппроксимируем пуассоновские точечные процессы в каждом большом блоке E_k и маленьком блоке E_k^* отдельно. Затем, используя свойство независимости приращения пуассоновского точечного процесса, ν_n и s_n представим как сумму m_n независимых нормально распределенных случайных величин.

Литература

1. Carnal H. Die konvexe Hulle von n rotations symmetrisch verteilten Punkten. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 1970, 15, pp.168–176.
2. Efron B. The convex hull of a random set of points. Biometrika, 1965, 52, pp.331–343.
3. Groeneboom P. Limit theorems for convex hulls. Probab. Th. Rel. Fields, 1988, v.79, N3, pp.327–368.
4. Cabo A.J. and Groeneboom P. Limit theorems for functionals of convex hulls. Probab. Theory Relat. Fields 1994, 100, pp.31–55.
5. Khamdamov I.M. On Limit Theorem for the Number of Vertices of the Convex Hulls in a Unit Disk. J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2020, 13(3), pp.275–284.
6. Khamdamov I.M. Properties of convex hull generated by inhomogeneous Poisson point process. Ufimsk. Mat. Zh., 2020, Volume 12, Issue 3, pp.83–98.

Усиленный закон больших чисел Марцинкевича-Зигмунда для слабо зависимых случайных величин со значениями в банаховых пространствах

¹Шарипов О.Ш., ²Кушмуродов А.А.

¹ *Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*,
e-mail: osharipov@yahoo.com

² *Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека*,
e-mail: kushmurodov85@mail.ru

Усиленный закон больших чисел Марцинкевича-Зигмунда для последовательностей случайных величин (с.в.) со значениями в бесконечномерных пространствах исследован многими авторами (см. ([1])–([3]) и литературу в них). Справедливость этого закона существенно зависит от геометрии банахового пространства.

Приведем определение банахового пространства типа p .

Определение 1. Сепарабельное банахово пространство B (с нормой $\|\cdot\|$) называется имеющим тип p ($1 \leq p \leq 2$), если для всех конечных наборов независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ со значениями в B с $EX_k = 0$ и $E\|X_k\|^p < \infty$ $k = 1, 2, \dots, n$ имеет место следующее неравенство

$$E\|X_1 + X_2 + \dots + X_n\|^p \leq C \sum_{i=1}^n E\|X_i\|^p$$

где константа C зависит только от пространства B и p .

Мы рассмотрим последовательности с перемешиванием и теперь приведем определение коэффициентов перемешивания.

Определение 2. Для последовательности B -значных случайных величин $\{X_n, n \geq 1\}$ коэффициенты ψ – перемешивания определяются следующим образом:

$$\psi(k) = \sup \left\{ \left| \frac{P(AB) - P(A)P(B)}{P(A)P(B)} \right| : A \in F_1^n, B \in F_{n+k}^\infty, n \in N \right\}$$

где F_a^b – означает σ -алгебру, порожденную с.в. $X_a, X_{a+1}, \dots, X_b$.

Усиленный закон больших чисел Марцинкевича-Зигмунда для последовательностей действительных случайных величин с сильным перемешиванием изучен в ([4]).

Основным нашим результатом является следующая теорема.

Теорема. Пусть $\{X_n, n \geq 1\}$ последовательность одинаково распределенных случайных величин со значениями в B банаховом пространстве типа p ($1 < p < 2$) и выполняются следующие условия:

$$EX_1 = 0, \quad E\|X_1\|^p < \infty, \\ \sum_{k=1}^\infty \psi(k) < \infty, \quad \psi(1) < 1.$$

Тогда при $n \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0 \quad \text{с вероятностью } 1.$$

Литературы

1. Кушмуродов А.А., Шарипов О.Ш. Закон больших чисел Марцинкевича-Зигмунда для слабо зависимых случайных величин со значениями в банаховых пространствах. Бюллетень Института Математики, Vol.4, 2021, N.6, 86-91.
2. Li D., Qi Y., Rosalsky A. A refinement of the Kolmogorov-Marcinkiewicz-Zygmund strong law of large numbers. *Jour. Theor. Probab.*, 24. 2011, 1130–1156.
3. Азларов Т. А., Володин Н. А. Законы больших чисел для одинаково распределенных банаховозначных случайных величин. *Теория вероят.и ее примен.*, 26. вып.3. 1981, 584-590.
4. Rio E. A maximal inequality and dependent Marcinkiewicz-Zygmund strong laws. *Ann.Probab.*, vol 23, No.2, 1995, 918-937.

SECTION V. ALGEBRA AND GEOMETRY

Katetlari ayirmasi bir xil bo'lgan Pifagor sonlarini topish usullari¹Abdullayev J.I., ²Ibragimov H.H.¹ Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand, Uzbekistan,
e-mail: jabdullaev@mail.ru² Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti, Surxondaryo, Uzbekistan,
e-mail: husniddinhikmatovich@gmail.ru

Pifagor sonlari haqida juda ko'p ma'lumotlar bo'lsada, bu sonlarni o'rganishga bo'lgan qiziqish borgan sari ortib bormoqda. Bu sonlar haqida ko'pchilik yaxshi tushunchaga ega, biz bu sonlardan kundalik hayotda ko'p foydalanamiz.

1-ta'rif. Agar a, b, c nolmas butun sonlar uchun

$$a^2 + b^2 = c^2$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda (a, b, c) uchlikka Pifagor uchligi deyiladi.

Biz matn ichida (a, b, c) Pifagor uchligining a, b sonlarini to'g'ri burchakli uchburchakning katetlari, qisqacha katetlar deb ham ataymiz. Biz, "eng kichik" uchta Pifagor uchliklarini keltiramiz.

$$(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25).$$

Ma'lumki, (a, b, c) Pifagor uchligi bo'lsa, u holda

$$(a, b, c), (2a, 2b, 2c), \dots, (na, nb, nc), \dots \quad (1)$$

uchliklar ham Pifagor uchliklari bo'ladi.

2-ta'rif. Agar (a_1, b_1, c_1) va (a_2, b_2, c_2) Pifagor uchliklari va biror n natural soni uchun $na_1 = a_2$ va $nb_1 = b_2$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda (a_1, b_1, c_1) va (a_2, b_2, c_2) Pifagor uchliklari bir sinfga qarashli deyiladi.

Agar (1) sinfda a va b katetlar o'zaro tub bo'lsa, u holda (a, b, c) Pifagor uchligini (1) sinfning yaratuvchisi deymiz. Masalan, $(3, 4, 5)$ Pifagor uchligi

$$(3, 4, 5), (6, 8, 10), \dots, (3n, 4n, 5n), \dots$$

sinfning yaratuvchisidir.

Ma'lumki, istalgan tengmas $n, m \in \mathbb{Z}$ sonlari uchun

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

sonlar Pifagor uchligini hosil qiladi.

Biz quyidagicha savol qo'yamiz. Agar (n, m, t) lar Pifagor uchligi bo'lsa, ular yordamida boshqa Pifagor uchliklarini hosil qilish mumkunmi? Bu savolga ijobiy javob bor ekan. Quyidagi tasdiq shu haqida.

1-teorema Agar (n, m, t) lar Pifagor uchligi bo'lsa, u holda

$$n_1 = 2n + m + 2t, \quad m_1 = n + 2m + 2t, \quad t_1 = 2n + 2m + 3t$$

sonlar ham Pifagor uchligi bo'ladi.

Bu teorema shu bilan ahamiyatliki, bunda Pifagor uchliklarining katetlari orasidagi farq saqlanadi, ya'ni $m - n = m_1 - n_1$ tenglik o'rinli. 1-teoremami (n_1, m_1, t_1) Pifagor uchligiga qo'llab yangi

$$n_2 = 2n_1 + m_1 + 2t_1, \quad m_2 = n_1 + 2m_1 + 2t_1, \quad t_2 = 2n_1 + 2m_1 + 3t_1$$

Pifagor uchligini hosil qilamiz.

2-teorema (3, 4, 5) Pifagor uchligidan 1-teorema yordamida hosil qilingan barcha Pifagor uchliklari biror sinfning yaratuvchisi bo'ladi.

Pifagor uchligi (3, 4, 5) ga 1-teoremani qo'llab, (20, 21, 29) Pifagor uchligini hosil qilamiz. 1-teoremani hosil qilingan (20, 21, 29) Pifagor uchligiga qo'llab (119, 120, 160) Pifagor uchligini hosil qilamiz. Bundan keyingi Pifagor uchliklari (696, 697, 985) va (4059, 4060, 5741) lardir. Hosil qilingan Pifagor uchliklarida katetlar farqi ($b - a = 1$) 4-3=1 saqlanganligini ko'ramiz.

Agar (a, b, c) Pifagor uchligidagi sonlar o'zaro tub, ya'ni $EKUB(a, b, c) = 1$ bo'lsa u holda a, b va c lardan biri albatta tub son bo'lishi kerak degan gipoteza ilgari surilgan. Quyidagi tasdiq bu gipotezani noto'g'ri ekanligini isbotlaydi.

3-teorema. Agar (n, m, t) Pifagor uchligi bo'lsa, u holda ixtiyoriy butun musbat p va q sonlari uchun,

$$n_1 = n|m^2tp^2 - t^3q^2|, \quad m_1 = m|2nt^2pq|, \quad t_1 = t|nm^2p^2 + nt^2q^2|$$

lar ham Pifagor uchligi bo'ladi.

Izoh. Bu teoremadagi n_1, m_1 va t_1 lar ikkita butun sonning ko'paytmasi bo'lganligi uchun, ularning barchasi murakkab sonlar bo'ladi.

Pifagor uchligi (3, 4, 5) ga 3-teoremani qo'llab ($p = q = 1$) yangi Pifagor uchligi (135, 600; 615) ni hosil qilamiz. 135, 600, 615 sonlarining barchasi murakkab sonlardir.

3-ta'rif. Bizga to'g'ri burchakli parallelepipedning qirralari x, y, z va diagonali d berilgan bo'lsin. Agar x, y, z va d lar butun musbat sonlar bo'lsa bunday parallelepipedni Pifagor g'ishtini, (x, y, z, d) ni Pifagor to'rtligi deymiz.

Ma'lumki Pifagor to'rtligi $(x, y, z, d) \in \mathbb{N}^4$ uchun, $x^2 + y^2 + z^2 = d^2$ tenglik bajariladi.

Quyidagicha savol qo'yamiz. Pifagor to'rtligini Pifagor uchligi yordamida hosil qilish mumkunmi?

Bu savolga ijobiy javob mavjud, quyidagi tasdiq shu haqida.

4-teorema. Agar (n, m, t) Pifagor uchligi bo'lsa, u holda

$$x = t - n, \quad y = t - m, \quad z = n + m - t, \quad d = 2t - n - m$$

lar Pifagor to'rtligi bo'ladi.

Bu teoremani quyidagicha ham bayon qilish mumkun. Agar $n^2 + m^2 = t^2$ bo'lsa, u holda quyidagi tenglik ham o'rinli bo'ladi:

$$(t - n)^2 + (t - m)^2 + (n + m - t)^2 = (2t - n - m)^2.$$

Pifagor g'ishtini hosil qilishini quyidagi misolda namoyish qilamiz. Bizga (3, 4, 5) Pifagor uchligi berilgan bo'lsin. Bu uchlikka 4-teoremani qo'llab

$$x = 5 - 3 = 2, \quad y = 5 - 4 = 1, \quad z = 3 + 4 - 5 = 2, \quad d = 2 \cdot 5 - 3 - 4 = 3$$

hajmi minimal bo'lgan Pifagor g'ishtini hosil qilamiz.

$$2^2 + 1^2 + 2^2 = 3^2 \Leftrightarrow 9 = 9$$

Quyida biz 4-teorema yordamida Pifagor uchliklariga mos Pifagor to'rtliklarini keltiramiz.

Pifagor uchligi	Pifagor to'rtligi
(3, 4; 5)	(2, 1, 2; 3)
(20, 21; 29)	(9, 8, 12; 17)
(119, 120; 169)	(40, 41, 79; 81)
(696, 697; 985)	(288, 289, 408; 577)

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *A'zamov A.* Eyler g'ishtlari. Fizika, matematika va informatika. 2012. No 1.
2. *Abdullayev J.I., Ibragimov H. H.* Pifagor taxtasi yordamida Pifagor g'ishtlarini qurish. Ilmiy axborotnoma. Samarqand, 1-son (119), 2020. 15-21.
3. *Иэн Стюарт.* Величайшие математические задачи. М: Альпина нон-фикшн, 2015. 460.

2-local derivations of Okubo algebra

Allambergenov A.

Nukus state pedagogical institute, Nukus, Uzbekistan,

e-mail: allayar2010@mail.ru

The notion of 2-local derivation has been introduced by P. Semrl in [7] and there the author described 2-local derivations on the algebra $B(H)$ of all bounded linear operators on an infinite-dimensional separable Hilbert space H . Namely he has proved that every 2-local derivation on $B(H)$ is a derivation. A similar description for the finite-dimensional case appeared later in [6].

In [2] a new technique has been proposed which enabled the authors to generalize the above mentioned results for arbitrary Hilbert spaces H . Namely it was proved that on the algebra $B(H)$ for an arbitrary Hilbert space H (no separability is assumed) every 2-local derivation is a derivation. A similar result for 2-local derivations on finite von Neumann algebras was obtained in [3].

In [1] the authors have extended all above results for arbitrary semi-finite von Neumann algebras. Finally, in [4] it was proved that for any purely infinite von Neumann algebra M every 2-local derivation on M is a derivation. This completed the solution of the above problem for arbitrary von Neumann algebras.

Let $\mathbb{F}$ be a field of characteristic $\neq 2, 3$ which contains a cube root $\neq 1$ of unity or equivalently a square root of -3 . Thus, $\mathbb{F}$ contains the solutions μ to the equation $3X(1-X) = 1$ or $\mu = \frac{1}{6}(3 \pm \sqrt{-3})$.

Let $M_3(\mathbb{F})$ be the associative algebra of 3×3 matrices over $\mathbb{F}$. Denote by $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ the corresponding special Lie algebra. Let us consider [5] a new product on $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ defined by

$$x * y = \mu xy + (1 - \mu)yx - \frac{1}{3}(\text{tr } xy)1 \quad (1)$$

where tr is the canonical trace on $M_3(\mathbb{F})$.

Linear space $\mathcal{O} = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{F})$ with multiplication $*$ as in (1) and non-degenerate quadratic form n is a symmetric composition algebra:

$$n(x * y) = n(x)n(y), \quad n(x * y, z) = n(x, y * z),$$

for any x, y, z (see [5]).

The symmetric composition algebra $(\mathcal{O}, *, n)$ is called the Okubo algebra over $\mathbb{F}$ (see [6]).

Recall that a mapping $\Delta : A \rightarrow A$ (not necessary linear) is said to be a 2-local derivation, if for every pair $x, y \in A$ there exists a derivation $D_{x,y} : A \rightarrow A$ (depending on x, y) such that $\Delta(x) = D_{x,y}(x)$, $\Delta(y) = D_{x,y}(y)$.

Theorem. Let $\mathcal{O}$ be the Okubo algebra. Then every 2-local derivation $\Delta : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$ is a derivation.

References

1. *Ayupov Sh. A., Arzikulov F. N.* 2-local derivations on semi-finite von Neumann algebras, Glasgow Math. Jour. 56 (2014) 9–12.
2. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* 2-local derivations and automorphisms on $B(H)$, J. Math. Anal. Appl., 395 (2012) 15–18.
3. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Nurjanov B. O., Alauadinov A. K.* Local and 2-local derivations on noncommutative Arens algebras, Math. Slovaca, 64 (2014) 423–432.

4. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K.K.* 2-local derivations on von Neumann algebras, *Positivity*, 19 (2015) no 3, 445–455.
5. *Elduque A.* Okubo Algebras: Automorphisms, Derivations and Idempotents, *Lie Algebras and Related Topics* (2015) 65–66.
6. *Kim S. O., Kim J. S.* Local automorphisms and derivations on M_n , *Proc. Amer. Math. Soc.*, (132) (2004) 1389–1392.
7. *Semrl P.* Local automorphisms and derivations on $B(H)$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125 (1997) 2677–2680.

Lie algebra of solenoidal vector fields

Aslonov J.

National university of Uzbekistan, Uzbekistan

e-mail: jasurbek05@mail.ru

Vector fields whose divergence is calculated in different physical applications have very different physical meanings. However, everywhere the divergence of the vector field is directly related to flows through closed surfaces S .

The very concept of flow originally arose in hydrodynamics, when describing the motion of an incompressible fluid, the bulk density of which is the same at all points in space: $\rho = \text{const}$. Since the concept of hydrodynamic flow is closest to life, therefore its discussion makes sense. In addition to the gradient and divergence discussed above, in applications one more 1st order differential operation, called a rotor, is often encountered, which maps a vector field into a vector field.

Proposition 1. Any integral curve of a potential vector field $X = \text{gradu}$ is an intersection of two second-order surfaces.

Definition 1. A scalar field that depends only on the distance of a point to the origin is called spherical.

Proposition 2. The gradient vector field of a spherical scalar field is a potential vector field. Let the vector field $X = f(r) \vec{r}$.

Proposition 3. If X is a vector field of a spherical scalar field, then it is solenoidal in any region that does not contain the origin.

Proposition 4. If X is a vector field of a spherical scalar field, then it is irrotational. Let M be a smooth connected Riemannian manifold of dimension n , and let a smooth vector field X be given on the manifold M .

Definition 2. A vector field X on M is called a Killing vector field if the one-parameter group of local transformations generated by the field X consists of isometries [6].

Theorem 1. [6] The Lie algebra $K(M)$ of the Killing vector fields of a connected Riemannian manifold M has dimension at most $\frac{1}{2}n(n+1)$, where $n = \dim M$. If $\dim K(M) = \frac{1}{2}n(n+1)$, then M is a manifold of constant curvature.

Proposition 5. The Killing vector field in three-dimensional Euclidean space is a solenoidal vector field.

Theorem 2. The Lie bracket of two solenoidal vector fields in three-dimensional Euclidean space is a solenoidal vector field.

The proved Theorem 2 shows that the space of solenoidal vector fields forms a Lie algebra, and their Lie bracket is considered as an operation of multiplication of two fields.

References

1. *Kochin N.E.* Vector calculus and the beginnings of tensor calculus (in russian). 9th ed. M., 1965.

2. *Butuzov V.F.* Mathematical analysis in questions and tasks (in russian). Ed.5, M.: Fizmatlit, 2001. 480 p.
3. *Kompaneets A.S.* Theoretical physics. 2nd ed. M., 1957.
4. *Gavrilov VG* Multiple and curvilinear integrals. Elements of field theory: textbook. for universities / V. G. Gavrilov, E. E. Ivanova, V. D. Morozova; ed. V. S.
5. *Zarubina, A. P. Krishchenko.* 2nd ed., stereotype. M.: Publishing house of MSTU im. N. E. Bauman, 2003. 496 p.
6. *Aslonov J. O.* Geometry of orbits of Killing vector fields. Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, 2011. No 5. ?. 5-7.
7. *Aslonov J. O.* Geometry of orbits of Killing vector fields. Uzbek mathematical journal. Tashkent, 2012, No 2. ?. 77-85.
8. *Aslonov Zh.O.* On the geometry of orbits of Killing's vector fields. Geometric methods in control theory and mathematical physics, Abstracts of the III International Scientific Conference dedicated to the memory of Professor M. T. Teryokhin. Ryazan, 2021.
9. *Aslonov J.O.* Geometry of orbits of vector fields. Results of science and technology. Ser.Modern mat. and her app. Subject. review, 2021, volume 197, DOI:<https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-197-69-77>.

The matrix form of the operator Rota-Baxter

¹Asrorov D.

¹ Samarkand state University, named after Sharof Rashidov researcher intern of Mathematical faculty, Samarkand region,
e-mail: 96Asrorovdiorjon@mail.ru

Operator Rota-Baxter. Rota-Baxter algebra is an algebra A over a field K with a linear endomorphism $\beta : A \rightarrow A$ satisfying the Rota-Baxter relation

$$\beta(e_i)\beta(e_j) = \beta(\beta(e_i)e_j + e_i\beta(e_j)) + a\beta(e_ie_j), i, j = 1 - 2., \quad (1)$$

where a is a fixed element of K

The map β is called a Rota-Baxter operator of weight a . Associative Rota-Baxter algebras arise in many mathematical contexts, i.e., in integral and finite differences calculus, but also in perturbative renormalization in quantum field theory and many more see [1].

Over an algebraically closed field F ($Char(F) \neq 2$ and 3), any non-trivial 2-dimensional algebra is isomorphic to only one of the following algebras listed by their matrices of structure constants [2].

Problem 1. *Here we would like to ask the following issue: If any non-trivial 2-dimensional algebra will be isomorphic A_{12} , in that case, is it possible to find the view of the a Rota-Baxter operator?*

If we use the matrix form of the operator Rota-Baxter, then for the twelfth class:

$$A_{12}(c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

We are find following:

$$e_1e_1 = 0e_1 + 1e_2, e_1e_2 = 0e_1 + 0e_2, e_2e_1 = 0e_1 + 0e_2, e_2e_2 = 0e_1 + 0e_2, \quad (3)$$

We know that:

$$\beta(e_1) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = xe_1 + ze_2, \quad (4)$$

$$\beta(e_2) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = ye_1 + te_2, \quad (5)$$

We construct the following system of equations taking into account $i, j = 1 - 2$ and the left and right sides of equation (5):

$$\begin{cases} 2xy + ay = 0 \\ x^2 - 2xt - at = 0 \\ xy - yt = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

Taking into account the system solutions, we divide the solutions into the following cases:

Case 1: If the condition $2x + a \neq 0$ holds, then the solutions :

$y = 0, t = \frac{x^2}{2x+a}, x \neq \frac{-a}{2}$ and z — accepts an arbitrary value.

Rota-Baxter operator view will be as follows:

$$\beta = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & \frac{x^2}{2x+a} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

here $x \neq \frac{-a}{2}$ and z — accepts an arbitrary value.

Case 2: If the condition $x = \frac{-a}{2}$ holds, then the solutions:

$y = 0, x = \frac{-a}{2}, t = \frac{a}{4}$ and z — accepts an arbitrary value.

Rota-Baxter operator view will be as follows:

$$\beta = \begin{pmatrix} \frac{-a}{2} & 0 \\ z & \frac{a}{4} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

here z —accepts an arbitrary value.

In conclusion, we arrive at the following theorem:

Theorem 1. If any non-trivial 2-dimensional algebra will be isomorphic A_{12} , in that case, The matrix form of the β —Rota-Baxter operator can be found.

References

1. *Sh. Ayupov, B. Omirov, I. Rakhimov.* Leibniz Algebras Structure and Classification, Taylor and Francis Group (2019).
2. *Ahmed H, Bekbaev U, Rakhimov I* The Automorphism Groups and Derivation Algebras of Two-Dimensional Algebras. J Generalized Lie Theory Appl 12: 290. doi: 10.4172/1736-4337.1000290.(2018)
3. *H. Ahmed, U. Bekbaev, I. Rakhimov* Complete classification of two-dimensional algebras, AIP Conference Proceedings 1830, 070016, doi:10.1063/1.4980965.(2017)

P-precompact space and its hyperspace

¹Beshimov R., ²Safarova D.

¹National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;

e-mail: rbeshimov@mail.ru

²National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan;

e-mail: safarova.dilnora87@mail.ru

In this paper, we will study the connection between a *P*-precompact and its hyperspace. It is proved that if a uniform space $(X, \mathcal{U})$ is *P*-precompact, then a uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ is *P*-precompact.

Let X be a non-empty set, and α and β be covers of the set X . It is said that α is inscribed in the cover of β , if for any $A \in \alpha$ there exists $B \in \beta$, such that $A \subset B$, and write $\alpha > \beta$. If $\{\alpha_a : a \in M\}$ is an arbitrary family of covers of the set X , then the interior intersection of the

family $\{\alpha_a : a \in M\}$ of covers is a cover consisting of all sets in the form $\bigcap \{A_a : a \in M\}$, where $A_a \in \alpha_a$ is for any $a \in M$ and is denoted by $\bigwedge \{\alpha_a : a \in M\}$ or $\bigwedge_{a \in M} \alpha_a$. If α and β are two covers of the set X , then their interior intersection: $\alpha \wedge \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$ [1].

Let α be the cover of the set X and $Y \subset X$. The set $\alpha(Y) = \bigcup \{A \in \alpha : A \cap Y \neq \emptyset\}$ is called the star set with respect to the cover α . If $Y = \{x\}$, then write $\alpha(x)$ instead of $\alpha(\{x\})$. Next, put $\alpha^\Delta = \{\alpha(x) : x \in X\}$, $\alpha^* = \{\alpha(A) : A \in \alpha\}$. They say that a cover α is star inscribed in β , if $\alpha^\Delta \supset \beta$. If $\alpha^* \supset \beta$, then they say that α is strongly star inscribed in β . Note that if the cover α is star inscribed in β , and the cover β is star inscribed in γ , then the cover α is strongly star inscribed in γ [1].

Definition 1 [1]. Let X be a nonempty set. A family $\mathcal{U}$ of covers of a set X is called uniformity on X if the following conditions are satisfied:

(H1h7 If $\alpha \in \mathcal{U}$ and α is inscribed in some cover β of the set X , then $\beta \in \mathcal{U}$.

(H1h7 For any $\alpha_1 \in \mathcal{U}$, $\alpha_2 \in \mathcal{U}$ there exists $\alpha \in \mathcal{U}$, which is inscribed in α_1 and α_2 .

(H1h7 For any $\alpha \in \mathcal{U}$, there exists $\beta \in \mathcal{U}$ strongly star inscribed in α .

(P4) For any x, y of a pair of different points of X , there exists $\alpha \in \mathcal{U}$ such that no element of α contains both x and y .

A family $\mathcal{U}$ consisting of a set X , satisfying conditions (P1) - (P3) is called pseudo-uniformity on X and a pair $(X, \mathcal{U})$ is called a pseudo-uniform space.

A family $\mathcal{U}$ consisting of a set X , satisfying conditions (P1) - (P4) is called uniformity on X and a pair $(X, \mathcal{U})$ is called a uniform space.

Proposition 1 [1]. For any uniformity of $\mathcal{U}$ on X , the family

$$\tau_{\mathcal{U}} = \{O \subset X : \text{for each } x \in O \text{ exists } \alpha \in \mathcal{U} \text{ such that } \alpha(x) \subset O\}$$

is a topology on X and the topological space $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ is a T_1 -space.

The topology of $\tau_{\mathcal{U}}$ is called the topology generated or induced by the uniformity of $\mathcal{U}$.

A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is called a compact if the set X with the topology induced by the uniformity of $\mathcal{U}$ is a compact [2].

Let $(X, \mathcal{U})$ be a uniform space and $\exp X$ the set of all nonempty closed subsets of the space $(X, \tau_{\mathcal{U}})$. For each $\alpha \in \mathcal{U}$, put $P(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha\}$, where $\langle \alpha' \rangle = \{F \in \exp X : F \subseteq \bigcup \alpha' \text{ and } F \cap A \neq \emptyset \text{ for each } A \in \alpha'\}$.

Proposition 2 [1]. If $\mathcal{B}$ is the base of a uniform space $(X, \mathcal{U})$, then $P(\mathcal{B}) = \{P(\alpha) : \alpha \in \mathcal{B}\}$ forms a base of some uniformity $\exp \mathcal{U}$ on $\exp X$.

A uniform space $(\exp X, \exp \mathcal{U})$ is called a hyperspace of closed subsets of a uniform space $(X, \mathcal{U})$, and uniformity $\exp \mathcal{U}$ is called Hausdorff uniformity on $\exp X$.

Remark 1 [1]. Let $\exp_c X$ be the set of all nonempty compact subsets of the uniform space $(X, \mathcal{U})$. For each $\alpha \in \mathcal{U}$, put $K(\alpha) = \{\langle \alpha' \rangle : \alpha' \subseteq \alpha \text{ and } \alpha' \text{ is finite}\}$. Note that $K(\alpha)$ is the cover of the set $\exp_c X$.

Corollary 1 [3]. Let $(X, \mathcal{U})$ be a uniform space. Then $w(\mathcal{U}) = w(\exp \mathcal{U})$.

Corollary 2 [3]. If the uniform space $(X, \mathcal{U})$ is metrizable, then its hyperspace $(\exp X, \exp \mathcal{U})$ is also metrizable.

Theorem 1 [4]. A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is uniformly paracompact if and only if a uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ is uniformly paracompact.

Let us give examples of the property P of uniform covers of uniform spaces:

- (1) covers of brevity $\leq n$;
- (2) star-finite covers;
- (3) point-finite covers;
- (4) finite covers;
- (5) covers of power $\leq \tau$, $\tau \geq \aleph_0$.

A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is called P -precompact if the uniformity $\mathcal{U}$ has a base $\mathcal{B}$ consisting of covers with property P .

Theorem 1. *A uniform space $(X, \mathcal{U})$ is P -precompact if and only if a uniform space $(\exp_c X, \exp_c \mathcal{U})$ is P -precompact, where properties P is a uniformly point-finite cover of uniform space.*

References

1. *Borubaev A.A.* Uniform topology, Bishkek: Ilim, 2013.(Russian).
2. *Engelking R.* General topology, Revised and completed edition. Berlin: Helderman, 1986.
3. *Michael E.* Topologies on spaces of supsets, Trans. Amer. math. Soc., T.1, №71, 1951, 152–172.
4. *Beshimov R.B., Safarova D.T.* Some topological properties of a functor of finite degree, Lobachevskii Journal of Mathematics, T.42, №12, 2021, 2744-2753.

On idempotent elements of a three dimension genetic algebra

¹Boltayev Sh.A., ²Ibragimov M.M.

¹ *Navoi State Pedagogical Institute, Navoi, Uzbekistan,*
e-mail: shaxzodboltayev98@gmail.com

² *Andizhan State University, Andijan, Uzbekistan,*
e-mail: muhammadibragimov@gmail.com

Let $E = \{1, \dots, m\}$ be a finite set and the set of all probability distributions on E

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i = 1\} \quad (1)$$

be the $(m-1)$ -dimensional simplex. A *quadratic stochastic operator* (QSO) is a mapping $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ of the simplex into itself, of the form $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \in S^{m-1}$, where

$$V : x'_k = \sum_{i,j \in E} p_{ij,k} x_i x_j, \quad k \in E, \quad (2)$$

and the coefficients $p_{ij,k}$ satisfy

$$p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^m p_{ij,k} = 1, \quad i, j, k \in E. \quad (3)$$

Such operators frequently arise in many models of mathematical genetics, namely theory of heredity (see e.g. [1-3]). Let us recall the definition of an evolution algebra of a free population following [2]. The QSO is closely related to an algebra structure on $\mathbb{R}^m$ containing the unit simplex (1). Let $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^m$ be the canonical basis of $\mathbb{R}^m$, and we introduce a multiplication as follows

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^m p_{ij,k} \mathbf{e}_k. \quad (4)$$

Thus, we identify the coefficients of inheritance as the structure of an algebra, i.e. a bilinear mapping of $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ to $\mathbb{R}^m$. Suppose that $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ and $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Then the general formula for the multiplication is the extension of (4) on $\mathbb{R}^m$ generated by the QSO (2) and it has the form

$$\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \sum_{i,j,k=1}^m (p_{ij,k} x_i y_j) \mathbf{e}_k = \frac{1}{4} (V(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - V(\mathbf{x} - \mathbf{y})). \quad (5)$$

Using (3) it is easy to see that $\mathbf{x} \circ \mathbf{y} = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}$, i.e. the multiplication (5) has the commutative property. The algebra $\mathcal{A}_V$ generated by the evolution operator (2) is called the *genetic algebra*.

An element $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_V$ is called *idempotent* if $\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}$. The idempotents of an evolution algebra are especially important, because they are the fixed points of the evolution operator V . Denote by $\mathcal{Id}(\mathcal{A}_V)$ the set of idempotent elements of the algebra $\mathcal{A}_V$.

Consider $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \rightarrow V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ defined as

$$(x_2^2 + (1+a)x_1x_2 + (1-b)x_2x_3, x_1^2 + (1-a)x_1x_2 + (1+c)x_1x_3, x_3^2 + (1-c)x_1x_3 + (1+b)x_2x_3), \quad (6)$$

where $-1 \leq a, b, c \leq 1$.

Let $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ and $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ and let $\mathcal{A}_V$ be a genetic algebra. Recall that a character of $\mathcal{A}_V$ is a linear functional $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ with $h(\mathbf{x} \circ \mathbf{y}) = h(\mathbf{x})h(\mathbf{y})$ for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}_V$.

- Theorem 1.** (i) The function $h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + x_3$ is a character of $\mathcal{A}_V$;
(ii) The function $h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ is a character of $\mathcal{A}_V$ if and only if when $b = 1$ and $c = -1$.

Theorem 2. The set of idempotents $\text{Id}(\mathcal{A}_V)$ is equal to

$$\{\mathbf{O}, \mathbf{e}_3\} \cup \begin{cases} \{(\alpha, \alpha, 1-2\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}, & \text{if } a = b = c = 0, \\ \{\mathbf{x}^*\}, & \text{if } a = b = 0, c \neq 0, \\ \{\mathbf{x}^*\}, & \text{if } a = c = 0, b \neq 0, \\ \{\mathbf{x}^*(\alpha), \mathbf{x}^{**}(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}, & \text{if } b = c = 0, a \neq 0, \\ \{\mathbf{x}^*(a, b), \widehat{\mathbf{x}}(\alpha), \widetilde{\mathbf{x}}(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}, & \text{if } c = 0, ab \neq 0, \\ \{\mathbf{x}^*(a), \mathbf{x}^*(a, c), \widehat{\mathbf{x}}(a), \widetilde{\mathbf{x}}(a)\} & \text{if } b = 0, ac \neq 0, \\ \{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*(b), \mathbf{x}^*(bc)\}, & \text{if } a = 0, bc \neq 0, \\ \{\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{**}(a), \mathbf{x}^*(a), \mathbf{x}^*(abc), \mathbf{x}^{**}(abc)\}, & \text{if } abc \neq 0. \end{cases}$$

where $\mathbf{O} = (0, 0, 0)$, $\mathbf{x}^* = (1/2, 1/2, 0)$, $\mathbf{x}^*(a) = (-1/a, 1/a, 0)$, $\mathbf{x}^*(b) = (1/(2b), -1/b, 1/(2b))$,

$$\mathbf{x}^*(a, b) = \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right), \quad \mathbf{x}^*(a, c) = \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right), \quad \mathbf{x}^{**}(a) = \left(-\frac{2}{a}, \frac{2+a}{a}, 0\right),$$

$$\mathbf{x}^*(\alpha) = \left(\frac{a(1-\alpha) - 2 + \sqrt{4 + a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \frac{a - 2 - \sqrt{4 + a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \alpha\right),$$

$$\mathbf{x}^{**}(\alpha) = \left(\frac{a(1-\alpha) - 2 - \sqrt{4 + a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \frac{a - 2 + \sqrt{4 + a^2(1-\alpha)^2}}{2a}, \alpha\right),$$

$$\mathbf{x}^*(bc) = \left(\frac{b-c+bc}{c(b+c)}, \frac{b-c+bc}{b(b+c)}, \frac{c-b}{bc}\right), \quad \mathbf{x}^*(abc) = \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{b}{c}, 1, -\frac{b+c}{c}\right),$$

$$\mathbf{x}^{**}(abc) = \frac{1}{a+b+c} \left(\frac{b-c+bc}{c}, \frac{b-c+bc}{b}, \frac{abc+c^2-b^2}{bc}\right),$$

$$\widehat{\mathbf{x}}(a) = \left(\frac{a-2+\sqrt{4+a^2}}{2a}, \frac{a+2-\sqrt{4+a^2}}{2a}, 0\right), \quad \widetilde{\mathbf{x}}(a) = \left(\frac{a-2-\sqrt{4+a^2}}{2a}, \frac{a+2+\sqrt{4+a^2}}{2a}, 0\right).$$

References

1. N. N. Ganikhodjaev, R. N. Ganikhodjaev, U. U. Jamilov. Quadratic stochastic operators and zero-sum game dynamics, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 2015. Vol. 35. No. 5. P. 1443–1473.
2. Y. I. Lyubich. Mathematical structures in population genetics, of Biomathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
3. U. A. Rozikov. Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. World Sci. Publ., Singapore, 2020.

Almost inner derivations of solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length

¹Iskenderov A.S., ²Kurbanbaev T.K.

¹Nukus State Pedagogical Institute (Nukus, Uzbekistan)

e-mail: ayslanbekiskenderov@gmail.com

²Karakalpak State University (Nukus, Uzbekistan)

Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky

e-mail: tuuelbay@mail.ru

In this note, almost inner derivations of solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length are considered.

Definition 1. A vector space with a bilinear bracket $(L, (-, -))$ over a field $\mathbb{F}$ is called Leibniz algebra if for any $x, y, z \in L$ the Leibniz identity

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

holds.

The notion of a derivation in the case of Leibniz algebras is defined as usual, that is, a linear map $d : L \rightarrow L$ of a Leibniz algebra L is said to be a *derivation* if it satisfies

$$d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$$

for any $x, y \in L$. The set of all derivations of L denoted by $Der(L)$.

Note that the right multiplication operator $R_x : L \rightarrow L$, $R_x(y) = [y, x]$, $y \in L$, is a derivation. This derivation is called an *inner derivation*. The set of all inner derivations of L denoted by $InDer(L)$.

Definition 2. [2] The derivation $D \in Der(L)$ of the Leibniz algebra L is called an *almost inner derivation* if $D(x) \in [x, L]$ holds for all $x \in L$; in other words, there exists $a_x \in L$ such that $D(x) = [x, a_x]$. The space of all almost inner derivations of L is denoted by $AID(L)$.

For a given Leibniz algebra L we consider the lower central and the derived series

$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L], \quad k \geq 1, \quad L^{[1]} = L, \quad L^{[s+1]} = [L^{[s]}, L^{[s]}], \quad s \geq 1,$$

respectively.

Definition 3. A Leibniz algebra L is said to be *nilpotent* (respectively, *solvable*), if there exists $n \in \mathbb{N}$ ($m \in \mathbb{N}$) such that $L^n = 0$ (respectively, $L^{[m]} = 0$).

Evidently, for an n -dimensional nilpotent Leibniz algebra L we have $L^{n+1} = 0$.

The maximal nilpotent ideal of a Leibniz algebra is called the *nilradical* of the algebra.

Let R be a solvable Leibniz algebra with nilradical N . We denote by Q the complementary vector space of the nilradical N to the algebra R . Let us consider the restrictions to N of the right multiplication operator on an element $x \in Q$ (denoted by $R_{x|_N}$). Thanks to [4] we know that for any $x \in Q$, the operator $R_{x|_N}$ is a non-nilpotent derivation of N .

Let $\{x_1, \dots, x_m\}$ be a basis of Q , then for any scalars $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, the matrix $\alpha_1 R_{x_1|_N} + \dots + \alpha_m R_{x_m|_N}$ is non-nilpotent, which means that the elements $\{x_1, \dots, x_m\}$ are *nil-independent* [5]. Therefore, the dimension of Q is bounded by the maximal number of non-independent derivations of the nilradical N (see [4], Theorem 3.2). Moreover, similar to the case of Lie algebras, for a solvable Leibniz algebra R the inequality $\dim N \geq \frac{1}{2} \dim R$ holds.

Below we define the notion of a quasi-filiform Leibniz algebra.

Definition 4. A Leibniz algebra L is called *quasi-filiform* if $L^{n-2} \neq 0$ and $L^{n-1} = 0$, where $n = \dim L$.

A Leibniz algebra L is called $\mathbb{Z}$ -graded if $L = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V_i$, where $[V_i, V_j] \subseteq V_{i+j}$ for any $i, j \in \mathbb{Z}$ with a finite number of non-null spaces V_i .

A gradation $L = V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_t}$ of a Leibniz algebra L is called *connected gradation* if $V_{k_i} \neq 0$ for any i ($1 \leq i \leq t$) and the number $l(\bigoplus L) := l(V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_t}) = k_t - k_1 + 1$ is called *the length of the gradation*.

Definition 5. A Leibniz algebra L is called to be of maximum length if $\max\{l(\oplus L) \text{ such that } L = V_{k_1} \oplus \dots \oplus V_{k_t} \text{ is a connected gradation}\} = \dim(L)$.

The following algebra is one of n -dimensional quasi-filiform non-Lie Leibniz algebra of maximum length [3]:

$$M^{1,0} : \begin{cases} [e_1, e_1] = e_n, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-2. \end{cases}$$

In work [1] the following theorem was proved.

Theorem 1. An arbitrary algebra of the family $R(M^{1,0}, 1)$ admits a basis $\{e_1, e_2, \dots, e_n, x\}$ such that its table of multiplications is one of the following types:

$$\begin{array}{ll} R_1(M^{1,0}, 1)(\alpha_2, \dots, \alpha_n) : & R_2(M^{1,0}, 1)(\alpha) : \\ \begin{cases} [e_1, x] = \alpha_2 e_n, & [x, x] = \alpha_n e_n, \\ [e_i, x] = e_i + \sum_{t=i+1}^{n-1} \alpha_{t-i+2} e_t, & 2 \leq i \leq n-1, \end{cases} & \begin{cases} [e_1, x] = e_1, \\ [e_i, x] = (i-1)e_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_n, x] = 2e_n, & [x, e_1] = -e_1 + \alpha e_2, \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} R_3(M^{1,0}, 1)(\alpha) : & R_4(M^{1,0}, 1)(\alpha) : \\ \begin{cases} [e_1, x] = e_1, & [e_2, x] = 2e_2 + \alpha e_n, \\ [e_i, x] = i e_i, & 3 \leq i \leq n-1, \\ [e_n, x] = 2e_n, & [x, e_1] = -e_1, \end{cases} & \begin{cases} [e_1, x] = e_1 + \alpha e_{n-2}, & [x, x] = -\alpha e_{n-3}, \\ [e_i, x] = (i+3-n)e_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_n, x] = \alpha e_{n-1} + 2e_n, & [x, e_1] = -e_1, \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} R_5(M^{1,0}, 1)(\alpha) : & R_6(M^{1,0}, 1)(\alpha) : \\ \begin{cases} [e_1, x] = e_1 + \alpha e_{n-1}, \\ [e_i, x] = (i+2-n)e_i, & 2 \leq i \leq n, \\ [x, e_1] = -e_1, & [x, x] = -\alpha e_{n-2}, \end{cases} & \begin{cases} [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\ [e_i, x] = (i+1-n)e_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_n, x] = 2e_n, & [x, x] = \alpha e_{n-1}, \end{cases} \end{array}$$

$$R_7(M^{1,0}, 1)(\alpha) : \\ \begin{cases} [e_1, x] = e_1, & [x, e_1] = -e_1, \\ [e_i, x] = (i-2+\alpha)e_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_n, x] = 2e_n, & \alpha \notin \{1, 2, 3-n, 4-n, 5-n\}, \end{cases}$$

where $\alpha_i, \alpha \in \mathbb{C}$ and the first non-vanishing parameter $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ in the algebra $R_1(M^{1,0}, 1)(\alpha_2, \dots, \alpha_n)$ can be scaled to 1.

The following theorem is main result.

Theorem 2. Let $L = R_i(M^{1,0}, 1)$, $1 \leq i \leq 7$ is a solvable Leibniz algebra. Then any almost inner derivation of solvable Leibniz algebra is inner.

References

1. Abdurasulov K.K., Adashev J.Q., Casas J.M., Omirov B.A. Solvable Leibniz algebras whose nilradical is a quasi-filiform Leibniz algebra of maximum length, Communications in Algebra, 2019, 47(4), p.1578-1594.
2. Adashev Zh.K., Kurbanbaev T.K. Almost inner derivations of some nilpotent Leibniz algebras, Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, 2020, 13(6), 733-745.
3. Camacho L.M., Cañete E.M., Gómez J.R., Omirov B.A. Quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length, Sib. Math. J., 52(5), 2011, 840-853.
4. Casas J.M., Ladra M., Omirov B.A., Karimjanov I.A. Classification of solvable Leibniz algebras with null-filiform nilradical, Linear Alg. Appl., 438(7), 2013, 2973-3000.
5. Mubarakzjanov G.M. On solvable Lie algebras (Russian), Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy, Matematika, 32(1), 1963, 114-123.

Equivalence of Paths with respect to the Action of the Group Complex Representation of $Sp(n)$

Juraboyev S.S.

Fergana State University, Uzbekistan

e-mail: saidaxbor.juraboyev@mail.ru

Let H^n be an n -dimensional vectors space over the skew field of quaternion numbers, and let $GL(H^n)$ be a group all the invertible linear transformation in H^n . Also, a subgroup of $GL(H^n)$ that of all symplectic transformation, is denoted by $Sp(n)$, i.e.,

$$Sp(n) = \{\sigma \in GL(H^n) : \langle \sigma x, \sigma y \rangle = \langle x, y \rangle\},$$

where $\langle x, y \rangle = \sum_{l=1}^n x_l \bar{y}_l$, $x, y \in H^n$, $\bar{y}_l$ —Hermitian conjugate of y_l . It is plain that the space H^n can be regarded as a $2n$ -dimensional complex vector space. We will denote this complex space by V . As a set, V coincides with H^n . Then every element $\sigma \in GL(H^n)$ defines a linear transformation $\sigma' \in GL(V)$, and $GL(H^n)$ can be regarded as a subgroup of $GL(V)$ using the into isomorphism $\sigma \rightarrow \sigma'$. Then $Sp(n)$ can be regarded also as a subgroup of $GL(V)$. This subgroup is called the complex representation of $Sp(n)$, (see, [1]). In the following, we consider only complex representation of $Sp(n)$.

Let the vector $\vec{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}) \in V$ correspond to the vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in H^n$, and let the vector $\vec{y} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2n}) \in V$ correspond to the vector $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in H^n$. Then, as a simple calculation shows, we have

$$\langle x, y \rangle = \sum_{l=1}^{2n} \xi_l \bar{\eta}_l - \left[\sum_{l=1}^{2n} (\xi_l \eta_{l+n} - \xi_{l+n} \eta_l) \right] j.$$

We denote by $\Omega_1(\vec{x}, \vec{y})$ and $\Omega_j(\vec{x}, \vec{y})$ of the sums $\sum_{l=1}^{2n} \xi_l \bar{\eta}_l$ and $\sum_{l=1}^{2n} (\xi_l \eta_{l+n} - \xi_{l+n} \eta_l)$, respectively. Obviously, a symplectic transformation leaves invariant of a bilinear form $\langle x, y \rangle$. Then, the corresponding complex transformation leaves invariant of the bilinear forms $\Omega_1(\vec{x}, \vec{y})$ and $\Omega_j(\vec{x}, \vec{y})$, (see, [2]). We will have the following definition from this property.

Definition 1. The group of linear transformations $\sigma' \in GL(V)$ is called a group of the complex representation of the group $Sp(n)$, if it satisfies the following conditions:

$$\{\sigma' \in GL(V) : \Omega_1(\sigma' x, \sigma' y) = \Omega_1(x, y), \Omega_j(\sigma' x, \sigma' y) = \Omega_j(x, y)\}.$$

We denote of the group complex representation of $Sp(n)$ by $USp(2n, C)$.

Let $C\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle$ the differential field of differential rational functions with differential variable $\vec{x} \in V$, over C . In this case, the differentiation mapping $d : C\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle \rightarrow C\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle$ is defined using by equalities

$$d(a) = 0, d(f + \varphi) = df + d\varphi, d\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{(dp)q - p(dq)}{q^2},$$

where, $a \in C$, $f = f\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle$, $\varphi = \varphi\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle$ are differential functions, $p = p[\vec{x}, \vec{x}^*]$, $q = q[\vec{x}, \vec{x}^*]$ are differential polynomials, (see, [3] or [4]).

Definition 2. If G is a subgroup in the group $GL(V)$ and $f\langle \sigma \vec{x}, \sigma \vec{x}^* \rangle = f\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle$ for all $\sigma \in G$, then the differential rational function $f\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle \in C\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle$ is called G -invariant.

The set of all G -invariant differential rational functions is denoted by $C\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle^G$. The set $F = \{f_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \Sigma} \in C\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle^G$ is called the system of differential generators of the field $C\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle^G$, if any element $f\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle \in C\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle^G$ can be obtained from a finite number of elements of F by applying a finite number of times algebraic operations, differentiation and the complex conjugation in $C\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle^G$. In the following, we will consider the problem of describing the generating system of the differential field $C\langle \vec{x}, \vec{x}^* \rangle^G$, for the case $G = USp(2n, C)$. Some results were obtained during the study of this problem. We present them in the form of the following theorem:

Theorem 1. Let $G = USp(2n, C)$. Then the system of G -invariant polynomials

$$\Omega_1(\vec{x}, \vec{x}), \Omega_1(d^{r-1}\vec{x}, d^r\vec{x}), \Omega_j(d^{r-1}\vec{x}, d^r\vec{x}), \quad r = \overline{1, n}$$

is a finite system of generators in the differential field $C\langle\vec{x}, \vec{x}^*\rangle^G$, where d^r is the r -th order differential of the vector $\vec{x}$.

Let $I = (a, b)$ – an arbitrary interval from the set R of real numbers (cases are possible when $a = -\infty$, or $b = +\infty$). It is known that I -path in C^{2n} is such a continuous vector function $x(t) = \{x_l(t)\}_{l=1}^{2n}$ from I to C^{2n} , in which all coordinate mappings $x_l : I \rightarrow C$ are infinitely differentiable functions on I , where $l = \overline{1, 2n}$. The vector $x^{(r)}(t) = \left\{x_l^{(r)}(t)\right\}_{l=1}^{2n}$, where $x_l^{(r)}(t)$ – r -th derivative of the coordinate function $x_l(t)$. The I -path $x(t)$ is called *regular* if $x^{(1)}(t) \neq 0$ for all $t \in I$. For each I -path $x(t)$ by $M(t)$ we denote the $2n \times 2n$ -matrix $\left(x_{lm}^{(r)}(t)\right)_{l,m=1}^{2n}$, $r = \overline{0, 2n-1}$. The I -path $x(t)$ is called *strongly regular* if the inequality $\det(M(t)) \neq 0$ is true for all $t \in I$, (see, [4] or [5]).

Let G be an arbitrary subgroup of the group $GL(V)$. Two I -paths $x(t)$ and $y(t)$ are called G -equivalent if such an element exists σ from G such that $y(t) = \sigma x(t)$. The following theorem gives a solution to the problem of equivalence of two paths, for the cases $G = USp(2n, C)$.

Theorem 2. Strongly regular I -paths $x(t)$ and $y(t)$ are $USp(2n, C)$ -equivalent if and only if, when the equalities hold

$$i) \quad \Omega_1(\vec{x}, \vec{x}) = \Omega_1(\vec{y}, \vec{y});$$

$$ii) \quad \Omega_1(d^{r-1}\vec{x}, d^r\vec{x}) = \Omega_1(d^{r-1}\vec{y}, d^r\vec{y});$$

$$iii) \quad \Omega_j(d^{r-1}\vec{x}, d^r\vec{x}) = \Omega_j(d^{r-1}\vec{y}, d^r\vec{y})$$

where $r = \overline{1, n}$.

References

1. Iwahori.N Some remarks on tensor invariants of $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$. Journal of the Mathematical Society of Japan, 10(2), April, 1958,
2. Chevalley.C. Theory of Lie groups. i. Princeton., Princeton University Press. 1946.
3. Xadjiyev. Dj. Application of the theory of invariants to the differential geometry of curves. Tashkent: Fan, 1988.
4. Muminov. K. K., Chilin. V.I Equivalence of curves in finite-dimensional spaces. Lap.Lambert Academic Publishing. Deutchland (Germaniya) 2015.
5. Khodyrovich M. K., Solyonovich J. S. Equivalence of Paths under the Action of the Real Representation of $Sp(n)$. Journal of Applied Mathematics and Physics. 2022. 10. No. 5. p. 1837-1858.

Complete systems of invariants of parametric topological figures in the two-dimensional Euclidean space

^{1,2}Khadjiev D., ²Beshimov G.R.

¹ V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics Academy of Sciences of Uzbekistan
e-mail: khdjavvat@gmail.com

² National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
e-mail: gayratbeshimov@gmail.com

Abstract. Let E_2 be the two dimensional Euclidean space and T be a topological space. A continuous mapping $\gamma : T \rightarrow E_2$ will be called a parametric T -figure in E_2 . Let $O(2, R)$ be the group of all orthogonal transformations of E_2 . Put

$$SO(2, R) = \{g \in O(2, R) | \det(g) = 1\},$$

$$MO(2, R) = \{F : E_2 \rightarrow E_2 \mid Fx = gx + b, g \in O(2, R), b \in E_2\},$$

$$MSO(2, R) = \{F : E_2 \rightarrow E_2 \mid Fx = gx + b, g \in SO(2, R), b \in E_2\}.$$

The present paper is devoted to solutions of problems of G -equivalence of parametric T -figures in E_2 for the groups $G=O(2, R)$, $SO(2, R)$, $MO(2, R)$, $MSO(2, R)$ in terms of G -invariants of a parametric T -figure. Complete systems of G -invariants of a parametric T -figure in E_2 for these groups have obtained. Complete systems of relations between elements of the obtained complete systems of G -invariants have given.

Derivations on algebras of measurable functions

Kudaybergenov K.

*Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy, Uzbekistan Academy of Sciences,
Uzbekistan*

e-mail: karim2006@mail.ru

Recall that a linear mapping $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ is called a derivation if it satisfies the identity $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ for all $x, y \in \mathcal{A}$. Each element $a \in \mathcal{A}$ defines a derivation $\text{ad}(a) : D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ given by $\text{ad}(a)(x) = ax - xa$, $x \in \mathcal{A}$. Such derivations $\text{ad}(a)$ are called inner derivations. It is clear that if $\mathcal{A}$ is commutative, all inner derivations are zero.

Let $S(0, 1)$ be the algebra of all (classes of equivalence) measurable complex-valued functions and let $AD(0, 1)$ be the algebra of all (classes of equivalence of) almost everywhere approximately differentiable functions on $[0, 1]$.

Recall that the existence of non zero derivations on $S(0, 1)$ were obtained independently by A.F.Ber, F.A.Sukochev, V.I.Chilin [1] and A.G.Kusraev [2]. In [3, Proposition 6] it was shown that the dimension of the linear space of all derivations on the algebra $S(0, 1)$ is uncountable.

Theorem. *Let $\text{Der}S(0, 1)$ be the linear space of all derivations of $S(0, 1)$. Then*

$$\dim \text{Der}S(0, 1) = \dim \text{Der}AD(0, 1) = 2^c.$$

References

1. Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A. Non-trivial derivations on commutative regular algebras. Extracta Math. 2006. Vol. 21, p. 107–147.
2. Kusraev A. G. Automorphisms and derivations on a universally complete complex f -algebra. Siberian Math. J. 2006. Vol. 47. no 1. p. 77–85.
3. Ber A. F. Derivations on commutative regular algebras. Siberian Advances in Mathematics. 2011. Vol. 21, p. 161–169.

Some Network-Type Properties of the Space of Permutation Degree

¹Mukhamadiev F.G., ²Sadullaev A.K., ³Meyliev Sh.U.

¹ *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 4, str. University, Tashkent,
Uzbekistan* e-mail: farhod8717@mail.ru

² *Yeoju Technical Institute in Tashkent, 156, str. Usman Nasyr, Tashkent, Uzbekistan* e-mail:
anvars1997@mail.ru

³ *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 4, str. University, Tashkent,
Uzbekistan* e-mail: shmeyliev@mail.ru

Some topological properties of the space of permutation degree $SP^n X$ are discussed. We prove that if the product X^n has some network-type properties, then the space $SP^n X$ also has these properties.

Let X^n be the n -th power of a compact X . The permutation group S_n of all permutations, acts on the n -th power X^n as permutation of coordinates. The set of all orbits of this action

with quotient topology we denote by $SP^n X$. Thus, points of the space $SP^n X$ are finite subsets (equivalence classes) of the product X^n . Thus, two points $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$ are considered to be equivalent, if there is a permutation $\sigma \in S_n$ such that $y_i = x_{\sigma(i)}$. The space $SP^n X$ is called the n -permutation degree of a space X and it is always a quotient of X^n . Let G be any subgroup of the group S_n . Then it also acts on X^n as group of permutations of coordinates. Consequently, it generates a G -symmetric equivalence relation on X^n . This quotient space of the product of X^n under the G -symmetric equivalence relation is called G -permutation degree of the space X and it is denoted by $SP_G^n X$ [1].

A family ν of subsets of a topological space X is called a *network* for X if for every $x \in X$ and any neighbourhood U of x there exists $V \in \nu$ such that $x \in V \subset U$ [2].

A family κ of subsets of a topological space X is called a k -*network* for X if whenever $K \subset U$ with compact K and open set U in X , there exists κ' of finitely many members of κ such that $K \subset \bigcup \kappa' \subset U$ [3].

A sequence $\{x_n\}$ in X is called *eventually* in P if $\{x_n\}$ converges to x , and there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\} \subset P$. A family ξ is called a *cs-network* at a point $x \in X$ if for any sequence $\{x_n\}$ converging to x and a neighborhood U of x , there exists $P \in \xi$ such that $P \subset U$ and $\{x_n\}$ is eventually in P [4].

A family ξ^* is called a *cs*-network* at a point $x \in X$ if whenever $\{x_n\}$ is a sequence converging to a point $x \in U$ with open set U in X , then $\{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\} \subset P \subset U$ for some subsequence $\{x_{n_i}\}$ of $\{x_n\}$ and some $P \in \xi^*$ [4].

Theorem 1. *If X^n is a T_1 -space that has a network which cardinality equal to τ , then $SP_G^n X$ also has a network which cardinality $\leq \tau$.*

Theorem 2. *If X^n is a T_1 -space that has a k -network which cardinality equal to τ , then $SP_G^n X$ also has a k -network which cardinality $\leq \tau$.*

Theorem 3. *If X^n is a T_1 -space that has a *cs*-network which cardinality equal to τ , then $SP_G^n X$ also has a *cs*-network which cardinality $\leq \tau$.*

Theorem 4. *If X^n is a T_1 -space that has a *cs**-network which cardinality equal to τ , then $SP_G^n X$ also has a *cs**-network which cardinality $\leq \tau$.*

References

1. Kőcinac, L.D.R., Mukhamadiev, F.G., Sadullaev, A.K. Some Cardinal and Geometric Properties of the Space of Permutation Degree. *Axioms* 2022, 11, 290.
2. Engelking R. General Topology. Heldermann, Berlin, 1989.
3. Zhaowen Li, Fucui Lin, Chuan Liu. Networks on free topological groups. *Topology and Its Applications*. 2015;180:186-198.
4. Zhaowen Li, Qingguo Li, Xiangnan Zhou. On sequence-covering msss-maps. *Matematiki Vesnik*. 2007;59:15-21.

On the geometry of curvature lines

¹Narmanov A., ²Diyarov B.

¹ National university of Uzbekistan, Uzbekistan (use complete addresses, including country name),
e-mail: narmanov@yandex.ru

² National university of Uzbekistan, Uzbekistan, including country name),
e-mail: bekzod.diyorov@mail.ru

Let us recall some notions from geometry of Hamilton systems. Given a smooth manifold M a Poisson bracket on M assigns to each pair of smooth, real-valued functions $F, H : M \rightarrow \mathbb{R}$ another smooth, real-valued function, which we denote by F, H . There are certain basic properties that such a bracket operation must satisfy in order to qualify as a Poisson bracket.

Definition-1. A Poisson bracket on a smooth manifold M is an operation that assigns a smooth real-valued function $\{F, H\}$ on M to each pair F, H of smooth, real-valued functions, with the basic properties:

- (1) Bilinearity: $\{\lambda F + \mu P, H\} = \lambda\{F, H\} + \mu\{P, H\}$,
 $\{F, \lambda H + \mu P\} = \lambda\{F, H\} + \mu\{F, P\}$ for constants $\lambda, \mu \in R$,
- (2) Skew-Symmetry: $\{F, H\} = -\{H, F\}$,
- (3) Jacobi Identity: $\{\{F, H\}, P\} + \{\{P, F\}, H\} + \{\{H, P\}, F\} = 0$
- (4) Leibniz' Rule: $\{F, H \cdot P\} = \{F, H\} \cdot P + H \cdot \{F, P\}$.

(Here $\cdot$ denotes the ordinary multiplication of real-valued functions.)

A manifold M with a Poisson bracket is called a Poisson manifold, the bracket defining a Poisson structure on M . The notion of a Poisson manifold is slightly more general than that of a symplectic manifold, or manifold with Hamiltonian structure; in particular, the underlying manifold M need not be even-dimensional. This is borne out by the standard examples from classical mechanics.

Let M be the Euclidean space R^m with coordinates

$$(p, q, z) = (p^1, p^2, \dots, p^n, q^1, q^2, \dots, q^n, z^1, z^2, \dots, z^l),$$

where $2n + l = m$. If $F(p, q, z), H(p, q, z)$ are smooth functions, we define their Poisson bracket to be the function

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

This bracket is clearly bilinear and skew-symmetric; the verifications of the Jacobi identity and the Leibniz rule are simple exercises.

We note the particular bracket identities

$$\{p^i, p^j\} = 0, \{q^i, q^j\} = 0, \{q^i, p^j\} = \delta_i^j,$$

in which i and j run from 1 to n , and δ_i^j is the Kronecker symbol.

Definition 1. Let M be a Poisson manifold. A smooth, real-valued function $C : M \rightarrow R$ is called a distinguished function if the Poisson bracket of C with any other real-valued function vanishes identically, i.e. $\{C, H\} = 0$ for all $H : M \rightarrow R$.

In the case of the canonical Poisson bracket on R^m the only distinguished functions are the constants, which always satisfy the requirements of the definition.

Definition 2. Let M be a Poisson manifold and $H : M \rightarrow R$ a smooth function. The Hamiltonian vector field associated with H is the unique smooth vector field X_H on M satisfying $X_H(F) = \{F, H\} = -\{H, F\}$ for every smooth function $F : M \rightarrow R$.

In the case of the canonical Poisson bracket on R^m , $m = 2n + l$, the Hamiltonian vector field corresponding to $H(p, q, z)$ is clearly

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i} \right\}.$$

The corresponding flow is obtained by integrating the system of ordinary differential equations

$$\frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \frac{dz^l}{dt} = 0.$$

There is a fundamental connection between the Poisson bracket of two functions and the Lie bracket of their associated Hamiltonian vector fields, which forms the basis of much of the theory of Hamiltonian systems. It is well known following theorem [3].

Theorem 1. Let M be a Poisson manifold and let $F, H : M \rightarrow R$ be smooth functions with corresponding Hamiltonian vector fields X_F, X_H . The Hamiltonian vector field associated with the Poisson bracket of F and H is the Lie bracket of the two Hamiltonian vector fields:

$$X_{\{F, H\}} = -[X_F, X_H].$$

The Hamiltonian vector field associated with $H(x)$ has the form

$$X_H = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^m J^{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x^j} \right\} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

where $J^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}$.

Let us consider system of ordinary differential equations in Hamilton's form

$$\frac{dx}{dt} = J(x) \nabla H(x). \quad (1)$$

where $H(x)$ – Hamiltonian, $J^{ij}(x) = \{x^i, x^j\}$ – the structure matrix, defining Poisson bracket.

Definition 3. A function $P(x, t)$ is called the first integral of system (1) if for the solution $x(t)$ it holds $P(x(t), t) = \text{const}$ for all t .

The first integrals are easily described using the Poisson bracket. The following theorem is known [3] on the first integrals of the system

Theorem 2. The function $P(x, t)$ is the first integral of the Hamiltonian system (1) if and only if

$$\frac{dP}{dt} + \{P, H\} = 0.$$

for all t . In particular, a time-independent function $P(x)$ is the first integral if and only if $\{P, H\} = 0$ everywhere.

Now we will study geometry of curvature lines.

Let us recall the notion of curvature line. The lines of curvature or curvature lines are curves which are always tangent to a principal direction (they are integral curves for the principal direction fields). There will be two lines of curvature through each non-umbilic point and the lines will cross at right angles [1], [2].

It holds following theorem.

Theorem 3. One of the families of curvature lines of the elliptic paraboloid consists of integral lines of Hamilton vector field. Second family of curvature lines of the elliptic paraboloid consists of geodesic lines.

References

1. Kobayashi, Sh. and Nomizu, K. Foundations of Differential Geometry, New York, London: Interscience, 1963, vol.1, 329 pages
2. Narmanov, A.Ya and Saitova, S.S. On the geometry of orbits of Killing vector fields, Differential Equations, 2014, vol. 50, no. 12, pp. 1584-1591.
3. Olver, P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. Springer, 1993.

The second Calogero-Moser space over $\mathbb{Q}_p$

¹Normatov Z., ²Abdumutalov J.

¹ Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail: z.normatov@mathinst.uz

² Namangan State University, Namangan, Uzbekistan,
e-mail: abdumutalovjaloliddin711@gmail.com

Let $\mathcal{M}_n$ be the set of $n \times n$ complex matrices. Consider the action of the group $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ on the direct product $\mathcal{M}_n^d$ in the natural way:

$$g \cdot (X, Y) = (gX_1g^{-1}, \dots, gX_dg^{-1}), \quad g \in \text{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Definition. The n -th Calogero-Moser space is defined to be

$$\mathcal{C}_n = \{(X, Y) \in \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \mid \text{rank}([X, Y] + I_n) = 1\} // \text{GL}_n.$$

In 1978, authors of the paper [1] defined the Calogero-Moser spaces over $\mathbb{R}$, and in 1998 they are defined over $\mathbb{C}$ by G. Wilson [2]. The Calogero-Moser spaces are named after a class of integrable systems in classical mechanics that play an important role in geometry and representation theory.

The action of GL_n induces an action on the algebra $\mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d]$ of polynomial functions on $\mathcal{M}_n^d$. The algebra $\mathcal{C}_{nd} = \mathbb{C}[\mathcal{M}_n^d]^{\text{GL}_n}$ of GL_n -invariant polynomials is an object of study in the invariant theory of d -tuples of matrices. The First Fundamental Theorem of Matrix Invariants states that it is generated as a $\mathbb{C}$ -algebra by the traces of monomials in the generic matrices $X_1, \dots, X_d$. The Second Fundamental Theorem, established by Razmyslov [3] and Procesi [4], independently, states that over a field of characteristic zero, all relations are the result of the Cayley-Hamilton theorem.

The goal of this thesis is to study the Calogero-Moser spaces over the fields of p -adic numbers. p -adic numbers were first described by Kurt Hensel in 1897 [5]. For a given prime p , the field $\mathbb{Q}_p$ of p -adic numbers is a completion of the rational numbers. There are several equivalent definitions of p -adic numbers. One can say also that any p -adic series represents a p -adic number, since every p -adic series is equivalent to a unique normalized p -adic series. This is useful for defining operations (addition, subtraction, multiplication, division) of p -adic numbers: the result of such an operation is obtained by normalizing the result of the corresponding operation on series. This well defines operations on p -adic numbers, since the series operations are compatible with equivalence of p -adic series.

Let us denote the Calogero-Moser space over the field of p -adic numbers by $\mathcal{Q}_n$.

Proposition. For any pair (X, Y) of p -adic matrices from $\mathcal{Q}_n$, the following equality holds:

$$\text{Tr}(ABAB) - \text{Tr}(A^2B^2) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

The coordinate ring of the second Calogero-Moser space $\mathcal{Q}_2$ has the following set of generators:

$$\{\text{Tr}(X), \text{Tr}(Y), \text{Tr}(X^2), \text{Tr}(XY), \text{Tr}(Y^2)\}$$

Now, we define the following generators of $\mathbb{Q}_p[\mathcal{Q}_2]$:

$$a_1 = \text{Tr}(X), a_2 = \text{Tr}(Y), a_3 = \text{Tr}(A^2), a_4 = \text{Tr}(AB), a_5 = \text{Tr}(B^2),$$

where A and B are traceless versions of X and Y , respectively.

Theorem. There exists a defining relation between the above generators as follows:

$$a_4^2 - a_3a_5 = 1.$$

The results of the above Proposition and Theorem are true in the Calogero-Moser spaces over $\mathbb{C}$ since used operations are well-defined in both fields.

However, **what is the difference between them?** The answer could be that the points which satisfy the defining relation are different since the difference of underlying set of these fields is not empty. This implies that there exist points (a_3, a_4, a_5) in $\mathbb{C}^3$ which are not in $\mathbb{Q}_p^3$ satisfying the defining relation and vice versa.

For example, the point $(i, i, 2i) \in \mathbb{C}^3$ satisfies the relation. However, $i \notin \mathbb{Q}_p$ for $p \neq 4k + 1$.

References

1. Kazhdan D., Kostant B., Sternberg S. Hamiltonian group actions and dynamical systems of Calogero-Moser type, Comm. Pure and Appl. Math. 31, 1978, pp. 481-507.
2. Wilson G. Collisions of Calogero-Moser particles and an adelic Grassmannian (with an Appendix by I. G. Macdonald) Invent. Math. 133, 1998, pp. 1-41.

3. Razmyslov Yu.P., Trace identities of full matrix algebras over fields of zero characteristic, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math.* 38, 1974, pp.723-756.
4. Procesi C., The invariant theory of $n \times n$ matrices, *Adv. Math.* 19, 1976, pp.306-381.
5. Hensel, Kurt, "Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, (1897) 6 (3): 83-88.

An algorithm to decide whether an endomorphism is a tame automorphism

¹Normatov Z., ²Nuritdinova M.

¹ *Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: z.normatov@mathinst.uz

² *Namangan State University, Namangan, Uzbekistan,*

Let $\mathbb{C}\langle X, Y \rangle$ be a free algebra in the indeterminates X, Y (endowed with the degree function and the valuation function at the origin, which are denoted by $\deg$ and val). A $\mathbb{C}$ -automorphism f of $\mathbb{C}\langle X, Y \rangle$ will be identified with its sequence $f = (f_1, f_2)$ of coordinate functions $f_i \in \mathbb{C}\langle X, Y \rangle$ ($i = 1, 2$). If g is a $\mathbb{C}$ -automorphism of $\mathbb{C}\langle X, Y \rangle$, we agree that fg will denote the $\mathbb{C}$ -automorphism of $\mathbb{C}\langle X, Y \rangle$ obtained by composition of f and g .

The subgroup of $\text{Aut}(\mathbb{C})$ generated by all the elementary automorphisms is called the *tame subgroup*, and the elements from this subgroup are called *tame automorphisms* of $\mathbb{C}\langle X, Y \rangle$. Non-tame automorphisms of the algebra $\mathbb{C}\langle X, Y \rangle$ are called wild. It is well known [1], [3], [4], that the automorphisms of polynomial rings and free associative algebras in two variables are tame.

The algorithm to decide whether an endomorphism of $\mathbb{C}[x, y]$ is a tame automorphism is given in [2]. The goal of this thesis is to give such an algorithm for the endomorphism of $\mathbb{C}\langle X, Y \rangle$.

We define:

- the degree of f by $\deg f = \max(\deg f_1, \deg f_2)$;
- the bidegree of f by $\text{bideg}(f) = (\deg f_1, \deg f_2)$;
- the total degree of f by $tdeg(f) = \deg f_1 + \deg f_2$;
- the commutator of f by $[f_1, f_2] = f_1 f_2 - f_2 f_1$.

Also we introduce the following groups:

$GA_2(\mathbb{C})$, the group of all $\mathbb{C}$ -automorphisms of $\mathbb{C}\langle X, Y \rangle$;

$Af_2(\mathbb{C})$, the subgroup of $GA_2(\mathbb{C})$ of affine automorphisms, i.e., automorphisms of the shape $(aX + bY + c, dX + eY + f)$ where a, b, c, d, e, f , are complex numbers such that $ae - bd = 1$;

$GL_2(\mathbb{C})$, the subgroup of $Af_2(\mathbb{C})$ of linear automorphisms;

$BA_2(\mathbb{C})$, the subgroup of $GA_2(\mathbb{C})$ of triangular or "de Jonquieres" automorphisms, i.e., automorphisms of the shape $(aX + P(Y), a^{-1}Y + b)$ where a, b are complex numbers, $a \neq 0$ and $P(Y)$ is an element of $\mathbb{C}[Y]$;

$TA_2(\mathbb{C})$, the subgroup of $GA_2(\mathbb{C})$ of tame automorphisms, i.e., the subgroup of $GA_2(\mathbb{C})$ generated by $Af_2(\mathbb{C})$ and $BA_2(\mathbb{C})$.

We use GA_2 for $GA_2(\mathbb{C})$, Af_2 for $Af_2(\mathbb{C})$ and so on.

The following proposition is the key of the announced algorithm: if $f \in TA_2$ satisfying $tdeg f \geq 3$, it ensures the existence of $\alpha \in GA_2$ of a very special shape such that $tdeg(\alpha^{-1}f) < tdeg f$.

Proposition. *Let $f = (f_1, f_2) \in TA_2$ with $\text{bideg}(f) = (d_1, d_2)$. Denote by g_i the homogeneous component of degree d_i of f_i for $i = 1, 2$. Then $d_1 | d_2$ or $d_2 | d_1$. Moreover:*

- (i) *If $d_1 < d_2$, then there exists $\lambda \in k$ such that $g_2 = \lambda g_1^{d_2/d_1}$;*
- (ii) *If $d_2 < d_1$, then there exists $\lambda \in k$ such that $g_1 = \lambda g_2^{d_1/d_2}$;*
- (iii) *If $d_1 = d_2 > 1$, then there exists $(\alpha, h) \in Af_2 \times TA_2$ such that $f = \alpha h$ and $d_1 = \deg h_1 > \deg h_2$ where $h = (h_1, h_2)$.*

We deduce from Proposition an algorithm to decide if a k -endomorphism of A_k^2 belongs to $TA_2(k)$:

ALGORITHM.

- i: Enter a k -automorphism f of $\mathbb{C}\langle X, Y \rangle$.
- ii: Let $(d_1, d_2) = \text{bideg}(f_1, f_2)$.
- iii: If $d_1 = d_2 = 1$, then goto viii.
- iv: If $d_1 \neq d_2$, then goto vi.
- v: If there exists $\alpha \in Af_2$ such that $\text{tdeg}(\alpha f) < \text{tdeg}(f)$, then replace f by αf and goto ii, else STOP: $f \notin TA_2$.
- vi: If $d_2 < d_1$, then replace $f = (f_1, f_2)$ by (f_2, f_1) .
- vii: If $(d_1|d_2$ and there exists $\lambda \in k$ such that $g_2 = \lambda g_1^{d_2/d_1}$), then replace f by $(X, Y - \lambda X^{d_2/d_1})f$ and goto ii, else STOP: $f \notin TA_2$.
- viii: If $[f_1, f_2] = [X, Y]$, then STOP: $f \in TA_2$, else STOP: $f \notin TA_2$.

References

1. *A. G. Czerniakiewicz*, Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I, II, Trans. Amer. Math. Soc. 160 (1971), 393–401; 171 (1972), 309–315. MR 43:6269; MR 46:9124
2. *Jean-Philippe Furter*, On the Variety of Automorphisms of the Affine Plane.
3. *W. van der Kulk*, On polynomial rings in two variables, Nieuw Archief voor Wiskunde. (3) 1 (1953), 33–41. MR 14:941f
4. *L. Makar-Limanov*, The automorphisms of the free algebra of two generators, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 4 (1970), no. 3, 107–108. MR 42:6044

Local derivations of the Schrödinger algebra

¹Paluanov S.A., ^{1,2}Alauadinov A.K.

¹ *Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan,*
e-mail: paluanovs@mail.ru

² *Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky,*
e-mail: amir_t85@mail.ru

Abstract The Schrödinger algebra is a non-semisimple Lie algebra and plays an important role in mathematical physics and its applications. In this paper, local derivations of the Schrödinger algebra are studied.

Keywords Derivation, Local derivation, Schrödinger algebra.

1 Introduction

The Schrödinger Lie group describes symmetries of the free particle Schrödinger equation in [6]. The Lie algebra $\mathbb{S}(n)$ in $(n+1)$ -dimensional space-time of the Schrödinger Lie group is called the Schrödinger algebra, see [3]. The Schrödinger algebra is a non-semisimple Lie algebra and plays an important role in mathematical physics. The Lie algebra $\mathbb{S}(1)$ is one of the most essential case for $n=1$ and admits a universal 1-dimensional central extension which is called the centrally extended Schrödinger algebra or, simply, the Schrödinger algebra, abusing the language. We denote $\mathbb{S}(1)$ by $\mathcal{S}$ in this paper. Let $\mathbb{C}$ be the complex number field. Recall that the Schrödinger algebra $\mathcal{S}$ is a Lie algebra with a $\mathbb{C}$ -basis $\{f, q, h, c, p, e\}$ and brackets

$$\begin{aligned}
[h, e] &= 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h, \\
[h, p] &= p, [h, q] = -q, [p, q] = c, \\
[e, q] &= p, [p, f] = -q, [f, q] = 0, \\
[e, p] &= 0, [c, S] = 0.
\end{aligned}$$

The Schrödinger algebra $\mathcal{S}$ can be viewed as a semidirect product

$$\mathcal{S} = \mathcal{H} \rtimes sl_2$$

of two subalgebras: a Heisenberg subalgebra $\mathcal{H} = \text{span}\{p, q, c\}$ and $sl_2 = \text{span}\{e, h, f\}$.

The notions of local derivations were first introduced in 1990 by R.V. Kadison [4] and D.R.Larson, A.R.Sourour [5]. The main problems concerning this notion are to find conditions under which local derivations become derivations and to present examples of algebras with local derivations that are not derivations. R.V.Kadison proves that each continuous local derivation of a von Neumann algebra M into a dual Banach M -bimodule is a derivation.

Several papers have been devoted to similar notions and corresponding problems for derivations and automorphisms of Lie algebras [1], [2]. In [1] Sh.A.Ayupov and K.K. Kudaybergenov have proved that every local derivation on semi-simple Lie algebras is a derivation and gave examples of nilpotent finite-dimensional Lie algebras with local derivations which are not derivations.

In this paper we investigate local derivations of the Schrödinger algebra. We show that every local derivation of the Schrödinger algebra is a derivation.

2 Derivations of the Schrödinger algebra

Let us review some details about the derivation of a Lie algebra.

Definition 2.1. A linear map D from a Lie algebra L into itself is called a *derivation* of L if it satisfies that

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

for all $x, y \in L$.

For $x \in L$, it is easy to see that $ad_x : L \rightarrow L, y \mapsto ad_x(y) = [y, x]$ for all $y \in L$ is a derivation of L , which is called an inner derivation. Denote by $Der L$ the vector space of all derivations, $Inn L$ the vector space of all inner derivations.

Let δ be an outer derivation of $\mathcal{S}$ determined by

$$\delta(h) = \delta(e) = \delta(f) = 0, \quad \delta(c) = c, \quad \delta(p) = \frac{1}{2}p, \quad \delta(q) = \frac{1}{2}q.$$

Theorem 2.2 [7]. $Der \mathcal{S} = Inn \mathcal{S} \oplus \mathbb{C}\delta$.

Let D derivation on $\mathcal{S}$. For $a \in \mathcal{S}$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ from Theorem 2.2 we can write a derivation the following form

$$D(x) = ad_a(x) + \lambda\delta(x)$$

for all $x \in \mathcal{S}$.

3 Local derivations of the Schrödinger algebra

Definition 3.1. A linear operator Δ is called a *local derivation* if for any $x \in L$, there exists a derivation $D_x : L \rightarrow L$ (depending on x) such that $\Delta(x) = D_x(x)$. The set of all local derivations on L we denote by $LocDer(L)$.

We now state our main result as follows.

Theorem 3.2. *Every local derivation on $\mathcal{S}$ is a derivation.*

4 Almost inner derivations of the Schrödinger algebra

Definition 4.1. A derivation D' is called a almost inner derivation if for any $x \in L$, there exists a inner derivation $ad_x : L \rightarrow L$ (depending on x) such that $D'(x) = ad_x(x)$. The set of all almost inner derivations on L we denote by $AID(L)$.

Theorem 4.2. *Every almost inner derivation on $\mathcal{S}$ is inner derivation.*

References

1. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K., Local derivations on finite-dimensional Lie algebras. Linear Alg. and Appl., 2016, Vol. 493, p. 381–388.
2. Chen Z., Wang D., 2-Local automorphisms of finite-dimensional simple Lie algebras. Linear Algebra Appl., 486 (2015) 335–344.
3. Dobrev, V.K., Doebner, H.D., Mrugalla, C.: Lowest weight representations of the Schrödinger algebra and generalized heat/Schrödinger equations. Rep. Math. Phys. (1997), **39**, 201–218.
4. Kadison R.V., Local derivations. Journal of Algebra., Vol. 130, 1990, p. 494–509.
5. Larson D.R., Sourour A.R., Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proc. Sympos. Pure Math. 51 Part 2, Providence, Rhode Island 1990, p. 187–194.
6. Perroud, M., Projective representations of the Schrödinger group. Helv. Phys. Acta **50**, (1977), 233–252.
7. Yang Y., Tang X., Derivations of the Schrödinger algebra and their Applications, Appl. Math. Comput. (2018), 58:567–576.

The example of Sasakian manifold

Rasulova F.

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

g-mail: xalimovaferuza847@gmail.com

In this thesis the begin with a brief description of Sasakian geometry is concired. A detailed discussion of both Sasakian and contact geometry can be found in [BG08]. A Sasakian structure incorporates several well-known geometries, contact geometry with a chosen contact 1-form η , CR geometry with a strictly pseudoconvex Levi form, and a 1-dimensional foliation with a transverse Kahler structure.

Definition 1. Let $i : (S^{2n+1}, g) \longrightarrow (R^{2n+2}, <, >)$ be the standard isometric embedding of the unit sphere S^{2n+1} into R^{2n+2} , equipped with the canonical metric. Any vector field X on S^{2n+1} is identified with $i.X$.

We consider the so-called Sasaksian structure on S^{2n+1} induced by the standard complex structure J on C^{n+1} , identified with R^{2n+2} , which is described as follows. Let N be the unit outward vector field normal to S^{2n+1} . Putting:

$$JN = -\xi$$

ξ turns out to be a global vector field tangent to S^{2n+1} . Moreover, for any vector field X on S^{2n+1} , the decomposition of JX in the tangent and normal components determines a $(1, 1)$ -tensor field φ and a 1-form η on S^{2n+1} , such that:

$$JX = \varphi(X) + \eta(X)N.$$

Definition 2. $A(2n + 1)$ – dimensional manifold M has an almost contact structure (φ, ξ, η) if it admits a vector field ξ (the so - called characteristic vector field), a 1 – form η and a field φ of endomorphisms of the tangent spaces satisfying:

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi.$$

These conditions imply that $\varphi(\xi) = 0$ and $\eta \circ \varphi = 0$; moreover, φ has rank $2n$ at every point of M . Equivalently, as proved by J. Gray, a $(2n + 1)$ dimensional manifold M carries an almost contact structure if and only if the structure group of its tangent bundle is reducible to $U(n) \times \{I\}$.

Theorem. $(S^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ is a Sasakian manifold.

Proof. A Sasakian manifold is defined as a normal, contact metric manifold (normal, almost contact metric manifold with the 1-form η of maximal rank). Thus, firstly we need to show that $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ everywhere. To this aim, using a result due to Blair, we prove the equivalent condition $d\eta = \Phi$. It is well known that, in this case, the Gauss and Weingarten equations for a hypersurface reduce to:

$$D_X Y = \nabla_X Y - g(X, Y)N;$$

$$D_X N = X$$

Where D denotes the Levi-Civita connection on R^{2n+2} . Applying

$$JX = \varphi(X) + \eta(X)N$$

$$D_X Y = \nabla_X Y - g(X, Y)N;$$

$$D_X N = X$$

$$g(X, \xi) = \eta(X), X \in \chi(S^{2n+1})$$

one has:

$$(D_X J)Y = (\nabla_X \varphi)Y + g(\varphi(X), Y)N - g(X, Y)\xi + g(\nabla_X \xi)Y + \eta(Y)X$$

and, since $(R^{2n+2}, J, \langle, \rangle)$ is a Kähler manifold, this relation gives:

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \nabla_X \xi = -\varphi(X), \nabla_\xi \xi = 0$$

The skew-symmetry of Φ and the second relation above imply that ξ is a Killing vector field and, combining with

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \nabla_X \xi = -\varphi(X), \nabla_\xi \xi = 0$$

one has:

$$2d\eta(X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X) = -2g(\varphi X, Y) = 2\Phi(X, Y).$$

So $d\eta = \Phi$ and (φ, ξ, η, g) is a contact metric structure. Finally,

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \nabla_X \xi = -\varphi(X), \nabla_\xi \xi = 0$$

implies the vanishing of the tensor field $[\varphi, \varphi] + 2d\eta \otimes \xi$, (i. e. the normality condition), where $[\varphi, \varphi]$ is the Nijenhuis tensor of φ , defined by

$$[\varphi, \varphi](X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] - \varphi([\varphi X, Y]) - \varphi([X, \varphi Y]) + \varphi^2([X, Y]),$$

for any vector field X, Y .

The first relation in

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X, \nabla_X \xi = -\varphi(X), \nabla_\xi \xi = 0$$

characterizes the Sasakian manifolds among the almost contact metric manifolds.

References

1. Maria Falcitelli, Stere Ianus, Anna Maria Pastore. Riemannian submersions and related topics. World Scientific. 2004.
2. Charles P. Boyer. Sasakian geometry: the recent work of Krzysztof Galicki. Note di Matematica 2008. 2-5

Saddle surfaces and solutions of the hyperbolic equation in Galilean space

Safarov T.

Uzbekistan Termez State University,

e-mail: tolqin.1986@mail.ru

The three-dimensional Galilean space R_3^1 is defined as an affine A_3 space with a degenerate inner product [1].

The introduced degenerate scalar product generates a degenerate metric. In this case, the distance between points is defined as the norm of the vector connecting these points.

Let Oxy be the coordinate system in the R_3^1 space and $\{i, j, k\}$ - be unit basis vectors. The $x = \text{const}$ planes are called special planes of space.

In the work of the [1], the theory of the surface in R_3^1 was studied. Let us present some necessary facts from the theory of the surface of a Galilean space.

L R_3^1 studies surfaces that do not have special reference planes. The class of such surfaces is quite wide [2].

Galilean plane is a linear transformation [1-3]:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = hx + y + b, \end{cases} \quad 0 < h < +\infty,$$

The classification of the surface points of the Galilean space was considered in the work of A. Artykbaev [1]. Where, unlike Euclidean space, the surface points of the Galilean space are divided into four classes, i.e. elliptical, hyperbolic, parabolic and cyclic.

General and special solutions of equations belonging to the Hyperbolic type determine a geometrical surface. The geometrical meanings of the motion characteristics of these equations represent asymptotic lines on the surface.

If the coefficients in front of an equation of the hyperbolic type are a constant, then the integral (asymptotic lines) of the characteristic equation is a line. In other words, let's look at G areas where the equation is of the same type at all points. Two characteristics pass through each point in the G domains, namely, for equations of the hyperbolic type, there are two real and mutually distinct characteristics. This means that two asymptotic lines pass through each point on the hyperbolic surface.

If the non-homogeneous equation belonging to the hyperbolic type is in view

$$u_{\xi,\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \quad (1)$$

From this, equation (1) has the following form: $u_{XX} - u_{YY} = \Phi_1$ where $\Phi_1 = \Phi$. According in Galilean space is:

$$u_{XY} - hu_{YY} = \Phi$$

where X and Y are new variables. It is necessary to solve the homogeneous equation of oscillations

$$u_{XY} - hu_{YY} = 0, \quad 0 < Y < +\infty, \quad -\infty < X < +\infty \quad (2)$$

under initial conditions

$$\begin{aligned} u(X, 0) &= \varphi(X), \\ u_Y(X, 0) &= \psi(X), \end{aligned} \quad (3)$$

where the function $\varphi(X)$ and $\psi(X)$ are specified on the entire number axis. Problem (2) and (3) is called the Cauchy problem for the wave equation.

Theorem 1. There are

$$u(X, Y) = \varphi(X) + h \int_X^{X+\frac{Y}{h}} \psi(s) ds.$$

solutions of equation (2) that satisfy the condition (3).

Theorem 2. In a R_3^1 dimensional Galilean space, the cyclic type of the $u_{\xi,\eta} = \Phi$ equation can be reduced to the hyperbolic type of the $u_{XX} - u_{YY} = \Phi_1$ equation.

The surface equations considered above $z = xy$, $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ can be considered as a solution of the $z_{xy} = 0$ and $z_{xx} - z_{yy} = 0$ equations.

References

1. A. Artykbaev., D. D. Sokolov Geometry as a Whole in Space-Time: Tashkent: Fan. 1991. P. 179
2. A. Artykbaev . Classification of surface points in Galilean space, Research on the theory of surfaces in manifolds of constant curvature. L. . 1987 (Russian). pp-15.
3. A.Artikbaev., T.Safarov Properties of curved surfaces in Galilean space. Physical and mathematical Sciences Uzbekistan 3 (2020)
4. A.N.Tikhonov., A.A.Samarsky. Equations of mathematical physics. "science"Moscow 1977

Local and 2-local derivations of complex spin-factors

¹Seypullaev J., ²Menglibaev N.

¹ Karakalpak State University,

Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy of the Academy Sciences of the Republic of Uzbekistan,

e-mail: jumabek81@mail.ru

² Karakalpak State University, Uzbekistan

e-mail: menglibaevnurlibay1@gmail.com

In 1990, R.Kadison [8], D.Larson and A.Sourour [10] independently introduce the concept of local derivation. In [8], R. Kadison proved that every continuous local derivation from a von Neumann algebra into its dual Banach module is a derivation. In [10], D. Larson and A. Sourour proved that every local derivation from $B(X)$ into itself is a derivation. More detailed information about local derivation can be found in [3, 4, 5, 11].

Let H be complex Hilbert space with a conjugation $a \rightarrow \bar{a}$ and the triple product

$$\{a, b, c\} = (a, b)c + (c, b)a - (a, \bar{c})\bar{b},$$

where $a, b, c \in H$. Note that this triple product is linear in the first and third variables (a and c) and conjugate linear in the second variable b . Since, by the definition of the inner product, we have $(a, \bar{c}) = (c, \bar{a})$, the triple product is symmetric in the outer variables, i.e.,

$$\{a, b, c\} = \{c, b, a\}.$$

The space H with the above triple product is called the complex spin factor and will be denoted by S .

A triple derivation or simply a derivation δ on a real or complex spin triple factor S is a linear operator satisfying

$$\delta \{a, b, c\} = \{\delta a, b, c\} + \{a, \delta b, c\} + \{a, b, \delta c\}$$

for all $a, b, c \in S$.

A linear operator $\Delta : S \rightarrow S$ is called a local derivation if for any $a \in S$ there exists a derivation δ_a such that $\Delta(a) = \delta_a(a)$.

Theorem 1. Let S be a spin factor. Then every local derivation $\Delta : S \rightarrow S$ is a derivation.

Proof. Let $\Delta : S \rightarrow S$ be a local derivation. Since every derivation in the spin factor is skew-symmetric (see [6, Proposition 25.2.7]), by the definition of a local derivation, for each $a, b \in S$ we have

$$(\Delta(a), b) = (\delta_a(a), b) = -(\delta_a^*(a), b) = -(\Delta^*(a), b).$$

Thus

$$(\Delta^*(a), b) = (-\Delta(a), b)$$

for all $a, b \in S$, that is $\Delta^* = -\Delta$. Therefore, every local derivation Δ is a derivation. The proof is complete.

The concept of 2-local derivation was firstly introduced by P. Semrl [11] in 1997. P. Semrl [11] proves that every 2-local derivation from $B(H)$ into itself is a derivation for a separable Hilbert space H . Many other authors study 2-local derivations and there are several important results (see [1, 2, 3, 6, 9, 12, 13]).

A map $\Delta : S \rightarrow S$ (not necessarily linear) is called 2-local derivation if for any two elements $a, b \in S$ there exists a derivation $D_{a,b}$ (depending on a and b) such that $\Delta(a) = D_{a,b}(a)$ and $\Delta(b) = D_{a,b}(b)$.

Theorem 2. Let S be a spin factor. Then every 2-local derivation $\Delta : S \rightarrow S$ is a derivation.

Proof. Let $\Delta : S \rightarrow S$ be a 2-local derivation. Let's first show homogeneity of Δ . By the definition of a 2-local derivation, for each $a \in S$ and every $\lambda \in \mathbb{C}$ there exists a derivation $\delta_{a, \lambda a}$ such that

$$\Delta(a) = \delta_{a, \lambda a}(a)$$

and

$$\Delta(\lambda a) = \delta_{a, \lambda a}(\lambda a).$$

Then

$$\Delta(\lambda a) = \delta_{a, \lambda a}(\lambda a) = \lambda \delta_{a, \lambda a}(a) = \lambda \Delta(a).$$

Therefore, Δ is homogeneous.

We shall show that Δ is additive. Since every derivation in the spin factor is skewsymmetric (see [7, Proposition 25.2.7]), by the definition of a 2-local derivation, for each $x, y \in S$ we have

$$(\Delta(x), y) = (\delta_{x,y}(x), y) = (x, \delta_{x,y}^*(y)) = -(x, \delta_{x,y}(y)) = -(x, \Delta(y)).$$

Thus $(\Delta(x), y) = -(x, \Delta(y))$ for all $x, y \in S$. For arbitrary $a, b, c \in S$, set $x = a + b, y = c$. Then from above we get

$$\begin{aligned} (\Delta(a+b), c) &= -(a+b, \Delta(c)) = -(a, \Delta(c)) - (b, \Delta(c)) = \\ &= (\Delta(a), c) + (\Delta(b), c) = (\Delta(a) + \Delta(b), c), \end{aligned}$$

and so

$$(\Delta(a+b) - \Delta(a) - \Delta(b), c) = 0$$

for all $a, b, c \in S$. Therefore,

$$\Delta(a+b) - \Delta(a) - \Delta(b) = 0,$$

i.e. Δ is additive. Hence, Δ is a linear operator. Then Δ is a local derivation and, by theorem 1 is a derivation. The proof is complete.

References

1. Ayupov Sh., Kudaybergenov K., 2-local derivations and automorphisms on $B(H)$. J. Math. Anal. Appl., 395. 2012. P. 15-18.
2. Ayupov Sh., Kudaybergenov K., 2-local derivations on von Neumann algebras, Positivity, 19. 2014. P.445-455.
3. Ayupov Sh., Kudaybergenov K., Peralta A.M., A survey on local and 2-local derivations on C^* - and von Neuman algebras, Topics in functional analysis and algebra, 73-126, Contemp Math., 2016. P. 672.

4. *Burgos M., Francisco J., Fernández-Polo., Peralta A.M.*, Local triple derivations on C^* -algebras and JB^* -triples, Bulletin of the London Mathematical Society, Volume 46, Issue 4, August 2014, P. 709–724, 2014, P. 709–724.
5. *Fernández-Polo F.J., Molino Salas A., Peralta A.M.*, Local triple derivations on real C^* -algebras and JB^* -triples, to appear in Bull. Malaysian Math. Sci. Soc., 2016.P. 941-955.
6. *Hamhalter J., Kudaybergenov K.K., Peralta A.M., Russo B.*, Boundedness of completely additive measures with application to 2-local triple derivations, Journal of Mathematical Physics, 57. 2016. 021709
7. *Isidro J.M.*, Jordan Triple Systems in Complex and Functional Analysis, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 2019. P.243.
8. *Kadison R.*, Local derivations, J. Algebra, vol 130, 1990. P. 494-509.
9. *Kudaybergenov K., Oikhberg T., Peralta A.M., Russo B.*, 2-local triple derivations on von Neumann algebras, preprint 2014, arXiv:1407.3878
10. *Larson D., Sourour A.*, Local derivations and local automorphisms, Proc. Sympos. Pure Math., 51. 1990. 187-194.
11. *Semrl P.*, Local automorphisms and derivations on $B(H)$, Proc. Amer. Math. Soc., 125. 1997. 2677-2680.
12. *Seypullaev J.X., Pirekeev J.X., Abdireymov A.R.*, 2-local derivations of reversible JW- algebras, Science and Education in Karakalpakstan, 3. 2020. 73-79.
13. *Прекеев Ж.Х., Абдиреймов А.Р.*, 2-Локальные дифференцирования спин-фактора, Вестник КГУ.–Нукус, 2020. – N 1. – С. 6-8.

On the geometry of submersion

¹Sharipov X.

¹ Jizakh Branch of National University of Uzbekistan named after Mirzo
Ulugbek, Jizakh, Uzbekistan.
e-mail: sh_xurshid@yahoo.com

Let M be a smooth connected Riemannian manifold of dimension n with Riemannian metric g .

Smoothness in this paper means smoothness of class C^∞ .

Definition-1. Differentiable mapping $\pi : M \rightarrow B$ of maximal rank, where B is a smooth Riemannian manifold of dimension m , called submersion for $n > m$.

By the rank theorem of a differentiable function the full inverse image $L_p = \pi^{-1}(p)$ of every point $p \in B$ is a submanifold of dimension $k = n - m$. So the submersion of $\pi : M \rightarrow B$ generates a foliation F of dimension $k = n - m$ on the manifold M , whose leaves are connected components of the inverse images of the points of B .

Suppose that L is a leaf of the foliation F , $x \in L$, $T_x L$ is the tangent space of L at the point x , and $H(x)$ is the orthogonal complement of $T_x L$. There arise two subbundles $TF : x \rightarrow T_x L$ and $H : x \rightarrow H(x)$ of the tangent bundle TM of the manifold M . Each vector field $X \in V(M)$ can be represented in the form $X = X_v + X_h$, where X_v and X_h are the orthogonal projections of X onto TF and H , respectively. If $X_h = 0$, then X is called a vertical field (tangent to F); if $X_v = 0$, then X is called a horizontal field.

Geometry of submersions is investigated by many authors, in particularly in papers [3,4,5].

Definition-2. A submersion of $\pi : M \rightarrow B$ is called Riemannian if its differential $d\pi$ preserves the length of horizontal vectors.

To the study of the geometry of Riemannian submersions is devoted many investigations [1,2,6], in particularly in [7] obtained fundamental equations of Riemannian submersion.

In this paper we study foliations defined by submersions.

Let M be a smooth connected Riemannian manifold of dimension n with Riemannian metric g , where B is a smooth Riemannian manifold of dimension m .

Let us consider submersion

$$\pi : M \rightarrow B \quad (1)$$

and denote by F the foliation defined by submersion.

From a geometrical point of view, the important classes of foliations are totally geodesic foliation and Riemannian foliation.

Foliation on a Riemannian manifold is a totally geodesic if every geodesic tangent to the leaf of the foliation at one point lies in this leaf, i.e each leaf is a totally geodesic submanifold. The geometry of totally geodesic foliation studied in [8].

Foliation F is called a Riemannian foliation if each geodesic orthogonal at some point to the leaf of the foliation F , remains orthogonal to all leaves F in all their points [9]. Riemannian foliation without singularities were first introduced and studied by Reinhart in [2]. This class of foliations naturally arise in the study of bundles and geometry of orbits of vector fields [10,11,12,13].

Let us recall notion of C^r - bundle. C^r - submersion $\pi : M \rightarrow B$, where M is a manifold of dimension n , B is a manifold of dimension m , is called C^r - bundle if there exist an $n - m$ dimensional manifold N and open cover $\{U_\alpha\}$ of B satisfying following conditions:

1. for every point $p \in B$ submanifold $\pi^{-1}(p)$ is diffeomorphic to N ;
2. for each U_α there there is a diffeomorphism

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times N,$$

such that

$$\varphi_\alpha(\pi^{-1}(p)) = \{p\} \times N, p \in U_\alpha.$$

It follows from [1] the following theorem holds.

Theorem 1. Let M be a smooth connected complete Riemannian manifold. If (1) is a Riemannian submersion then it is a bundle. In addition if the foliation F is a totally geodesic then all leaves are mutually isometric.

In the case $B = \mathbb{R}$ Theorem 1 can be strengthened in the following form.

Theorem 2. Let M be a smooth connected complete Riemannian manifold and

$$\pi : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (2)$$

is a Riemannian submersion. Then foliation F is a total geodesic Riemannian foliation with isometric leaves.

References

1. *R. Hermann*. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc., 11(4):236–242, 1960.
2. *B. L. Reinhart*. Foliated manifolds with bundle-like metrics. Annals of Mathematics, Second Series, 69:119–132, 1959.
3. *A. Narmanov and G. Kaipnazarova*. Topology of foliations generated by level surfaces. Uzbek. Math. Journal, (2):53–60, 2008.
4. *G. Abdishukurova, A. Narmanov, and X. Sharipov*. Differential invariants of one parametrical group of transformations. Mathematics and Statistics, 8(3):347–352, 2020.
5. *Ph. Tondeur*. Foliations on Riemannian manifolds. Springer-Verlag, New York, 1988.
6. *A. Narmanov*. On the geometry of totally geodesic Riemannian foliations. Siberian Adv. Math., 10(2):104–111, 2000.
7. *B. O’Neill*. The fundamental equations of submersions. Michigan Mathematical Journal, 13:459–469, 1966.
8. *R. Blumenthal and J. Hebda*. Ehresman connections. Indiana Math. J., 33(4):597–611, 1984.

9. *P. Molino*. Riemannian foliations. Burkhauser, Boston–Basel, 1988.
10. *A.Ya. Narmanov*. On the dependence of the controllability set on the target point. Differential equations, 33(10):1341–1345, 1997.
11. *A. Narmanov and O. Qosimov*. On the geometry of the set of orbits of killing vector fields on euclidean space. Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 55:39–49,
12. *A.Narmanov and E.Rajabov*. On the geometry of orbits of conformal vector fields. Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 51:29–39, 2019.
13. *A.Ya. Narmanov and S.S. Saitova*. On the geometry of orbits of Killing vector fields. Differential Equations, 50(12):1–8, 2014.

Olti o'lchamli filiform Li algebralarida transpoz Puasson algebralari tuzilmalari

¹Shukrulloev B.R., ²Xo'jamqulov B.T.

¹ *Sh.Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti, Samarqand*

e-mail: shukrulloev92@mail.ru

² *Termiz davlat universiteti, Termiz*

Puasson algebralari 1970-yillarda Puasson geometriyasini o'rganish natijasida paydo bo'lgan. U matematika va fizikaning Puasson ko'pxilliklari, algebraik geometriya, kvant nazariyasi, kvant gruppalari, klassik mexanika kabi juda keng sohalarida qo'llanilmoqda. Transpoz Puasson algebralari dastlab [1] ishda fanga kiritilgan bo'lsa, uning barcha tuzilmalarini Li algebrasi bilan tasvirlash usuli B.L. Makedo Ferreira, I.Kaygorodov va V.Lopotkinlarning ishida qo'llanilgan [2]. Bunda asosiy vazifa berilgan Li algebrasining $\frac{1}{2}$ -differensiallashlari topish va ushbu $\frac{1}{2}$ -differensiallash yordamida transpoz Puasson algebrasining assotsiativ, kommutativ ko'paytmalarni aniqlashdan iborat. Ushbu ishda olti o'lchamli filiform Li elgebralari qaralib, ularning $\frac{1}{2}$ -differensiallashlari topiladi va uning yordamida hosil bo'luvchi transposed Puasson algebralari aniqlanadi.

Ta'rif 1. [1]. L vektor fazo va ikkita nol bo'lmagan bichiziqli $\cdot$ va $[\cdot, \cdot]$ amallari berilgan bo'lsin. Agar $(L, \cdot, [\cdot, \cdot])$ uchlikda $(L, \cdot)$ kommutativ, assotsiativ algebra va $(L, [\cdot, \cdot])$ Li algebrasi bo'lib, quyidagi shartni o'rinli bo'lsa,

$$2z \cdot [x, y] = [z \cdot x, y] + [x, z \cdot y]$$

u holda $(L, \cdot, [\cdot, \cdot])$ uchlikka transpoz Puasson algebrasi deb ataladi.

Ta'rif 2. $(L, [\cdot, \cdot])$ algebra va φ chiziqli akslantirish berilgan bo'lsin. Agar φ akslantirish uchubn quyidagi shart o'rinli bo'lsa,

$$\varphi[x, y] = \frac{1}{2}([\varphi(x), y] + [x, \varphi(y)])$$

u holda u $\frac{1}{2}$ -differensiallash deyiladi.

Lemma 1. [2]. $(L, \cdot, [\cdot, \cdot])$ transpoz Puasson algebrasi va $z \in L$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $(L, \cdot)$ assotsiativ, kommutativ algebradagi R_z o'ngdan ko'paytirish operatori $(L, [\cdot, \cdot])$ Li algebrasining $\frac{1}{2}$ -differensiallashi bo'ladi.

Ushbu ishda biz model filiform Lie algebrasi orqali hosil bo'luvchi transpoz Puasson algebrasini tasniflaymiz. Ma'lumki, ixtiyoriy n -o'lchamli model filiform Lie algebrasida $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bazis topilib, bu bazisda algebraning ko'paytmalari quyidagicha bo'ladi [3]:

$$\mu_{1,n} : [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad \text{bu yerda} \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

Tasdiq 1. n -o'lchamli model filiform Lie algebrasining $\frac{1}{2}$ -differensiallashlarining umumiy ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\left\{ \begin{array}{l} d(e_1) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \\ d(e_2) = \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \cdots + \beta_n e_n \\ d(e_3) = \frac{1}{2}((\alpha_1 + \beta_2)e_3 + \beta_3 e_4 + \beta_4 e_5 + \cdots + \beta_{n-1}e_n) \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ d(e_n) = \frac{1}{2^{n-2}}((2^{n-2}-1)\alpha_1 + \beta_2)e_n \end{array} \right.$$

Quyidagi teoremda 6-o'lchamli model filiform Lie algebrasi yordamida hosil bo'luvchi transposed Puasson algebralarining tasnifi keltirilgan.

Teorema 1. Olti o'lchamli $\mu_{1,6}$ algebra yordamida hosil qilingan transpozed Puasson algebralari quyidagi algebralardan biriga izomorf bo'ladi:

$$I: \begin{cases} e_1 \cdot e_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 \\ e_1 \cdot e_2 = \alpha_1 e_2 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \alpha_7 e_4 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \alpha_8 + \frac{\alpha_3}{2\alpha_1} \alpha_7 \right) e_5 + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \alpha_9 + \frac{\alpha_3}{2\alpha_1} \alpha_8 + \frac{\alpha_4}{4\alpha_1} \alpha_7 - \frac{\alpha_2^2}{4\alpha_1^3} \alpha_7^2 \right) e_6 \\ e_1 \cdot e_3 = \alpha_1 e_3 + \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \alpha_7 e_5 + \left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \alpha_8 + \frac{\alpha_3}{4\alpha_1} \alpha_7 \right) e_6 \\ e_1 \cdot e_4 = \frac{1}{4} [4\alpha_1 e_4 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \alpha_7 e_6] \\ e_1 \cdot e_5 = \alpha_1 e_5 \\ e_1 \cdot e_6 = \alpha_1 e_6 \\ e_2 \cdot e_2 = \alpha_7 e_4 + \alpha_8 e_5 + \alpha_9 e_6 \\ e_2 \cdot e_3 = \frac{1}{2} (\alpha_7 e_5 + \alpha_8 e_6) \\ e_2 \cdot e_4 = \frac{1}{4} \alpha_7 e_6 \\ e_3 \cdot e_3 = \frac{1}{4} \alpha_7 e_6. \end{cases}$$

$$II : \begin{cases} e_1 \cdot e_1 = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3 + \alpha_3 e_4 + \alpha_4 e_5 + \alpha_5 e_6, & e_1 \cdot e_2 = \alpha_6 e_4 + \alpha_7 e_5 + \alpha_8 e_6 \\ e_1 \cdot e_3 = \frac{1}{2}(\alpha_6 e_5 + \alpha_7 e_6), & e_1 \cdot e_4 = \frac{1}{4} \alpha_6 e_6 \\ e_2 \cdot e_2 = \frac{\alpha_6^2}{4\alpha_1} e_6. \end{cases}$$

$$III : \begin{cases} e_1 \cdot e_1 = \alpha_1 e_3 + \alpha_2 e_4 + \alpha_6 e_5 + \alpha_4 e_6, & e_1 \cdot e_2 = \alpha_5 e_4 + \alpha_6 e_5 + \alpha_7 e_6 \\ e_1 \cdot e_3 = \frac{1}{2}(\alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6), & e_1 \cdot e_4 = \frac{1}{4} \alpha_5 e_6 \\ e_2 \cdot e_2 = \frac{\alpha_5^2}{2\alpha_1} e_5 + \alpha_8 e_6, & e_2 \cdot e_3 = \frac{\alpha_5^2}{2\alpha_1} e_6. \end{cases}$$

$$IV : \begin{cases} e_1 \cdot e_1 = \alpha_1 e_5 + \alpha_2 e_6, & e_1 \cdot e_2 = \alpha_3 e_5 + \alpha_4 e_6 \\ e_1 \cdot e_3 = \frac{1}{2} \alpha_3 e_6, & e_2 \cdot e_2 = \alpha_5 e_4 + \alpha_6 e_5 + \alpha_7 e_6 \\ e_2 \cdot e_3 = \frac{1}{2} (\alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6), & e_2 \cdot e_4 = \frac{1}{2} \alpha_5 e_6 \\ e_3 \cdot e_3 = \frac{1}{2} \alpha_5 e_6. \end{cases}$$

Adabiyotlar

1. *Bai C., Bai R., Guo L., Wu Y.*, Transposed Poisson algebras, Novikov-Poisson algebras, and 3-Lie algebras, arxiv:2005.01110
2. *Bruno Leonardo Macedo Ferreira, Ivan Kaygorodov, Viktor Lopatkin*: $\frac{1}{2}$ -derivations of Lie algebras and transposed Poisson algebras., The Royal Academy of Sciences, Madrid 2021
3. *Vergne M.* Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. Bull. Soc. Math. France, 98:81–116, 1970.

n=8 dimensional Filiform Leibniz Algebras and their basis
Tursunov D.

Samarkand state University, named after Sharof Rashidov master student of Mathematical faculty

e-mail: dilbektursunov096@gmail.com

Definition 1: A Leibniz algebra L is said to be filiform, if $\dim L^i = n - i$, where $n = \dim L$ and $2 \leq i \leq n$. The set of n -dimensional filiform Leibniz algebras we denote by $Leib_n$. The following theorem from [1] splits $Leib_{n+1}$ into three disjoint subsets. Any $(n+1)$ -dimensional complex filiform Leibniz algebra admits a basis $e_0, e_1, \dots, e_n$ called adapted and more information [2], such that the table of multiplication of the algebras has one of the following forms, where undefined products are zero:

$$TLeib_{n+1} = \left\{ \begin{array}{ll} [e_i, e_0] = e_{i+1} & 1 \leq i \leq n-1, \\ [e_0, e_i] = -e_{i+1} & 2 \leq i \leq n-1, \\ [e_0, e_0] = b_{0,0}e_n \\ [e_0, e_1] = -e_2 + b_{0,1}e_n \\ [e_1, e_1] = b_{1,1}e_n \\ [e_i, e_j] = a_{i,j}^1 e_{i+j+1} + \dots + a_{i,j}^{n-(i+j+1)} e_{n-1} + b_{i,j}e_n & 1 \leq i < j \leq n-1, \\ [e_i, e_j] = -[e_j, e_i] & 1 \leq i < j \leq n-1, \\ [e_i, e_{n-i}] = -[e_{n-i}, e_i] = (-1)^i b_{i,n-i}e_n & 1 \leq i \leq n-1, \end{array} \right. \quad (1)$$

Problem 1. We are need to find view $TLeib_{n+1}$ for $n = 8$ and we are need to check it have been Filiform Leibniz algebra

Where $a_{i,j}^k, b_{i,j} \in C$ and, $b_{i,n-i} = b$ whenever $1 \leq i \leq n-i$ and $b = 0$ for even n since $n = 8$ is considered in the system $[e_i, e_{n-i}] = -[e_{n-i}, e_i] = (-1)^i \cdot b_{i,n-i}e_n$, $1 \leq i \leq n-1$. So the following is relevant: $[e_1, e_7] = [e_2, e_6] = [e_3, e_5] = b_{1,7} = b_{2,6} = b_{3,5} = 0$

When opening the system, we find the range of i and j changes

$$i + j + 1 \leq 8,$$

$$i + j \leq 7, i < j, (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 4)$$

$$TLeib_9 = \left\{ \begin{array}{ll} [e_0, e_i] = -e_{i+1} & 2 \leq i \leq 7, \\ [e_0, e_0] = b_{0,0}e_8 \\ [e_0, e_1] = -e_2 + b_{0,1}e_8 \\ [e_1, e_1] = b_{1,1}e_8 \\ [e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = a_{1,2}^1 e_4 + a_{1,2}^2 e_5 + a_{1,2}^3 e_6 + a_{1,2}^4 e_7 + b_{1,2}e_8 \\ [e_1, e_3] = -[e_3, e_1] = a_{1,3}^1 e_5 + a_{1,3}^2 e_6 + a_{1,3}^3 e_7 + b_{1,3}e_8 \\ [e_1, e_4] = -[e_4, e_1] = a_{1,4}^1 e_6 + a_{1,4}^2 e_7 + b_{1,4}e_8 \\ [e_1, e_5] = -[e_5, e_1] = a_{1,5}^1 e_7 + b_{1,5}e_8 \\ [e_1, e_6] = -[e_6, e_1] = b_{1,6}e_8 \\ [e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = a_{2,3}^1 e_6 + a_{2,3}^2 e_7 + b_{2,3}e_8 \\ [e_2, e_4] = -[e_4, e_2] = a_{2,4}^1 e_7 + b_{2,4}e_8 \\ [e_2, e_5] = -[e_5, e_2] = b_{2,5}e_8 \\ [e_2, e_6] = -[e_6, e_2] = b_{2,6}e_8 = 0 \\ [e_3, e_4] = -[e_4, e_3] = b_{3,4}e_8 \end{array} \right.$$

we will be using this equalities

$$\{e_0, e_1, e_2\}, \{e_0, e_1, e_3\}, \{e_0, e_1, e_4\}, \{e_0, e_1, e_5\}, \{e_0, e_1, e_6\}, \{e_0, e_2, e_3\}, \{e_0, e_2, e_4\}, \{e_0, e_2, e_5\}, \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}$$

and using the following notations, we write the system as follows

$$\begin{aligned}
 a_{1,2}^1 &= a_{1,3}^1 = \alpha_1, a_{1,2}^2 = a_{1,3}^2 = \alpha_2, a_{1,2}^3 = a_{1,3}^3 = \alpha_3, a_{1,2}^4 = b_{1,3} = \alpha_4, b_{1,2} = \alpha_5, a_{1,4}^1 = \alpha_6, \\
 a_{1,4}^2 &= \alpha_7, b_{1,4} = \alpha_8, b_{1,5} = \alpha_9, b_{1,6} = \alpha_{10}, a_{2,3}^1 = \alpha_1 - \alpha_6, a_{2,3}^2 = \alpha_2 - \alpha_6, \\
 b_{2,3} &= \alpha_3 - \alpha_6, a_{2,4}^1 = \alpha_1 - \alpha_6, b_{2,4} = \alpha_2 - \alpha_6, b_{3,4} = 2\alpha_1 + \alpha_{10} - 3\alpha_6,
 \end{aligned}$$

$$TLeib_9 = \left\{ \begin{array}{l} [e_0, e_i] = -e_{i+1} \\ [e_0, e_0] = b_{0,0}e_8 \\ [e_0, e_1] = -e_2 + b_{0,1}e_8 \\ [e_1, e_1] = b_{1,1}e_8 \\ [e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = \alpha_1e_4 + \alpha_2e_5 + \alpha_3e_6 + \alpha_4e_7 + \alpha_5e_8 \\ [e_1, e_3] = -[e_3, e_1] = \alpha_1e_5 + \alpha_2e_6 + \alpha_3e_7 + \alpha_4e_8 \\ [e_1, e_4] = -[e_4, e_1] = \alpha_6e_6 + \alpha_7e_7 + \alpha_8e_8 \\ [e_1, e_5] = -[e_5, e_1] = (2\alpha_6 - \alpha_1)e_7 + \alpha_9e_8 \\ [e_1, e_6] = -[e_6, e_1] = \alpha_{10}e_8 \\ [e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = (\alpha_1 - \alpha_6)e_6 + (\alpha_2 - \alpha_6)e_7 + (\alpha_3 - \alpha_6)e_8 \\ [e_2, e_4] = -[e_4, e_2] = (\alpha_1 - \alpha_6)e_7 + (\alpha_2 - \alpha_6)e_8 \\ [e_2, e_5] = -[e_5, e_2] = (2\alpha_6 - \alpha_1 - \alpha_{10})e_8 \\ [e_3, e_4] = -[e_4, e_3] = (2\alpha_1 + \alpha_{10} - 3\alpha_{10})e_8 \end{array} \right. \quad 2 \leq i \leq 7,$$

now let's find at the base of $TLeib_{n+1}$ for $n = 8$

$$\begin{aligned}
 L &= \{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \\
 L^2 &= L \times L = \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \\
 L^3 &= L^2 \times L = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \\
 L^4 &= L^3 \times L = \{e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\} \\
 L^5 &= L^4 \times L = \{e_5, e_6, e_7, e_8\} \\
 L^6 &= L^5 \times L = \{e_6, e_7, e_8\} \\
 L^7 &= L^6 \times L = \{e_7, e_8\} \\
 L^8 &= L^7 \times L = \{e_8\} \\
 L^9 &= L^8 \times L = \{0\}
 \end{aligned}$$

So, we are showing this theorem:

Theorem 1. $TLeib_{n+1}$ algebra for $n=8$ will be fliform Leibniz algebra.

References

1. J. R. Go'mez and B. A. Omirov On classication of complex fliform Leibniz algebras, (2006),
2. Isamiddin S. Rakhimov and 2.Munther A. Hassan On Low-Dimensional Filiform Leibniz Algebras and their Invariants, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 34(3) (2011), 475-485.

Local automorphism on simple Leibniz algebras

¹Yusupov B.

¹ V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 81, Mirzo Ulughbek street, 100170 Tashkent, Uzbekistan,
baxtiyot_yusupov_93@mail.ru

In last decades a series of papers have been devoted to study of mappings which are close to automorphism and derivation of associative algebras (especially of operator algebras and C^* -algebras). Namely, the problems of describing so-called local automorphisms (respectively, local derivations) and 2-local automorphisms (respectively, 2-local derivations)

have been considered. Later similar problems were extended for non associative algebras, in particular, for the case of Lie algebras.

Let $\mathcal{A}$ be an associative algebra. Recall that a linear mapping Φ of $\mathcal{A}$ into itself is called a local automorphism (respectively, a local derivation) if for every $x \in \mathcal{A}$ there exists an automorphism (respectively, a derivation) Φ_x of $\mathcal{A}$, depending on x , such that $\Phi_x(x) = \Phi(x)$.

Local automorphisms of certain finite-dimensional simple Lie and Leibniz algebras are investigated in [1]. Concerning local automorphism, T.Becker, J.Escobar, C.Salas and R.Turdibaev in [2] established that the set of local automorphisms $LAut(sl_2)$ coincides with the group $Aut^\pm(sl_2)$ of all automorphisms and anti-automorphisms. Later in [3] M.Costantini proved that a linear map on a simple Lie algebra is a local automorphism if and only if it is either an automorphism or an anti-automorphism.

An algebra $(\mathcal{L}, [\cdot, \cdot])$ over a field $\mathbb{F}$ is called a (right) Leibniz algebra if it satisfies the property

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

which is called Leibniz identity. For a Leibniz algebra $\mathcal{L}$, a subspace generated by its squares $\mathcal{I} = \text{span}\{[x, x] : x \in \mathcal{L}\}$ due to Leibniz identity becomes an ideal, and the quotient $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}/\mathcal{I}$ is a Lie algebra called liezation of $\mathcal{L}$. Moreover, $[\mathcal{L}, \mathcal{I}] = 0$. Following ideas of Dzhumadil'daev[4], a Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is called simple if its liezation is a simple Lie algebra and the ideal $\mathcal{I}$ is a simple ideal. Equivalently, $\mathcal{L}$ is simple iff $\mathcal{I}$ is the only non-trivial ideal of $\mathcal{L}$. A Leibniz algebra $\mathcal{L}$ is called semisimple if its liezation $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ is a semisimple Lie algebra. Simple and semisimple Leibniz algebras are under certain interest now [5].

Let $\mathcal{G}$ be a Lie algebra and $\mathcal{V}$ a (right) $\mathcal{G}$ -module. Endow on vector space $\mathcal{L} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{V}$ the bracket product as follows:

$$[(g_1, v_1), (g_2, v_2)] := ([g_1, g_2], v_1 \cdot g_2),$$

where $v \cdot g$ (sometimes denoted as $[v, g]$) is an action of an element g of $\mathcal{G}$ on $v \in \mathcal{V}$. Then $\mathcal{L}$ is a Leibniz algebra, denoted as $\mathcal{G} \ltimes \mathcal{V}$.

The following theorem is the main result of this note.

Theorem 1. Let $\mathcal{L}$ be a simple Leibniz algebra. Then a linear mapping $\Delta : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ is a local automorphism if and only if Δ is an automorphism.

References

1. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K. Local Automorphisms on Finite-Dimensional Lie and Leibniz Algebras, // Algebra, Complex Analysis and Pluripotential Theory, USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 264 (2017), p. 31–44.
2. Becker T., Escobar J., Salas C., Turdibaev R. On Local Automorphisms of sl_2 , // Uzbek Mathematical Journal. (2) (2019), p. 27–34.
3. Costantini M., Local automorphisms of finite dimensional simple Lie algebras, // Linear Algebra and its Applications. 562 (2019), p. 123–134.
4. Dzhumadil'daev A.; Abdykassymova S., Leibniz algebras in characteristic p. Comptes Rendus de l'Acad'emie des Sciences. S'erie I. Math'ematique 332 (12) (2001) 1047–1052.
5. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Omirov B. A., Kaiming Zh. Semisimple Leibniz algebras, their derivations and automorphisms, // Linear and Multilinear Algebra, (2020), 68:10, 2005–2019,

Local derivations of rank one solvable Lie algebra with a filiform nilradical

¹Yusupov B.B., ²Yuldashev I.G.

¹ V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,

e-mail: b.yusupov@mathinst.uz

² Nukus state pedagogical institute, Nukus, Uzbekistan,

e-mail: i.yuldashev1990@mail.ru

Let $\mathcal{A}$ be an algebra (not necessary associative). Recall that a linear mapping $D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ is said to be a derivation, if $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ for all $x, y \in \mathcal{A}$. A linear mapping Δ is said to be a local derivation, if for every $x \in \mathcal{A}$ there exists a derivation D_x on $\mathcal{A}$ (depending on x) such that $\Delta(x) = D_x(x)$. The definition of local automorphism is similar [7]. These notions were introduced and investigated independently by R.V. Kadison [6] and D.R.Larson and A.R. Sourour [6]. The above papers gave rise to a series of works devoted to the description of mappings which are close to automorphisms and derivations of C^* -algebras and operator algebras. In [6] D.R.Larson and A.R. Sourour proved that if $\mathcal{A} = B(X)$, the algebra of all bounded linear operators on a Banach space X , then every invertible local automorphism of $\mathcal{A}$ is an automorphism. Thus automorphisms on $B(X)$ are completely determined by their local actions. In [4] it was shown that the set of all local automorphisms $LocAut(\mathcal{A})$ of an algebra $\mathcal{A}$ form a multiplicative group.

In [2] Sh.A. Ayupov and the first author have proved that every local derivation on semi-simple Lie algebra over an algebraically closed field of characteristic zero is a derivation and gave examples of finite-dimensional nilpotent Lie algebras with local derivations which are not derivations. In [11] the authors studied local derivations of standard Borel subalgebras of a finite-dimensional simple Lie algebra over an algebraically closed field of characteristic 0 and proved that every local derivation of such algebras is a derivation. In [3] have shown that in the class of solvable Lie algebras there exist algebras which admit local derivations which are not ordinary derivation and also algebras for which every local derivation is a derivation. The authors found necessary and sufficient conditions under which any local derivation of solvable Lie algebras with abelian nilradical and one-dimensional complementary space is a derivation. For the structure of solvable algebras with a given nilradical see [1,5,9]

Let $\mathcal{L}$ be a Lie algebra. Consider the following central lower and derived sequences:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 &= \mathcal{L}, & \mathcal{L}^{k+1} &= [\mathcal{L}^k, \mathcal{L}], & k &\geq 1, \\ \mathcal{L}^{[1]} &= \mathcal{L}, & \mathcal{L}^{[s+1]} &= [\mathcal{L}^{[s]}, \mathcal{L}^{[s]}], & s &\geq 1. \end{aligned}$$

A Lie algebra $\mathcal{L}$ is called nilpotent (respectively, solvable), if there exists $p \in \mathbb{N}$ such that $\mathcal{L}^p = 0$ (respectively, $\mathcal{L}^{[p]} = 0$). The smallest integer k such that $\mathcal{L}^k = 0$ is called the nilindex (or the nilpotency class) of $\mathcal{L}$. A Lie algebra $\mathcal{L}$ is called filiform, if $\dim \mathcal{L}^k = n - k - 1$ for $1 \leq k \leq n - 1$. Note that the filiform Lie algebras have the maximal possible nilindex, $n - 1$. These algebras are the "least" nilpotent.

In this note we give descriptions of the space of all local derivations of rank one solvable Lie algebras with filiform nilradical.

Let $n \geq 5$ and let $\mathcal{W}_n^+$ be a $(n + 1)$ -dimensional solvable Lie algebra with a basis $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_n\}$ such that

$$[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}, \quad 0 \leq i, j \leq n, \quad i + j \leq n. \quad (1)$$

Note that $\mathcal{W}_n = [\mathcal{W}_n^+, \mathcal{W}_n^+] = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ is the n -dimensional filiform Lie algebra which called a Witt algebra.

For $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ by $\Delta_{i,j}$ denote a linear mapping on $\mathcal{W}_n^+$ defined on basis elements as follows

$$\Delta_{i,j}(e_k) = \begin{cases} e_i, & \text{if } j = k, \\ 0, & \text{if } j \neq k \end{cases}. \quad (2)$$

Set

$$\text{PLoc}(\mathcal{W}_n^+) = \text{span} \{ \Delta_{i,j} : 0 \leq j \leq m-1, 2j+1 \leq i \leq n \}, \quad (3)$$

if $n = 2m$ is even,

$$\text{PLoc}(\mathcal{W}_n^+) = \text{span} \{ \Delta_{i,j}, \Delta_{n,k} : 0 \leq j \leq m, 2j+1 \leq i \leq n, k = m+1, \dots, n \}, \quad (4)$$

if $n = 2m+1$ is odd.

Theorem. Any local derivation Δ on $\mathcal{W}_n^+$ is uniquely represented in the form

$$\Delta = \text{ad}(a) + \overline{\Delta}, \quad (5)$$

where $a \in \text{span} \{ e_0, e_1, \dots, e_{[\frac{n}{2}]-1} \}$ and $\overline{\Delta} \in \text{PLoc}(\mathcal{W}_n^+)$, $[t]$ is the integer part of the real number t . Moreover, the space $\text{LocDer}(\mathcal{W}_n^+)$ equipped with a Lie bracket is a Lie algebra and $\text{PLoc}(\mathcal{W}_n^+)$ its ideal.

References

1. J.M. Ancochea, R.Campoamor-Stursberg, L. Garcia Vergnolle, Solvable Lie algebras with naturally graded nilradicals and their invariants, J. Phys. A, Math. Theor. **39** (2006), 1339-1355.
2. Sh.A. Ayupov, K.K. Kudaybergenov, Local derivations on finite-dimensional Lie algebras, Linear Algebra Appl. **493** (2016), 381-398.c.
3. Sh.A. Ayupov, A.Kh. Khudoyberdiyev, Local derivations on solvable Lie algebras, Linear and Multilinear Algebra **69** (2021), no. 7, 1286-1301.
4. A.P. Elisova, I.N. Zotov, V.M. Levchuk and G.S. Suleymanova, Local automorphisms and local derivations of nilpotent matrix algebras, Izv. Irkutsk Gos. Univ. **4** (1) (2011) 9-19.
5. M. Goze, Y. Khakimdjanov, Nilpotent and solvable Lie algebras. Handbook of algebra, Vol. 2, 615-663, Handb. Algebr., 2, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2000
6. R.V. Kadison, Local derivations, J. Algebra, **130** (1990) 494-509.
7. D. R. Larson, A. R. Sourour, Local derivations and local automorphisms of $B(X)$, Proc. Sympos. Pure Math. **51** (1990) 187-194.
8. L. Šnobl, On the structure of maximal solvable extensions and of Levi extensions of nilpotent Lie algebras, J. Phys. A, Math. Theor. **43** (2010), 17, Article ID 505202.
9. L. Šnobl, Maximal solvable extensions of filiform algebras Arch. Math. (Brno) **47** (2011), no. 5, 405-414.
10. B. Verbeke, Almost inner derivations of Lie algebras, Master dissertation, KU Leuven Faculty of Science, 2016.
11. Y. Yu, Zh. Chen, Local derivations on Borel subalgebras of finite-dimensional simple Lie algebras, Comm. Algebra **48** (2020), no. 1, 1-10.

Геометрический смысл условной и обобщенной внешней кривизны поверхности

¹Артикбаев А., ²Ибодуллаева Н.

¹Ташкентский Государственный транспортный университет, г. Ташкент

e-mail: aartykbaev@mail.ru,

²Навоийский Государственный Педагогический институт

e-mail: nafisa.28.02.1991@mail.ru

И.Я. Бакельманом определено понятие условной кривизны выпуклой поверхности [1]. Определение дано математическим методом, как функция обладающая свойствами внешней кривизны.

Известно [2], что внешняя кривизна является площадью сферического отображения выпуклой поверхности.

В данной работе вводится понятие обобщенной внешней кривизны выпуклой поверхности.

Обобщенная внешняя кривизна определена геометрическим методом, как площадь центральной проекции сферического отображения на поверхность, звездно расположенной относительно сферы.

Доказано свойства вполне аддитивности обобщенной внешней кривизны. Выяснено геометрическое построение обобщенной внешней кривизны, причем, условная кривизна является частным случаем обобщенной внешней кривизны [3].

Литература

1. *Ilya J. Bakelman*. Convex Analysis and Nonlinear Geometric Elliptic Equations, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1994), Ц 510 p.
2. *A.D. Alexandrov*. Intrinsic geometry of convex surfaces. Part II, Taylor and Francis Group, LLC, USA (2006), Ц 430 p.
3. *А.Артикбаев, Н.М.Ибодуллаева*. Задача восстановления поверхности по внешней кривизне и решения уравнения Монжа-Ампера, Дифференциальные уравнения, геометрия и топология, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 201, ВИНТИ РАН, М., 2021, 123Ц131.

О шейповых и C -свойствах подпространства $P_f(X)$ пространства вероятностных мер для бесконечного компакта X

¹Аюпов Ш.А., ²Жураев Т.Ф.

¹Институт математики имени В. И. Романовского, Ташкент, Узбекистан

e-mail: sh_ayupov@mail.ru

²Ташкентский государственный педагогический университет, Ташкент, Узбекистан

e-mail: tursunzhuraev@mail.ru

В данной заметке исследуются шейповые, размерностные и C -свойства подпространства $P_f(X)$ пространства вероятностных мер $P(X)$ определенных в бесконечном компакте X . Используя гомеоморфности дополнения подпространств $P_f(X)$ и $P_f(Y)$ до пространства $P(X)$ и $P(Y)$ соответственно, доказывается равенство шейпов бесконечных компактов X, Y .

Мера $\mu \in M(X)$ называется положительной (символически $\mu \geq 0$), если $\mu(\varphi) \geq 0$ для всякого $\varphi \geq 0$. Множество положительных мер называется положительным конусом пространства $M(X)$ [1].

Мера μ положительна тогда и только тогда, когда $\|\mu\| = \mu_x$ где $1_x : X \rightarrow [0, 1]$ – функция, тождественно равная 1.

Мера μ называется нормированной, если $\|\mu\| = 1$. Положительная нормированная мера называется вероятностной.

Значит, положительная мера μ является вероятностной тогда и только тогда, когда $\int 1_x d\mu = 1$.

Наделим множество $M(X)$ слабой топологией, т.е. будем считать $M(X)$ подмножеством тихоновского произведения числовых прямых $\prod \{R_\varphi : \varphi \in C(X)\}$. Базу окрестностей элемента $\mu \in M(X)$ образуют множества $O(\mu, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon) = \{\mu' \in M(X); |\mu'(\varphi_i) - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon, i = \overline{1, k}\}$. Итак, $M(X)$ -вполне регулярное пространство. Подпространство $M(X)$, состоящее из всех вероятностных мер, обозначим $P(X)$. Легко видеть, что пространство $P(X)$ замкнуто в $M(X)$. Кроме того, $P(X)$ лежит в произведении отрезков $\prod \{I_\varphi : \varphi \in C(X)\}$, где $I_\varphi = [-\|\varphi\|, \|\varphi\|]$ и $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X\}$. Следовательно, $P(X)$ является бикомпактом[1].

Говорят, что мера μ сосредоточена на множестве $F \subset X$, если $\int \varphi d\mu = 0$ для любой $\varphi \in C(X)$, обращающейся в нуль на F . Наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена мера μ , называется её носителем и обозначается $\text{supp}\mu$; $\text{supp}\mu = \bigcap \{F \subset X : F = \bar{F} \text{ и } \mu(X) = \mu(F)\}$. Для всякой точки существует единственная вероятностная мера, сосредоточенная в x . В самом деле, пусть δ_x — такая мера. Тогда $\delta_x(1_x) = 1$ и, значит, $\delta_x(\varphi) = \delta_x(\varphi(x) \cdot 1_x) = \varphi(x)$. С другой стороны, мера δ_x , определяемая равенством $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ — вероятностная и сосредоточена в точке x . Мера δ_x сосредоточенная в точке x , называется мерой Дирака.

Для бикомпакта X через $P_n(X)$ обозначим множество вероятностных всех мер $\mu \in P(X)$, носители которых состоят не более чем из n точек, т.е.

$$P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\text{supp}\mu| \leq n\}.$$

Значит, точки пространства $P_n(X)$ — это выпуклые линейные комбинации

$$\sum_{i=1}^k m_i \delta_{x_i}, k \leq n, \sum_{i=1}^k m_i = 1, m_i \geq 0,$$

мер Дирака.

В работе [2] приведен подфунктор P_f функтора P вероятностных мер, обладающий следующим свойством: если носитель меры μ состоит из n точек $x_1, x_2, \dots, x_n$, то мера, по крайней мере, одной из этих точек, не меньше $1 - \frac{1}{n}$. Он интересен тем, что является функтором с конечными носителями и не имеет конечной степени. Функтор $P_f : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ удовлетворяет всем требованиям, налагаемым на нормальные функторы [2], кроме сохранения эпиморфизмов.

Из определения пространства $P_f(X)$ следует, что пространство $\delta(X)$ мер Дирака лежит в $P_f(X)$.

Говорят, что пространство X является слабосчетномерным, если X является счетным объединением своих замкнутых конечномерных подпространств, т.е. $X = \bigcup_{i=1}^\infty X_i, \dim X_i < \infty, X_1$ - замкнуто в X .

Предложение 1. Пусть компакт X слабосчетномерен. Тогда компакт $P_f(X)$ также слабосчетномерен.

Определение [3]. Топологическое пространство X называется C -пространством (или обладает свойством) если для всякой последовательности $U_n, n \in N$ его открытых покрытий найдется такая последовательность $V_n, n \in N$ дизъюнктивных открытых семейств, что V_n вписано в U_n , а $\bigcup \{V_n : n \in N\}$ является покрытием пространства X .

Теорема 1. Для любого бесконечного компакта X пространство $P_f(X)$ обладает свойством C , тогда и только тогда когда само X обладает свойством C .

Пусть X и Y бесконечные метрические компакты и $ShX = ShY$. В этом случае, имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ P_f(X) & \xrightarrow{P_f(h)} & P_f(Y) \end{array}$$

где $h : X \rightarrow Y$ шейповое отображение. В этом случае из наследственно шейповой эквивалентности (короткого, hse) отображений r_f^X и r_f^Y вытекает, что отображение h есть hse отображение тогда и только тогда, когда $P_f(h)$ есть hse отображение [4].

Теорема 2. Для любых бесконечных компактов X и Y , существует hse отображение $h : X \rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда существует равномерно непрерывный гомеоморфизм $P(X) \setminus P_f(X) \rightarrow P(Y) \setminus P_f(Y)$.

Теорема 3. Любые компакты X и Y имеет одинаковые шейпы тогда и только тогда, когда $P(X) \setminus P_f(X)$ и $P(Y) \setminus P_f(Y)$ равномерно гомеоморфно в категории U_{ANR} [5].

Литература

1. В.В. Федорчук, В.В. Филиппов Общая топология. Основные конструкции М.МГУ, 1988, 252 с.
2. Т.Ф. Жураев Геометрические и топологические свойства пространств, являющихся значениями некоторых ковариантных функторов. Ташкент. Док.дисс. 2022 г. 198 с.
3. D.F. Addis, J.H. Gregham A class of infinite dimensional spaces I: Dimension theory and Alexandroff's problem. Fund. Math., 1978, V.101, No. 3, pp.195-205.
4. D.J. Garity Property C and closed Maps. Top,Appl. 26.1987, pp. 125-130.
5. P. Mrozik Hereditary shape equavilences and complement theorems Top.Appl. 22, 1986, pp. 131-137.

Вычисление унимодулярных матриц степенных преобразований

¹Брюно А.Д., ²Азимов А.А.

¹Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия,
e-mail: abruno@keldysh.ru

²Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,
e-mail: Azimov_Alijon_Akhmadovich@mail.ru

Аннотация

Указан алгоритм решения такой задачи. Пусть в n -мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ задано m ($m < n$) целочисленных векторов. Их линейная оболочка образует линейное подпространство L в $\mathbb{R}^n$. Требуется вычислить такую унимодулярную матрицу, что линейное преобразование с ней переводит подпространство L в координатное [1]. Также приведены программы, реализующие эти алгоритмы, и степенные преобразования [2], для которых они предназначены.

Литература

1. Брюно А. Д., Азимов А. А. Вычисление унимодулярных матриц. Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. Москва, 2022. № 46. С. 1–20.
2. Брюно А.Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998. 288 с.

Локальная параметризация алгебраического многообразия вблизи его особых точек

¹Брюно А.Д., ²Азимов А.А.

¹ *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия,*
e-mail: abruno@keldysh.ru

² *Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: Azimov_Alijon_Akhmadovich@mail.ru

Аннотация

В теоретической физике при изучении инвариантных метрик Эйнштейна возникла потребности изучить в координатах a_1, a_2, a_3 алгебраическое многообразие Ω [1], которое описывается уравнением

$$Q(s_1, s_2, s_3) \stackrel{\text{def}}{=} (2s_1 + 4s_3 - 1)(64s_1^5 - 64s_1^4 + 8s_1^3 + 240s_1^2s_3 - 1536s_1s_3^2 - 4096s_3^3 + 12s_1^2 - 240s_1s_3 + 768s_3^2 - 6s_1 + 60s_3 + 1) - 8s_1s_2(2s_1 + 4s_3 - 1)(2s_1 - 32s_3 - 1)(10s_1 + 32s_3 - 5) - 16s_1^2s_2^2(52s_1^2 + 640s_1s_3 + 1024s_3^2 - 52s_1 - 320s_3 + 13) + 64(2s_1 - 1)s_2^3(2s_1 - 32s_3 - 1) + 2048s_1(2s_1 - 1)s_2^4 = 0,$$

где s_1, s_2, s_3 — элементарные симметрические многочлены, равные соответственно

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3, s_2 = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3, s_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3.$$

При этом $Q(s_1, s_2, s_3) = P(a_1, a_2, a_3)$, где многочлен P имеет степень 12. Многообразие Ω имеет 3 особые точки третьего порядка, 1 особую точку второго порядка и 2 кривые особых точек первого порядка. С помощью алгоритмов степенной геометрии [2] и программ компьютерной алгебры [3] получены локальные параметризации многообразия Ω вблизи двух его особых точек третьего порядка.

Литература

1. Батхин А. Б., Брюно А. Д. Исследование одной вещественной алгебраической поверхности // Программирование, 2015, т.41, № 2. С. 7–17.
2. Брюно А. Д. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М. : Физматлит, 1998. 288 с.
3. Thompson I. Understanding Maple. Cambridge University Press, 2016. 228 p.

Операция произведения над сверхгруппами

¹Буриев Т.Э., ²Хасанова Д.В.

¹ *Преподаватель в кафедре алгебры и геометрии в Самаркандском государственном университете, Узбекистан, город Самарканд,*
e-mail: avtor1@mail.ru

² *Магистрант кафедры алгебры и геометрии в Самаркандском государственном университете, Узбекистан, город Самарканд,*
e-mail: diyora.khasanova.97@mail.ru

Мы будем рассматривать такие совокупности T конечного множества элементов $T = t_1, t_2, \dots, t_n$, которые состоят из двух частей $R = r_1, r_2, \dots, r_n$ и $H = h_1, h_2, \dots, h_n$ без общих элементов. Различие между этими двумя частями будет выяснено в дальнейшем, а здесь предложим пока следующее: известен закон, по которому из любых двух (одинаковых или разных) элементов t' и t'' совокупности T однозначно получается некоторый третий элемент t , который может принадлежать или не принадлежать

данной совокупности T . Эту операцию получения элемента t из элементов t' и t'' будем называть, по общепринятому, композицией или приумножением элементов t' и t'' , а результат композиции-произведением этих элементов. Произведение будем обозначать знаком $t't''$ или ставя точку между множителями, $t' \cdot t''$. Таким образом, $t't'' = t$ или $t' \cdot t'' = t$. При композиции элементов совокупности T коммутативный закон, вообще говоря, не имеет места, так что вообще $t't'' \neq t''t'$.

Определение 1. *Сверхгруппой называется совокупность T конечного или бесконечного множества элементов, состоящая из двух частей без общих элементов-регулярной области R (конечной или бесконечной) и дополнительной области H (так же конечной или бесконечной).*

Замечание 1. Если композиция любых двух элементов t' и t'' сверхгруппы T подчиняется коммутативному закону $t' \cdot t'' = t'' \cdot t'$, то сверхгруппа называется коммутативной, в противном случае-некоммутативной.

Рассмотрим операцию произведение сверхгрупп.

Определение 2. *Назовем произведением двух сверхгрупп T_1 и T_2 совокупность, обозначаемую символом T_1T_2 и состоящую из элементов вида t_1t_2 , где t_1 любой элемент из T_1 , а t_2 любой элемент из T_2 . Таким образом, совокупность T_1T_2 состоит из произведений каждого элемента T_1 на все элементы T_2 , при чем*

$$T_1T_2 = (R_1 + H_1)(R_2 + H_2) = R_1R_2 + R_1H_2 + H_1R_2 + H_1H_2.$$

Произведение T_1T_2 не всегда обладает групповым свойством, то есть не всегда результат композиции $(t_1t_2)(t'_1t'_2)$ любых двух элементов из T_1T_2 будет входить опять в эту же совокупность.

Возьмем сверхгруппы обобщенных подстановок:

$$T_1 = R_1 + H_1 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right],$$

$$T_2 = R_2 + H_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right],$$

Которые удовлетворяют поставленному выше требованию относительно рассматриваемых нами сверхгрупп, так как являются делителями одной и той же сверхгруппы обобщенных подстановок. Произведение этих двух сверхгрупп есть следующая совокупность:

$$T_1T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Это совокупность не обладает групповым свойством, так как, например, результат композиции элементов $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ равен подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, которая не входит в данную совокупность. Наша задача заключается в отыскании условий, при которых произведение T_1T_2 обладает групповым свойством и представляет сверхгруппу.

Пример 2: Сверхгруппы $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right]$ и $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, имеющие различные нулевые элементы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, в произведение дают сверхгруппу

$T = T_1 T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right]$ с нулевым элементом $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.
 Произведение же сверхгрупп $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ с различными нулевыми элементами $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ будет сверхгруппой $T = T_1 T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right]$ без нулевого элемента. Итак, для $T = T_1 T_2$ выполняются все аксиомы сверхгруппы, кроме, быть может, аксиомы о нулевом элементе.

Литература:

1. А.Г. Курош А.Г. Курош, Теория групп. Москва, Наука, 1967, стр.:580 (третье издание,дополненное)
2. О.Ю. Шмидт Абстрактная теория групп. ГТТК,Киев,1916; 2-е изд.,Москва,1933; Избранные труды,Математика, М.1959, стр.:17-175
3. М. Холл The theory of groups,New York,1959.(Русский перевод: Теория групп. ИЛ,1962.) [60 : 12, 13617]
4. Е.С. Ляпин Е.С. Ляпин, А.Я. Айзенштат, М.М. Лесохин, Упражнения по теории групп. Москва, 1967.

О некоторых бесконечномерных многообразиях являющиеся подпространствами пространства полных сцепленных систем

¹Давлетов Д.Э., ²Жувонов К.Р.

¹ Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами,
e-mail: de_davletov@mail.ru

² Национальный исследовательский университет “Ташкентский институт
инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства”,
e-mail: qamariddin.j@mail.ru

В данной работе рассматриваются топологические, функториальные и геометрические свойства множества сцепленных систем ξ и свойства его подпространств типа размерности, граничные свойства и бесконечномерные многообразия. Пусть топологическое пространство. Система $\xi = \{F_\alpha : F_\alpha \subseteq X, \overline{F_\alpha} = F_\alpha, \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств пространства . Система ξ называется сцепленной, если любые два ее элемента имеют непустое пересечение.

Сцепленная система ξ замкнутых подмножеств пространства называется максимальной, если она обладает следующим свойством:

“если замкнутое множество $A \subset X$ пересекается с каждым элементом из ξ ”, то $A \in \xi$ [1]. (*)

Сцепленную систему ξ замкнутых подмножеств назовем полной [2], если для всякого замкнутого множества $F \subset X$ верно условие:

“любая окрестность OF множества F содержит множество $\Phi \in \xi$ ” влечет $\Phi \in \xi$ [2].(**)

Заметим, что для всякой сцепленной системы ξ существует наименьшая полная сцепленная система (коротко, псс) ξ_f , содержащая ξ . Систему ξ_f , которую будем называть пополнением ξ , которая может быть построена путем присоединения к ξ всех замкнутых подмножеств $F \subset X$, удовлетворяющих условию (**).

Напомним, что суперрасширением топологического пространства называется множество $\lambda(X)$ состоящее из всех максимальных сцепленных систем замкнутых подмножеств пространства . а множество всех полных сцепленных систем (псс) замкнутых подмножеств пространства обозначается через $N(X)$.

Отметим, что всякая максимальная (по включению) сцепленная система замкнутых подмножеств (м.с.с.) является полной. Отсюда, можем писать супер расширение $\lambda(X)$ – это подпространство $N(X)$. т. е. $\lambda(X) \subset N(X)$.

Для бикompакта X через $\lambda_\omega(X)$, $N_\omega(X)$ и $N^\omega(X)$ обозначим соответственно подмножества $\bigcup_{n=1}^\infty \lambda_n(X)$, $\bigcup_{K=1}^\infty N_K(X)$ и $\bigcup_{n=1}^\infty N^n(X)$. Очевидно, что эти подмножества σ -компакты и всюду плотны в пространствах $\lambda(X)$ и $N(X)$ соответственно.

Определение [3]. Множество $B(Q)$ называется граничным множеством в Q , если $Q \setminus B(Q) \approx \ell_2$;

Заметим, что псевдограница BdQ гильбертова куба Q , является граничным множеством куба Q .

Приведем следующие обозначения:

$Q = \prod_{i=1}^\infty [-1; 1]_i$ - гильбертов куб; $W_i^\pm = \{(g_j)\} \in Q : g_j = \pm 1\}$ - i -ая грань куба Q ;

$BdQ = \bigcup_{i=1}^\infty W_i^\pm$ - псевдограница куба Q ; $S = Q \setminus BdQ$ псевдовнутренность куба Q ;

$S \approx \ell_2$ - сепарабельное гильбертово пространство;

Σ - линейная оболочка стандартного кирпича в гильбертовом пространстве ℓ_2 ;

$\text{rint} Q = \{x = (x_n) \in Q : |x_n| < t < 1 \text{ для произвольного } n\}$, $BdQ \approx \Sigma$ (Андерсон[3]);

$\text{rint } Q \approx BdQ$ (Бессага-Пелчинский[3]);

Q^f - подпространство куба Q состоящее из всех точек, лишь конечное число координат которых отлично от нуля;

ℓ_2^f - линейное подпространство гильбертова пространства ℓ_2 , состоящее из всех точек лишь конечное число координат которых отлично от нуля;

Получены следующие результаты:

Теорема 1. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеет место:

- а) $\lambda_\omega(X)$ является граничным множеством компакта $\lambda(X)$;
- б) $N_\omega(X)$ является граничным множеством компакта $N(X)$;
- в) $N_\omega(X)$ является граничным множеством компакта $K\lambda(X)$.

Определение [3]. Топологическое пространство X называется многообразием моделированным на пространстве Y или Y многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y .

Теорема 2. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеем:

- а) $N(X) \setminus N_n(X)$ является Q -многообразием, для любого $n \geq 2$;
- б) $\lambda(X) \setminus \lambda_n(X)$ является Q -многообразием, для любого $n \geq 2$;
- в) $N(X) \setminus N^n(X)$ является Q -многообразием, для любого $n \geq 2$.

Теорема 3. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеет место:

- а) пространство $N^\omega(X)$ является Σ -многообразием;
- б) пространство $N_\omega(X)$ является Σ - многообразием; если $N_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q ;
- в) пространство $\lambda_\omega(X)$ является Σ -многообразием, если $\lambda_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q .

Теорема 4. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеет место:

- а) пространство $N^\omega(X)$ является ℓ_2^f - (или Q^f -) многообразием, если X конечномерно;
- б) пространство $\lambda_\omega(X)$ является ℓ_2^f - (или Q^f -) многообразием, если X конечномерно;
- в) пространство $\lambda_\omega(X)$ является ℓ_2^f - (или Q^f -) многообразием, если $\lambda_\omega(X)$ не содержит гильбертов куб Q ;
- г) пространство $N_\omega(X)$ является ℓ_2^f - (Q^f -) многообразием, если $N_\omega(X)$ не содержит гильбертов куб Q .

Литература

1. *J. Van Mill* Superextensions of metrizable continua are Hilbert cubes *Fund.Math* 1980 v. 107. p 204-218.
2. *А. В. Иванов* О пространстве полных сцепленных систем *Сиб.мат.журнал* 1986, Т. 27. №6, С. 95 – 110.
3. *С. А. Богатый, В. В. Федорчук* Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия *Итоги Науки и техники, Алгебра. Топология. Геометрия. Т.24. 1986, с. 195-270.*

**Топологии на центральных расширениях алгебр фон Неймана
Джумамуратов Р.Т.**

Karakalpak State University, Uzbekistan.

e-mail: rauazh@mail.ru

Пусть M – произвольная алгебра фон Неймана с центром $Z(M) \equiv L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $LS(M)$ – алгебра всех локально измеримых операторов относительно M . Обозначим через $E(M)$ множество всех элементов x из $LS(M)$, для которых существует последовательность взаимно ортогональных центральных проекторов $\{z_i\}_{i \in I}$ в M с $\bigvee_{i \in I} z_i = \mathbf{1}$, такая, что $z_i x \in M$ для всех $i \in I$. т.е.

$$E(M) = \{x \in LS(M) : \exists z_i \in P(Z(M)), z_i z_j = 0, i \neq j, \bigvee_{i \in I} z_i = \mathbf{1}, z_i x \in M, i \in I\},$$

где $P(Z(M))$ – решетка проекторов на $Z(M)$.

Рассмотрим измеримое пространство (Ω, Σ, μ) с мерой μ обладающее свойством прямой суммы и пусть $L_0 = L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ – алгебра всех комплексных измеримых функций на (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются).

База окрестностей нуля в топологии сходимости локально по мере на $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ состоит из множеств вида

$$W(A, \varepsilon, \delta) = \{f \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu) : \exists B \in \Sigma, B \subseteq A, \mu(A \setminus B) \leq \delta,$$

$$f \cdot \chi_B \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), \|f \cdot \chi_B\|_{L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)} \leq \varepsilon\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0, A \in \Sigma, \mu(A) < +\infty$.

База окрестностей нуля в топологии сходимости локально по мере $t(M)$ на $LS(M)$ состоит (в приведенных выше обозначениях) из следующих множеств

$$V(A, \varepsilon, \delta) = \{x \in LS(M) : \exists p \in P(M), \exists z \in P(Z(M)), xp \in M,$$

$$\|xp\|_M \leq \varepsilon, z^\perp \in W(A, \varepsilon, \delta), d(zp^\perp) \leq \varepsilon z\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0, A \in \Sigma, \mu(A) < +\infty$ (см. [2]).

На пространстве $E(M)$ рассмотрим следующие множества:

$$O(A, \varepsilon, \delta) = \{x \in E(M) : \|x\| \in W(A, \varepsilon, \delta)\} \quad (1)$$

где $\varepsilon, \delta > 0, A \in \Sigma, \mu(A) < +\infty$. Следующее предложение дает элементарные свойства множеств $O(A, \varepsilon, \delta)$, которые непосредственно вытекают из соответствующих свойств множеств $V(A, \varepsilon, \delta)$ (см. [1, Предложение 3.5.1]).

Предложение 1. Пусть $\varepsilon, \varepsilon_j > 0$ и $\delta, \delta_j > 0, j = 1, 2, A \in \Sigma, \mu(A) < \infty$. Тогда

i) $\lambda O(A, \varepsilon, \delta) = O(A, |\lambda| \varepsilon, \delta)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$;

ii) $O(A, \varepsilon_1, \delta_1) \subseteq O(A, \varepsilon_2, \delta_2)$ если $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2, \delta_1 \leq \delta_2$;

iii) $O(A, \varepsilon_1, \delta_1) + O(A, \varepsilon_2, \delta_2) \subseteq O(A, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2)$;

- $iv) \quad O(A, \varepsilon_1, \delta_1) O(A, \varepsilon_2, \delta_2) \subseteq O(A, \varepsilon_1 \varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2);$
 $v) \quad O^*(A, \varepsilon, \delta) = O(A, \varepsilon, \delta), \quad \text{где } O^*(A, \varepsilon, \delta) = \{x^* : x \in O(A, \varepsilon, \delta)\};$
 $vi) \quad \bigcap \{O(A, \varepsilon, \delta) : \varepsilon > 0, \delta > 0, A \in \Sigma, \mu(A) < \infty\} = \{0\}.$

Из предложения 1 следует, что система множеств

$$\{x + O(A, \varepsilon, \delta)\}, \quad (2)$$

где $x \in E(M)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$, определяет на $E(M)$ векторную топологию Хаусдорфа $t_c(M)$, для которой множества (2) образуют базу окрестностей элемента $x \in E(M)$. Более того, в этой топологии инволюция непрерывна, а умножение непрерывно, т.е. $(E(M), t_c(M))$ является топологической $*$ -алгеброй. Из [2, Предложение 5.3] следует, что $(E(M), t_c(M))$ является полным.

Таким образом, получим следующий результат.

Предложение 1. M является $t_c(M)$ -плотным в $E(M)$.

Теорема 1.i) Сеть $\{p_\alpha\} \subset P(M)$ сходится к нулю относительно топологии $t_c(M)$ тогда и только тогда, когда $c(p_\alpha) \xrightarrow{t(Z(M))} 0$, где $t(Z(M))$ – топология сходимости локально в мере на $Z(M)$

ii) Сеть $\{x_\alpha\} \subset E(M)$ сходится к нулю относительно топологии $t_c(M)$ тогда и только тогда, когда $e_\lambda^\perp(|x_\alpha|) \xrightarrow{t_c(M)} 0$ для любого $\lambda > 0$, где $\{e_\lambda(|x_\alpha|)\}$ – семейство спектральных проекторов для оператора x_α .

Литература

1. Ayupov Sh.A., Kudaybergenov K.K. Derivations on algebras of measurable operators, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2010. – V. 13, – P. 305-337.
2. Yeadon F.J. Convergence of measurable operators, Proc. Camb. Phil. Soc. – 1973. – V.74, – P. 257-268.
3. Муратов М.А., Чилин В.И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. – т. 69, – 390 с.

Субметризуемость и пространство идемпотентных вероятностных мер

¹Зайтов А.А., ²Эшкобилова Д.Т.

¹ Ташкентский архитектурно-строительный институт,

e-mail: adilbek_zaitov@mail.ru

² Термезский государственный университет,

e-mail: dilrabotermez@mail.ru

Пусть даны топологические пространства (X, τ_1) , (Y, τ_2) и отображение f из X в Y .

Определение 1. [1] Отображение f называется уплотнением из X в Y , если выполняются следующие условия:

1. $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение;
2. f – однозначно, т. е. инъективно;
3. $f(X) = Y$, т. е. сюръективно.

Определение 2. Пространство X называется субметризуемым, если оно уплотняется на метризуемое пространство.

Пример. Пусть $X = Y = [0, 1]$. Рассмотрим пространство $(X, \tau_{\rightarrow})$, где $\tau_{\rightarrow}$ – топология, порождённая базой $\mathfrak{B}_{\rightarrow} = \{[a, b) : 0 \leq a < b \leq 1\}$. Оно не является метрическим пространством (т. е. невозможно породить его топологию метрикой). Пусть (Y, τ_e) –

метрическое пространство, где τ_e – естественная топология на Y . Очевидно, что для отображения f , определенного равенством $f(x) = x$, выполняются все вышеуказанные три условия. По определению, $(X, \tau_{\rightarrow})$ субметризуемо.

Для тихоновского пространства X через $I_\beta(X)$ обозначают множество всех идемпотентных вероятностных мер на X , т. е. нормированных, идемпотентно однородных и идемпотентно аддитивных функционалов $\nu: C_b(X) \rightarrow \mathbb{R}$, определенных на пространстве всех непрерывных ограниченных функций на X , при этом меры ν сосредоточены в X .

Теорема. *Отображение $I_\beta(f): I_\beta(X) \rightarrow I_\beta(Y)$ является уплотнением тогда и только тогда, когда $f: X \rightarrow Y$ – уплотнение.*

Доказательство. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – уплотнение. Тогда в силу нормальности функтора I_β (см. предложение 2.12 из [2]) следуют, что

1. Если отображение $f: X \rightarrow Y$ – непрерывно, то отображение $I_\beta(f): I_\beta(X) \rightarrow I_\beta(Y)$ определяемое формулой $I_\beta(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f)$ непрерывно [3];
2. Если f – однозначно, то $I_\beta(f)$ тоже является однозначным;
3. Если $f(X) = Y$, то $I_\beta(f)(I_\beta(X)) = I_\beta(Y)$, т. е. $I_\beta(f)$ сюръективно.

Обратно, пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение такое, что отображение $I_\beta(f): I_\beta(X) \rightarrow I_\beta(Y)$ является уплотнением. Тогда $I_\beta(Y)$ метризуемо, $I_\beta(X)$ не обязательно метризуемо. Следовательно, Y метризуемо, метризуемость X равносильна метризуемости $I_\beta(X)$. А отображение $f = I_\beta(f)|_X: X \rightarrow Y$ сюръективно (инъективно) тогда и только тогда, когда отображение $I_\beta(f): I_\beta(X) \rightarrow I_\beta(Y)$ сюръективно (инъективно, соответственно).

Таким образом, теорема 1 доказана. Из нее сразу вытекает утверждение.

Следствие. *Если X – субметризуемо, то $I_\beta(X)$ также субметризуемо.*

Литература

1. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях, –М.: “Наука”, 1974. –425 с.
2. Заричный М.М. Пространства и отображения идемпотентных мер, Изв. РАН. СЕР. Матем., 2010, том 74 выпуск 3, 45–64.
3. Эшкобилова Д.Т., Х.Ф.Холтураев Х.Ф. Функтор идемпотентных вероятностных мер и индекс полноты равномерных пространств, Узбекский математический журнал, 1(2021), 65–79.

Геометрия сингулярных римановых слоений в евклидовом пространстве

Касимов О.Ю.

Денауский институт предпринимательства и педагогики, Узбекистан,

e-mail: odilbek.qosimov84@mail.ru

Пусть M – гладкое многообразие размерности n , A – максимальный атлас, определяющий на M структуру гладкого многообразия класса C^r , где $r \geq 0$. Многообразие M является также многообразием класса C^s , если $0 \leq s \leq r$. Систему локальных криволинейных координат на C^s многообразии M обозначим через A^s . Пусть теперь целое k удовлетворяет неравенствам $0 < k < n$.

Определение 1. *Разбиение F многообразия M на подмногообразия L_α называется гладким сингулярным слоением, если выполнены следующие условия: 1) $\bigcup_{\alpha \in B} L_\alpha = M$; 2) Для всех $\alpha, \beta \in B$ имеет место обязательно $L_\alpha \cap L_\beta = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$; 3) Каноническая инъекция $i: L_\alpha \rightarrow M$ является погружением; 4) Для каждой точки $x \in M$ существует C^r – карта (φ, U) , содержащая точку x такая, что $\varphi(U) = V_1 \times V_2$,*

где V_1 — окрестность начала в R^k , V_2 — окрестность начала в R^{n-k} , k — есть размерность слоя, проходящего через точку x ; 5) $\varphi(x) = (0, 0)$; 6) Для каждого подмногообразия L_α такого, что $L_\alpha \cap U \neq \emptyset$, имеет место равенство $L_\alpha \cap U = \varphi^{-1}(V_1 \times l)$, где $l = \{v \in V_2 : \varphi^{-1}(0, v) \in L_\alpha\}$.

Подмногообразия L_α называются слоями сингулярного слоения F .

Если размерность слоев сингулярного слоения одинаковы, то слоение называется регулярным слоением.

Слой L слоения F называется регулярным, если размерность слоя L максимален. Слой L слоения F называется сингулярным, если он не является регулярным.

Определение 2. Векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа преобразований, порожденная потоком векторного поля X , состоит из изометрий. Пусть D — семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M . Семейство D может содержать конечное или бесконечное число гладких векторных полей.

Определение 3.[1] Орбитой $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящей через точку x , называется множество таких точек y из M , для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \dots, t_k$ и векторные поля $X_1, X_2, \dots, X_k$ из D (где k — произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\dots(X_1^{t_1}(x))\dots)). \quad (1)$$

Определение 4.[2] Сингулярное слоение F называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой точке к слою, слоения F остается ортогональной ко всем слоям F .

Известно[3], что если семейство D состоит из векторных полей Киллинга и слоение F , порожденное орбитами, не имеет n — мерных орбит, слоение F является римановым.

Рассмотрим семейство $D_1 = \{X, Y\}$, $D_2 = \{Y, Z\}$, $D_3 = \{X, Z\}$ гладких векторных полей Киллинга в R^3 , где

$$X = \{-y; x; 0\}, \quad Y = \{-z; 0; x\}, \quad Z = \{0; \alpha; 0\}, \quad \alpha \neq 0. \quad (2)$$

Для этих семейств векторных полей справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Орбиты семейства D_1 , D_2 векторных полей порождают сингулярное риманово слоение F в R^3 , а орбиты семейства D_3 векторных полей порождают регулярное риманово слоение F в R^3 .

Литература

1. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, М, Мир, 1989, 644 с.
2. Tamura I. Topology of foliations: an introduction. Translations of mathematical monographs. American Mathematical Soc., 2006.
3. Нарманов А.Я., Аслонов Ж.О. Геометрия орбит векторных полей Киллинга. Узбекский математический журнал, 2012, 2. ст.77 — 85.
4. Qosimov O. Y. On the geometry of singular foliations. Uzbek Mathematical Journal, 2019, 4, Tashkent, p.132 — 138.

Внешняя геометрия поверхности в R_3^1

¹Курбонов Э., ²Ботиров Д.

¹ Джишакский политехнический институт, Узбекистан
e-mail:ergash-qurbonov68@mail.ru

² Джишакский государственный педогогический университет, Узбекистан

Одной из классических задач геометрии Y в целом Y является задача существования выпуклой поверхности по заданной метрике. Внутренняя геометрия поверхности вполне определяется метрикой поверхности. Задавая коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$ в классе $C^2(D)$, можно определить угол между кривыми, площадь, геодезические величины, относящиеся к внутренней геометрии. Также известно, что внутренняя геометрия поверхности сохраняется при изгибании поверхности.

Метрика поверхности не определяет внутреннюю геометрию поверхности галилеева пространства, в частности, гауссова кривизна не может быть определена полностью с помощью коэффициентов первой квадратичной формы [2]. Часть гауссовой кривизны, не определяющуюся коэффициентами первой квадратичной формы, назовем дефектом кривизны поверхности галилеева пространства [4].

Переходим к изучению внешних свойства поверхности галилеева пространства, когда поверхность задана в специальных координатах.

Доказана следующая лемма, определяющая характер дефекта кривизны поверхности.

Лемма. Дефект кривизны поверхности пропорционален геодезической кривизне кривой $v = \text{const}$, то есть

$$D(u, v) = F_u(u, v) - \frac{1}{2}E_v(u, v) = \sqrt{G(u, v)}k_g^{v=\text{const}}$$

$G(u, v)$ коэффициент первой дополнительной квадратичной формы. Из леммы следует очевидное утверждение: Если кривые $v = \text{const}$ на поверхности являющиеся геодезическими, то $D(u, v) = 0$.

Далее доказывается возможность подбора криволинейных координат на которой дефект обращается в нуль.

Теорема. На поверхности $\Phi \in R_3^1$ криволинейные координаты (u, v) можно преобразовать так, что $D(u, v) = 0$.

Проведен анализ поверхностей, дефект кривизны которых $D(u, v) = 0$. Примером таких поверхностей являются поверхности вращения, когда осью вращения является прямая общего положения (Ox).

Рассмотрим кривую γ , заданную уравнением

$$z = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

на плоскости xOz . При вращении кривой γ вокруг оси Ox получаем поверхность вращения, описываемую уравнением

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = u\bar{i} + f(u) \cos v \bar{j} + f(u) \sin v \bar{k}$$

где v - угол поворота кривой γ . В этом случае $D(u, v) = 0$.

Учитывая полученные выше факты, имеем, что для любой поверхности вращения галилеева пространства криволинейные координаты $v = \text{const}$ являются геодезическими. Поверхности в R_3 по знаку кривизны разделяются на два класса: поверхности положительной кривизны и поверхности отрицательной кривизны [3]. Эту классификацию, которая стала естественной в евклидовом пространстве, мы принимаем и в галилеевом пространстве

Известно, что плоскости Лобачевского не допускают регулярных изометрических погружений в евклидово пространство [1]. В отличие от евклидова пространства, в галилеевом пространстве существуют полные регулярные поверхности с кривизной $K = -1$. Эти поверхности получаются вращением кривой $z = chx$ или $z = e^x$ вокруг оси Ox .

Литература

1. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия. Москва. Наука. 1990. ст. 666.
2. Артыкбаев А., Соколов Д. Д. Геометрия в целом в плоском пространстве – времени. Учебное пособие. Ташкент. Издательство. ФАН. 1991.
3. Вечтомов Е.М. Основные математические структуры. Учебное пособие. Москва. Юрайт. 2018.
4. Курбонов Э.К. Cyclic surface of galileon space R_3^1 . Труды международной научной конференции. – Красноярск, 2002.

Геодезические линии циклических поверхностей в R_3^1 .

¹Курбонов Э.К., ²Урокова Ю.С.

¹ Джишакский политехнический институт, Узбекистан

e-mail:ergash-qurbonov68@mail.ru

² Джишакский государственный педагогический университет, Узбекистан

В евклидовом пространстве геодезическая линия определяется как кратчайшая линия, соединяющая две точки на поверхности. Аналогичное определение геодезической не применимо в галилеевом пространстве R_3^1 , так как любые кривые, соединяющие две точки, лежащие на разных особых плоскостях, равны между собой. Поэтому геодезическую линию можно определять как кривую, геодезическая кривизна которой обращается в нуль.

Существует другое определение геодезической линии как кривой, имеющей наименьшую вариацию поворота.

Теорема 1. *Кривая $v = v(u)$ на поверхности галилеева пространства имеет наименьшую вариацию поворота тогда и только тогда, когда её геодезическая кривизна равна нулю.*

Теорема дает возможность определить геодезическую линию поверхности как кривую имеющую нулевую геодезическую кривизну. Также получено условие, обеспечивающее геодезичность кривой на поверхности.

Теорема 2. *Если произведение угла h между кривыми $v = v(u)$ и $v = \text{const}$ на длине особого вектора $\vec{r}_v$ постоянно, то кривая $v = v(u)$ является геодезической.*

Поверхности в евклидовом пространстве классифицируются по характеру точек, то есть это поверхности, все точки которых являются эллиптическими, гиперболическими и параболическими и составляют, соответственно, класс выпуклых, седловых и цилиндрических или конических поверхностей. Естественно, представляют интерес поверхности, все точки которой являются циклическими в галилеевом пространстве.

Аналоги таких точек не существуют на поверхности евклидова пространства. Циклическая точка характерна только для поверхности галилеева пространства.

Для объяснения аналогичного характера гиперболической и циклической точек поверхности галилеева пространства приведем геометрическую картину вокруг циклической точки с помощью второй квадратичной формы поверхности. Вокруг циклической точки поверхность имеет форму такую, как вокруг гиперболической точки поверхности евклидова пространства. Хотя форма поверхности вокруг циклической точки аналогична форме поверхности гиперболической точки поверхности, но они не являются одинаковыми.

В окрестности гиперболической точки поверхности оба асимптотические направления пространственные, а в окрестности циклической точки одно из асимптотических направлений принадлежит особой плоскости, то есть совпадает с особым направлением.

Движением галилеева пространства невозможно перевести особое направление на пространственное и обратно. Этим объясняется различие между гиперболической и циклической точками поверхности в галилеевом пространстве.

Из условия, что точка на поверхности является циклической, получен общий вид уравнения поверхности. Имеем следующее уравнение

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = u\bar{i} + [f_1(u)F(v) + f_3(u)]\bar{j} + [f_2(u)F(v) + f_4(u)]\bar{k}$$

Это общий вид уравнения поверхности, все точки которой являются циклическими. Известно, что класс функций $f_i(u), F(v) \in C^2$ достаточно широк. Если выполнении условия $N = 0, M \neq 0$ во всех точках поверхности, то поверхность состоит только из циклических точек.

Определение. Поверхност, все точки которой являются циклическими, мы будем называть циклической поверхностью галилеева пространства.

Литература

1. Артыкбаев А., Соколов Д. Д. Геометрия в целом в плоском пространстве II времени. Учебное пособие. Ташкент. Издательство. ФАН. 1991.
2. Курбонов Э.К. О геометрии поверхности в R_3^1 . Труды международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимов.-Россия, 2004.

О сохранении плотности пространства при действии функтора $I_n(X)$

¹Мамадалиев Н.К., ²Манасыпова Р.З.

^{1,2} Национальный университет Узбекистана, Узбекистан, Ташкент

e-mail: ¹nodir 88@bk.ru, ²rezidabadrutdinova@gmail.com.

Пусть X - топологическое пространство. Покрытием множества X называется такое семейство $\{A_s\}_{s \in S}$ его подмножеств, что $\bigcup_{s \in S} A = X$. Покрытие $\{A'_s\}_{s \in S'}$ множества X является подпокрытием покрытия $\{A_s\}_{s \in S}$ множества X , если $S' \subset S$ и $A'_s = A_s$ для всех $s \in S'$. [1].

Топологическое пространство X называется компактным, если каждое его покрытие содержит конечное подпокрытие. Компактами именуются компактные хаусдорфовы пространства. [1]

Плотность пространства X определяется как наименьшее кардинальное число вида $|A|$, где $A \subset X$ всюду плотное подмножество пространства X , т.е. $\bar{A} = X$. Это кардинальное число обозначается $d(X)$. [1]

Носителем точки $x \in F(X)$ называется такое замкнутое подмножество $\text{supp}_F(x) \subseteq X$, что соотношения $A \supseteq \text{supp}_F(x)$ и $x \in F(A)$ эквивалентны для любого замкнутого множества $A \subseteq X$.

Пусть X II компакт. На $C(X)$ операции $\oplus$ и $\odot$ определим по правилам $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$ и $\varphi \odot \psi = \varphi + \psi$, где $\varphi, \psi \in C(X)$. Функционал $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называется [2] идемпотентной вероятностной мерой на X , если он обладает следующими свойствами:

- 1) $\mu(\lambda_X) = \lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ (нормированность);
- 2) $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in C(X)$ (однородность);
- 3) $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in C(X)$ (аддитивность).

Для компакта X обозначим через $I(X)$ множество всех идемпотентных вероятностных мер на X , а через $I_n(X)$ - множество всех идемпотентных вероятностных мер, мощность носителей которых не превышает n .

Множество $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ наделяется метрикой ρ , определенной формулой $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$ (соглашение $e^{-\infty} = 0$). Пусть также $\mathbb{R}_{\max}^n = (\mathbb{R}_{\max})^n$.

Приведём пример идемпотентной меры. Пусть $x_1, \dots, x_n \in X$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\max}$ удовлетворяют свойству $\max\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = 0$. Определим $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $\mu(\varphi) = \max\{\varphi(x_i) + \lambda_i | i = 1, \dots, n\}$.

Каждая идемпотентная вероятностная мера μ с конечным носителем представляется в виде

$$\mu = \lambda_1 \odot \delta_{x_1} \oplus \lambda_2 \odot \delta_{x_2} \oplus \dots \oplus \delta_{x_n}.$$

единственным способом (с точностью до перестановки местами), где $x_1, \dots, x_n \sqsubset$ носитель μ . Здесь коэффициенты λ_i удовлетворяют условиям

$$\lambda_i > \mathbf{0} \equiv -\infty, i = 1, 2, \dots, n \text{ и } \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n = \mathbf{1} = 0.$$

Теорема 1. Для любого бесконечного компакта X

$$d(X) = d(I_n(X)).$$

Литература

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология, Москва.: Мир, 1986 г., № 4. 576 с.
2. *М.М. Заричный* Пространства и отображения идемпотентных мер, Изв. РАН. Сер. матем. 2010, том 74, No. 3, с. 45-64.

Класс поверхностей рассматриваемых в Галилеевом пространстве

¹Султанов Б.М., ²Атабаев М.У.

^{1,2} Ургенский государственный университет, (Ургенч, Узбекистан),
e-mail: bek_4747@bk.ru

Пусть задано трехмерное аффинное пространство A_3 , $Oxyz$ – система аффинных координат с началом в точке $O(0, 0, 0)$ и $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – базисные векторы в этом пространстве.

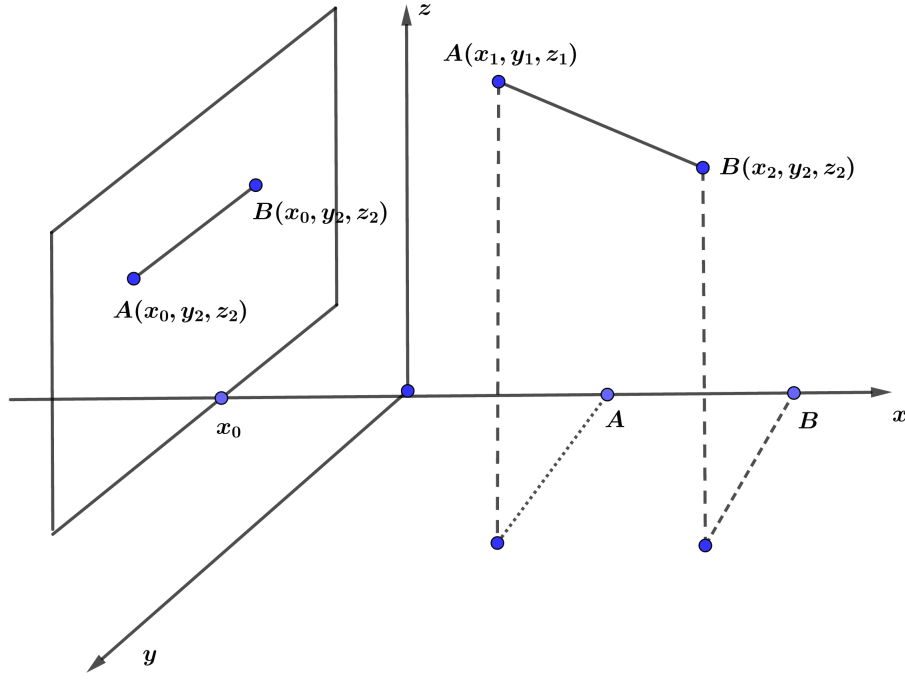
Скалярное произведение векторов $\vec{X}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{Y}\{x_2, y_2, z_2\}$ определяется по формуле

$$(\vec{X}\vec{Y}) = \begin{cases} x_1x_2, & \text{если } x_1x_2 \neq 0, \\ y_1y_2 + z_1z_2, & \text{если } x_1x_2 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Определение 1. Аффинное пространство, в котором скалярное произведение векторов $\vec{X}, \vec{Y}$ определено по формуле (1), называется Галилеевым пространством и обозначается через R_3^1 или Γ_3 [1].

Скалярное произведение (1) называется вырожденным скалярным произведением. Вырожденное скалярное произведение векторов появляется в псевдоевклидовых пространствах [1] как результат изотропности векторов.

Выясним геометрический смысл расстояния между двумя точками Галилеева пространства R_3^1 , определяемое как норма вектора, соединяющего точки, между которыми определяется расстояние.



Пусть точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ являются точками Галилеева пространства R_3^1 , причем $x_1 \neq x_2$. Тогда вектор $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

и

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB})} = |x_2 - x_1|.$$

Значение расстояния между точками A и B равно длине проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox (см. рис. 1).

Если $x_1 = x_2 = x_0$, то вектор $\overrightarrow{AB}$ параллелен плоскости Oyz , а расстояние между точками $A(x_0, y_1, z_1)$ и $B(x_0, y_2, z_2)$ определяется по формуле

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Очевидно, что точки A и B лежат на плоскости $x = x_0$, и расстояние будет Евклидовым расстоянием между соответствующими точками.

Поэтому геометрия на плоскости $x = x_0$ Галилеева пространства будет Евклидовой, такие плоскости называются особыми плоскостями Галилеева пространства [1].

Все плоскости пространства R_3^1 кроме особых называются плоскостями общего положения. Геометрия плоскостей общего положения является Галилеевой.

Пусть F – поверхность пространства R_3^1 , не имеющая особых касательных плоскостей. Введем специальную систему криволинейных координат. Для этого рассмотрим всевозможные пересечения F с особыми плоскостями $x = const$.

Выберем в качестве криволинейных координат $u = u_0$ семейство кривых, образованных пересечениями поверхности особыми плоскостями, а в качестве координатных линий $v = v_0$ – произвольные линии, образующие сеть на поверхности F . При таком выборе криволинейных координат уравнения поверхности имеют вид [2]

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = u \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k}.$$

При этом векторы $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ образуют базис в касательной плоскости поверхности, которая является Галилеевой. Направление вектора $\vec{r}_v$ соответствует выделенному направлению Галилеевой плоскости.

Вырожденность метрики Галилеева пространства не дает возможность изучения произвольной поверхности в Галилеевом пространстве. Поэтому мы рассматриваем только поверхности, не имеющие особых опорных плоскостей.

Заметим, что класс поверхностей Галилеева пространства, не имеющих особых опорных плоскостей, достаточно широк.

Пусть $Oxyz$ – система координат Галилеева пространства, и плоскости $x = const$ – особые плоскости.

Утверждение 1. Выпуклые поверхности, однозначно проектирующиеся на плоскость общего положения Oxy (проектирование параллельно оси Oz), не имеют особых опорных плоскостей.

Когда область проектирования ограничена, поверхность может иметь особую опорную плоскость на точках границы области. В этом случае в конкретных задачах уточняется условие о касании опорной плоскости.

Любой замкнутый выпуклый оваллоид имеет две точки, где особая плоскость будет опорной. Но, исключая некоторую область, содержащую эту точку, можно рассматривать поверхность с двумя компонентами края, не имеющую особую опорную плоскость.

Аналогичным методом, исключив точки поверхности, имеющие особые опорные плоскости и заменяя их краем, можно получить разнообразные поверхности с краями.

Наши исследования в частности связаны с линейчатыми поверхностями [1]. Но в Галилеевом пространстве различают прямые, лежащие на особой плоскости, и прямые, не принадлежащие особой плоскости. Первые из них называются особыми прямыми, а другие – прямыми общего положения.

Поэтому линейчатая поверхность изучается в зависимости от того, каковыми будут ее образующие.

Если образующая прямая линейчатой поверхности является прямой общего положения в R_3^1 , то поверхность назовем линейчатой поверхностью.

Когда образующая линейчатой поверхности является особой прямой, то есть образующая всегда лежит на особой плоскости, то этот случай рассматривается отдельно.

Пусть F – линейчатая поверхность. Образующая его прямая всегда принадлежит особой плоскости. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Поверхность F является циклической поверхностью.

Свойствам циклических поверхностей посвящены работы Э.К. Курбанова [3,4].

В Евклидовом пространстве изучена поверхность Каталана [5,6].

Определение 2 [6]. Линейчатая поверхность, прямолинейные образующие которой параллельны одной и той же плоскости, называется поверхностью Каталана.

Рассмотрим некоторую поверхность Каталана K Евклидова пространства.

Теорема 2. Поверхность Каталана K всегда можно рассмотреть как циклическую поверхность Галилеева пространства R_3^1 .

Литература

1. Артикбаев А., Соколов Д.Д. Геометрия в целом в плоском пространстве времени. Ташкент, 1991. - 180 стр.
2. Артикбаев А. Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в Галилеевом пространстве. Мат. сб. ДАН СССР, 1982, т. 119(161), 12 (10), стр. 204-224.
3. Курбанов Э.К. Циклические поверхности Галилеева пространства. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ташкент, 2006.

4. Курбанов Э.К. О поверхности Галилеева пространства. УЗМЖ, 2005, No. 1, стр. 51-56.
5. Блашке В. Введение в дифференциальную геометрию. - У.: Издательство Удмуртского университета, Регулярная и хаотическая динамика, 2005. - 232 стр.
6. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. -М: Едиториал УРСС, 2003. - 432 стр.

Основные геометрические характеристики многогранников Шамшиев А.

Джизакский государственный педагогический университет

Многогранники это один из видов простейших пространственных форм, используемых с древнейших времен и до наших дней при проектировании технически сложных конструкций. История правильных многогранников уходит в глубокую древность.

Начиная с 7 века до нашей эры, в древней Греции создаются философские школы. В настоящее время теория многогранников является современным разделом математики. Она тесно связана с топологией, теорией графов, имеет большое значение как для теоретических исследований по геометрии, так и для практических приложений в других разделах математики, например, в алгебре, теории чисел, прикладной математики – линейном программировании, теории оптимального управления. Многогранники имеют красивые формы, например, *правильные, полуправильные и звездчатые многогранники*.

Определение-1. Правильными считаются многогранники, у которых все грани правильные и конгруэнтные многоугольники, а многогранные углы при вершинах выпуклые и содержат одинаковое число граней. Существует пять правильных многогранников: *тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр*. *Тетраэдр* – это четырёхгранник, все грани которого являются равносторонними треугольниками. Основные геометрические характеристики.

- Каждая его вершина является вершиной трех треугольников.
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180 градусов.
- Тетраэдр имеет 4 грани, 4 вершины и 6 ребер.
- Тетраэдр не имеет центра симметрии, но имеет 3 оси симметрии и 6 плоскостей симметрии. *Гексаэдр* – это шестигранник, все грани которого являются квадратами. Основные геометрические характеристики.

- Каждая его вершина является вершиной трех квадратов.
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 270 градусов.
- Куб имеет 6 граней, 8 вершин и 12 ребер.
- Куб имеет центр симметрии - центр куба, 9 осей симметрии и 9 плоскостей симметрии.

Октаэдр – это восьмигранник, все грани которого являются равносторонними треугольниками. Основные геометрические характеристики.

- Каждая его вершина является вершиной четырех треугольников.
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 240 градусов.
- Октаэдр имеет 8 граней, 6 вершин и 12 ребер.
- Октаэдр имеет центр симметрии - центр октаэдра, 9 осей симметрии и 9 плоскостей.

Додекаэдр – это двенадцатигранник, все грани которого являются правильными пятиугольниками. Основные геометрические характеристики.

- Каждая его вершина является вершиной трех пятиугольников.
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 324 градусов.
- Додекаэдр имеет 12 граней, 20 вершин и 30 ребер.
- Додекаэдр имеет центр симметрии - центр додекаэдра, 15 осей симметрии и 15 плоскостей симметрии.

Икосаэдр – двадцатигранник, все грани которого являются правильными равносторонними треугольниками. Основные геометрические характеристики.

- Каждая его вершина является вершиной пяти треугольников.
- Сумма плоских углов при каждой вершине равна 300 градусов.
- Икосаэдр имеет 20 граней, 12 вершин и 30 ребер.
- Икосаэдр имеет центр симметрии - центр икосаэдра, 15 осей симметрии и 15 плоскостей симметрии.

Правильные звездчатые многогранники, называемые *телами Пуансо*. В этих *многогранниках* либо грани пересекают друг друга, либо сами грани самопересекающиеся многогранники.

Додекаэдр имеет 3 звёздчатые формы: *малый звёздчатый додекаэдр*, *большой додекаэдр*, *большой звёздчатый додекаэдр*. Малый звездчатый додекаэдр имеет двенадцать пирамид, надстроенных над каждой из граней исходного додекаэдра, создают пространственную звезду. . .

Грани большого звездчатого додекаэдра – пентаграммы, как и у малого звездчатого додекаэдра. У каждой вершины соединяются три грани. С одной стороны можно представлять себе этот многогранник икосаэдром, у которого грани выполнены в виде утопленных внутрь треугольных чаш. С другой стороны можно отчетливо разглядеть выступающие звезды на плоских пятиугольниках. Третья форма получается, если на грани икосаэдра поместить длинные углы треугольных пирамид.

Литературы

1. *Крайнева Л.Б.* Методика проведения спецкурса по геометрии для старшеклассников в условиях личностно-ориентированного обучения: М., 2007. – 260 с.
2. *Васильева В.Н.* Золотое сечения и золотые прямоугольники при построение икосаэдра и додекаэдра. Вестник-Южно-уральский университет. No. 4.2020.- ст.54.

SECTION VI. MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATION TECHNOLOGIES

Algorithm vs Data: who wins the Super Resolution Game?

Amirali B.

University of Victoria, Victoria BC, Canada,

e-mail: amiralib@uvic.ca

While conventional problem solving relied on finding the right algorithm, a new class of data driven solutions continue to push for new and more effective ways to deal with computational challenges. In this talk we discuss the importance of data and algorithms in modern computing. Our goal is to use the case of Super Resolution and investigate two ways to approach the challenge. Superresolution refers to building high quality images in the absence of “enough” information. First, we discuss mathematical interpolation solutions. Then we go over modern intelligent solutions which rely on machine learning. We review how each method approaches the problem. We use error measurements and quality metrics to evaluate the two classes of solutions. In our concluding remarks we provide insight into possible future directions and comment on the path ahead.

To the qualitative properties of self-similar solutions of parabolic system not in divergence form with in variable density

¹Aripov M., ²Matyakubov A.S., ³Khasanov J.O.

¹ *National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

e-mail: mirsaidaripov@mail.ru

² *National university of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

e-mail: almasa@list.ru

³ *Urgench state university, Urgench, Uzbekistan*

e-mail: jamshid_2425@mail.ru

In this work, we used method of nonlinear splitting. Using this method, we have shown that the weak solution is the global solution. Property of finite speed propagation of distributions and the asymptotic behavior of the weak solutions were studied for the slow diffusive case.

The development of science and technology requires the early prediction of processes in nature and their rational use. Many processes in nature are represented by equations and systems of equations of the parabolic type using the Cauchy problem. Many scientists have conducted their own research on this type of parabolic equations and systems of equations [1–2]. In particular, there is a growing demand for solving Cauchy problems and studying its properties in non-divergent parabolic type systems [3–9].

In this work, we consider in $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ parabolic system of nonlinear equations not in divergence form with variable density

$$|x|^n \frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i^{\alpha_i} \nabla \left(u_i^{m_i-1} |\nabla u_i^k|^{p-2} \nabla u_i \right) + |x|^n u_{3-i}^{\beta_i}, \quad (1)$$

$$u_i(0, x) = u_{0i}(x), \quad x \in R^N, \quad (2)$$

where $k, p, n, m_i, \alpha_i, \beta_i$ ($i = 1, 2$) the numerical parameters, $\nabla(\cdot) = \text{grad}_x(\cdot)$, t and $x \in R^N$

- respectively, the temporal and spatial coordinates, $u_i = u_i(x, t) \geq 0$, are the solutions. It is clear that the system (1) is degenerate. Therefore, it does not have classical solutions on the domain defined by equations $u_i(x, t) = 0, \nabla u_i = 0, (i = 1, 2)$ meaning system (1) may not have a classical solution. Therefore, in this case we consider a weak solution having

the property $u_i = u_i(x, t) \geq 0$, $u^{\alpha_1} \nabla \left(u^{m_1-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u \right)$ and obeying to the system (1) in sense of a distribution [1]. The numerical parameter n characterizes the variable density of the nonlinear medium. The system of equations (1) describes many physical phenomena [1–9]. Introduce the following notations

$$a > 0, A_i = \left(\frac{\gamma l_i + \gamma_i}{k^{p-2} l_i |l_i|^{p-2} (N + n + l_i (m_i + k(p-2)) - (p-1))} \right), l_i = \frac{p-1}{m_i + k(p-2) + \alpha_i - 1}, l = \frac{p+n}{p-1}, \gamma = \frac{1 + \gamma_i (2 - k(p-2) - m_i - \alpha_i)}{p+n}, \gamma_i = -\frac{1 + q_i}{1 - q_i q_{3-i}}, T > 0, i = 1, 2$$

The following theorem is proved.

Theorem 1. (A global solvability). Let

$$\gamma = A_i^{\alpha_i + k(p-2) + m_i - 1} k^{p-2} l |l_i|^{p-2}$$

$$A_i^{\alpha_i + k(p-2) + m_i} |l_i|^{p-2} k^{p-2} l l_i (n + N) + A_{3-i}^{\beta_i} a^{l_{3-i} \beta_i - l_i} + \gamma_i A_i \leq 0$$

$$u(t, 0) \leq u_i(t, 0)_+, x \in R^N, i = 1, 2$$

Then, for sufficiently small $u_{0i}(x)$ the followings holds:

$$u(t, x) \leq u_i(t, x)_+ = (T + t)^{\gamma_i} \cdot A_i \left(a - \left(\frac{|x|}{(T+t)^\gamma} \right)^l \right)_+^{l_i} \text{ in } Q.$$

The results obtained in the above theorem are a generalization of the results in [4]. If we take $k = 1$. and $m_1 = m_2 = 1$, in our given theorem, then the results in [4] are obtained.

References

1. *Aripov M., Sadullaeva Sh. A.* Computer modeling of nonlinear diffusion processes, Tashkent University, 2020.
2. *Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P.* Blow-up in Quasilinear Parabolic Equations., Walter de Grueter, Berlin, 1995.
3. *Aripov M., Matyakubov A.S., Khasanov J.O., Bobokandov M.M.* Mathematical modeling of double nonlinear problem of reaction diffusion in not divergent form with a source and variable density, Journal of Physics Conference Series, 2021, 2131(3):032043
4. *Aripov M., Matyakubov A.S.* To the Qualitative Properties of Solution of System Equations not in Divergence Form., International Journal of Innovative Science, Engineering and Technology 2016, Vol. 3, Issue 8, 533–537.
5. *Aripov M., Matyakubov A.S.* On the asymptotic behavior of solutions of nonlinear parabolic systems of non-divergent equations, Computational Technologies, Mathematics, Mechanics and Informatics Issue No. 3(86). The BULLETIN of KAZNU. 2015. pp. 275–282
6. *Aripov M., Matyakubov A. S.* To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form of polytrophic filtration in variable density, Nanosystems: Physics, Chemistry, Math., 2017, Vol. 8, Issue 3, 317–322.
7. *Matyakubov A. S., Raupov D.* On Some Properties of the Blow-Up Solutions of a Nonlinear Parabolic System Non-divergent Form with Cross-Diffusion, Technological Advancements in Construction, 2022. 289–301.
8. *Aripov M., Matyakubov A.* To the Properties of the Solutions of a Cross-diffusion Parabolic System not in Divergence Form, Universal Journal of Computational Mathematics, 2017. Vol. 5, No. 1, pp. 1–7,
9. *Aripov, M., Matyakubov, A.* To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form of polytrophic filtration in variable density. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 2017, 317–322.

Student's digital trajectory: E-learning analysis with LMS¹Bakoyev M., ²Umarova Sh.¹ *University of World Economy and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: mbakoyev@uwed.uz² *University of World Economy and Diplomacy, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: shumarova@uwed.uz

Currently, a high percentage of teaching, whether classroom-based or online, is done in blended learning mode using Learning Management Systems (LMSs). LMSs are modular and collaborative digital environments such as Moodle (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment). Learning Management Systems are widespread around the world, among which Moodle is a leading example. Found not only in academia [1], it is also a commercial product in many businesses and companies. Live Moodle usage statistics are reported in [2]. Moodle is currently consolidated in 245 countries, with over 172, 000 registered sites. Its expansion is partly because it is an open-source product, which greatly facilitates new developments of the package and research; as a result, more than 1600 plugins have been developed to date. As with other LMS tools, Moodle collects a large amount of data including all the interactions of registered participants (students, teachers, and editors, among others). All these data can offer insight into the online behavior of students, improving both learning and teaching [3].

The large volumes of data now available highlight the relevance of e-Learning Analytics in the educational environment. The definition of e-Learning Analytics in [4] is: "the measurement, collection, analysis and reporting of data about learners and their contexts, for purposes of understanding and optimizing learning and the environments in which it occurs". With this definition in mind, it is impossible to bypass these activities which are fundamental innovations integrated in the teaching-learning process and in higher education.

By type, learning analytics can be divided into three big questions to which it provides answers:

1. What is happening in the educational process now?
2. What might happen next and why?
3. What should be done to change the educational process for the better?

The answer to each of these questions, in turn, consists of different parameters. Educational analytics is not about numbers, but about students, their behavior and their learning patterns. Analytics allows us to make adaptive courses that will take into account the capabilities and progress of students.

Moodle LMS has a number of standard and optional learning analytics plugins like GISMO, Heatmap, Learning Analytics, Confirable Reports and others. They collect various data: the time to pass the test, the number of tasks completed, feedback from students, etc. And then it gives us in the form of tables and graphs. The default installation of a Moodle instance has no suitable display blocks or plugins that can facilitate analytic visualization [5].

We have developed a web-application for visual analysis of Moodle e-learning. The main features of the application are described from three key perspectives: logs, grades, and activity completion. The figure below shows the architecture of the student learning analytics with Moodle.

With this application, can analyze:

- 1) the activity of students by viewing course elements;
- 2) activity of students by day, by week;
- 3) intermediate learning outcomes;
- 4) visual presentation of data on various types of charts.

Log data are a fundamental point in learnig analytics tasks. Moodle can display user activity logs in text mode, can filter them, and can download them (although this is not

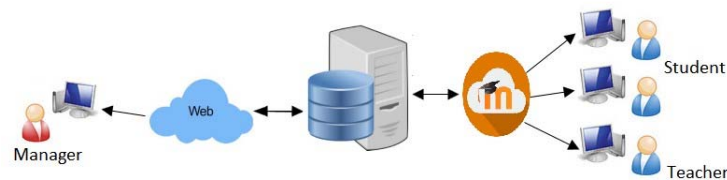


Figure 1. Learning analytics architecture with Moodle.

an intuitive option and not always well known by regular Moodle users). This application hides the complexity of the following processes: downloading and structuring the data. Log data are loaded and the data appear grouped in two different facets: component type and course module. Depending on the selection, the resulting charts group and display the data, focusing on different aspects of the activity in the course.

One of the Moodle core modules is the gradebook. This application loads the complete gradebook (if grades were previously inserted in Moodle). Once the course data have been loaded, the gradebook is displayed in its corresponding Grades tab along with its filters. It can filter the categories and items by name or Moodle activity type. It means they can apply different views, for example, to see only grades on quizzes or assignments.

By monitoring the activity in the modules or sections of the course it is possible to gather and to collect high volumes of student information. This information makes it possible to apply specific measures to certain students, to identify at-risk students aiming to personalize education.

The visualization of the monitoring through easy-to-use tools for the teacher reveal very valuable information on which resources are the most effective in relation to each learning pattern. LMSs tools can be used to analyse the records of student and teacher interactions on the Moodle platform throughout the teaching/learning process; this facilitates the follow-up of students and the detection of students at risk of failure.

The effectiveness of the use of LMS and blended learning techniques is directly related to the effective use and management of technological resources among teachers. The research in this field is therefore important, as is the design of tools and their implementation for data analysis and visualization that provide complete, simple, and clear information to teachers and managements of university. Using our student learning analytics tool can be of great value to faculty and university leaders as it can help in the early identification of students at academic risk.

References

1. *Pena-Ayala, A.* Educational data mining: A survey and a data mining-based analysis of recent works. *Expert Syst. Appl.* 2014, 41, 1432–1462.
2. *Moodle.* Moodle Statistics. 2022. Available online: <https://stats.moodle.org/> (accessed on 15 August 2022).
3. *Conijn R., Snijders C., Kleingeld A., Matzat U.* Predicting Student Performance from LMS Data: A Comparison of 17 Blended Courses Using Moodle LMS. *IEEE Trans. Learn. Technol.* 2017, 10, 17–29.
4. *Long P., Siemens G., Conole G., Gasevic D.* Message from the LAK 2011 General Program Chairs. In *Proceedings of the LAK 2011: 1st International Conference on Learning Analytics and Knowledge*, Banff, AB, Canada, 27 February–1 March 2011.
5. *E.A. Terbusheva, X.R. Piotrowska.* Analytical potential of the LMS Moodle for monitoring the quality of personification. *Society. Communication. Education.* 2021, Vol. 12, No. 4. pp. 19–34.
6. *Moodle.* Moodle Plugins Directory. Available online: <https://moodle.org/plugins>

Models Of Forming Surface Water Resources In The Republic Of Uzbekistan

¹Chupanov A., ²Seytov A., ¹Ruzmetov Q., ²Esonturdiyev M., ³Haydarova R.,
²Xonimqulov B.

¹Tashkent State Agrarian University, Tashkent, Uzbekistan,

e-mail: abdurahmon19@mail.ru, seytov.aybek@mail.ru

²Chirchik State Pedagogical University, Chirchik, Uzbekistan,

e-mail: seytov.aybek@mail.ru, esonturdiyev80@mail.ru, Xanimqulov@inbox.ru

³Termez State University, Termez, Uzbekistan,

e-mail: roziyadavronovna0412@gmail.com

Given the values of the solar radiation power behind the ionosphere (W/m^2) for several years, water consumption, for example, of the country's agriculture in these years given in (m^3). If we know these data at the beginning and end of a certain period, then the values of the solar radiation power and water consumption in the intermediate years can be determined using interpolation. Using spline – interpolation of functions, which are given in the developed model of water consumption of agriculture of the republic. Water consumption of the country's economy depending on the solar radiation power behind the ionosphere is shown in the table 1.

Table 1.

Solar radiation power behind the ionosphere [W/m^2] and water consumption, consumption by sectors of the economy of the Republic of Uzbekistan

Years	Radiation Power of the Sun, W/m^2	Water consumption, million. m^3
1991	1365,2	61681
1992	1367,2	61510
1993	1366,2	62131
1994	1364,4	58445
1995	1363,0	52960
1996	1361,8	53525
1997	1363,4	56158
1998	1366,7	56697
1999	1367,2	60705
2000	1366,4	48070
2001	1367,0	44012
2002	1367,0	50259
2003	1367,0	56501
2004	1365,0	58457
2005	1363,3	59476
2006	1362,8	58617
2007	1361,8	52690
2008	1361,3	43870
2009	1364,1	50591
2010	1367,1	56760
2011	1365,6	48413
2012	1365,3	55482
2013	1365,6	53977
2014	1367,1	51849
2015	1365,4	55138
2016	1366,2	52514
2017	1361,7	54546
2018	1365,6	51003

The developed models are based on spline functions, in which ten points and ten function values are taken, and a spline function is constructed in the form of a three-dimensional polynomial.

Agricultural Water Consumption Model of the Republic of Uzbekistan

$$Q = \begin{cases} -1.32145370 \cdot 10^7 + 9740.06614 \cdot P - 3208.91828 \\ 503439 \cdot (P - 1361.8)^3 \quad P < 1363.3 \\ 1.63039813 \cdot 10^7 - 11920.1322 \cdot P - 14440.1322 \cdot (P - 1363.3)^2 + \\ + 1.62414551 \cdot 10^5 \cdot (P - 1363.3)^3 \quad P < 1363.4 \\ 1.3584546 \cdot 10^7 - 9935.72220 \cdot P + 34284.2330 \cdot (P - 1363.4)^2 - \\ - 17515.2541 \cdot (P - 1363.4)^3 \quad P < 1365 \\ 4.74768623 \cdot 10^7 - 34743.3284 \cdot P - 49788.9869 \cdot (P - 1365)^2 + \\ + 50442.4468 \cdot (P - 1365)^3 \quad P < 1366.4 \\ -1.67270038 \cdot 10^8 + 1.22449095 \cdot 10^5 \cdot P + 1.62069289 \cdot 991484 \cdot 10^5 \\ \cdot (P - 1366.4)^2 - \\ -1.58725795 \cdot 10^6 \cdot (P + 1366.4)^3 \quad P < 1366.7 \\ 2.85514104 \cdot 10^8 + 0.35473 \cdot 10^5 \cdot P - 1.26646287 \cdot 126634 \cdot 10^6 \cdot (P - 1366.7)^2 + \\ + 6.33796101 \cdot (P - 1366.7)^3 \quad P < 1369.99 \\ -8.96226792 \cdot 10^8 + 6.55650120 \cdot 10^5 \cdot P + 4.24756321 \cdot 424594 \cdot 10^6 \\ \cdot (P - 1366.99)^2 - 4.31966677 \cdot 974730 \cdot 10^8 \cdot (P - 1366.99)^3 \quad P < 1366.999 \\ -8.57251209 \cdot 10^8 + 6.27138355 \cdot 10^5 \cdot P - 7.41553709 \cdot 107178 \cdot 10^6 \\ \cdot (P - 1366.999)^2 + 1.09510196 \cdot 981615 \cdot 10^8 \cdot (P - 1366.999)^3 \quad P < 1367.01 \\ -6.88577124 \cdot 10^8 + 5.03748741 \cdot 10^5 \cdot P - 3.80170059 \cdot 067850 \cdot 10^6 \\ \cdot (P - 1367.01)^2 + 6.66965015 \cdot 908508 \cdot 10^6 \cdot (P - 1367.01)^3 \end{cases}$$

Water consumption of agriculture of the Republic of Uzbekistan is shown in table 2.

Table 2.

Water Consumption of Agriculture of the Republic of Uzbekistan

Agricultural water consumption, million m^3	Radiation Power of the Sun, W/m^2	Calculation of water consumption by model, million. m^3	Error
49485	1361,8	49485,0	0,0
52091	1363,4	52091,0	0,0
52871	1366,7	52871,0	0,0
56661	1367,2	56661,000000048,0	0,00000004845
44406	1366,4	44406,0	0,0
40366	1367,0	40366,0	0,0
46296	1367,0	46296,0	0,0
52443	1367,0	52443,0	0,0
52219	1365,0	52219,0	0,0
53265	1363,3	53265,0	0,0

References

1. Arakelyan E.K., Pikina G.A. Optimization and optimal control. – M.: Publishing House MEI, 2008. – 408 c.
2. Rakhimov Sh.X., Begimov I., Gaffarov X.Sh., Seytov A.J. Theory of Optimal Control of Water Distribution in Canals of Irrigation Systems under the Conditions of Discrete Water Supply to Consumers. Monograph. – Tashkent: OOO “Belgim”. 2017, – C.169.

Numerical solution of the problem of integral geometry on a family of hyperbolic curves

¹Djaykov G., ²Pirimbetov A.

¹Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: gafur.djaykov@mail.ru

²National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

e-mail: azik.8422@mail.ru

Obtaining images of the internal anatomical structure of human organs and tissues, the study of their functions in norm and in pathology are of great interest for medical science. Diagnosis of diseases and their treatment, analysis of treatment outcomes should be based on data obtained by medical visualization. In this regard, the development of methods for the restoration of internal structures of objects to their integral characteristics arise.

In the work [1] new formulations of weak ill – posed problems of integral geometry on parabolic curves with special weight functions were investigated. In [2] there was obtained the analytical representation for the Fourier transform on the first variable from the required function, which implies a statement about the strong incorrectness of the problem solution. The stability estimates and inversion formulas for certain classes of linear problems were obtained in [3, 4].

In the present paper, we consider the problem of integral geometry in a strip on a family of curves of hyperbolic type. An explicit formula for the Fourier image of the solution of the considered problems of integral geometry in the class of smooth finite functions is obtained. Based on the Tikhonov method, a sequence of approximate solutions is constructed.

Denote by $L_H = \{(x, y) : x \in R^1, \eta < y \leq H\}$.

Statement of the problem. In the strip L_H reconstruct the function of two variables $u(x, y)$, if its integrals over the curves of the family are known $\{\Upsilon(x, y)\}$

$$\int_{\Upsilon(x,y)} u(\xi, \eta) d\xi = f(x, y), \quad (1)$$

where an arbitrary family curve is represented by the expression

$$\Upsilon(x, y) = \{(\xi, \eta) : (x - \xi)^2 = \eta^2 - y^2, 0 < y \leq \eta \leq H\}$$

Theorem. Let the function $f(x, y)$ be known in the band $L_H = \{(x, y) : x \in R^1, y \leq H < \infty\}$. Then the solution of equation (1) in the class $f \in \infty(L_H)$ has the representation

$$\hat{u}(\lambda, y) = -\frac{1}{\pi y} \frac{\partial}{\partial y} \int_y^H \frac{\eta ch\left(\lambda \sqrt{\eta^2 - y^2}\right)}{\sqrt{\eta^2 - y^2}} \cdot \hat{f}(\lambda, \eta) d\eta.$$

References

1. A.H. Begmatov, A.O. Pirimbetov, A.K. Seidullaev. Problems of integral geometry in the strip on families of parabolic curves, Reports of the Russian Federation Higher Education Academy of Sciences 19 (2012), no. 2, 6-15.
2. A.H. Begmatov, G.M. Djaykov. Reconstruction of the function by its spherical means, Reports of the Russian Federation Higher Education Academy of Sciences 20 (2013), no. 1, 6-16.
3. A.H. Begmatov, G.M. Djaykov. Linear problem of integral geometry in the strip with smooth weight functions and perturbation, Vladikavkaz. Mat. J. 17 (2015), no. 3, 14-22.
4. A.H. Begmatov, G.M. Djaykov. Numerical recovery of function in a strip from given integral data on linear manifolds, in Proceedings of the International forum on strategic technology, Part 1, Novosibirsk, pp. 478-483, June 2016.

Reconstruction of a function from their integral data on a family of parabolas

¹Djaykov G., ²Uteuliev N., ³Seidullaev A.

¹ Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail: gafur_djaykov@mail.ru

² Nukus branch of Tashkent University of Information Technologies, Nukus, Uzbekistan,
e-mail: utewlievn@mail.ru

³ Karakalpak state university, Nukus, Uzbekistan,
e-mail: abat_1984@inbox.ru

Consider the problem of finding a function $u(x, y)$ from the operator equation

$$\int_{\Gamma(x,y)} g(x, y, \xi, \eta) u(\xi, \eta) d\xi = f(x, y)$$

where $\Gamma(x, y) = \{(\xi, \eta) : y - \eta = (x - \xi)^2, -\infty < \xi < x, 0 \leq \eta \leq y \leq H\}$.

We denote:

$$L_H = \{(x, y) : x \in (-\infty; \infty), 0 \leq \eta \leq y \leq H, H < \infty\}.$$

In [1], problems of integral geometry on families of parabolas with a weight function $g(x, y, \xi, \eta) = 1$ are considered. An inversion formula for the problem of integral geometry on families of parabolas is obtained.

In this paper, we consider problems of integral geometry on families of parabolas with a weight function $g(x, y, \xi, \eta) = \sqrt{y - \eta}$. An inversion formula for the problem of integral geometry on families of parabolas is obtained. Based on the idea of A.N. Tikhonov on the regularization of ill-posed problems, a sequence of approximate solutions is constructed.

Theorem. *Let the function be $f(x, y)$ known in the strip $L_H = \{(x, y) : x \in R^1, 0 \leq y \leq H < \infty\}$, the weight function $g(x, y, \xi, \eta) = \sqrt{y - \eta}$. Then the solution of equation (1) in the class of twice continuously differentiable finite functions supported in the strip is L_H unique and the representation takes place*

$$\hat{u}(\lambda, y) = \frac{1}{i\lambda\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{ch(\lambda\sqrt{y-\eta})}{\sqrt{y-\eta}} \cdot \frac{\partial \hat{f}(\lambda, \eta)}{\partial \eta} d\eta$$

References

1. Uteuliev N. U, Djaykov G. M., Seidullev A. K. Inversion formula for the problem of integral geometry on families of parabolas, AIP Conference Proceedings, 2365(1):070004, 2021.

Note on a two-species predator-prey model with two free boundaries

Elmurodov A.

Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan
e-mail: elmurodov@mathinst.uz

In [1, 2], the authors studied a two-species competition-diffusion model with two free boundaries. The existence, uniqueness and long time behavior of global solution were established. In this note we still discuss the long time behavior of global solution and provide some new results and simpler proofs.

Recently, Guo Wu [1] studied the existence and uniqueness of global solution (u, v, s_1, s_2) to the following free boundary problem

$$\begin{cases} u_t - d_1 u_{xx} - k_1 u u_x = u(1 - u) - v \left(\frac{u}{u+m} \right), & t > 0, \quad 0 < x < s_1(t), \\ v_t - d_2 v_{xx} - k_2 v v_x = k v \left(1 - \frac{bv}{u+a} \right), & t > 0, \quad 0 < x < s_2(t), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq s_{01} = s_1(0) > 0, \\ v(0, x) = v_0(x), \quad 0 \leq x \leq s_{02} = s_2(0) > 0, \\ u_x(t, 0) = v_x(t, 0) = u(t, s(t)) = v(t, s(t)) = 0, \quad t \geq 0, \\ \dot{s}_1(t) = -\mu_1 u_x(t, s_1(t)), \quad \dot{s}_2(t) = -\mu_2 v_x(t, s_2(t)), t > 0, \end{cases} \quad (1)$$

where the parameters are positive constants.

The coefficients of biocapacity $a(u)$, $b(v)$ and functions $u_0(x)$, $v_0(x)$ satisfy:

$$\begin{cases} u_0(x) \in C^2([0, s_{01}]), u'_0(0) = u_0(s_{01}) = 0 \text{ and } u_0(x) \text{ in } [0, s_{01}]; \\ v_0(x) \in C^2[0, s_{02}], v_0(s_{02}) = 0, v'_0(0) = 0, v_0(x) \geq 0 \text{ in } [0, s_{02}]. \end{cases}$$

This model describes how a new species with population density u invades into the habitat of a native competitor v .

Since the natural biological process is associated with the invasion, we consider it necessary to add terms reflecting the transfer and change in concentration to the equations using the transfer term and the new “biocapacity” coefficient.

First we establish some a priori estimates for the problem (1).

Theorem 1. *Let $(u(t, x), v(t, x), s_1(t), s_2(t))$ be a solution of problem (1) for $t \in [0, T]$. Then we have the following estimates*

$$\begin{aligned} 0 < u(t, x) &\leq M_1, \quad t > 0, \quad 0 < x < s_1(t), \\ 0 < v(t, x) &\leq M_2, \quad t > 0, \quad 0 < x < s_2(t), \\ 0 < \dot{s}_1(t) &\leq \mu_1 N_1 = M_3, \quad 0 < t \leq T, \\ 0 < \dot{s}_2(t) &\leq \mu_2 N_2 = M_4, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

$$\text{where } N_1 = \max_{x \in [0, s_{01}]} \left\{ \frac{k}{k_1}, \frac{u_0(x)}{s_{01}-x} \right\}, \quad N_2 = \max_{x \in [0, s_{02}]} \left\{ \frac{k}{k_2}, \frac{v_0(x)}{s_{02}-x} \right\}.$$

The main contribution of this article is the establishment of the global existence of the classical solution to problem (1) and the study of the behavior of the solution. A method is proposed for establishing a priori Schauder-type estimates for a new class of free boundary problems for mixed-two-phase equations. The principle of comparison is proved.

References

1. J.S. Guo and C.H. Wu, Dynamics for a two-species competition-diffusion model with two free boundaries, *Nonlinearity*, 28(2015), P.1–27.
2. C.H. Wu, The minimal habitat size for spreading in a weak competition system with two free boundaries, *J. Differential Equations*, 259(3)(2015), P.873–897.

Dynamics of trajectories of compositions of some Lotka-Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex

¹ Eshmamatova D.B., Yusupov F.A.

¹ Eshmamatova D.B. (Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan),
e-mail: 24dil@mail.ru

² Yusupov F.A. (Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan),
e-mail: farrukhyusupovchambil@mail.ru

The task of the qualitative theory of dynamical systems is to develop methods that allow us to study the behavior of the trajectories of the system in the entire domain of its task (for discrete dynamical systems without system integration). The main step of these studies is to study the behavior of the trajectories of the system in the vicinity of each of its singular points. It is known that the founders of the qualitative theory of differential equations, i.e. continuous dynamical systems, are the famous French mathematician Jules Henri Poincare (1854-1912) and the famous Russian mathematician Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918). To date, despite numerous works in the theory of dynamical systems, quite a lot of questions remain open in this area. In this paper, we consider the dynamics of the trajectories of compositions of some quadratic stochastic Lotka-Volterra maps acting in a two-dimensional simplex corresponding to transitive tournaments with one mutually inversely directed edge.

In [1], the Lotka-Volterra mapping was introduced, acting in the simplex S^{m-1} , represented as

$$x'_k = x_k(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki}x_i), k = \overline{1, m}, \quad (1)$$

where $a_{ki} = -a_{ik}$, $|a_{ki}| \leq 1$. The theorem is also known from the work [2]:

Theorem 1. *The mapping $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$, defined by formula (1), is a homeomorphism, and for $|a_{ki}| < 1$ for all $k, i = \overline{1, m}$ – by a diffeomorphism of the simplex S^{m-1} .*

For an arbitrary starting point $x^0 \in S^{m-1}$ the sequence $\{x^{(n)}\} \subset S^{m-1}$, defined by the recurrent formula

$$x^{(n+1)} = Vx^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

it is called a trajectory starting from a point x^0 .

Consider two Lotka-Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex S^2 :

$$V_1 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3), \\ x'_2 = x_2(1 - a_{12}x_1 + a_{23}x_3), \\ x'_3 = x_3(1 - a_{13}x_1 - a_{23}x_2), \end{cases} \quad V_2 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3), \\ x'_2 = x_2(1 - b_{21}x_1 - b_{23}x_3), \\ x'_3 = x_3(1 - b_{31}x_1 + b_{32}x_2), \end{cases} \quad (2)$$

here $|a_{ki}| \leq 1$, $a_{ki} = -a_{ik}$, $|b_{ki}| \leq 1$, $b_{ki} = -b_{ik}$, $\sum_{i=1}^3 x_i = 1$.

Consider the composition $V_1 \circ V_2$ of these mappings. Each of these maps is an automorphism of the simplex, and it is also obvious from this that the composition $V_1 \circ V_2$ is an automorphism of the simplex S^2 , and it is representable as:

$$V_1 \circ V_2 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + f_1(x_2, x_3)), \\ x'_2 = x_2(1 + f_2(x_1, x_3)), \\ x'_3 = x_3(1 + f_3(x_1, x_2)), \end{cases} \quad (3)$$

where the functions f_1, f_2, f_3 are polynomials of the third degree from x_1, x_2, x_3 , satisfying the condition

$$x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 \equiv 0.$$

If we describe the system (3) in detail, we will get the following picture:

$$V_1 \circ V_2 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)(1 + a_{12}x_2(1 - b_{12}x_1 - b_{23}x_3) + a_{13}x_3(1 - b_{13}x_1 + b_{23}x_2)), \\ x'_2 = x_2(1 - b_{12}x_1 - b_{23}x_3)(1 - a_{12}x_1(1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) + a_{23}x_3(1 - b_{13}x_1 + b_{23}x_2)), \\ x'_3 = x_3(1 - b_{13}x_1 + b_{23}x_2)(1 - a_{13}x_1(1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3) - a_{23}x_2(1 - b_{12}x_1 - b_{23}x_3)). \end{cases} \quad (4)$$

As we can see from expression (4), with arbitrary coefficients, six parameters are obtained in the system. Let's consider the dynamics of the composition first with the introduction of one coefficient, since the picture of the phase portrait turns out to be interesting. In other words, let's consider the composition of the Lotka–Volterra mappings having the form:

$$V_3 : \begin{cases} x' = x(1 + ay + z), \\ y' = y(1 - ax - z), \\ z' = z(1 - x + y), \end{cases} \quad V_4 : \begin{cases} x' = x(1 + y + z), \\ y' = y(1 - x + z), \\ z' = z(1 - x - y), \end{cases} \quad (5)$$

The compositions of these mappings look like this:

$$V_3 \circ V_4 : \begin{cases} x' = x(1 + y + z)(1 + ay(1 - x + z) + z(1 - x - y)) \\ y' = y(1 - x + z)(1 - ax(1 + y + z) - z(1 - x - y)) \\ z' = z(1 - x - y)(1 - x(1 + y + z) + y(1 - x + z)) \end{cases} \quad (6)$$

$$V_4 \circ V_3 : \begin{cases} x' = x(1 + ay + z)(1 + y(1 - ax - z) + z(1 - x + y)) \\ y' = y(1 - ax - z)(1 - x(1 + ay + z) + z(1 - x + y)) \\ z' = z(1 - x + y)(1 - x(1 + ay + z) - y(1 - ax - z)) \end{cases} \quad (7)$$

where is the coefficient $0 \leq a \leq 1$.

For a qualitative study of the dynamics of the trajectory of the internal points of the composition $V_3 \circ V_4$ and $V_4 \circ V_3$, we find the fixed points of these compositions. For composition (6) we get a fixed point $O_0 \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, and for composition (7) the fixed point has the form $O_1 \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

In addition to these fixed points, all vertices of the simplex are stored as fixed points for compositions, i.e. $e_1(1; 0; 0)$, $e_2(0; 1; 0)$, $e_3(0; 0; 1)$.

To determine the characters of fixed points, we will be based on the literature ([1], [2]).

Theorem 2. The fixed point O_0 of the operator (6), as well as the fixed point O_1 of the operator (7) are repeller fixed points, with an arbitrary parameter value $0 < a < 1$.

Now let's move on to the following operators Lotka–Volterra:

$$V_5 : \begin{cases} x' = x(1 + y + az) \\ y' = y(1 - x - z) \\ z' = z(1 - ax + y) \end{cases} \quad V_4 : \begin{cases} x' = x(1 + y + z) \\ y' = y(1 - x + z) \\ z' = z(1 - x - y) \end{cases} \quad (8)$$

The compositions of these operators have the form:

$$V_5 \circ V_4 : \begin{cases} x' = x(1 + y + z)(1 + y(1 - x + z) + az(1 - x - y)) \\ y' = y(1 - x + z)(1 - x(1 + y + z) - z(1 - x - y)) \\ z' = z(1 - x - y)(1 - ax(1 + y + z) + y(1 - x + z)) \end{cases} \quad (9)$$

$$V_4 \circ V_5 : \begin{cases} x' = x(1 + y + az)(1 + y(1 - x - z) + z(1 - ax + y)) \\ y' = y(1 - x - z)(1 - x(1 + y + az) + z(1 - ax + y)) \\ z' = z(1 - ax + y)(1 - x(1 + y + az) - y(1 - x - z)) \end{cases} \quad (10)$$

Here $0 \leq a \leq 1$. For both compositions, there is a fixed point on the edge of Γ_{23} : for operator (9), a fixed point is a point $O_2 \left(0, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, for operator (10), a fixed point is a point

$O_3 \left(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$. In addition to these fixed points, here also all vertices of the simplex are stored as fixed points.

Theorem 3. The fixed point O_2 of the operator (9), respectively, the fixed point O_3 of the operator (10) at an arbitrary value of the parameter $0 < a < 1$ are repeller fixed points.

As you can see, the picture is similar for both cases, but a completely different picture is obtained if we introduce the coefficient $a_{23} = a \neq 1$. We will visually show a detailed picture of all cases and the dynamics of the trajectories of internal points, i.e. the phase portrait, in an expanded article.

References

1. GMEsh *Ganikhodzhayev R.N., Tadziewa M.A., Eshmamatova D.B.* Dynamical Properties of Quadratic Homeomorphisms of a Finite-Dimensional Simplex. Journal of Mathematical Sciences 2020 –245 – (3). – P. – 398–402.
2. *Eshmamatova D.B., Ganikhodzhayev R.N.* Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex S^{m-1} . AIP Conference Proceedings 2365, 060009 (2021).

Discrete models of viral diseases transmitted by airborne capillaries Eshmamatova D.B.

*Eshmamatova D.B. (Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan),
e-mail: 24dil@mail.ru*

We know [1] quite a lot of works related to the modeling of infectious diseases. Basically, the models considered in these papers are continuous, but we believe that discrete models more adequately describe the real situation. Based on the foregoing, we consider a discrete SEIR model for the study of diseases transmitted by airborne capillaries.

It is known [2] that the Lotka-Volterra mappings acting in a simplex S^{m-1} have the form:

$$V : x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i\right), \quad k = \overline{1, m}$$

where $a_{ki} = -a_{ik}$, $|a_{ki}| \leq 1$.

The following important proposition was proved in [3].

Theorem 1. [3] *Let $A = (a_{ki})$ be a skew-symmetric matrix, in this case*

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\} \neq \emptyset, \quad Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\} \neq \emptyset$$

consist of from fixed points.

Consider the Lotka–Volterra mapping acting in a three-dimensional simplex S^3 , which has the form:

$$V : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3), \\ x'_2 = x_2(1 + a_{12}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4), \\ x'_3 = x_3(1 + a_{13}x_1 + a_{23}x_2 - a_{34}x_4), \\ x'_4 = x_4(1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3). \end{cases} \quad (1)$$

The corresponding skew-symmetric matrix is degenerate, since some coefficients of the matrix are equal to zero [4], i.e., $a_{ki} = 0$.

In cases where skew-symmetric matrices are transversal, we could introduce the notion of a tournament ([2], [3]). In the case under consideration, the skew-symmetric matrix is degenerate, so we introduce the notion of a mixed graph.

Definition 1. [5] *An oriented graph or digraph is a finite nonempty set containing vertices and a given set of ordered pairs of different vertices.*

The definition implies that every orientation of a graph generates a directed graph.

From the definition, one can understand that the mixed graph is a graph that contains both directed and undirected edges.

Definition 2. [5] *An undirected graph is a graph that has no oriented edges and, generally speaking, it can be included in the set of mixed graphs.*

A digraph can be considered as a mixed graph, in which each symmetric pair of directed edges is replaced by an undirected edge.

Now we give all unknowns $x_i (i = \overline{1, 4})$ the corresponding epidemiological meaning:

x_1 are healthy, but susceptible to infection individuals, i.e., the group S ;

x_2 are infected individuals that are in the stage of incubation (latent) period, i.e., the group E ;

x_3 are infected and prone to infecting other individuals, i.e., the group I ;

x_4 are recovered and individuals with immunity, i.e., the group R .

Then our mapping has the following form in epidemiological terminology:

$$V : \begin{cases} S' = S(1 - aE - bI), \\ E' = E(1 + aS - dI - eR), \\ I' = I(1 + bI + dE - fR), \\ R' = R(1 + eE + fI). \end{cases}$$

Infection can result from contact between infectious and susceptible individuals. The main question is how the proportion of infected and the proportion of susceptible in the population change. The corresponding degenerate matrix and the corresponding mixed graph are shown in Figure 1.

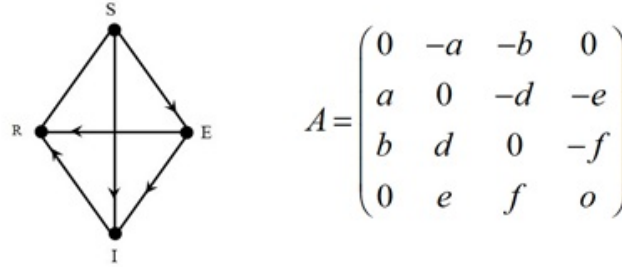


Figure 1.

In the model, there are three transitions from a state to a state of individuals in the population:

- 1) $S \rightarrow E \rightarrow R$; 2) $S \rightarrow I \rightarrow R$; 3) $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$.

Theorem 3. *If there are three transitions in the epidemiological situation*

$$1) S \rightarrow E \rightarrow R, 2) S \rightarrow I \rightarrow R, 3) S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R,$$

then the following conditions are satisfied for each of them:

1) $S \rightarrow I \rightarrow R$. This corresponds to the situation on the verge Γ_{SIR} . Here there is a neutral point $N_1(\frac{f}{f+b}, 0, \frac{b}{f+b})$ on the edge Γ_{SR} , then we get

$$P = \left\{ \frac{f}{f+b} \leq S \leq 1 \right\} \text{ and } Q = \left\{ 0 \leq S \leq \frac{f}{f+b} \right\},$$

or

$$P = \left\{ 0 \leq R \leq \frac{b}{f+b} \right\} \text{ and } Q = \left\{ \frac{b}{f+b} \leq R \leq 1 \right\},$$

If the starting point lies to the left of the curve connecting the vertex I and the neutral point N_1 , then the disease progresses, but up to a certain time, and as soon as the trajectory crosses this curve, then the epidemic is on the decline in the set Q .

2) $S \rightarrow E \rightarrow R$. This transition corresponds to those individuals, for which the disease does not manifest itself explicitly, i.e., this situation is on the face Γ_{SER} . Then on the same edge Γ_{SR} , there is a neutral point $N_2 \left(\frac{e}{a+e}; 0; \frac{a}{a+e} \right)$. At the same time, either

$$P = \left\{ \frac{e}{a+e} \leq S \leq 1 \right\} \text{ and } Q = \left\{ 0 \leq S \leq \frac{e}{a+e} \right\},$$

or

$$P = \left\{ 0 \leq R \leq \frac{a}{a+e} \right\} \text{ and } Q = \left\{ \frac{a}{a+e} \leq R \leq 1 \right\}.$$

If the starting point lies to the left of the curve (straight line) connecting the vertex E and neutral point N_2 , then the disease progresses, but up to a certain time, and as soon as the trajectory crosses this curve, then the epidemic is on the decline in the set Q .

3) $S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$. This situation occurs for those individuals who completely go through all stages of the disease.

If $eb < af$, then

$$P = \left\{ \frac{f}{f+b} \leq S \leq 1 \right\} \text{ and } Q = \left\{ 0 \leq S \leq \frac{e}{a+e} \right\},$$

or

$$P = \left\{ 0 \leq R \leq \frac{b}{f+b} \right\} \text{ and } Q = \left\{ \frac{a}{a+e} \leq R \leq 1 \right\}.$$

If $eb > af$, then

$$P = \left\{ \frac{e}{a+e} \leq S \leq 1 \right\} \text{ and } Q = \left\{ 0 \leq S \leq \frac{f}{f+b} \right\},$$

or

$$P = \left\{ 0 \leq R \leq \frac{a}{a+e} \right\} \text{ and } Q = \left\{ \frac{b}{f+b} \leq R \leq 1 \right\}.$$

References

1. Murray J.D. Mathematical biology. Third Edition. Springer. 2009. p.776.
2. Ganikhodzhaev R.N. Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments, Acad. Sci. Sb. Math., 76(2), (1993) pp.489-506.
3. Ganikhodzhaev R.N., Tadzieva M.A., Eshmamatova D.B. Dynamical Properties of Quadratic Homeomorphisms of a Finite-Dimensional Simplex. Journal of Mathematical Sciences 2020. 245. (3). P. 398-402.
4. Eshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex S^{m-1} . AIP Conference Proceedings 2365, 060009 (2021); <https://doi.org/10.1063.5.0057303>.
5. Harary F. Graph Theory. Addison-Wesley. 1969. P. 274.

Behavior dynamics of the Lotka-Volterra mapping composition, with transitive tournaments describing models of sexually transmitted diseases

¹Eshmamatova D.B., ²Tadzhieva M.A., ³Ganikhodzhaev R.N.

¹ Eshmamatova D.B. (Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan),
e-mail: 24dil@mail.ru

² Tadzhieva M.A. (Tashkent State Transport University, Tashkent, Uzbekistan),
e-mail: mohbonut@mail.ru

² Ganikhodzhaev R.N. (National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan),
e-mail: rasulganikhodzhaev@gmail.com

Mathematical ecology as a science began to take shape at the beginning of the XX century. Its emergence was facilitated by the works of outstanding mathematicians like Vito Volterra and his contemporaries L.Lotka and V. A.Kostitsin. Further development of mathematical ecology is associated with the names of G.F.Gause, A.N.Kolmogorov, Yu.Odum, Yu.M.Svirezhev, R.A.Poluektov, etc [1]. Mathematical methods have penetrated most deeply into the study of the dynamics of the number of biological populations, which occupy a central place in the problems of ecology and population genetics. The paper considers the composition of two Lotka–Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex with transitive tournaments, with two inversely directed edges, since the composition can be used to simulate sexually transmitted diseases. All fixed points are found for the composition and their characters are studied, as well as the dynamics of the asymptotic behavior of the trajectory, i.e. the phase portrait, is shown for each component of the composition.

Consider the Lotka–Volterra mappings acting in S^{m-1} , having the form ([2]–[4]):

$$\begin{aligned} V_1 : x'_k &= x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \\ V_2 : x'_k &= x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m b_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (1)$$

where $S^{m-1} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \geq 0; \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^m$.

Since the Lotka–Volterra mapping is an automorphism of the simplex S^{m-1} into itself, obviously the composition $V_1 \circ V_2$ is also an automorphism, and it is representable as [4]:

$$V_1 \circ V_2 : x'_k = x_k (1 + f_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_m)), \quad k = \overline{1, m}.$$

The compositions of these mappings at $m = 3$ with coefficients $a_{ki}, b_{ki} = \pm 1$ are represented as:

$$V_1 \circ V_2 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 + x_2 - x_3)[1 + x_2(1 - x_1 - x_3) + x_3(1 + x_1 + x_2)], \\ x'_2 = x_2(1 - x_1 - x_3)[1 - x_1(1 + x_2 - x_3) + x_3(1 + x_1 + x_2)], \\ x'_3 = x_3(1 + x_1 + x_2)[1 - x_1(1 + x_2 - x_3) - x_2(1 - x_1 - x_3)], \end{cases} \quad (2)$$

or

$$V_1 \circ V_2 : \begin{cases} x'_1 = -x_1^4 - 4x_1^3x_2 - 4x_1^2x_2^2 + 2x_1^2 + 4x_1x_2, \\ x'_2 = -x_2^2(2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 2), \\ x'_3 = 1 - x'_1 - x'_2. \end{cases} \quad (3)$$

For the composition, we obtain the following theorem:

Theorem 1. *If the mapping is V_1 and V_2 are represented as (1), then their composition (2) has the following fixed points:*

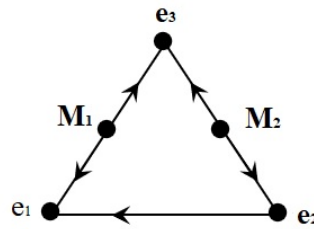


Figure 1. Card of fixed points of composition $V_1 \circ V_2$.

–the five fixed points belonging to the simplex are the points–

$$e_1(1; 0; 0), e_2(0; 1; 0), e_3(0; 0; 1),$$

and

$$M_1 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \in \Gamma_{13}, \quad M_2 \left(0; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \in \Gamma_{23},$$

– two fixed points outside the simplex belonging to H are the points $N_1 \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 0; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$
 $N_2 \left(0; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$, where $H = \{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$.

As a result, the card of fixed points of composition (2) looks like

As a result, we get a consequence that determines the characters of these fixed points of the composition:

Corollary 1. *The fixed points defined by Theorem 2 are – e_1, e_3 – attracting,
 – M_2, N_2 – repelling,
 – points e_2, M_1, N_1
 – saddle fixed points.*

Sexually transmitted diseases (e.g. AIDS) have spread in almost all countries of the world. For example, it has been estimated that in some regions of Central Africa up to twenty percent of the population is infected with the human immunodeficiency virus (HIV), and that in the Bronx in New York 13 percent of men and 7 percent of women aged 25-40 years are HIV-infected [7]. To prevent the further spread of these epidemics, it is important to understand how these infectious diseases are transmitted.

The transmission dynamics are complex. Many biological and sociological factors are involved. One of the main factors determining the spread of STDs is how people choose their sexual partners. Changes in sexual behavior are recorded in almost every survey of homosexuals or bisexuals and injecting drug users over the past decade [7]. These behavioral changes occur as sexually active people become more careful in their sexual activities to avoid contracting STDs such as AIDS. Understanding the consequences of these behavioral changes can help guide educational programs to prevent STD transmission.

The proposed model in this paper represents the contact of a population susceptible to infection, where the first mapping V_1 – defines a certain population (male or female), and the second V_2 – defines a certain population (male or female). The dynamics of each component of the composition determines the course of the disease, as well as a complete picture of the phase portrait of the entire composition and the full interpretation in the epidemiological vocabulary of this work will be given in the next article.

References

1. Murray J.D. Mathematical biology. Third Edition. Springer. 2009. P. 776.

2. *Ganikhodzhaev R.N.* Quadratic stochastic operators, Lyapunov function and tournaments, Acad. Sci. Sb. Math., 76(2),– 1993 pp.489–506.
3. *Ganikhodzhaev R.N., Tadzueva M.A., Eshmamatova D.B.* Dynamical Properties of Quadratic Homeomorphisms of a Finite-Dimensional Simplex. Journal of Mathematical Sciences 2020. 245. (3). pp. 398–402.
4. *Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B.* Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories. Vladikavkaz. Mat. Zh., 2006, Vol: 8 (2), pp. 12–28.
5. *W.O. Kermack and A.G. McKendrick.* A contribution to the mathematical theory of epidemics, Proc. R. Soc. Lond, 115(1927), 700–721.
6. *Eshmamatova D.B., Ganikhodzhaev R.N.* Tournaments of Volterra type transversal operators acting in the simplex S^{m-1} . AIP Conference Proceedings 2021, 060009, 2365.
7. *Xiaoan Du, Ling Zhang, Hong Luo, Wenlong Rong, Xianxin Meng, Hang Yu, Xiaodong Tan.* Factors associated with risk sexual behaviours of HIV/STDs infection among university students in Henan, China: a cross-sectional study. Reproductive Health. 18, pp. 172. 2021.

Model of two-component suspension filtration in a porous medium with “charging” effect

¹Fayziev B.

¹ Samarkand State university, Samarkand, Uzbekistan,

e-mail: fayzievbm@mail.ru

In this paper a mathematical model for the filtration of two-component suspensions in a homogeneous porous medium, taking into account the “charging” phenomenon and dynamic factors in the kinetics of deposition is considered. The system of filtration equations consists of the mass balance equation, multistage kinetic equations taking into account the dynamic factors and “charging” effect in the active zones, the kinetics taking into account the phenomenon of “aging” in the passive zone of deposition for each fractions of the suspension and Darcy’s law [1,2]

$$m_0 \frac{\partial c^{(i)}}{\partial t} + v \frac{\partial c^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_a^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p^{(i)}}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho_p^{(i)}}{\partial t} = \beta_p^{(i)} (\rho_p^{(1)}, \rho_p^{(2)}) c^{(i)}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho_a^{(i)}}{\partial t} = \beta_{a1}^{(i)} (\rho_a^{(1)}, \rho_a^{(2)}, |\nabla p|) c^{(i)} - \beta_{a2}^{(i)} (\rho_a^{(1)}, \rho_a^{(2)}, |\nabla p|) \rho_a^{(i)}, \quad (3)$$

$$v = k(m) |\nabla p|, k(m) = \frac{k_0 m^3}{(1 - m)^3}, m = m_0 - (\rho_a^{(1)} + \rho_a^{(2)} + \rho_p^{(1)} + \rho_p^{(2)}), \quad (4)$$

where $c^{(i)}$ are concentrations of suspension, v is filtration velocity, m , m_0 are the current and initial porosity of the medium, $\beta_p^{(i)}$ are coefficients characterizing the kinetics in the passive zone and “aging” effect, $\beta_{a1}^{(i)}$, $\beta_{a2}^{(i)}$ are coefficients characterizing the kinetics in the active zone and “charging” effect, $\rho_a^{(i)}$, $\rho_p^{(i)}$ are concentrations of depositions formed in active and passive zones, respectively, $|\nabla p|$ is the module of the pressure gradient, $k(m)$ is coefficient of permeability, $i = 1, 2$ - correspond to the component numbers.

To solve the problem (1)-(4) for the given initial and boundary conditions a numerical algorithm is developed. Based on numerical results, the main characteristics of suspension filtration in a porous medium are analyzed. Influences of dynamic factors and “charging” effect on transport and deposition of suspended particles of two-component suspension in the porous medium are established. It is shown, that the multistage nature of the deposition kinetics can lead to various effects that are not characteristic for the transport

of one-component suspensions with one-stage particle deposition kinetics. In particular, in distribution of the concentration of suspended particles in a moving fluid a non-monotonic dynamics has obtained.

References

1. Venitsianov E. V., Rubenshtein R. N., Dynamics of sorption from liquid media, Nauka, Moscow (1983).
2. Khuzhayorov B., Fayziev B., Ibragimov G., Md Arifin N. "A deep bed filtration model of two-component suspension in dual-zone porous medium", Applied Sciences, Vol. 10, No. 8., 2793 (2020).

Fuzzy Divergence Method for Medical Image Thresholding

¹Fazilov Sh.Kh., ²Abdieva Kh.S., ³Sobirova G.D.

¹ Research Institute for Development of Digital Technologies and Artificial Intelligence,
Tashkent, Uzbekistan,

e-mail: sh.fazilov@mail.ru

^{2,3} Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,

e-mail: orif.habiba1994@gmail.com, sobir.1972@gmail.com

Thresholding is a segmentation technique that divides pixels into two groups: those that fall below and those that fall above the threshold. It includes analysing the histogram. A threshold might be either global or local. The global threshold option chooses a threshold for the entire image. If there is uneven illumination, this strategy does not function; in such situation, local threshold works effectively. Local thresholds obtain thresholds from each subregion of an image, responding to local differences [1,2]. For optimal threshold selection, the fuzzy divergence method is applied. The criteria function minimizes the divergence between the thresholded image and an ideally thresholded image. The gamma membership function computes the membership values of pixels in a picture. The following are the membership functions for the object and background regions:

$$\mu_A(a_{ij}) = \begin{cases} \exp(-c \cdot |a_{ij} - m_0|), & \text{if } a_{ij} \leq t, \text{ for object} \\ \exp(-c \cdot |a_{ij} - m_1|), & \text{if } a_{ij} > t, \text{ for background} \end{cases} \quad (1)$$

where t is the any chosen threshold, a_{ij} is the (i, j) th pixel in image A , constant $c = \frac{1}{(f_{max} - f_{min})}$, m_0 and m_1 are the means of object and background regions, respectively.

$$m_0 = \frac{\sum_{f=0}^t f \cdot \text{count}(f)}{\sum_{f=0}^t \text{count}(f)}, \quad m_1 = \frac{\sum_{f=t+1}^{L-1} f \cdot \text{count}(f)}{\sum_{f=t+1}^{L-1} \text{count}(f)}$$

The optimal threshold is chosen by minimizing fuzzy divergence [3]. Fuzzy divergence between two images A and B is written as:

$$\sum_{t=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} (2 - (1 - \mu_A(a_{ij}) + \mu_B(b_{ij})) e^{\mu_A(a_{ij}) - \mu_B(b_{ij})} - (1 - \mu_B(b_{ij}) + \mu_A(a_{ij})) e^{\mu_B(b_{ij}) - \mu_A(a_{ij})})$$

For thresholding purposes, fuzzy divergence between the thresholded image and the ideally thresholded image, $\mu_B(b_{ij}) = 1$, is written as [5]:

$$D(A, B) = \sum_{t=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} (2 - (2 - \mu_A(a_{ij}) \cdot e^{\mu_A(a_{ij}) - 1} - \mu_A(a_{ij}) \cdot e^{1 - \mu_A(a_{ij})})) \quad (2)$$

Divergence is determined for each threshold grey level, and the grey level with the lowest divergence is chosen as the ideal threshold [4-5]. Image thresholding with fuzziness and entropy measures follows the same method as fuzzy divergence in that the fuzziness or entropy measures are minimized.

References

1. *Burillo, P. and Bustince, H.* Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.78, 305–316, (1996).
2. *Chaira, T. and Ray, A.K.* A new measure on intuitionistic fuzzy set and its application to edge detection, *Applied Soft Computing*, 8(2), 919–927, (2008).
3. *Bustince, H., Barrenechea, E., and Pagola, M.* Restricted equivalence function, *Fuzzy Sets and Systems*, 157(17), 2333–2346, (2006).
4. *Bustince, H., Mohedano, V., Barrenechea, E., and Pagola, M.* An algorithm for calculating the threshold of an image representing the uncertainty through A-IFS, in *Proc. of the 11th IPMU*, 2383–2390, Paris, France, 2006.
5. *Chaira, T. and Ray, A.K.* Segmentation using fuzzy divergence, *Pattern Recognition Letters*, 24(12), 1837–1844, (2006).

Structured Support Vector Machine (SSVM) optimization problem for segmentation mammogram images

¹Fazilov Sh.Kh., ²Abdieva Kh.S., ³Sobirova G.D.

¹*Research Institute for Development of Digital Technologies and Artificial Intelligence,
Tashkent, Uzbekistan,*

e-mail: sh.fazilov@mail.ru

^{2,3}*Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,*

e-mail: orif.habiba1994@gmail.com, sobir.1972@gmail.com

The segmentation of masses from mammograms is a difficult challenge due to their variety in shape, appearance, and size, as well as their low signal-to-noise ratio. Despite the advancement of several breast mass segmentation techniques, computer-aided diagnosis (CAD) systems that rely on reliable breast mass segmentation methods are still not commonly used in clinical practice. In fact, the use of CAD systems has been shown to diminish screening accuracy by increasing the rate of biopsies while not enhancing detection of invasive breast cancer. One of the causes, we believe, is the lack of an easily reproduced and accurate assessment mechanism that gives a clear comparison between competing approaches, allowing for a more informed decision process when selecting acceptable algorithms for CAD systems. In this paper, the SSVM model is studied; the inference is based on graph cuts, and training is based on a max-margin optimization.

Assume that we have an annotated dataset D including images of the region of interest (ROI) of the mass, represented by $x : \Omega \rightarrow R(\Omega \in R^2)$, and the respectively manually provided segmentation mask $y : \Omega \rightarrow \{-1, +1\}$, where $D = (x, y)_{i=1}^{|D|}$. Also assume that the parameter of our structured output prediction model is denoted by θ and the graph $G = (V, E)$ links the image x and labels y , where V is the set of graph nodes and E , the set of graph edges [1,2,5]. The process of learning the parameter of structured prediction mode is done through the minimization of the following empirical loss function [6-7]:

$$\theta^* = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^D l(x_i, y_i, \theta), \quad (1)$$

here $l(x, y, \theta)$ is a continuous and convex loss function being minimized that defines the structured model. We use SSVM formulation for solving (1). The SSVM optimization to estimate θ consists of a regularized loss minimization problem formulated as $\theta^* = \min_{\theta} \|\theta\|^2 + \lambda \sum_i l(x_i, y_i, \theta)$, with $l(\cdot)$. The introduction of slack variable leads to the following optimization problem [7]:

$$\underset{\theta}{\operatorname{minimize}} \frac{1}{2} \|\theta\|^2 + \frac{C}{|D|} \sum_i \xi_i$$

subject to

$$E(y_i, x_i; \theta) - E(\hat{y}_i, x_i; \theta) \geq \Delta(y_i, \hat{y}_i) - \xi_i, \quad \forall \hat{y}_i \neq y_i, \xi_i > 0 \quad (2)$$

This optimization is a quadratic programming problem with an insurmountably high number of constraints. We implement the cutting plane method to keep a reasonably small subset of the constraints by solving the maximization problem in order to keep the number of constraints manageable:

$$\hat{y}_i = \operatorname{argmax}_y \Delta(y_i, y) + E(y, x_i; \theta) - E(y_i, x_i; \theta) - \xi_i, \quad (3)$$

which finds the most violated constraint for the i^{th} training sample given the parameter θ . Then if the right-hand side is strictly larger than zero, the most violated constraint is included in the constraint set and (2) is resolved. This iterative model continues until no more inequalities are found to be violated [5].

Note that if we remove the constants from (3), the optimization problem is simply: $\hat{y}_i = \operatorname{argmax}_y \Delta(y_i, y) + E(y, x_i; \theta)$, which can be efficiently solved using graph cuts [1] if the function $\Delta(\cdot, \cdot)$ can be properly decomposed in the label space. A simple example that works with graph cuts is $\Delta(y, y_i) = \sum_i 1 - \delta(y(i) - y_i(i))$, which represents the Hamming distance and can be decomposed in the label space. Therefore, we use it in our methodology. The label inference for a test mammogram x , given the learned parameters θ from (2), is based on the following inference:

$$y^* = \operatorname{argmax}_y E(y, x; \theta) \quad (4)$$

which can be efficiently and optimally solved for binary problems with graph cuts [3-4].

References

1. Boykov Y, Veksler O, Zabih R TiFast approximate energy minimization via graph cuts. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell 23(11):1222–1239,2001.
2. Dhungel N, Carneiro G, Bradley AP Tree re-weighted belief propagation using deep learning potentials for mass segmentation from mammograms. In: 2015 IEEE 12th international symposium on biomedical imaging (ISBI). pp 760–763.
3. O.R.Yusupov, Kh.S.Abdiyeva, A.Primov. Preprocessing and segmentation of digital mammogram images for early detection of breast cancer.IJARSET, vol.8, issue 9, 2021.
4. Yusupov, O.R, Abdiyeva Kh.S. An Overview of Medical Image Segmentation Algorithms. European Multidisciplinary Journal of Modern Science. 2022.
5. Fazilov, Sh.Kh., Yusupov, O.R; Abdiyeva, Kh.S. Mammography Image Segmentation in Breast Cancer Identification using the Otsu Method. Web of Scientist: International Scientific Research Journal, Vol.3,Iss-8, pp.196-205.
6. Abdiyeva Kh.S, Yusupov O.R. Prediction of breast cancer using random forest algorithm, Innovative ideas in the creation of information communication technologies and software collection of lectures of the Republican scientific and technical conference, Vol.I, Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad Al-Khorazmi, Samarkand branch, 17-18.
7. Otakulov S.,Sobirova G.D, Abdiyeva Kh. Minimax Control Problem for Differential Inclusion with Uncertainty Parameter. Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry., Vol. 12, Issue 6, 2021., pp. 4552-4560.

Superpikselli segmentlash usuli asosida giperspektral tasvirlarda tasniflash

¹Fazilov Sh.X., ²Yusupov O.R., ³Eshonqulov E.Sh.

¹*Raqamli texnologiyalar va sun'iy intellektni rivojlantirish ilmiy-tadqiqot instituti,*
e-mail: sh.fazilov@mail.ru

^{2,3}*Samarqand davlat universiteti, (Samarqand, O'zbekiston)*
e-mail: ozodyusupov@gmail.com, erali.eshonqulov1201@gmail.com

Giperspektral tasvirlar turli xil kosmik yoki havodagi sensorlar orqali olinadigan tasvirlar bo'lib, undagi har bir piksel ultrabinafsha nurdan boshlab infraqizilgacha bo'lgan yuzlab spektral kanallarni o'z ichiga oladi [1,2]. Masofaviy zondlash bo'yicha olingan ma'lumotlarni tahlil qilish dasturiy ilovalarda giperspektral ma'lumotlar yer sirtining turli xil tuzilishga ega qoplamalari farqlash qiyin bo'lgan materiallar uchun ko'p spektrli ma'lumotlarni olish imkoniyati beradi. Spektral ma'lumotlardan tashqari, giperspektral ma'lumotlar ham katta fazoviy ma'lumotlarni o'z ichiga olib, tasvirlarda qo'shni piksellarning o'xshash spektral xususiyatlari va katta ehtimolli tuzilishga ega yer qoplami aniqlashda foydalaniladi [3,4]. Lekin, klassik tasniflash usul va algoritmlari, masalan, tayanch vektor mashinasi (SVM) [5] va ekstremal egilish mashinasini (ELM) [6] lar potensial fazoviy ma'lumotlarni e'tiborga olmagan holatda, faqat spektral ma'lumotlarni hisobga olgan holda turli xil yer sirtining qoplamalarini tasniflaydi. Bu esa ushbu giperspektral tasvirlarni tasniflashning modellarini to'g'ri qurishga olib kelmasligi mumkin.

Spektral belgilar va fazoviy timsollar asosida giperspektral tasvirni tahlil qilish va tasniflash samaradorligini sezilarli darajada yaxshilash mumkin. Bunga erishish sifatida qaraladigan fazoviy timsollar giperspektral tasvirning lokal yoki global fazoviy belgilarini ifodalovchi chiziq, nuqtalar klasteri yoki tasvir teksturasi ko'rinishda ifodalanadi [5,7,8].

So'nggi yillarda giperspektral tasvirlarni tasniflashda superpiksel tushunchasi kiritildi. Giperspektral tasvirlar uchun superpiksel ichki fazoviy tuzilishning adaptiv moslashishiga ko'ra bir hil sohalarni ifodalaydi. Shu sababli superpikseldan giperspektral tasvirlarning fazoviy ma'lumotlaridan samarali foydalanishda va giperspektral tasvirlarni tahlil qilish dasturiy ilovalar aniqligini oshirishda foydalanish mumkin.

Superpikselli segmentlash usuli bir xil intensevlikka ega bo'lgan piksellarni qisqartirish yoki guruhlash g'oyasiga asoslangan bo'lib, odatda tasvir segmentasiya va obyektlarni tanib olish kompyuterli ko'rish masalalarini yechishda keng qo'llanilib kelinmoqda [9,10]. Bunday masalalar sifatida qaraladigan masofadan zondlash asosida olingan aerokosmik giperspektral tasvirlar asosida maydonlarni tasniflash masalalarini yechishda foydalanilmoqda. Masofaviy zondlashda asosiy ma'lumotlar biri sifatida spektr qaraladi va bu fazoviy timsollar bo'yicha qo'shimcha ma'lumotlar olish imkoniyati beradi.

Superpikselli segmentlash usulining dastlabki ishlov berishda superpikselli segmentlash obyekt chegarasi mahkamlash va kichik murakkablikdagi hisoblashga ega bo'lishini ta'minlashi lozim [11,12]. Masofadan zondlash tizimlarida giperspektral tasvirlarga dastlabki ishlov berish tez moslashuvchan va samarali bo'lish uchun entropiya tezligi bo'yicha superpikselli segmentlash yondashuvi qo'llaniladi [13].

Bizga V –bo'luvchi piksellar to'plami, U o'xshash piksellar juftligi hosil qiluvchi qirralar to'plami bo'yicha giperspektral tasvir uchun $G = (V, U)$ graf berilsin. Bu graf asosida entropiya tezligi bo'yicha superpikselli segmentlash yondashuvning $A \subset U$ shartni qanoatlantiruvchi $G = (V, U)$ grafning $G' = (V, A)$ qism graflarini aniqlaydi. Samarali segmentlashni amalga oshirish uchun entropiya tezligi bo'yicha superpikselli segmentlashni maqsad funksiyasi quyidagicha bo'ladi,

$$A^* = \underset{A}{\operatorname{argmin}} Tr \{H(A) + \lambda B(A)\}, \quad A \subset U. \quad (1)$$

(1) ifodada $H(A)$ – bir jinsli va kompakt klasterlarni hosil qilish uchun entropiya tezligi, $B(A)$ – o'lchamlari analog bo'lgan klasterlarni rag'batlantirishni muvozzatlashtirish va $Tr(\cdot)$

– matrisa izi. (1) ifodada berilgan optimallashtirish masalasini yechishda murakkab evristik algoritmlar qoʻllaniladi.

Adabiyotlar

1. Zhang, L.; Zhang, L.; Du, B. Deep learning for remote sensing data: A technical tutorial on the state of the art. *IEEE Geosci. Remote Sens. Mag.* 2016, 4, 22–40.
2. Ma, J.; Jiang, J.; Zhou, H.; Zhao, J.; Guo, X. Guided locality preserving feature matching for remote sensing image registration. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 2018, 56, 4435–4447.
3. Jiang, J.; Chen, C.; Yu, Y.; Jiang, X.; Ma, J. Spatial-aware collaborative representation for hyperspectral remote sensing image classification. *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.* 2017, 14, 404–408.
4. Jiang, X.; Song, X.; Zhang, Y.; Jiang, J.; Gao, J.; Cai, Z. Laplacian Regularized Spatial-Aware Collaborative Graph for Discriminant Analysis of Hyperspectral Imagery. *Remote Sens.* 2019, 11, 29.
5. NMelgani, F.; Bruzzone, L. Classification of hyperspectral remote sensing images with support vector machines. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 2004, 42, 1778–1790.
6. Bazi, Y.; Alajlan, N.; Melgani, F.; Hichri, H.; Malek, S.; Yager, R.R. Differential evolution extreme learning machine for the classification of hyperspectral images. *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.* 2014, 11, 1066–1070.
7. Li, S.; Lu, T.; Fang, L.; Jia, X.; Benediktsson, J.A. Probabilistic fusion of pixel-level and superpixel-level hyperspectral image classification. *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.* 2016, 54, 7416–7430.
8. Roscher, R.; Waske, B. Superpixel-based classification of hyperspectral data using sparse representation and conditional random fields. In *Proceedings of the 2014 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium (IGARSS)*, Quebec City, QC, Canada, 13–18 July 2014; pp. 3674–3677.
9. G. Mori, X. Ren, A. A. Efros, and J. Malik, Recovering human body configurations: Combining segmentation and recognition, in *Proc. IEEE CVPR*, Jul. 2004, pp. 326–333.
10. Z. Li, X. M. Wu, and S. F. Chang, Segmentation using superpixels: A bipartite graph partitioning approach, in *Proc. IEEE CVPR*, Jun. 2012, pp. 789–796.
11. Leo, G. Random walks for image segmentation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2006, 28, 1768–1783.
12. Shen, J.; Du, Y.; Wang, W.; Li, X. Lazy random walks for superpixel segmentation. *IEEE Trans. Image Process.* 2014, 23, 1451–1462.
13. Liu, M.Y.; Tuzel, O.; Ramalingam, S.; Chellappa, R.V Entropy rate superpixel segmentation. In *Proceedings of the 2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Colorado Springs, CO, USA, 20–25 June 2011; pp. 2097–2104.

Klaster tahlilning ansambli yondashuvi asosida giperspektral tasvirlarni segmentlash

¹Fazilov Sh.X., ²Yusupov O.R., ³ Eshonqulov E.Sh.

¹ Raqamli texnologiyalar va sunʼiy intellekt rivojlantirish ilmiy-tadqiqot instituti,

e-mail: sh.fazilov@mail.ru

² Samarqand davlat universiteti,

e-mail: ozodyusupov@gmail.com

³ Samarqand davlat universiteti,

e-mail: erali.eshonqulov1201@gmail.com

Soʻnggi yillarda yerni masofadan zondlash sohalarida koʻrinuvchi va infraqizil spektr diapazonlarida giperspektral suratga olish vosita va texnologiyalari keng qoʻllanilmoqda [1]. Giperspektral tasvirlarning xususiyatlarini spektral kanallarning soni koʻpligi hamda har bir kanalning kichik spektral kengligi tashkil etadi. Giperspektral tasvirlar umumiy holda uch

o'ldiradi ham odatda giperspektral tasvir fazoviy-spektral kub deb yuritiladi [2].

Tasvirlarni tahlil qilishda yuzaga keladigan muhim masalalardan biri segmentlash, ya'ni tasvirni qandaydir mezonlar bo'yicha bir jinsli bo'laklarga ajratish hisoblanadi [3, 4, 5]. Giperspektral tasvirlarda segmentlash murakkab va to'liq hal etilmagan masalalardan biridir. Birjinsli segmentlarni tanlash uchun tasvir sohasining bir xilligi nimani anglatishini aniqlash, turli segmentlash variantlarini taqqoslash mumkin bo'lgan mezonlarni shakllantirish, shuningdek, eng yaxshi variantni topish uchun samarali usul yoki algoritmi aniqlashni talab etadi. Hozirgi kunda tasvirlarni segmentlashda turli xil yondashuvlar qo'llanilmoqda. Ushbu masalani hal qilishda eng keng tarqalgan yondashuv turli xil belgilar (spektral, tekstura va boshqalar) ko'rinishda berilgan tasvir asosidagi hosil qilingan jadvalli ma'lumotlar strukturasi qo'llaniladigan klasterli tahlil algoritmlaridan foydalanishga asoslangan [5, 6].

Klasterli tahlilning ko'plab usullari mavjud bo'lib, ushbu usullar biri-biridan birjinslilikni anglash, bo'linish variantlari va turli cheklanishlarni o'rin almashtirish va ma'lum bir sohaning o'ziga xos xususiyatlarini hisobga olish bilan farqlanadi. Bu farqlanishlarni klasterlarni aniqlashga turli yondashuvlar mavjudligi va har bir sohaga xos bo'lgan qo'shimcha ma'lumotlarni hisobga olish zarurati, shuningdek, qo'yilgan optimallashtirish masalasini yechish uchun turli xil algoritmlarning mavjudligi bilan izohlash mumkin [4].

Klasterli tahlilda faol rivojlanib kelayotgan yondashuvlarda biri hisoblangan ansambli yondashuv guruhlash natijalarining algoritmi parametrlarini tanlashga bog'liqligini kamaytirish va shovqinli ma'lumotlarda yanada turg'un yechimlarni olish imkonini beradi. Oddiy algoritmlar kompozitsiyasiga asoslangan ansambli yondashuv ma'lumotlarni tahlil qilish, timsollarni tanib olish va prognozlashning zamonaviy nazariyasi va amaliyotida faol foydalanilmoqda [3].

Klaster tahlilining turli xil usul va optimallashtirish proseduralarining variantlari to'plami mavjudligi ularni birgalikda qo'llash bilan kelishilgan yechimni shakllantirish imkoniyatini paydo qiladi. Bunday yechim qarorini ishlab chiqishda guruhlash turli qarashlar asosida amalga oshiriladi, ya'ni nuqtai nazardan bir-biriga qarama-qarshi yoki bir-birini to'ldiradi deb tahmin qilinadi (bitta yechim, boshqa yechimni kuchsiz tomonlarini to'ldiradi). Ansambli yondashuv umumiy ma'lumotlar bazasini olish imkoniyati past bo'lgan yoki ahamiyatli bo'lgan hollarda taqsimlangan hisoblashni amalga oshirishga imkon beradi.

Ushbu tadqiqotning maqsadi esa giperspektral tasvirlarni tahlil qilishda qo'llaniladigan klaster tahlilning ansambli yondashuvni tadqiq etishga qaratilgan. Ansambli yechimni qurishda jiddiy muammolardan biri foydaniladigan o'rin almashtirish proseduralarini sezilarli darajada hisoblash murakkabligidir. Mavjud algoritmlar giperspektral tasvirlarga xos bo'lgan katta hajmdagi ma'lumotlarni tahlil qilishda yetarli darajadagi hisoblash murakkabligiga ega. Bu esa katta hajmdagi ma'lumotlarni tahlil qilishda foydalanidigan hisoblash jihatidan samarali ansambli segmentlash usul va algoritmlarni ishlab chiqishni taqozo etadi.

Klaster tahlilda berilgan sifat mezoniga ko'ra qandaydir $A = \{a_1, \dots, a_N\}$ elementlardan (ob'ektlardan) tashkil topgan $P = \{C_1, \dots, C_N\}$ to'plamni K guruhlariga (klasterlarga) ajratish talab etiladi. Sifat mezoni deganda – guruh ichidagi tarqalishlarga va guruhlar o'rtasida masofalarga bog'liq bo'lgan ma'lum bir funksional tushiniladi. Qoidaga ko'ra har bir ob'ekt $X_1, \dots, X_n$ haqiqiy o'zgaruvchilar orqali tavsiflanadi. $x = x(a) = (x_1, \dots, x_n)$ vektor o'zgaruvchi orqali a ob'ektni belgilaymiz. Bu yerda $x_j = X_j(a)$, $j = 1, \dots, n$, $T_{N \times n} = (x(a_1), \dots, x(a_{1N}))^T$ esa matrisa (ma'lumotlar jadvali).

Tasvirlarni tahlil qilishda element sifarida piksel qaraladi va o'zgaruvchilar piksellarning turli xil xususiyatlarini, ya'ni ma'lum bir diapazondagi spektral yorqinlik, tekstura xarakteristika va boshqalarni tavsiflaydi. Masalan, RGB modelidagi tasvirning har bir pikseli qizil, yashil va ko'k rangli komponentlarining intensivligini tavsiflovchi X_1, X_2, X_3 uchta o'zgaruvchi orqali ma'lumotlar jadvalini taqdim etish mumkin.

Giperspektral tasvir uchun har bir pikselini $X_1, X_2, \dots, X_d$ tartiblangan ketma-ketlik asosida ma'lumotlar jadvalini ifodalash mumkin.

Klasterlar ansamblini qurish algoritmlari matritsa elementlarini saqlash uchun N^2 yaqin xotira yacheykalarini talab qiladi va ular bir xil murakkablik tartibi bilan tavsiflanadi. Bu esa katta hajmdagi ma'lumotlar jadvalarini tahlil qilishda ular kichik samarani beradi. Bunday hollarda ma'lumotlarni siqish va ansamblni guruhlash kombinatsiyasiga asoslangan algoritmlarni qurish va qo'llash maqsadga muvofiq bo'ladi. Tadqiq etilayotgan algoritmnin g'oyasi jamoaviy yechimni qurishda, kuzatishlarning barcha mumkin bo'lgan juftliklari hisobga olmay, faqat klasterlarni ifodalovchi nisbatan kichik miqdordagi prototiplar juftligini hisobga olishi qo'yilgan maqsad muvofiq ekanligini bildiradi.

Asosiy guruhlash variantlarini olish uchun esa k -means algoritmi qo'llaniladi, uning murakkabligi chiziqli ravishda ma'lumotlar jadvalining o'lchamiga bog'liq. Klasterlarning kerakli soni algoritm ishlashining parametri hisoblanadi.

Klaster markazi klasterdagi barcha elementlari bo'yicha hisoblangan mos belgilarning o'rta arifmetik qiymatlaridan iborat vektor sifatida aniqlanadi. C_k klaster prototipi deganda, uning markaziga eng yaqin bo'lgan p_k elementi qaraladi. CMP (Co-association Matrix of Prototypes) algoritmi ansamblning asosiy elementlarini qurish uchun tasodifiy qism fazo usulidan foydalanadi. Shu algoritmdan o'zgaruvchilarning dastlabki soni qism fazoning o'lchoviga nisbatan etarlicha katta bo'lgandagina foydalanish mumkin.

CMP klaster ansamblini qurish algoritmi quyidagi qadamlardan iborat.

- *1-qadam.* Barcha $l \in \{1, \dots, L\}$ uchun quyidagi amallar bajariladi:
 - Qism fazolar o'lchovi d_{ens} qiymatlari tasodifiy tanlaniladi (har bir elementni tashlash ehtimoli doimiy deb hisoblanadi);
 - k -means algoritmidan foydalanib, A to'plami belgilanishlar tayinlangan klasterlarga bo'linadi;
 - klaster prototiplari hisoblanadi va ularning dastlabki jadvaldagi tartib raqamlari saqlandi;
 - A to'planning har bir ob'ekt uchun unga yaqin bo'lgan prototip topiladi va uning tartib raqami saqlanadi.
- *2-qadam.* 1.3-qadamda topilgan prototiplar uchun barcha variantlar bo'yicha o'rtachalashtirilgan koassotsiativ H matritsa hisoblanadi.
- *3-qadam.* Ierarxik aglomerativ algoritmdan foydalanib H matritsa bo'yicha C_{pr} prototiplar to'plami K klasterlarga ajratiladi.
- *4-qadam.* A to'plamdagi har bir ob'ekt uchun barcha L asosiy variantlar bo'yicha eng yaqin prototiplar tartib raqami aniqlanadi. Nomzodlarga ovoz berish yo'li bilan har bir obyekt C_{pr} dan mos klasterga birlashtiriladi.

Koassotsiativ prototip matritsalarini asosida CMP giperspektral tasvirlarni segmentlash uchun ansambl yondashuv tadqiq etildi. Mavjud segmentlash algoritmlaridan farqli ravishda, tadqiq etilgan algoritm shovqinlarga turg'un tahlilni amalga oshirishni va yetarlicha katta hajmdagi ma'lumotlarga ishlov berish tezkorlogini ta'minlash imkonini beradi.

Adabiyotlar

1. Бондур В.Г. Современные подходы к обработке больших потоков гиперспектральной и многоспектральной аэрокосмической информации // Исследование Земли из космоса. 2014. № 1. С. 4–16.
2. Schowengerdt, R.A. Remote sensing: models and methods for image processing. New York: Acad. Press, 2006. 560 p.

3. Duda, R.O., Hart, P.E., Stork, D.G. Pattern classification. Second edition. New York: Wiley, 2000. 680 p.
4. Gonzales, R., Woods, R. Digital image processing. Third edition. New Jersey: Pearson Education Inc., Prentice Hall, 2008. 954 p.
5. В.Б.Бериков, И.А.Пестунов. Построение кластерного ансамбля для сегментации гиперспектральных изображений. Вычислительные технологии. Том 21, с 1, 2016.
6. Пестунов И.А., Синяевский Ю.Н. Алгоритмы кластеризации в задачах сегментации спутниковых изображений // Вест. КемГУ. 2012. Т. 52, с 4/2. С. 110–125.
7. Jain, A.K. Data clustering: 50 years beyond K-means // Patt. Recogn. Lett. 2010. Vol. 31(8). P. 651–666.

On a method for solving a generalized eigenvalue problem under interval uncertainty

¹Ibragimov A., ²Khamroeva D.

¹ Navoi state pedagogical institute, Navoi, Uzbekistan
e-mail: alim-ibragimov@mail.ru

² Navoi State Pedagogical Institute, Navoi, Uzbekistan
e-mail: hdilafruz_285@mail.ru

The task of finding eigenvalues and eigenvectors is often faced by engineers who carry out calculations in such industrial areas as construction, mechanical engineering, aircraft building, etc. Also, the operation of various devices in electrical engineering and electronics can be analyzed using a mathematical model in the form of a generalized eigenvalue problem:

$$Ax = \lambda Bx \quad (1)$$

where A and B are known real $n \times n$ matrices.

In real life and real calculations, the parameters inevitably turn out to be uncertain due to inaccurate measurements, simplification of model hypotheses, diversity of system data and calculation errors, etc.

The element of uncertainty is, of course, a highly undesirable factor in calculations. But, unfortunately, the uncertainty of setting independent variable parameters can be reduced, but not completely eliminated.

To account for parameter uncertainties, a more realistic approach is to replace equation (1) with the following “perturbed” eigenvalue problem (Recall that the interval values in the text are highlighted in bold font [1]):

$$Ax = \lambda Bx, \quad A \in \mathbf{A}, \quad B \in \mathbf{B}. \quad (2)$$

Here $\mathbf{A}$ is an interval matrix of size $n \times n$, that is, each element a_{ij} of matrix A takes a fixed (but unknown) value within the interval $\mathbf{a}_{ij}$, regardless of other elements of the matrix; $\mathbf{B}$ is also an $n \times n$ interval matrix. Relation (2) defines each eigenvalue λ_k as an implicit function of A and B , that is, $\lambda_k = \lambda_k(A, B)$. In the case of real eigenvalues, the range $\lambda_k^* = [\underline{\lambda}_k^*, \bar{\lambda}_k^*]$ is given by the real set:

$$\lambda_k^* = \{\lambda_k \mid Ax^{(k)} = \lambda_k Bx^{(k)}, \quad A \in \mathbf{A}, \quad B \in \mathbf{B}\}. \quad (3)$$

Similarly, we define the eigenvector $x^{*(k)}$ associated with λ_k , whose components are $x_i^{*(k)}$ and $i = 1, 2, \dots, n$:

$$x_i^{*(k)} = \{x_i^{(k)} \mid Ax^{(k)} = \lambda_k Bx^{(k)}, \quad A \in \mathbf{A}, \quad B \in \mathbf{B}\}. \quad (4)$$

The problem considered in this article is to determine the range λ_k^* of a real eigenvalue for a given ordinal k . This formulation, although not as general as the case of complex eigenvalues, has many interesting applications. Thus, in many cases (mechanical analysis of electrical or electronic devices, finite approximations of electric, magnetic or thermal field distribution problems), the resulting matrices $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$ are symmetric, this guarantees that all eigenvalues of equation (2) are real. If the matrices are not symmetric, then the following two problems are sometimes of practical interest:

- guarantee that the given eigenvalue λ_k is structurally stable [2] (it remains valid for all $A \in \mathbf{A}$, $B \in \mathbf{B}$);
- check the robust aperiodicity [3] of the considered interval problem for eigenvalues (all eigenvalues are real structurally stable eigenvalues).

It should be emphasized that determining the real range of eigenvalues is an NP-hard problem, its numerical complexity depends exponentially on the size n of the matrices used. This fact was proved by J. Ron [4, 5] for a simpler case of the standard interval eigenvalue problem (when B is the identity matrix):

$$Ax = \lambda x, \quad A \in \mathbf{A}. \quad (5)$$

In some cases, the so-called outer solutions of equation (5) or equation (2) [2, 6] for λ_k , $\mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{x}_1^{(k)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(k)})^\top$ with the inclusion property:

$$\lambda_k^* \subset \lambda_k, \quad \mathbf{x}^{*(k)} \subset \mathbf{x}^{(k)}. \quad (6)$$

The main idea of the proposed method is to use the outer bounds $\mathbf{x}^{(k)}$ and $\mathbf{y}^{(k)}$ for the right and left eigenvectors associated with the considered eigenvalue λ_k^* , using full or partial invariance of the sign patterns of both $\mathbf{x}^{(k)}$ and $\mathbf{y}^{(k)}$. Since we know that such an approach has not yet been proposed in the context of the generalized equation of the eigenvalue problem (2).

From a computational point of view, this method essentially reduces to the formation and solution of two nonlinear systems (incomplete quadratic systems) to find the outer intervals $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ for the right and left eigenvectors corresponding to own values. It should be kept in mind that its current implementation is based on full-matrix operations, which limits the application of the method to problems of moderate size.

The method is applicable if certain sufficient conditions are met, i.e. an incomplete quadratic system must have a positive solution, and the signs of the outer solutions must satisfy full or partial invariance. The method also guarantees reliable numerical results when the original eigenproblems contain interval uncertainties, which, strictly speaking, most often occurs in practice.

References

1. Kearfott, R.B., Nakao, M.T., Neumaier, A., Rump, S.M., Shary, S.P., Hentenryck, P. Standardized notation in interval analysis. Computational technologies. 15(1):7–13.
2. Kolev, L., Filipova-Petrakieva, S. Assessing the stability of linear time-invariant continuous interval dynamic systems IEEE Trans. on CAS, 2005, Vol. 50, pp. 393-397.
3. Polyak, B. Robust linear algebra and robust aperiodicity in Rantzer, A. and Byrnes, C. (Eds), Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization, LNCIS. 2003, Vol. 286, Springer, New York, NY, pp. 249-260.
4. Rohn, J. Stability of interval matrices: the real eigenvalue case IEEE Transactions on Automatic Control. 1992, Vol. 37(10), pp. 1604-1605.
5. Rohn, J. Checking positive definiteness or stability of symmetric interval matrices is NP-hard Computat. Math. Univ. Carol, 1994, Vol. 35, pp. 795-797.

6. Kolev, L., Filipova-Petrakieva S. Outer bounds on the eigenvalues of interval matrices - the complex eigenvalues case Proceedings of the Technical University of Sofia, 2001, Vol. 51, pp. 139-147.

Newton-Raphson method for calculation of steady state modes of electric systems under conditions of interval data uncertainty

¹Ibragimov A., ²Mamurov T.

¹ Associate professor, Department of Informatics, Navoi State Pedagogical Institute, Uzbekistan

e-mail: alim-ibragimov@mail.ru

² PhD student of the Department of Informatics, Navoi State Pedagogical Institute, Uzbekistan

e-mail: mamurov_337@mail.ru

The problem of initial data uncertainty fully applies to electric power systems. The parameters of the elements of electric power systems in most cases are determined by passport, design or reference data, are based on a significant number of assumptions, and are considered unchanged or slightly changing. At the same time, it is known that the parameters of power lines, transformers, reactors (especially controlled ones), reactive power compensation devices depend on many factors and can undergo significant changes during operation.

In recent years, the methods of interval analysis and the theory of fuzzy sets have become widespread as a means of accounting for uncertainty in solving a number of important applied problems. These relatively new approaches are analytically, firstly, extremely efficient in algorithmic and computational terms, and, secondly, allow one to correctly investigate meaningful models.

Many tasks of calculating electrical systems are characterized by setting interval values of parameters and modes of operation, due to their natural spread, variation in the process of operation, measurement errors of modes, or other factors. As a criterion for solving such problems, a description of the limits of variation of the desired characteristics of electrical networks is required. Since such problems are often encountered in practice, there is every reason to pay special attention to them.

Below we will use the notation from the draft informal international standard for interval values, in particular, interval values are highlighted in the text in bold, and non-interval values are not highlighted in any way [1].

In interval analysis, rectangular and circular complex intervals are most often used as complex intervals [2]. The corresponding sets are denoted by $\mathbb{IC}_{rect}$ and $\mathbb{IC}_{circ}$. Below we will consider intervals only from $\mathbb{IC}_{rect}$ and further, for brevity, we denote this set simply by $\mathbb{IC}$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + i\mathbf{a}_2 = \{a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C} \mid a_1 \in \mathbf{a}_1, a_2 \in \mathbf{a}_2\}$$

for real intervals $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{IR}$.

In this paper, we consider an interval system of nonlinear algebraic equations [3, 4] relating currents and voltages in network nodes:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_{ij} x_j = \frac{\mathbf{s}_i}{\dot{x}_i} - \mathbf{a}_{i0} x_0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

or

$$\dot{x}_i \sum_{j=0}^n \mathbf{a}_{ij} x_j = \mathbf{s}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Here $\mathbf{a}_{ij} \in \mathbb{IC}^{n \times n}$ are the elements of the matrix of intrinsic and mutual nodal conductivities, $\mathbf{s}_i \in \mathbb{IC}^n$ is the interval power value in the i -th node of the network, and $\mathbf{x}_i \ni x_i$ are the

required complex intervals ($\dot{\mathbf{x}}_i$ is the complex conjugate interval for $\mathbf{x}_i$), i.e. interval value of voltages in the i -th node of the given network. In our considerations, the complex intervals $\mathbf{a}_{i0}$ and $\mathbf{x}_0$ (modulus and phase of the voltages of the balancing node, respectively) are set, but may change in the process of solving a more general problem.

System (2) can also be written in a short form

$$F(x, \dot{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{s}, \quad \text{for } a \in \mathbf{a}, s \in \mathbf{s}. \quad (3)$$

System (1) is “sparse” in the sense that most of the coefficients $\mathbf{a}_{ij}$ are equal to zero. They are non-zero if the i -th and j -th nodes of the network are directly connected.

It follows from the monotonicity property of interval arithmetic by inclusion over $\mathbb{IR}$ (or $\mathbb{IC}$) that the result of performing interval operations contains all possible results of applying point methods to point data contained in intervals specified by system (1). It can be seen that the set of solutions of system (2) forms a combined set of solutions [2]:

$$\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{s}) = \{x \in \mathbb{IC} \mid (\exists a \in \mathbf{a}) (\exists s \in \mathbf{s}) (F(x, \dot{x}, a) = s)\} \quad (4)$$

and the problem of external interval estimation is considered.

Since system (1) is nonlinear, it is natural to solve it by iterative methods. In this case, the structure of the iterative process is very important, since the convenience of implementing the process and the rate of convergence will depend on it.

Thus, our goal is to find, if possible, the best (that is, the smallest by inclusion) interval vector bounding the solution set $\Xi_{uni}(F, \mathbf{a}, \mathbf{s})$.

The most universal and suitable for solving a large class of nonlinear equations is the Newton-Raphson method. The idea of this method is to sequentially replace at each iteration of the nonlinear system with the equation of some linear one, the solution of which gives the values of the unknowns that are closer to the solution of the nonlinear system than the initial approximation.

We will look for $\mathbf{x}_i^{(k+1)}$ by $\mathbf{x}_i^{(k)}$, setting $\mathbf{x}_i^{(k+1)} := \mathbf{x}_i^{(k)} \cap (\mathbf{x}_i^{(k)} + \Delta \mathbf{x}_i^{(k)})$, where $\Delta \mathbf{x}_i^{(k)}$ is the correction vector, are found from the equations

$$W(\mathbf{x}_i^{(k)}) \Delta \mathbf{x}_i^{(k)} = F(\mathbf{x}_i^{(k)}). \quad (5)$$

Here $W(x)$ - Jacobi matrix is calculated at the first iteration and remains unchanged during the entire iteration process; $F(x)$ - vector of residuals for given values of nodal equations. The criterion for the end of the calculation of steady modes is the condition: $x^{(k+1)} - x^{(k)} < \varepsilon$. Where ε is the allowable calculation error.

The main advantage of the Newton-Raphson method is its fast convergence, when even the first approximation can give a satisfactory result for practice.

In the work, an algorithm of the method for calculating the steady-state modes of electrical networks has been developed, as well as a computational experiment has been carried out and the corresponding numerical results have been obtained.

The results obtained make it possible to study the behavior of the process of successive approximations and indicate ways to accelerate convergence. Currently, experiments are being carried out to find the optimal acceleration coefficients. When calculating using the interval Newton-Raphson method, the number of iterations is significantly reduced, which gives narrower external interval estimates for the sets of solutions.

References

1. Kearfott, R.B., Nakao, M.T., Neumaier, A., Rump, S.M., Shary, S.P., Hentenryck, P. Standardized notation in interval analysis. Computational technologies. 15(1):7–13.
2. Shary, S.P. Finite-dimensional interval analysis. Federal Research Center for Information and Computing Technologies, NSU. - Novosibirsk: Publishing house "XYZ 2020. 645 p. E-book,

3. *Ibragimov, A.A.* Interval-iterative methods for solving the nodal equations of steady-state modes of electrical networks. Bulletin of the National University of Uzbekistan, 2010, No. 3, pp. 87-91.
4. *Ibragimov, A.A.* Investigation of the convergence of interval iterative methods for calculating steady-state modes of electrical systems. Bulletin of the National University of Uzbekistan, 2012, No. 3, p. 95-99.

Identification of micro-objects based on the use of unique properties of images and neural networks

¹Jumanov I., ²Kholmonov S.

¹ *Samarkand state university, University boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: isroil.jumanov2019@gmail.com

² *Samarkand state university, University boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: sunatilloxolmonov@gmail.com

Scientific and methodological foundations for optimizing the identification of non-stationary objects under conditions of limited a priori information, uncertainty, non-stationarity of processes using three-layer and five-layer neural networks have been developed. Polynomial functions, nonlinear filters, wavelet functions for identification of images of micro-objects, in particular, pollen grains, unicellular organisms in the blood, have been studied. Mechanisms for pre-processing images of micro-objects of a complex structure are proposed for selection, segmentation, identification of unique characteristics and features, as well as optimization, setting the variables of models for describing random time series. Optimization mechanisms are implemented, focused on the use of a database and a knowledge base, statistical, dynamic, specific characteristics of the random time series, the formation of a set of informative elements, taking into account the variation of statistical parameters, auto, pair, cross correlation coefficients. The equivalence coefficients of the formed training sets from multicomponent processes are determined. Identification mechanisms based on Haar wavelet transforms of the 5th, Daubechies of the 6th orders, combined with neural networks and Gabor filters, wavelet transforms of the model, were tested. A generalized algorithm has been constructed that includes mechanisms for selecting segments, boundaries, a common interval of element values, selecting informative elements, and forming a training set. The identification software package in C++ was developed and implemented in the CUDA parallel computing environment.

References

1. *S. V. Kuleshov, Yu. A. Aksenov, A. A. Zaitseva.* An approach to identifying the source of images from digital cameras, Innovative Science, €5. pp. 82-86, 2015.
2. *Yu. V. Vizilter.* Image processing and analysis in machine vision tasks: A course of lectures and practical exercises Yu.V. Visilter [and others]. Moscow. Fizmatkniga. pp. 672, 2010.
3. *Ibragimovich, J.I. et al.* Optimization of identification of micro-objects based on the use of characteristics of images and properties of models, Int. Conf. on Inf. Science and Com. Tech., 9351483, 2020.
4. *D. V. Shashev* Image processing in intelligent medical robotic systems, Informationmeasuring equipment and technologies, Tomsk, pp. 544-550, 2016.
5. *G.M. Popova, V.N. Stepanov.* Analysis and processing of images of biomedical microobjects, Automation and telemechanics, €1. pp. 131-142, 2004.
6. *Jumanov, I.I., Djumanov, O.I., Safarov, R.A.* Recognition of micro-objects with adaptive models of image processing in a parallel computing environment, Journal of Physics: Conference Series 1791(1), 012099. 2021. doi:10.1088/1742-6596/1791/1/012099

7. *D.A. Bezuglov, S.Yu. Rytikov, V.I. Yukhnov, S.A. Shvidchenko.* Extraction of image contours using the wavelet differentiation method, Modern problems of radio electronics: IV international scientific conference, Rostov-on-Don, pp. 203-212, 2012.
8. *M.V. Dyudin, A.D. Povalyayev, E.S. Podvalny, R.A. Tomakova.* Contour analysis methods and algorithms for classification problems of complexly structured images, Bulletin of the Voronezh State Technical University. Vol.10. е. 3-1, pp. 54-59, 2014.
9. *Jumanov, I.I., Djumanov, O.I., Safarov, R.A.* Methodology of optimization of identification of the contour and brightness-color picture of images of micro-objects Proceedings - International Russian Automation Conference, pp. 190–195, 2021. DOI: 10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537567
10. *I.I. Jumanov and S.M. Xolmonov* Optimization of identification of non-stationary objects due to information properties and features of models, IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 1047(1), 012064, 2021. doi:10.1088/1757-899X/1047/1/012064
11. *Ibragimovich, J.I., Isroilovich, D.O. and Maxmudovich, X.S.* Effective recognition of pollen grains based on parametric adaptation of the image identification model, International Conference on Information Science and Communications Technologies

Mechanisms of using excessive information structure of images in recognition of micro-objects

¹Jumanov I., ²Safarov R.

¹ Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan,
e-mail: isroil.jumanov2019@gmail.com

² Samarkand state university, Samarkand, Uzbekistan,
e-mail: rustammix.rs@gmail.com

Scientific and methodological foundations for optimizing the identification of micro-objects based on generalized dynamic models and neural networks of various topologies with mechanisms for extracting statistical, dynamic, specific characteristics of images, extracting and segmenting contours, selecting reference points, reducing redundant points and setting variables have been developed. Methods for determining using correlations and dynamic changes in the set of points are proposed. Matrices with coordinates of displayed points, approximations taking into account deformation of segments, selection of stationary sections of the contour are formalized. A comparative analysis of the effectiveness of tools for image preprocessing, recognition and classification was carried out using examples of pollen grain images. Modified component schemes, adaptive learning algorithms for multilayer neural networks, radial-basis networks. A software package for identifying, recognizing, classifying pollen grain images with non-linear influences of factors, a priori insufficiency and uncertainty has been developed. A software package based on the use of a three-layer neural network of forward and back propagation of errors, supervised and unsupervised learning algorithms, training set with vector quantization, clustering, segmentation, image identification, and “sliding window” formation mechanisms has been implemented. The software modules for identifying images in the presence of "noise as well as filtering the curve of the contour of images of micro-objects, have been studied.

References

1. *S. V. Kuleshov, Yu. A. Aksenov, A. A. Zaitseva.* An approach to identifying the source of images from digital cameras, Innovative Science, е5. pp. 82-86, 2015.
2. *Yu. V. Vizilter.* Image processing and analysis in machine vision tasks: A course of lectures and practical exercises Yu.V. Visilter [and others]. Moscow. Fizmatkniga. pp. 672, 2010.
3. *Ibragimovich, J.I. et al.* Optimization of identification of micro-objects based on the use of characteristics of images and properties of models, Int. Conf. on Inf. Science and Com. Tech., 9351483, 2020.

4. *D. V. Shashev* Image processing in intelligent medical robotic systems, Information measuring equipment and technologies, Tomsk, pp. 544-550, 2016.
5. *G.M. Popova, V.N. Stepanov*. Analysis and processing of images of biomedical microobjects, Automation and telemekhanics, No. 1. pp. 131-142, 2004.
6. *Jumanov, I.I., Djumanov, O.I., Safarov, R.A.* Recognition of micro-objects with adaptive models of image processing in a parallel computing environment, Journal of Physics: Conference Series 1791(1), 012099. 2021. doi:10.1088/1742-6596/1791/1/012099
7. *D.A. Bezuglov, S.Yu. Rytikov, V.I. Yukhnov, S.A. Shvidchenko*. Extraction of image contours using the wavelet differentiation method, Modern problems of radio electronics: IV international scientific conference, Rostov-on-Don, pp. 203-212, 2012.
8. *M.V. Dyudin, A.D. Povalyaev, E.S. Podvalny, R.A. Tomakova*. Contour analysis methods and algorithms for classification problems of complexly structured images, Bulletin of the Voronezh State Technical University. Vol.10. e. 3-1, pp. 54-59, 2014.
9. *Jumanov, I.I., Djumanov, O.I., Safarov, R.A.* Methodology of optimization of identification of the contour and brightness-color picture of images of micro-objects Proceedings - International Russian Automation Conference, pp. 190-195, 2021. DOI: 10.1109/RusAutoCon52004.2021.9537567

Adaptive activation functions in multiple weight neural networks

^{1,2}**Khudaybergenov K., ^{1,2} Saidov D.**

¹ *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,*

e-mail: kabul85@mail.ru

² *Yeoju Technical Institute in Tashkent, Uzbekistan*

Activation functions are considered as main component in artificial neural networks. The current paper considers learning activation functions with combination of activation functions in multiple weight neural networks. We propose two approaches to use activation functions and construction of adaptive activation parameters to input data. Namely, to show effectiveness, we investigate linear form and non-linear form to combine activation functions, then introduce adaptive activation function. Numerical experiments show the proposed activation techniques overcome by performances and accuracy than standard rectified unit family functions. In the last two decades a lot of effort can be seen in development and implementation of convolutional neural networks (CNN) in solving practical problems, such as pattern recognition [1-3], face detection [4], face recognition [5,6], object detection [7] and tracking [8,9]. In order to get best accuracy in neural networks, choosing most suitable activation functions are very important. Among them, non-saturated activation functions are more accurate rather than saturated forms in deep learning models, which have shown themselves a successful of deep models. In recent researches, saturated forms of these functions are used more compared to non-saturated variants. Meanwhile, one problem exists with some of these functions, which gradients can to vanish when using saturated forms. However, these type of activation functions can be very helpful to accelerate training the deep learning models.

Adaptive activation function

However, once each joining coefficient is trained in combined activation approach, then the joined activation is used as constant value. This means that, it is not adaptable to the certain input. In particular, instead of training a joining coefficient, we instead train a gating pattern. The result of the gating pattern and input signals is presented to a SoftPlus function to form the joining coefficient with $f_{lrelu}(\cdot)$ and $f_{elu}(\cdot)$. Consequently, the actual joining coefficient rely on both the gating pattern and the input signals. Let us consider that the input signal and the learnable parameters are denoted by x and λ , respectively. Then the joining coefficient can be determined as follows:

$$f_{softplus}(x) = \ln(1 + e^{\lambda x})$$

where $f_{softplus}(\cdot)$ is a SoftPlus function [10], $\lambda \in (0, 1]$ is constant value in the given interval.

In the adaptive approach, the combination coefficient is replaced with SoftPlus function, and combined with a basic $f_{prelu}(\cdot)$ and $f_{relu}(\cdot)$. According to adaptive approach aforementioned earlier, the joining of basic $f_{prelu}(\cdot)$ and $f_{relu}(\cdot)$ is considered adaptable to the certain input signals. Therefore, we can define an adaptive activation function as follows:

$$f_{arelu}(x) = f_{softplus}(x)f_{prelu}(x) + (1 - f_{softplus}(x))f_{relu}(x)$$

To calculate gradients with respect to λ and x are as follows

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \lambda} &= \delta \frac{x}{1 + e^{\lambda x}} (f_{prelu}(x) - f_{relu}(x)) \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \delta \left(\frac{\lambda}{1 + e^{\lambda x}} (f_{prelu}(x) - f_{relu}(x)) + f_{softplus}(x) \left(\frac{\partial f_{prelu}(x)}{\partial x} - \frac{\partial f_{relu}(x)}{\partial x} \right) + \frac{\partial f_{relu}(x)}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial E}{\partial \alpha} &= \delta f_{softplus}(x) \frac{\partial f_{prelu}}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial L}{\partial \beta} = \delta (1 - f_{softplus}(x)) \frac{\partial f_{relu}}{\partial \beta} \end{aligned}$$

The combined approach and the adaptive approach can adopt both linear and nonlinear transformations. If we compare the two approaches, the significance is that the joined approach is not adaptive to the specific input signals. Therefore, using flexible joining parameter $f_{softplus}(\cdot)r$ is more preferable. Particularly, in adaptive approach trains λ , which determines the degree of signal change for the input value. After training λ , $f_{softplus}(\cdot)$ defines the certain proportion of signal variability for the certain x . Additionally, when x changes to a small value in $f_{softplus}(\cdot)$, the degree of signal change tends to be defined only by one of the activation function. Overall, the adaptive approach is desired to be adaptive to signal change in online training.

In the joined and adaptive approaches, we only use basic $f_{prelu}(\cdot)$ and $f_{relu}(\cdot)$ activation functions in order to test the productiveness. In general, the adaptive approach can increase the ability of training neural models which its datasets have complex structure.

References

1. Guo Y., Liu Y. Oerlemans A., Lao S., Wu S., Lew M.S. Deep learning for visual understanding: a review, *Neurocomputing*, Vol. 187, 27–48 (2016).
2. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E. Imagenet classification with deep convolutional neural networks, *Advances In Neural Information Processing Systems*, Vol. 25, 1106–1114 (2012).
3. Li X., Cai C., Zhang R., Ju L., He J. Deep cascaded convolutional models for cattle pose estimation, *Computers and Electronics in Agriculture*, Vol. 164, 45–67 (2019).
4. Gu G., Liu J., Li Z., Huo W., Zhao Y. Joint learning based deep supervised hashing for large-scale image retrieval, *Neurocomputing*, Vol. 385, 348–357 (2020).
5. Yang J., Zhang D., Frangi A., Yang J. Two-dimensional PCA a new approach to appearance-based face representation and recognition, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 26, Issue 1, 131–137 (2004).
6. Taigman Y., Yang M., Ranzato M., Wolf L. Deepface: Closing the gap to human-level performance in face verification, *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Columbus, U.S.A, 1701–1708 (2014).
7. Li C., Chen Z., Wu Q. M., Liu C. Deep saliency detection via channel-wise hierarchical feature responses, *Neurocomputing*, Vol. 322, 80–92 (2018).
8. Tuo Q., Zhao H., Hu Q. Hierarchical feature selection with subtree based graph regularization, *Knowledge-Based Systems*, Vol. 163, 996–1008 (2019).
9. Wu G., Lu W., Gao G., Zhao C., Liu J. Regional deep learning model for visual tracking, *Neurocomputing*, Vol. 175, 310–323 (2016).

10. Glorot X., Bordes A., Bengio Y. Deep sparse rectifier neural networks. Proceedings of the 14th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, Fort Lauderdale, FL, USA. Vol. 15, 315-323 (2011).

Search for hidden patterns in the diagnosis of aging index

¹Madrakhimov Sh., ²Makharov K.

¹ National University of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

e-mail: sh.madrahimov@nuu.uz

² National University of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

e-mail: maxarov.qodirbek@gmail.com

Modern methods of data mining are actively used in various medical decision support systems. Data mining technology demonstrates excellent results in risk assessment for patients and helps in making clinical decisions when building disease prediction models.

The search for criterias of premature aging of the cardiovascular system is due, on the one hand, to the global trend towards an increase in the proportion of people older than working age, on the other hand, to the growth of premature aging processes among people of mature and even young age. Methods for determining biological age using the intima-media thickness of the common carotid arteries are more sensitive, allowing more accurate prediction of the possibility of adverse vascular events [1]. In recent years, using modern methods of data mining, operating on the basis of rules that formalize expert knowledge, it has become possible to obtain good results in medical diagnostics. The development and use of knowledge-based models using artificial intelligence methods is an important means of improving the efficiency of medical research.

For the research was used a method that allows dividing the features that characterize objects (patients) into dominance intervals, calculating the values of the membership function, nonlinear transformations of features by the value of membership functions and on this basis to determine the generalized assessment of objects [2,3].

The mathematical formulation of the problem is as follows. As a result of medical, laboratory and instrumental studies, a sample is created that serves to build an information model that determines hidden patterns in the analysis of the aging rate. The sample consisted of m objects (patients), the objects $E = \{S_j\}_1^m$ were characterized by nominal and quantitative characteristics $X = (x_1, \dots, x_n)$. Objects are divided into two classes (successful aging and premature aging) by a specialist (medical specialist) depending on the thickness of the intima-media complex.

The ordered sequence of feature values is divided into τ_c non-intersecting intervals $[r_{cu}, r_{cv}]^i$, $1 \leq u, u \leq v \leq m$, $i = \overline{1, \tau_c}$. Values of features lying in the interval $[r_{cu}, r_{cv}]^i$ can further be considered as a gradation of a nominal attribute.

Let $d_1^i(u, v)$, $d_2^i(u, v)$ be the number of representatives of the corresponding classes K_1, K_2 in the interval $[r_{cu}, r_{cv}]^i$. For the recursive selection procedure r_{cu}, r_{cv} the criterion (1) is used:

$$\left| \frac{d_t^i(u, v)}{|K_t|} - \frac{d_{3-t}^i(u, v)}{|K_{3-t}|} \right| \rightarrow \max, \quad (1)$$

Denote by $\eta_{1i} = \frac{d_1^i(u, v)}{|K_1|}$, $\eta_{2i} = \frac{d_2^i(u, v)}{|K_2|}$ results optimal partition for each interval $[r_{cu}, r_{cv}]^i$, $i = \overline{1, \tau_c}$. The value of the membership function of the c th feature to K_1 over the interval $[r_{cu}, r_{cv}]^i$ is defined as

$$f_{ci} = \frac{\eta_{1i}}{\eta_{1i} + \eta_{2i}}, \quad (2)$$

The boundary between class objects according to (2) for $x_c \in X(n)$ is defined as:

$$G_c = (q_1 + q_2)/2, \quad (3)$$

where $q_1 = \min\{f_c(\mu)|1 - f_c(\mu) < 0.5, \mu = 1, \dots, \tau_c\}$, $q_2 = \max\{f_c(\mu)|0.5 - f_c(\mu) > 0, \mu = 1, \dots, \tau_c\}$.

The value (3) can be used for describing objects in a new (binary) feature space. The transformation of the feature is defined as

$$a_{ic} = \begin{cases} 1, & f(\mu) < G_c \\ 2, & f(\mu) > G_c \end{cases} \quad (4)$$

The generalized estimation of each object after the transformation of features by (4) is calculated by the following formula:

$$R(S_a) = \sum_{i \in J} \mu_i(x_{ai}), \quad (5)$$

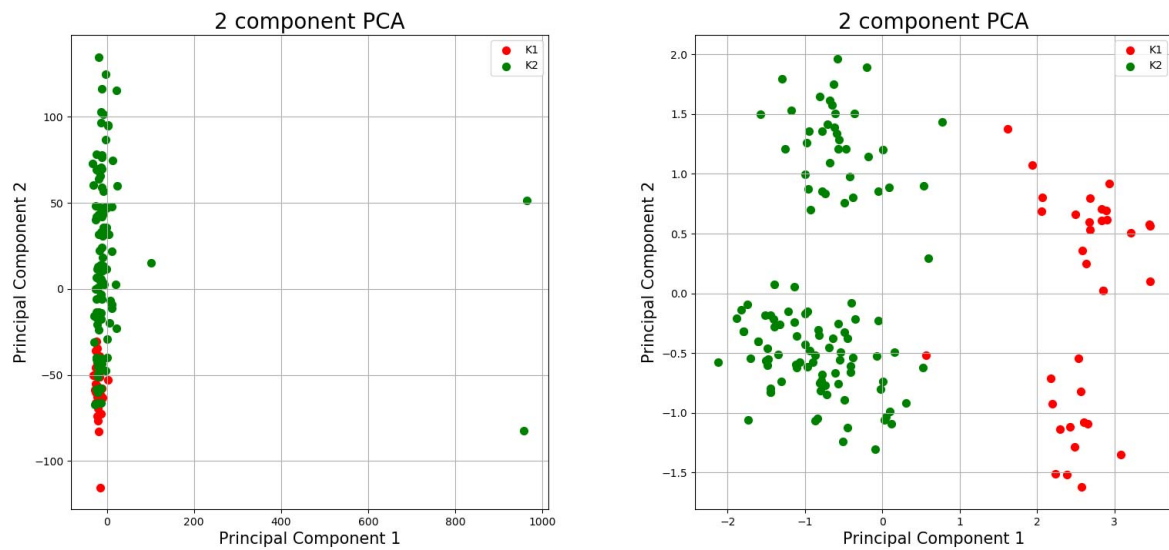


Figure1. Before and After nonlinear transformation.

For computational experiment was used dataset that consisted of 150 objects (patients) described by 77 quantitative and nominal features [4]. The expert (medical specialist) assigned 35 objects of the sample to the class K1 (the degree of CIMT - 1, 2 gradations) and 115 to the class K2 (the degree of CIMT - 3, 4 gradations).

Weight of features (number of intervals, value of membership functions, top 5):

Carotid artery stenosis: 0,912 (2, f1=0.99, f2=0.05)

IMT max (right): 0,859 (2, f1=0.92, f2=0)

IMT max (left): 0,749 (2, f1=0.92, f2=0.05)

Max echogenicity ASP (right): 0,631 (2, f1=0.87, f2=0.06)

Interadventitial diameter: 0,453 (3, f1=0.83, f2=0.17, f3=0)

Weight of features after nonlinear transformation (top 5):

Carotid artery stenosis: 0,912

IMT max (right): 0,779

IMT max (left): 0,749

Type ASP (right): 0,693

Max echogenicity ASP (right): 0,630

The compactness [3] of the generalized estimates of objects on the original sample is 0.96. After a non-linear transformation, the compactness increased to 1. It's difficult to visualize high dimensional spaces, so we reduce the number of dimensions (features) by using PCA technique [5].

References

1. *Anosova E.V.* Clinical and instrumental criteria for premature aging in combined therapeutic pathology. PhD dissertation, Belgorod State University, 2013.
2. *Ignatiev N.A.* On Nonlinear Transformations of Features Based on the Functions of Objects Belonging to Classes, Pattern Recognition and Image Analysis, V.31, 2, 2021, pp 197–204.
3. *Madrakhimov Sh.F., Rozikhodjaeva G.A., Makharov K.T.* Construction of fuzzy inference rules for medicine diagnostics problems, J. Phys.: Conf. Ser. 2032, 2021.
4. *Jolliffe I.T.* Principal Component Analysis, Springer Series in Statistics. New York: Springer-Verlag. 2002.

Asymptotic property and localization of solutions of mutual cross-diffusion systems

¹Mamatov A., ²Nurumova A.

^{1,2} National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
e-mail: mmtovabrjon1995@gmail.com, aziza.n@rambler.ru

Consider in area $Q = \{(t, x) : t > 0, x \in R^N\}$ the following problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(v^{m_1-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u \right) - \operatorname{div} (c(t)u) - \gamma_1(t)u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div} \left(u^{m_2-1} |\nabla v^k|^{p-2} \nabla v \right) - \operatorname{div} (c(t)v) - \gamma_2(t)v \end{cases} \quad (1)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, v(0, x) = v_0(x) \geq 0, x \in R^N, \quad (2)$$

where $k \geq 1$, $p, m_i, i = 1, 2$ are numeric parameters, $\nabla(\cdot) = \operatorname{grad}(\cdot)$, are $0 \leq u_0(x), v_0(x) \in C(R^N)$, $c(t) > 0, 0 < \gamma_i(t) \in C(0, \infty), i = 1, 2$ given functions.

The system (1) describes a number of physical processes in a two-component nonlinear medium, for example, it describes the processes of mutual reaction-diffusion, heat conduction, combustion, polytropic filtration of liquid and gas [1-2]. The system (1) is also called cross diffusion [5-6].

After the necessary calculations for functions $f(\xi), \psi(\xi)$, we have the following system of degenerate self-similar equations [3-4]

$$\begin{cases} \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{N-1} \psi^{m_1-1} \left| \frac{df^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{df}{d\xi} + b_1 f = 0 \\ \xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^{N-1} f^{m_2-1} \left| \frac{d\psi^k}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{d\psi}{d\xi} \right) + \frac{\xi}{p} \frac{d\psi}{d\xi} + b_2 \psi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

where $b_1 = \alpha_1 / [1 - (m_1 - 1)\alpha_2 - k(p - 2)\alpha_1]$, $b_2 = \alpha_2 / [1 - (m_2 - 1)\alpha_1 - k(p - 2)\alpha_2]$.

Theorem 1. Let $q_i < 0$, $N + kq_i < 0$, $i = 1, 2$. Then the solution of the system (3) disappearing at infinity as $\eta \rightarrow \infty$ ($\eta = \ln(a + \xi^{p/(p-1)})$) has the asymptotic representation

$$\begin{cases} f(\xi) = A_1 (a + \xi^\gamma)^{q_1} (1 + o(1)) \\ \psi(\xi) = A_2 (a + \xi^\gamma)^{q_2} (1 + o(1)) \end{cases}$$

where the coefficients $A_i > 0$, $i = 1, 2$ are the solution to the system of algebraic equations

$$\begin{cases} A_1^{k(p-2)} A_2^{m_1-1} = \left[-\frac{1}{\gamma^{p-1} p(N+k\gamma q_1)} + b_1 \right] (|k\gamma q_1|)^{2-p} \\ A_1^{m_2-1} A_2^{k(p-2)} = \left[-\frac{1}{\gamma^{p-1} p(N+k\gamma q_2)} + b_2 \right] (|k\gamma q_2|)^{2-p} \end{cases}$$

References

1. *Aripov M., Sadullayeva Sh.* Computer simulation of nonlinear diffusion processes, University press, Tashkent, 2020.
2. *Aripov M., Rakhmonov Z.* Mathematical modeling of thermal conductivity processes in a medium with double nonlinearity, University press, Tashkent, 2021.
3. *Mamatov A., Nurumova A.* Investigate the interaction of nonlinear thermal conductivity process with density and source in a nonhomogeneous environment, AIP Conference Proceedings 2432, 050031 (2022), DOI:10.1063/5.0090850.
4. *Muhamediyeva D., Nurumova A., Muminov S.* Cauchy Problem and Boundary-Value Problems for Multicomponent Cross-Diffusion Systems, International Conference on Information Science and Communications Technologies: Applications, Trends and Opportunities, ICISCT 2021.
5. *Rakhmonov Z.R., Urunbayev J.E.* On a problem of cross-diffusion with nonlocal boundary conditions, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, **12**(5), 614–620, 2019.
6. *Rakhmonov Z.R., Urunbayev J.E., Khaydarov A.T.* Global existence and nonexistence of solutions to a cross diffusion system with nonlocal boundary conditions, Journal of Mathematics and Statistics, **8**(4), 404–409, 2020.

Choosing the structure of convolutional neural networks for face recognition

¹Marakhimov A., ^{2,3}Khudaybergenov K.

¹ Termez State University, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail: kabul85@mail.ru

² National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,

³ Yeoju Technical Institute in Tashkent, Uzbekistan

Face recognition is one of the most research direction in computer vision and image processing. Face recognition is to find regions in a given image (in each frame in real time video) that contain faces and make a prediction of the faces. It is used in almost all of the applications, from surveillance up to entertaining software in mobile applications. Demand for high accuracy and speed are exist and new algorithms and methods are still in development. Some of these algorithms have reached the precision comparable with a human ability of recognition [1-4].

Main result

In the current study, we are going to show that there exists a neural network which is a fully connected neural network part of CNN and this neural network has two hidden layers with infinitely differentiable sigmoidal activation function σ , d inputs, d neurons in the first hidden layer, $2d + 2$ neurons in the second hidden layer, k outputs and having the ability to solve face recognition tasks within a given arbitrary accuracy.

We use this structure of feed-forward neural network with 2 hidden layers as a fully connected neural network part of the face recognition model which is shown in Figure 1.

Below we present a theorem for feed-forward neural network to choose a structure in the number of hidden layers and hidden neurons.

From feed-forward neural network theory, all the weights and other parameters $d_p = (d_p^{(s)})$, $\lambda_p = (\gamma_p^{(s)})$, c_{pq} , θ_p , w_{pq} require adjustment via training and tuning using training data set. There exist many optimization algorithms for neural networks, such as gradient descent, newton, conjugate gradient, Levenberg-Marquardt and etc. We use the gradient descent algorithm to optimize the weights and free parameters of the network.

Since, the proposed structure of feed-forward neural network in the model has k

outputs, such as $f_1, \dots, f_k$, and a training dataset, (x_l, y_l) , $(l = 1, \dots, M)$, then the overall output of the network is as follows

$$F(x) = \sum_{i=1}^k \sum_{p=1}^{2d+2} d_p^{(i)} \sigma \left(\sum_{q=1}^d c_{pq} \sigma(w_{pq} \cdot x - \theta_{pq}) - \gamma_p^{(i)} \right).$$

We use the learning error of the proposed model is defined as follows

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M (F_i(x_p) - t_p)^2, \quad i = 1, \dots, M.$$

To train the network, the standard back-propagation method was performed using a batch learning.

Convolutional neural networks

Recent studies show that CNNs have demonstrated a high-performance result on face recognition applications. CNNs are widely used in applications of computer vision, speech recognition, natural language processing, and etc. CNN can efficiently solve image processing problems due to its unique characteristics, such as shared weights, local receptive fields and subsampling. In general, CNN model contain of such blocks, like an input layer, a convolution layer, a combining layer, a fully related layer, and an output layer. The input layer accepts the raw pixel values of the input image; the convolutional layer calculates the output of units that are connected to local domains in the input layer; the pooling layer performs the down-sampling operation along the spatial dimensions; the last part which is called fully connected layer, calculates the scores for each class; and the output layer provides the final results. Thereby, we can make a deep learning models by alternately stacking the convolutional layers and pooling layers to get full the CNN architecture. A simplistic CNN model is shown in Figure 1 below.

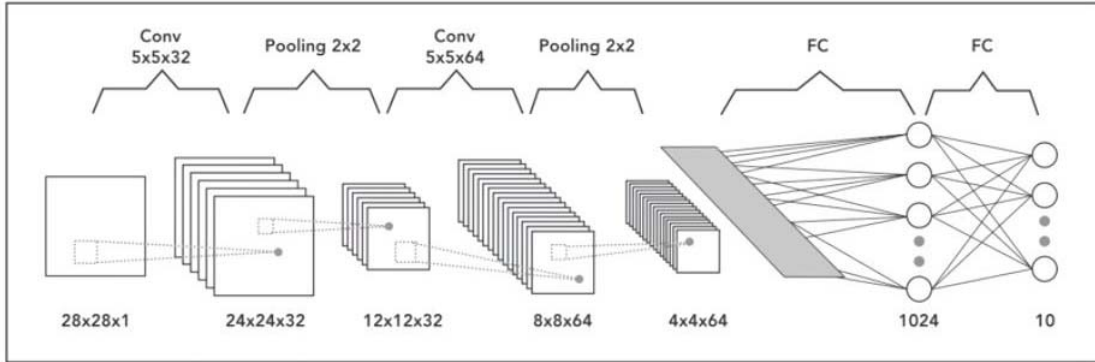


Figure 1. A CNN model with a fully connected neural network

In order to get the desired accuracy, it is necessary to find most useful features to represent human faces. The feature descriptors, like Local Binary Patterns (LBP), Local Phase Quantization (LPQ) and Binarized Statistical Image Features (BSIF) are not enough powerful, thus in practice, applying these methods we might miss some useful information. In the current note, we use of deep learning to extract the most useful features. The excellence of deep learning models has been shown in a number of recent papers [6-8]. Moreover, we show that information extracted from deep learning is enough to build face recognition models with feed-forward neural networks, thus we construct a cascade structure of CNN with neural network.

The proposed CNN framework is combined with feed-forward neural network, which its hidden layer size and hidden units' size are dependent to CNN's output size. The neural network part, which is fully connected network of the CNN can be called as a classifier part. In order to achieve precise verification, we design the CNN structure as follows.

- detect and resize the face image to 224×224 dimension;
- to get the landmarks, we use method which is given in [5];
- 5 landmarks are chosen as the center of regions (left eye center, right eye center, nose apex, left and right corner of the mouth); Region patch dimension have 2 scales (40×40 pixels);
- In training process, all the patches in the same region of different persons are used to train the proposed model;
- In testing process, different regions in face will be identified by the corresponding network;

We design a convolutional neural network structure to extract the features as given next subsection. We claim that the proposed CNN model is much faster than others are.

Structure of CNN framework

As illustrated in Figure 2, we propose a distinct layer type of feed-forward which is combined to CNN. The configuration of the proposed model is formed in the following form:

1. Input layer of CNN is set to $224 \times 224 \times 3$ (cropped face image size);
2. The second layer is 40×40 local patches (overall three-channel of RGB);
3. The third layer is a convolution layer; kernel size 5×5 , stride size 2×2 and feature number is 64, followed by a max-pooling layer Max-Pool-1 with kernel size 3×3 and stride size 2;
4. The fourth layer is also a convolution layer; kernel size 3×3 , stride size 2×2 and feature number 256, followed by a max-pooling layer Max-Pool-2 with kernel size 5×5 . So the output of the Max-Pool-2 is a 256-dimension vector;
5. The last part of CNN is fully connected neural network which is constructed according to Theorem 1 in Section 3.1. The first hidden layer has 256 hidden neurons and the second hidden layer size equal to 514 ($2 \times 256 + 2$) neurons;

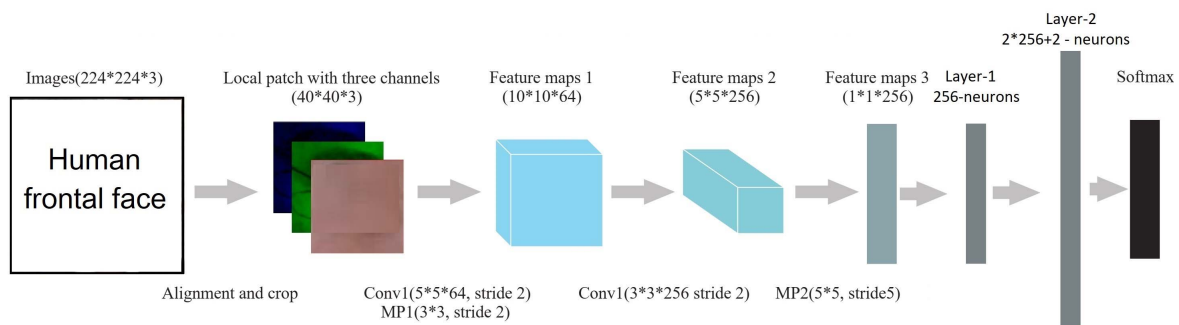


Figure 2. A proposed CNN configuration with a fully connected, two hidden layer feedforward neural network.

We claim that the feed-forward neural network layer in face recognition can have a distinct structure. Namely, we show that artificial neural network with a two hidden layer neural network with d inputs, d neurons in the first hidden layer, $2d+2$ neurons in the second hidden layer, outputs and with a sigmoidal and infinitely differentiable activation function can solve face recognition problems with a given arbitrary accuracy. Here d is the output size from CNN.

1. Saez D.T., Meng L., Hartnett M. Enhancing convolutional neural networks for face recognition with occlusion maps and batch triplet loss. *Image and Vision Computing*, Vol. 79, 99–108 (2018).
2. Li Y., Zheng W., Cui Z., Zhang T. Face recognition based on recurrent regression neural network. *Neurocomputing*, Vol. 297, 50–58 (2018).
3. Jain N., Kumar S., Kumar A., Shamsolmoali P., Zareapoor M. Hybrid deep neural networks for face emotion recognition. *Pattern Recognition Letters*, Vol. 115, 101–106 (2018).
4. Zhao J., Lv Y., Zhou Z., Cao F. A novel deep learning algorithm for incomplete face recognition: Low-rank-recovery network. *Neural Networks*, Vol. 94, 115–124 (2017).
5. Ren S., Cao X., Wei Y., Sun J. Face alignment at 3000 fps via regressing local binary features. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Columbus, U.S.A, 1685–1692 (2014).
6. Simonyan K., Zisserman A. Very deep convolutional networks for largescale image recognition. *arXiv preprint arXiv:1409.1556*.
7. Girshick R., Donahue J., Darrell T., Malik J. Rich feature hierarchies for accurate object detection and semantic segmentation. *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Columbus, U.S.A, 580–587 (2014).
8. Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.E. Imagenet classification with deep convolutional neural networks. *Proceedings of the Advances in neural information processing systems*, Harrahs and Harveys, Lake Tahoe, 1097–1105 (2012).

Capillary instability control under hydrodynamic impact on the reservoir

¹Geylani M. Panahov, ¹Eldar M. Abbasov, ²Babek N. Sultanov

¹*Institute of Mathematics and Mechanics of Science and Education Ministry Republic of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan*

e-mail: panvniineft@rambler.ru

²*Baku State University, Baku, Azerbaijan*

e-mail: bsaultanov@mail.ru

Introduction. Immiscible fluid displacement in porous media, as well as the study of the mechanism of the effects observed is the subject of numerous studies of the heterogeneous media flow in oil-saturated reservoirs [1]. The reason for the close attention to such processes is the search for ways to reduce of unconventional oil content in the total balance of produced hydrocarbons. In all the above-mentioned processes, the object of research is a complex structure of pore space, which significantly influences the hydrodynamics and distribution of the saturating fluids [2].

Problem statement. The research has shown that capillary processes and instability of oil displacement front with water are important factors in dependence of residual oil saturation on reservoir hydrodynamic pressure under water flooding. One of the ways of optimization of water impact considering capillary processes in the reservoir system is the method of periodically increasing hydrodynamic pressure, which provides coordinated accounting of both displacement conditions and capacitance-and-filtration characteristics of fluid-saturated reservoirs [3]. As the injection rate changes, the rate of pressure distribution in heterogeneous zones of the reservoir will vary because of their different reservoir properties, and consequently oil may flow from less permeable zones to more permeable watered layers, or conversely, water may flow from more permeable zones to less permeable ones, reducing the phase permeability of the reservoir for water and increasing it for oil.

Problem statement. Let us take $P(t)$ as the simplest discontinuous function, e.g., a stepped function. Consider the derivative of a piecewise continuous function $P(t)$ with piecewise discontinuous derivative $P'(t)$, discontinuity points $t_1, t_2, \dots$ and corresponding jumps $h_1, h_2, \dots$

$$P_1(t) = P(t) - \sum_k h_k \cdot \theta(t - t_k), \quad (1)$$

$$\text{where } \theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

It is known that $\theta'(t) = \delta$, i.e., $\theta(t)$ in the usual sense is 0 at $t \neq 0$ and does not exist at $t = 0$. The function $P_1(t)$ is absolutely continuous and recoverable from its derivative $P'_1(t)$, coincides with $P'(t)$ everywhere except at discontinuity points $P(t)$, where $P'(t)$ does not exist. Therefore, $P'_1(t)$ is the derivative of the generalized function P_1 in the space of generalized functions. On the other hand

$$P'_1(t) = P'(t) - \sum_k h_k \cdot \delta(t - t_k), \quad (2)$$

where f' is the derivative of the generalized function $P(t)$. As a result, we get

$$P'(t) = P'_1(t) + \sum_k h_k \cdot \delta(t - t_k) \quad (3),$$

i.e. the derivative of the generalized function is reconstructed from its usual derivative and the sum of the delta function at the points of discontinuity with the corresponding jumps.

Conclusion. Based on these studies, the paper proposes a technological solution to increase the efficiency of oil displacement sweep efficiency by creating periodically increasing hydrodynamic pressure to overcome the resistance of capillary forces along the length of the injection zone.

References

1. *Gimatudinov Sh.K.*, Fizika neftyanogo i gazovogo plasta. Nedra, Moscow (1971), 310 p.
2. *Entov V.M., Zazovskij A.F.* Gidrodinamika processov povysheniya nefteotdachi, Nedra, Moscow (1989), 232 p.
3. *Agudelo, O. Acosta, T. Tellez-Mejia, C. Gonzalez-Bello, P. Navas, E. Duran, J. Porlles, Jerjes* Casabe: Water Injection Optimization and Surveillance in a Mature Field. 10.2118/180774-MS.(2016).

Using the random forest algorithm in different type feature space

¹ Saidov D., ²Khudaybergenov K.

¹ *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*,
e-mail: doniyorsaidov86@gmail.com

² *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*,
e-mail: kabulkhudaybergenov@nuu.uz

In this work, it is given the results of research and comparative analysis of the application of the random forest [1,2] algorithm in the different type features space in regression and classification problems. The importance of the problem lies in the fact that the direct application of the random forest algorithm in the space of various categories of features is considered inappropriate by most researchers. However, this algorithm is implemented in different programming packages like Scikit-Learn in the space of different types of features. Usually, in most studies, qualitative features are not directly used, but based on their characteristics, they are converted to binary or quantitative features using conversion techniques such as one hot encoding, label encoding, and only after moving to the quantitative features space. a random forest algorithm is used. Which of these

conversion techniques to choose for a given qualitative attribute is often determined by an expert. This is of course a challenge when the feature space is large enough. Another disadvantage is that if the number of gradations is large enough during conversion using the one hot encoding technique, the feature space may increase dramatically and lead to dimensional curse problem. When using label encoding, the problem of expressing equally strong gradations is encountered.

In this paper, as a solution to the above problems, it is proposed to convert nominal (qualitative) features into quantitative features using the criterion of superiority intervals [3]. In addition, even when the space of features is different type, all features were first processed by this criterion, transferred to the space of quantitative features, and only then, using the random forest algorithm, the results were obtained and compared with raw cases.

References

1. *L. Breiman* Random forests, Machine Learning, 45, 2001,5–32.
2. *M. Fernández-Delgado, E. Cernadas, S. Barro, and D. Amorim.* Do we need hundreds of classifiers to solve real world classification problems. Journal of Machine Learning Research, 15, 2014, 3133–3181.
3. *N.A. Ignatiev* Generalized estimates and local metrics of objects in data mining. Monograph. Tashkent: University Publishing House, 2014, 1-72.

Uzbek word game modeling using character level n-gram and statistics

Salaev U.

Urgench State University (Urgench, Uzbekistan)

e-mail: ulugbek0302@gmail.com

The word game modeling, as defined in this thesis, is a process of suggesting a set of letters for a game letter cubes to design a word game in the Uzbek language. The matching letter game is formed game tray, letter cubes and word cards that help preschool children to increase letter and word recognition as well as memory building expanding their vocabulary, emphasizing left to right directionality and letter order. There are some issues with preschoolers on recognizing letters and merging them as word formation. This model is implemented to design such word games in the Uzbek language.

The work aims to present a new model which emphasizes the matching letter game, more precisely, the model provides the opportunity of forming as many words as possible from the dataset while minimizing a number of cubes.

The model has been created with two approaches using a combination of character-level n-gram language model, letter frequency, and fine-tuning approaches based on the selected dataset of Uzbek words with 3-5 letters which contains about 4.5k.

Table 1 presents the accuracy of the model which calculated of number of words that can be formed in dataset by two approaches respectively.

Our main goal is to reduce the number of cubes while maintaining model accuracy. In comparing the approaches, the second approach produced significantly high in case 6 and 8 cubes with 63.9% and 88.7%, respectively, while achieved slightly less accuracy than the first one in cases 5 and 7 cubes. Moreover, both method obtained same result in the case of 4 cubes.

References

1. *Lalit Goyal*, n-Gram Character Analysis of English Text on Domain Specific Corpus, An International Journal of Engineering Science, Vol 3, Issue December 2014, 44-48

Cubes count	Total word	3 letters word	4 letters word	5 letters word
4	0.179	0.357	0.100	-
4	0.179	0.357	0.100	-
5	0.257	0.676	0.421	0.115
5	0.247	0.662	0.266	0.073
6	0.537	0.876	0.710	0.406
6	0.639	0.923	0.546	0.333
7	0.769	0.959	0.889	0.687
7	0.767	0.950	0.604	0.436
8	0.751	0.961	0.605	0.418
8	0.887	0.996	0.657	0.531

Таблица 3: Accuracy (%) of our model based on the first and second approaches.

2. *Ulugbek Salaev*, Computational methods using character statistics for the word game, "Computer Linguistics: Problems, Solutions, Prospects Vol.1 No.1, 2022, 238-243.
3. *A.Madvaliyev, E.Begmatov*, O'zbek tilining imlo lug'ati, Toshkent: Akademnashr, 2013.

Dynamic algorithm of automated educational systems account objects classification

¹**Samandarov B. S.**

¹ *PhD, Department of Algorithmization and Programming Technology, Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Uzbekistan,*
e-mail: batirbeksamandarov@gmail.com

Abstract - Automated educational systems account and classification of account objects issues are investigated in this article. To analyze LMS systems that develop accounts, classification and to study them by their specification considered to be the main object in this article.

In organising educational process in higher educational institutions and in controlling it automated educational system MOODLE [1-3] is used. Professors teachers and students are using this system effectively. Teachers create their own course elements in this system and students do their tasks according to these materials. These tasks are evaluated by professor-teachers and the system itself. To cut it short, educational process is organised; student's knowledge is evaluated and educational system is controlled in this way. To learn aimed automated systems that performed in this way, to control their activity and monitoring is one of the basic objectives of present day educational system.

Dynamic algorithm of automated educational systems account classification is elaborated, and due to it, algorithm of system database research objects classification task solution is developed.

Imagine, to use the system, one of the courses are given. So, this course is prepared by professor-teachers and is put into the system; learners, students and teachers of this course are formed.

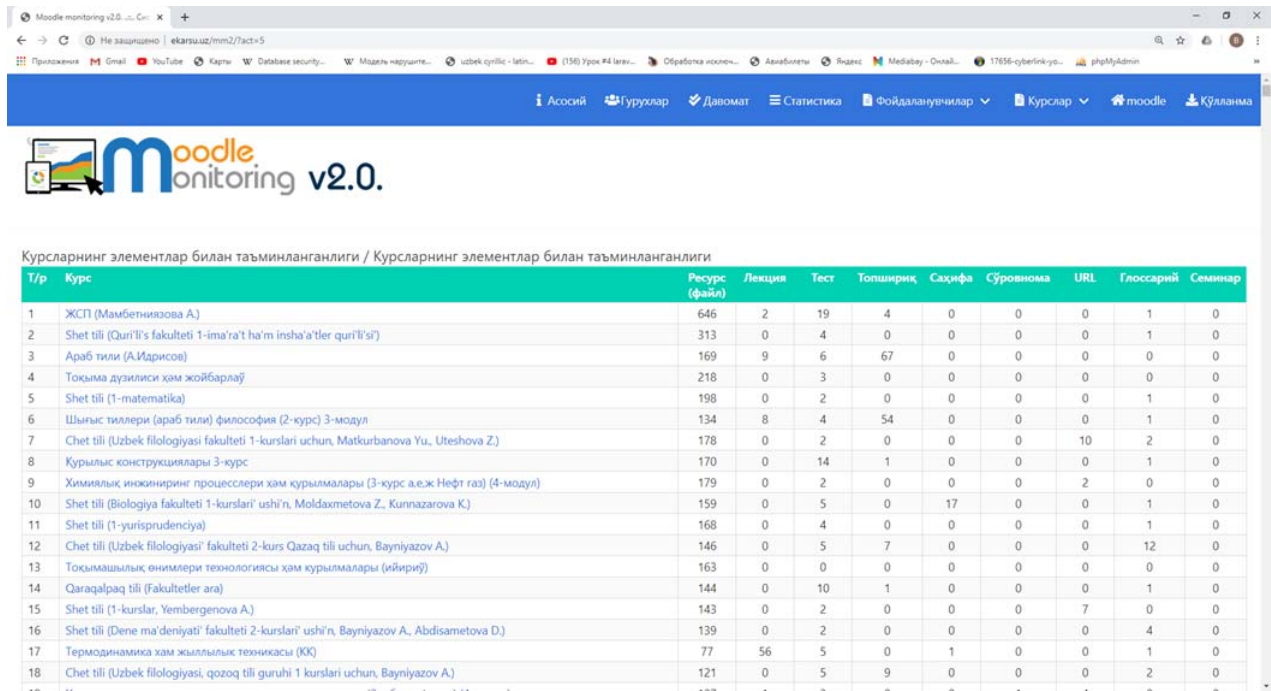
It is required: to identify if the course composition is complete; to identify when, where and which course elements are addressed by users; to solve such tasks as identification of quality index of effective using the course included to system.

Usually, to solve these issues, events list- files in chronological order used in big information systems are used. In some literature, [4-11] they are called "journal, report, registration file (eia. Log)".

Log-information consisted of special files, they are forming executed works in the system by users and programmes, as well as reports of executed events with the system and save it.

“Accounts” - the algorithm of classification of events complex elements.

Imagine, we are given the set of E and X .



Курсларнинг элементлар билан таъминланганлиги / Курсларнинг элементлар билан таъминланганлиги

T/p	Курс	Ресурс (файл)	Лекция	Тест	Топшириқ	Саҳифа	Сўровнома	URL	Глоссарий	Семинар
1	ЖСП (Мамбениязова А.)	646	2	19	4	0	0	0	1	0
2	Shet tili (Qur'it's fakulteti 1-ima'ra't ha'm insha'a'tler qur'it'si)	313	0	4	0	0	0	0	1	0
3	Араб тили (А.Иарисов)	169	9	6	67	0	0	0	0	0
4	Тоқима дўзилеси ҳам жойбарлаў	218	0	3	0	0	0	0	0	0
5	Shet tili (1-matematika)	198	0	2	0	0	0	0	1	0
6	Шығыс тиллери (араб тили) философия (2-курс) 3-модул	134	8	4	54	0	0	0	1	0
7	Chet tili (Uzbek filologiyasi fakulteti 1-kurslari uchun, Matkurbanova Yu., Uteshova Z.)	178	0	2	0	0	0	10	2	0
8	Қурылыс конструкциялары 3-курс	170	0	14	1	0	0	0	1	0
9	Химиялык инжиниринг процесслери ҳам қурымалары (3-курс а.е.ж Нефт газ) (4-модул)	179	0	2	0	0	0	2	0	0
10	Shet tili (Biologiya fakulteti 1-kurslari' ushi'n, Moldaxmetova Z., Kunazarova K.)	159	0	5	0	17	0	0	1	0
11	Shet tili (1-yurisprudenciya)	168	0	4	0	0	0	0	1	0
12	Chet tili (Uzbek filologiyasi' fakulteti 2-kurs Qazaq tili uchun, Bayniyazov A.)	146	0	5	7	0	0	0	12	0
13	Тоқимашылык өнімлери технологиясы ҳам қурымалары (ийирйў)	163	0	0	0	0	0	0	0	0
14	Qaraqalpaq tili (Fakultetler ara)	144	0	10	1	0	0	0	1	0
15	Shet tili (1-kurslar, Yembergenova A.)	143	0	2	0	0	0	7	0	0
16	Shet tili (Dene ma'deniya'ti fakulteti 2-kurslari' ushi'n, Bayniyazov A., Abdisametova D.)	139	0	2	0	0	0	0	4	0
17	Термодинамика ҳам жыллылык техникасы (ЖК)	77	56	5	0	1	0	0	1	0
18	Chet tili (Uzbek filologiyasi, qozoq tili guruhi 1 kurslari uchun, Bayniyazov A.)	121	0	5	9	0	0	0	2	0

Figure 1. The results of the assessment of the provision of courses with course elements

Here X - is the set, elements of account, the complex of events happened by system user, made works $x_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^N)$ is the i -object of table (event). Each x_i -event refers to the set and complex of $x_i \in X$. Events can be divided maximum into n classes. As the representative of each class $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ vectors defined by experts. In its turn, they refer to $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n \in E$ set.

Thus, the task can be defined briefly in such way: $x_i \in X$ - events complex of EICS should be classified in comparison with standart $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ objects.

We present calculation algorithm to solve this task.

The algorithm of task solution based on the theory of calculating marks [3].

One of the class representantive e_i is chosen;

1. Objects are chosen in sequence from events complex, and K_i objects complex suitable for chosen e_i on the basis of “Calculating marks algorithm” [3] is defined. Here, for all $i = \overline{1, n}$ situations, the process are repeated.

2. After all K_i objects complex are defined, it is considered that algorithm executed it's job.

3. Objects which is not referred to K_i , that is, events are considered to be unclassified objects.

The system is designed to ensure the quality of education by improving the organization and management of the e-learning process in educational institutions. makes it possible.

Conclusion

The classification of account objects of information controlling system in education is studied and defined mathematically. Formation of model classes and on the basis of their selection, model class objects are purposed by experts. With the help of the theory and algorithm of calculating marks, hybrid algorithm and software that classifying EICS events objects are developed.

1. *Nishanov A.H., Samandarov B.S.* Assessment model of monitoring and defining the completeness of course elements of information systems, *European Applied Sciences*. Germany, No5, 2015, p 56-58.
2. *Самандаров Б.С.* Электрон ахборот ресурслар ҳолатини баҳолашнинг адаптив модели, *Информатика ва энергетика муаммолари ғзбекистон журнали*. Тошкент, No12, 2020, 39-45 б.
3. *Ong Kiat Xin, Dalbir Singh.* Development of Learning Analytics Dashboard based on Moodle Learning Management System, *International Journal of Advanced Computer Science and Applications(IJACSA)*, No12, 2021, Issue76.
4. *Haneen Hijazi, Ghadeer Al-Kateb, Eslam Alkhawaldeh.* Investigating the Awareness and Usage of Moodle Features at Hashemite University, *International Journal of Advanced Computer Science and Applications(IJACSA)*, No11, 2020, Issue 6.
5. *Журавлев Ю.И., Камитов М.М., Туляганов Ш.Е.* Алгоритмы вычисления оценок и их применение, Ташкент: Фан, 1974, 119 с.
6. *Nishanov A.Kh., Akbaraliev B.B., Samandarov B.S., Akhmedov O.K., Tajibaev Sh.Kh.* An Algorithm for Classification, Localization and Selection of Informative Features in the Space of Politypic Data, *Webology*, Vol. 17, N: 1, June, 2020.,pp. 341-364.
7. *Corrin L., Kennedy G., Barba P.D., Bakharia A., Lockyer L., Gasevic D., Williams D., Dawson S., Copeland S.* Loop: A learning analytics tool to provide teachers with useful data visualisations. InT. Reiners, B.R. von Kinsky, D. Gibson, V. Chang, L. Irving, K. Clarke (Eds.), *Globally connected,digitally enabled. Proceedings ascilite 2015 in Perth* (pp. CP:57-CP:61).
8. *Зеленко Л.С.* Роль мониторинга учебного процесса при дистанционном обучении, *Труды XVI всероссийской научно-методической конференции*, 2009. 341-342 с.
9. *Курганская Г.С.* Методы формирования оценок сложных систем по комплексному критерию в дистанционном образовании и их визуализация, *Вычислительные технологии*, No1, 2000, Том 5.
10. *Alhazmi A. K. and Rahman A. A.* Why LMS failed to support student learning in higher education institutions, *IEEE Symposium. ELearning, E-Management E-Services*, October 2012, pp. 1-5.
11. *Aldowah H., Al-Samarraie H., and Fauzy W. M.* Educational data mining and learning analytics for 21st century higher education: A review and synthesis, *Telematics and Informatics*, vol. 37, April 2019, pp. 13-49.

Carleman's formula for the solutions of the Poisson equation

¹Sattorov E., ²Ermamatova Z., ³Isroilov S.

¹ *Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: Sattorov-e@rambler.ru

² *Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: Ermamatova-Z@rambler.ru

³ *Samarkand Branch of Toshkent State University of Economics, Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: Isroilov-S@mail.ru

In this work we propose an explicit formula for reconstruction of a solution of the Poisson equation

$$-\Delta U(x) \equiv -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = f(x), \quad (1)$$

a domain from its values and the values of its normal derivative on part of the boundary, i.e., we give an explicit continuation formula of a solution of the Cauchy problem for the Poisson equation.

The Cauchy problem for the Poisson equation (1) is well-known to be ill-posed [1], [2], [11]. It has applications in many different areas such as plasma physic, electrocardiography, and corrosion non-destructive evaluation (e.g., [3], [5], [8], [10]).

The result established by G.M.Goluzin, V.I.Krylov, V.A.Fok, and F.M.Kuni in the theory of holomorphic functions of one variable [9] is a multidimensional analog of the Carleman-type formulas [4].

Introduce the following notations: R^3 is the third dimensional real Euclidean space,

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3, \quad x' = (x_2, x_3), \quad y' = (y_2, y_3) \in R^2,$$

$$s = \alpha^2 = |y' - x'| = (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2, \quad r^2 = s + (y_1 - x_1)^2 = |y - x|^2,$$

Ω is a bounded simply connected domain in R^3 with boundary $\partial\Omega$ composed of a compact connected part T of the plane $y_3 = 0$ and a smooth Lyapunov surface S lying in the half-space $y_3 > 0$, with $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = S \cup T$.

Theorem. Let $f \in L_p(\Omega_\rho)$, $(p > 3)$, $U(y) \in C^2(\Omega_\rho) \cap C^1(\bar{\Omega}_\rho)$ satisfied of Poisson equation and

$$U(y) = f_1(y), \quad \frac{\partial U}{\partial n}(y) = f_2(y), \quad y \in S, \quad (2)$$

where $f_1(y)$ and $f_2(y)$ are given functions of the class $C(S)$. Then the Carleman formulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial^i U(x)}{\partial x_j^i} &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{\partial^i U_\sigma(x)}{\partial x_j^i} = \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega_\rho} f(y) \frac{\partial^i \Phi_\sigma(y-x)}{\partial x_j^i} dy - \int_S \left\{ f_1(y) \frac{\partial^i}{\partial x_j^i} \frac{d\Phi_\sigma(y-x)}{dn} - f_2(y) \frac{\partial^i \Phi_\sigma(y-x)}{\partial x_j^i} \right\} dS_y \right], \end{aligned} \quad (3)$$

are valid for every $x \in \Omega_\rho$, where $i = 0, 1, j = 1, 2, 3$, $\frac{\partial^0 U_\sigma}{\partial x_j^0} = U_\sigma$, $\frac{\partial^0 \Phi_\sigma}{\partial x_j^0} = \Phi_\sigma$, and the convergence in (3) is uniform on compact sets in Ω_ρ ,

where

$$\begin{aligned} -2\pi^2 \Phi_\sigma(y-x) &= \int_0^\infty \operatorname{Im} \left[\frac{e^{aw^2} E_\rho(\sigma w)}{w} \right] \frac{du}{\sqrt{s+u^2}} \\ \Psi_\sigma(y-x) &\equiv \frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}(y-x) = \int_0^\infty \operatorname{Im} [e^{aw^2}] \frac{du}{\sqrt{s+u^2}}, \end{aligned} \quad (4)$$

References

1. Alessandrini G., Rondi L., Rosset E., and Vessella S.. The stability for the Cauchy problem for elliptic equations, Inverse problems, 25 (2009), p. 123004.
2. Belgacem F. B. Why is the Cauchy problem severely ill-posed?, Inverse Problems, 23 (2007), p. 823.
3. Blum J. Numerical simulation and optimal control in plasma physics, New York, NY; John Wiley and Sons Inc., 1989.
4. Carleman T. Les fonctions quasi analytiques, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
5. Colli-Franzone P., Guerri L., Tentoni L., Viganotti L., Baruffi S., Spaggiari S., and Taccardi B. A mathematical procedure for solving the inverse potential problem of electrocardiography. Analysis of the time-space accuracy from in vitro experimental data, Mathematical Biosciences, 77 (1985), pp. 353-396.
6. Fasino D. and Inglese G.. An inverse Robin problem for Laplace's equation: theoretical results and numerical methods, Inverse problems, 15 (1999), p. 41.
7. Fok V.A. and Kuni F.M. "On the introduction of a 'suppressing' function in dispersion relations Dokl. Akad. Nauk SSSR, 127, No. 6, (1959), p. 1195-1198.

8. *Mathon, R.L. Johnston.* The approximate solution of elliptic boundary value problems by fundamental solutions, SIAM J. Numer. Anal. 14 (1977) 638 - 650.
9. *Goluzin G. M. and Krylov V.I.* "A generalized Carleman formula and its application to analytic continuation of functions," Vat.Sb., 40, No.2, (1933), p.144-149 .
10. *Hadamard J.* The Cauchy Problem for Linear Partial Differential Equations of Huperbolic Type [Russian translation], Mir, Moscow (1978), 352 p.
11. *Inglese G.* An inverse problem in corrosion detection, Inverse problems, 13 (1997), p. 977.

Dynamics of some two-dimensional cubic mappings

¹Seytov Sh.J. ²Kutlumuratov R.R.

¹*Tashkent state university of economics, Turtkul faculty, Turtkul, Uzbekistan,*

e-mail: sh-seytov@mail.ru

²*Tashkent state university of economics, Turtkul faculty, Turtkul, Uzbekistan*

e-mail: ravshanbektdiutf@gmail.com

The present paper is devoted to the investigation of the multi-dimensional case of some cubic mappings. We investigated the properties of the sets of Mandelbrot and Julia for the two-dimensional case of the mapping on the plane to itself. The sets of Mandelbrot and Julia help to define asymptotical behavior of the trajectories of certain mappings. The analytical solutions of the equations for finding fixed points and the computer simulations for describing the sets of Mandelbrot and Julia are the main results of this paper.

The study of dynamics of the mapping

$$z \rightarrow z^3 + c$$

on the complex plane to itself and its various generalizations are devoted hundreds of papers beginning the classical researches of G. Julia, P. Fatou, B. Mandelbrot, Feigenbaum [3], J. Yorke , R. L. Devaney [2], and A. N. Sharkovsky [1]. In the present time, the theory of one-dimensional mapping is the most learned part of the general theory of dynamical systems. This paper is devoted one of the possible generalizations cases of the cubic mapping on R^2 to itself.

Let $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in R^n, I = 1, 2, \dots, n$ and $\pi : I \rightarrow I$ some permutations. We learn this

$$x_k = x_{\pi(k)}^3 + c_{\pi(k)}, k = \overline{1, n} \quad (1)$$

on R^n to itself is **multi - dimensional case** of the cubic mapping. There is learned of this problem for some quadratic mappings in [1]. In this paper we investigate for cubic mappings. First we learn when $n = 2$. In this case mapping (1) is

$$F_{c_1 c_2} : \begin{cases} x' = y^3 + c_1, \\ y' = x^3 + c_2. \end{cases} \quad (2)$$

where $(x, y) \in R^2$ and $(c_1, c_2) \in R^2$.

Definition 1. The filled Julia set $K(F_{c_1 c_2})$ of a mapping (2) is defined as the set of all points (x, y) , that have bounded orbit with respect to mapping (2).

$$K(F_{c_1 c_2}) = \{(x, y) : F_{c_1 c_2}^n(x, y) \not\rightarrow \infty \text{ as } n \rightarrow \infty\}$$

Definition 2. The Julia set is the common boundary of the filled Julia set

$$J(F_{c_1 c_2}) = \partial K(F_{c_1 c_2}).$$

Definition 3. The Mandelbrot set $M_{F_{c_1 c_2}}$ for the mapping (2) is the set of all points (c_1, c_2) on the parameter plane, which the orbits of the all critical points are bounded.

Theorem 1. If the mapping (2) has fixed points that $(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \dots, (x_n^*, y_n^*)$ and let the points having a maximum and minimum coordinate abscissa of them (x_{max}^*, y_{max}^*) and (x_{min}^*, y_{min}^*) then filled Julia set consists of rectangle that vertices (x_{max}^*, y_{max}^*) and (x_{min}^*, y_{min}^*) .

Theorem 2. The orbits of all points on the filled Julia set tend to an attractive fixed point or periodic cycle with period two. It means the orbits of all points on the filled Julia set are regular.

References

1. Ganikhodzhaev R.N., Narziyev N.B., Seytov Sh.J. Multi-dimensional case of the problem of Von Neumann - Ulam. Uzbek Mathematical Journal Vol. 3, Issue 1, 11-23 (2015).
2. Devaney R. L. A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment. Boston, (1992).
3. Feigenbaum M.J. Qualitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. J. Stat. Phys. Vol. 19, Issue 1, 25-52 (1978).

Integration of the loaded modified KdV equation with source

¹ Urazboev G. U., ² Baltueva I.I., ³ Shamuratov E.A.

¹ Urgench state university, Urgench, Uzbekistan,
e-mail: gayrat71@mail.ru

² Urgench state university, Urgench, Uzbekistan,
e-mail: iroda-b@mail.ru

³ Urgench state university, Urgench, Uzbekistan, e-mail: shamuratovelyor68@gmail.com

In this work, we consider the system of equations

$$\begin{cases} u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} - \gamma(t)u(0, t)u_x = \sum_{k=1}^{2N} (\$_{k1}^2 - \$_{k2}^2), \\ L(t)\$ _k = \xi_k \$ _k, \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \quad x \in R, \end{cases} \quad (1)$$

where $\$ _k = (\$ _{k1}(x, t), \$ _{k2}(x, t))^T$ -eigenvector-function of the operator $L(t) \equiv i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -iu \\ -iu & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}$, corresponding to the eigenvalue ξ_k , $\gamma(t)$ -is arbitrary bounded continuous function. It is assumed that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \$ _{k1} \$ _{k2} dx = A_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \quad (2)$$

given continuous, nonzero function $A_k(t)$, satisfy the following condition $A_k(t) = A_n(t)$ at $\xi_k = -\xi_n$.

The equation (1) is considering with initial

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

where initial real value function $u_0(x)$ satisfy the following properties:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) \cdot |u_0(x)| dx < \infty$
2. The equation $L(0)y \equiv \begin{pmatrix} i \frac{d}{dx} & u_0 \\ u_0 & -i \frac{d}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $x \in R^1$ has N simple eigenvalues and it does not spectral singularities.

Let us assume that function $u(x, t)$ is sufficient smooth, tends to its limit rapidly enough when $x \rightarrow \pm\infty$, and it satisfies condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left((1 + |x|)u(x, t) + \sum_{k=1}^3 \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \right| \right) dx < \infty. \quad (4)$$

Here, we show the way to construct the solution of the Cauchy problem for the system of equations (1)-(3) in the class (4).

Note that completed integrability of the modified Korteweg-de Vries (mKdV) equation the loaded modified KdV were established in the class of "rapidly decreasing" functions using the method of the inverse scattering problem in [1-2].

The goal of this paper is to study the integration of the loaded mKdV equation with source in the class of "rapidly decreasing" functions in terms of inverse scattering problem.

References

1. *M. Wadati*, The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. Japan, 32(1972), 16–81.
2. *Feckan Michal, Urazboev Gayrat, Baltaeva Iroda* Inverse scattering and loaded modified Korteweg-de Vries equation. Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика 15 (2), 176-185, 2022

Regularization of the problem of integral geometry on families of semicircles and parabolas

¹Uteuliev N., ²Djaykov G., ³Seidullaev A.

¹ *Nukus branch of Tashkent University of Information Technologies, Nukus, Uzbekistan,*
e-mail: utewlievn@mail.ru

² *Tashkent University of Information Technologies, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: gafur_djaykov@mail.ru

³ *Karakalpak state university, Nukus, Uzbekistan,*
e-mail: abat_1984@inbox.ru

In this paper we consider modeling problems of integral geometry on families of spherical and parabolic curves. In the first part of this paper we consider problems of integral geometry on families of parabolas. In the second part of the paper we present a regularization of the problem of integral geometry on a family of semicircles [1].

We denote:

$$L_H = \{(x, y) : x \in (-\infty; \infty), 0 \leq \eta \leq y \leq H, H < \infty\},$$

$$\overline{L_H} = \{(x, y) : x \in [-\omega; \omega], 0 \leq \eta \leq y \leq H, H < \infty\}.$$

Problem 1. *In the strip L_H restore the function of two variables $u(x, y)$, if the integrals of it are known over the curves of the family $\{\Upsilon(x, y)\}$*

$$\int_{\Upsilon(x,y)} u(\xi, \eta) d\xi = f(x, y) \quad (1)$$

where an arbitrary curve of the family is represented by the expression

$$\Upsilon(x, y) = \{(\xi, \eta) : x - \xi = \sqrt{y - \eta}, 0 \leq \eta \leq y\}.$$

In work [2] obtained an explicit formula for inversion, which is expressed through the right-hand side of equation (1), but the stability of this problem has not been proved. In this paper we present an estimate of the stability of this problem in the space L_2 . Such problems are most often used in modeling seismic problems.

Theorem 1. *Let the function $f(x, y)$ known in the strip L_H . Let's consider the regularizing operator for equation (1)*

$$R(u, \alpha) = \mathcal{F}^{-1} \left[\hat{u} \cdot e^{-\alpha_1^2 \lambda^2} \right].$$

Then the solution of problem 1 in the class of twice continuously differentiable finite functions with a rectangular carrier $\bar{L}_H$ in the strip L_H has the representation

$$u_{\alpha_1}(x, y) = \frac{1}{2\alpha_1 \sqrt{\pi^3}} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{y-\eta-(x-\xi)^2}{4\alpha_1^2}} \cos \frac{(x-\xi)\sqrt{y-\eta}}{2\alpha_1^2} \frac{f(\xi, \eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\xi d\eta$$

and the inequality is satisfied

$$\|u_{\alpha_1} - u\|_{L_2(\bar{L}_H)} \leq C_3 \alpha_1^2 \|f\|_{L_2(\bar{L}_H)},$$

where $\alpha_1 > 0$ – regularization parameter, $\mathcal{F}^{-1}$ – the inverse Fourier transform, C_3 – constant.

Problem 2. *We consider in the strip L_H restore the function of two variables $u(x, y)$, if the integrals of it are known over the curves of the family $\{\Upsilon_1(x, y)\}$*

$$\int_{\Upsilon(x, y)} u(\xi, \eta) d\xi = f(x, y), \quad (2)$$

where an arbitrary curve of the family is represented by the expression

$$\Upsilon_1(x, y) = \{(\xi, \eta) : (x - \xi)^2 + \eta^2 = y^2, 0 \leq \eta \leq y \leq H\}.$$

Theorem 2. *Let the function $f(x, y)$ known in the strip L_H . Then the solution of problem 1 in the class of twice continuously differentiable finite functions with in the strip L_H has a performance*

$$u_{\alpha_2}(x, y) = \frac{1}{\pi y} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta M(\lambda, \alpha_2) \cdot e^{-ix\lambda}}{\sqrt{y^2 - \eta^2}} \cdot \hat{f}(\lambda, \eta) d\lambda d\eta$$

where $M(\lambda, \alpha_2) = \frac{ch^2(\lambda\sqrt{y^2 - \eta^2})}{ch^2(\lambda\sqrt{y^2 - \eta^2}) + \alpha_2(\lambda^2 + 1)}$, $\alpha_2 > 0$ – regularization parameter.

References

1. Begmatov Akb. H., Djaykov G. M. Reconstruction of a function from its spherical means, Reports of Russian Higher Education Academy of Sciences, vol. 1, no. 20, 2013, pp. 6–16. (In russian)
2. Uteuliev N. U., Djaykov G. M., Seidulleev A. K. Inversion formula for the problem of integral geometry on families of parabolas, AIP Conference Proceedings, 2365(1):070004, 2021.

Оценка структурных свойств материалов при нагружении**¹Акифьев К.Н., ²Саченков О.А., ³Стаценко Е.О., ¹Смирнова В.В.,****¹Большаков П.В., ¹Прунов В.В.**

¹ *Институт вычислительной математики и информационных технологий, НИЛ медицинского интернета вещей, Казанский Федеральный Университет, Россия*
e-mail: kirill.akifyev@mail.ru

² *Институт вычислительной математики и информационных технологий, Научно-исследовательский центр Центр превосходства Специальная робототехника и искусственный интеллект, Казанский Федеральный Университет, Россия*
e-mail: 4works@bk.ru

³ *Институт геологии и нефтегазовых технологий, НИЛ Современные геоинформационные и геофизические технологии, Казанский Федеральный Университет, Россия*
e-mail: e.statsenko@yahoo.com

В работе представлено устройство и метод для определения структуры материала или образцов при одноосном сжатии и представлен способ его использования. Представленное техническое решение предназначено для получения информации о структуре, механических свойствах неоднородных материалов и образцов, при проведении деформирования под действием одноосного сжатия, и сканирования с помощью рентгеновских излучений. Целью работы является реализация методики при нагружении образца и синхронизированном сканировании РКТ, а также методики обработки полученных данных. Сущностью заявленного технического решения является устройство для определения структуры материала образца при одноосном сжатии. На свободные поверхности исследуемого образца предварительно размещается координатная сетка, над верхней крышкой на шпильки установлены четыре гайки для передачи сжимающего усилия. С помощью разработанного программного комплекса на основе данных компьютерной томографии определяют сетку представительных объемов, для назначенной сетки представительных объемов происходит автоматизированное определение эпюры перемещений. На основе поля перемещений определяют тензор деформаций для каждого представительного объема, далее для каждого объема, с учетом деформированного состояния, на каждом шаге нагружения определяют пористость, тензор структуры и тензор упругих констант. Для нахождения узловых точек сетки на образце на томографии был использован детектор углов Харриса для трехмерного случая [1]. На представленное устройство и метод получен патент на изобретение [2]. Исследовались полимерные образцы различной пористости, с нанесенной на внешнюю поверхность сеткой из медной проволоки толщиной 90 микрон. Отдельно сегментировалась сетка на каждом шаге нагружения, после чего по найденным точкам поля перемещений производилась аппроксимация. По найденным аппроксимирующим функциям восстанавливались перемещения в представительных объемах, определялись тензор деформаций. Для построения тензора деформаций представительного объема были определены необходимые компоненты векторов перемещений. Для аппроксимации использовались билинейная функция пространственных координат. Эти действия проводились для каждого шага нагружения [3]. Таким образом, были получены данные о распределении структурных параметров образца, поле перемещений и деформаций и внешней нагрузки.

Литература

1. Саченков О.А., Большаков П.В., Герасимов О.В., Стаценко Е.О., Акифьев К.Н. Устройство для определения структуры материала или образцов при одноосном сжатии и способ его использования, Патент на изобретение 2755098 С1, 13.09.2021. Заявка с 2021103527 от 12.02.2021.
2. Большаков П.В., Акифьев К.Н., Шарафутдинова К.Р., Саченков О.А. Исследование структуры неоднородных образцов компьютерным томографом при осевом сжатии, Механика композици-

онных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. сборник трудов, Москва, 2021, С. 16-22.

3. Hafiz D.A., Bayumy A.B.Y., Sheta W.M., Hanan A.H. Interest point detection in 3D point cloud data using 3D Sobel-Harris operator, International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2015, Vol. 29, No. 7, pp. 1555014.

Численное моделирование диффузионных процессов в двухкомпонентных нелинейных средах с переменной плотностью и источником

¹Арипов М.М., ²Нигманова Д.Б.

¹ *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: mirsaidaripov@mail.ru

² *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: dill198912@gmail.com

Нелинейные задачи представляют собой большую трудность для изучения. Аналитические методы здесь, как правило, не работают. В этой ситуации необходимо опираться только на вычислительные методы. Между тем математические модели генерирующиеся современными проблемами науки и техники, как правило, нелинейные. Это обстоятельство-еще одна причина этого вычислительного эксперимента в настоящее время становится почти единственным средством проведения теоретических исследований в прикладных задачах. Рассматривается система реакции-диффузии с двойной нелинейностью с переменной плотностью, численно исследуются системы реакции-диффузии с двойной нелинейностью.

Задача описывается следующим уравнением в области $Q = \{(t, x) : 0 < t, x \in R^N\}$

$$\begin{aligned} |x|^{-l} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nabla \left(|x|^n u^{m_1-1} |\nabla u^k|^{p-2} \nabla u^{l_1} \right) + |x|^{-l} \varepsilon u^{p_1} v^{q_1}, \\ |x|^{-l} \frac{\partial v}{\partial t} &= \nabla \left(|x|^n v^{m_2-1} |\nabla v^k|^{p-2} \nabla v^{l_2} \right) + |x|^{-l} \varepsilon u^{p_2} v^{q_2} \end{aligned} \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad v(0, x) = v_0(x) \geq 0, \quad x \in R^N \quad (2)$$

где, $k \in R$, $m_1, m_2 > 1$, $p_i, q_i \geq 1$, $p \geq 2$, $l_1, l_2 > 0$ положительные действительные числа, $\nabla(\cdot) = \text{grad}(\cdot)$ и, $u_0(x) \geq 0, v_0(x) \geq 0$ - нетривиальная, неотрицательная, ограниченная и достаточно гладкая функция.

Система (1) описывает разные физические процессы в двухкомпонентной нелинейной среде при наличии источника мощность которого равняется $u^{p_1} v^{q_1}$, $u^{p_2} v^{q_2}$. Например, она описывает процессы реакции диффузии, теплопроводности, горения, политрофической фильтрации жидкости и газа с мощностью источника, равным $u^{p_1} v^{q_1}$, $u^{p_2} v^{q_2}$.

В области, где $u = 0$, $v = 0$ или $\nabla u = 0$, $\nabla v = 0$, система уравнений (1) вырождается в уравнениях первого порядка. Поэтому необходимо исследовать слабое решение, потому что в таком случае система уравнений (1) не имеет смысла в классическом смысле. Прежде чем численно решить и визуализировать процесс, описываемым системам уравнений (1), необходимо изучить различные качественные свойства, такие как конечную скорость возмущения, локализация решения, асимптотика решений и фронта, зависящего от значений параметров система уравнений (1).

Поведение решений задачи (1), (2) существенно зависит от значений числовых параметров и соотношений между числовыми параметрами, входящими в рассматриваемое уравнение, свойств функций $u_0(x)$, $v_0(x)$ [1,3]. Известно [1], что за счет интенсивного энерговыделения процесс химической реакции (горения) может происходить в

режиме с обострением [1]. Другими словами, задач Коши (1), (2) могут не иметь глобального по времени решения и в некоторый момент времени $t = T_0 < +\infty$, который называется моментом обострения амплитуды становится бесконечно большой

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(t, x) \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \bar{T}_0.$$

Эта задача изучалась многими авторами и в частном случае, когда $p = 2$. В частности, Самарский А.А., Курдюмов С.П. и др. [2-6] получили условие глобальной разрешимости задачи Коши для вырожденного параболического система.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} (u^{m_1-1} \nabla u) + v^{q_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div} (v^{m_2-1} \nabla v) + u^{p_2} \quad (3)$$

Они разработали теорию и практику изучения задач о разрушении применительно к системе (3) в случае, когда $p = 2$ или $m = 1$. Неограниченные решения были названы режимом разрушения. Разработаны специальные методы исследования неограниченных решений нелинейных параболических уравнений, позволяющие проводить достаточно детальное исследование неограниченных решений на примере уравнения теплопроводности с источником общего вида.

А. В. Мартыненко, А. Ф. Тедеев [9] изучали для вырождающегося параболического уравнения с источником и неоднородной плотностью вида

$$\begin{aligned} \rho(x) u_t &= \operatorname{div} (u^{m-1} |Du|^{\lambda-1} Du) + \rho(x) u^p \\ (x, t) &\in Q_T = \mathbb{R}^N \times (0, T), \quad T > 0, \quad N \geq 1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (5)$$

В работе [9] рассматривалась задача Коши с начальной функцией, медленно стремящейся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Были найдены условия существования и несуществования решения задачи Коши глобально по времени, которые в значительной мере зависят от поведения начальной функции при $|x| \rightarrow \infty$. В случае глобальной разрешимости были получены точная оценка решения при больших значениях времени.

Они нашли условия на параметры задачи, при которых решение задачи Коши взрывается за конечное время. Более того, получена точная универсальная, т.е. не зависящая от начальной функции, оценка решения вблизи времени обострения.

Мотивацией для рассмотрения такого система уравнений является то, что оно является вырождающимся уравнением в частных производных и поэтому является источником для появления новых нелинейных эффектов таких как конечная скорость распространения возмущения, пространственная локализация ограниченных и неограниченных решений возникновению которых впервые были установлены в работе [1] для частного значения числовых параметров $n = q_i = p_i = 0, k = 1, p = 2$.

При численном решении задачи уравнение аппроксимировалось на сетке по неявной схеме переменных направлений (для многомерного случая) в сочетании с методом баланса. Итерационные процессы строились на основе метода Пикара, Ньютона и специальной линеаризации.

В специальном случае линеаризации для итерации члены системы (1) представляются как

$$u_i^{p_1} v_i^{q_1} \sim u_{i-1}^{p_1-1}(t) u \cdot v_{i-1}^{p_1-1}(t) v, \quad u_i^{p_2} v_i^{q_2} \sim u_{i-1}^{p_2-1}(t) u \cdot v_{i-1}^{q_2-1}(t) v, \quad i = 1, 2$$

где $u_0(t)$, $v_0(t)$ решения системы обыкновенного дифференциального уравнения

Результаты вычислительных экспериментов показывают, что все перечисленные итерационные методы эффективны для решения нелинейных задач и приводят к нелинейным эффектам, если в качестве начального приближения использовать решения

автомодельных уравнений, построенные методом нелинейного расщепления и методом стандартное уравнение [7, 8].

$$\frac{du_0}{dt} = -u_0^{p_1} v_0^{q_1}, \quad \frac{dv_0}{dt} = -u_0^{q_2} v_0^{q_2}$$

Литература

1. *Samarskiy A.A., Sobol I.M.* Examples of the numerical calculation of temperature waves. Zh. Vychisl. mat, and mat. fiz., 1963, 3, No. 4, 702-719.
2. *Арипов М.М., Садуллаева Ш.А* К свойствам решений системы реакции диффузии с двойной нелинейностью, переменной плотностью и источником. ДАН РУз, 2016 г.
3. *A. A. Samarskii, S. P. Kurdyumov., V. A. Galaktionov, A. P. Mikhailov* Blow up in quasilinear parabolic equations M., 1986 437 p.
4. *M. M. Aripov* Methods of standard equations for solving nonlinear boundary value problems. Tashkent. Fan, 1988, 137 p.
5. *Aripov M. M., Sadullaeva Sh. A* An asymptotic analysis of a self-similar solution for the double nonlinear reaction-diffusion system. Nanosystems-Physics Chemistry Mathematics, vol. 6, 6, 2015, pp. 793-802.
6. *Aripov M. Sadullaeva Sh. A.* Computer modeling of nonlinear diffusion processes. Tashkent, University, 2020, 670 p.
7. *Kersner R, Reyes J. Tesei A.* One a class of nonlinear parabolic equations with variable density and absorption Advances Dif. Equations 2002, vol. 7, 155-176.
8. *Aripov M.* Approximate Self-similar Approach for Solving of Quasilinear Parabolic Equation, Experimentation, Modeling and Computation in Flow, Turbulence and Combustion. Wiley, 1997, vol. 2, 19-26
9. *Martynenko A. V. and. Tedeev A. F.* On the behavior of solutions to the Cauchy problem for a degenerate parabolic equation with inhomogeneous density and a source, Comput. Math. Math. Phys. 48 (2008), no. 7, 1145–1160.

Новые подходы к проектированию изделий для аддитивного производства.

^{1,2}Большаков П.В., ¹ Харин Н.В., ¹Акифьев К.Н., ¹ Рудый Е.А., ³ Саченков О.А.

¹ *Институт вычислительной математики и информационных технологий НИЛ медицинского интернета вещей, Казанский Федеральный Университет, Россия*
e-mail: bolshakov-pavel@inbox.ru

² *Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, Россия*

³ *Институт вычислительной математики и информационных технологий, Научно-исследовательский центр Центр превосходства Специальная робототехника и искусственный интеллект, Казанский Федеральный Университет, Россия*
e-mail: 4works@bk.ru

Аддитивные технологии находят все большее распространение в производстве изделий. Данный подход производства позволяет проектировать структуру самого изделия адаптивной к внешним силовым воздействиям.

Авторами был обобщён ранее разработанный алгоритм к проектированию ферменного эндопротеза [1,2], которые представлен в работе. Конструкция рассматривается как композиция некоторых элементарных ячеек, обладающих микроархитектурой. Сама микроархитектура описывается некоторым вектором параметров. На основе вычислительных экспериментов вектор параметров микроархитектуры ставится в

соответствие физико-механическим свойствам. На основе этой функциональной зависимости может быть определена инициализирующая вектор-функция. Так, варьируя вектор параметров варьируются и физико-механические свойства базового элемента и, как следствие, всей конструкции в целом.

Сформулирован итерационный процесс структурного проектирования конструкции, в рамках которого использована гипотеза соосности тензора напряжений и осей ортотропии элементарной ячейки. Выходными данными являются векторно-скалярные поля параметров, на основании которых происходит реконструкция геометрии, а также готовые к производству stl-файлы. Предлагаемый подход был реализован для пористой элементарной ячейки с выраженной эллиптичностью в одном направлении.

Работа выполнена в рамках программы стратегического академического лидерства “Приоритет-2030”.

Литература

1. *Большаков П.В., Кашапова Р.М., Саченков О.А.* О проектировании ферменного эндопротеза. Современные проблемы теории машин. 2017. № 5., ст. 42 – 44.
2. *Большаков П.В., Саченков О.А.* Погрешности формы при аддитивном производстве. Современные проблемы теории машин. 2017. № 5., ст. 85 – 87.

Методы обработки и анализа данных стабилотрии

¹Дакинова М.В., ¹Смирнова В.В., ¹Прунов В.В.,

¹Балтина Т.В., ¹Саченков О.А.

¹ Казанский федеральный университет, г. Казань, ул. Кремлевская 18, Россия
e-mail: 4works@bk.ru

Диагностировать заболевание и реабилитировать человека при патологии в постуральной системе помогает развивающийся и относительно новый метод, носящий название компьютерная стабилотрия. Стабилотрия, исследующая характеристику поддержания равновесия человеком, является одним из главных диагностических и верификационных методов исследования в направлениях клинической медицины как: ортопедия, неврология, кинезиология, спортивная медицина, токсикология, анестезиология, офтальмология. Стабилотрия и ее варианты применяются во многих областях медицины, как метод исследования функций организма, прямо или косвенно связанных с поддержанием равновесия. Значительное место в современных исследованиях больных с различной патологией мозжечка занимает стабилотрия и некоторые производные тесты. Тест Ромберга позволяет быстро обнаружить возросшую роль зрения в поддержании баланса, например у больных со спинocerebellарной дегенерацией.

В исследовании поднят вопрос применения нового метода спектрального анализа сигналов, посредством которого выявляются новые закономерности и показатели, не присущие преобразованию Фурье. Метод преобразования Гильберта – Хуанга с каждым годом все больше находит свое применение в различных областях науки. Его применимость для нестационарных сигналов играет важную роль при спектральной оценке сигналов. Информативность и эффективность оценки повышается, так как методика построения базиса данного преобразования полностью избавляет нас от значительных ограничений, которые не позволяют нам изучать данные Фурье преобразованием.

Спектральный анализ представляет собой математическую оценку колебаний центра давлений. Как было написано ранее, равновесие человеческого тела контролируется вестибулярной, зрительной и проприоцептивной системами. Таким образом, процесс поддержания равновесия человека можно представить как суперпозицию колебаний на разных частотах. Кроме того, в соответствии с частотами может быть определена система, задействованная при поддержании равновесия.

Согласно наиболее высокочастотные колебания связаны с движениями голеностопного сустава и проприоцептивными сигналами, а общая спектральная энергия представляет собой низкочастотные колебания тела. В ходе исследования спектр был разделен на три интервала 0-0,5, 0,5-2 и 2-20 Гц. В низкие частоты (до 0,1 Гц) связаны со зрительным контролем, диапазон средне-низких частот (0,1 - 0,5 Гц) – с вестибулярными рефлексам, средневысокие частоты (выше 0,5 Гц) - с соматосенсорной активностью, а высокие частоты - с центральной нервной системой. Дополнительно было показано, что низкие частоты (до 0,5 Гц) в основном отвечают за зрительно-вестибулярную регуляцию, средние частоты (0,5 - 2 Гц) - за мозжечковую регуляцию, а высокие частоты (выше 2 Гц) - за проприоцептивную регуляцию. Следовательно, спектральное разложение сигнала определяет качество анализа.

Методика основана на вычислении эмпирической модовой декомпозиции (ЭМД) и построении спектра Гильберта. Основной целью преобразования Гильберта является определение уникального аналитического сигнала из реального сигнала для вычисления мгновенных свойств. Алгоритм получения мгновенных значений сигнала заключается в том, что, если определен комплексный сигнал, из него можно извлечь амплитуду и фазу. Обе характеристики зависят от времени, поэтому их называют мгновенными. Чтобы вычислить спектр Гильберта, необходимо вычислить мгновенную энергию и мгновенную частоту сигнала. В результате спектрального разложения Гильберта исходные данные могут быть представлены в терминах энергия-время-частота. Для анализа данных стабิโลграммы в зависимости время – энергия, данные спектра Гильберта были разделены по частотам. Основываясь на физиологическом происхождении колебаний, частотная область была разделена на следующие интервалы: 0 - 0,1 Гц, 0,1 - 0,5, 0,5 - 2 Гц.

Это преобразование позволяет соотнести исходные данные с тремя энерго-временными спектрами. Каждый спектр основан на частотном интервале и может быть понят как реакция на определенный тип обратной связи. А именно, существуют зрительный контроль, вестибулярные рефлекс и проприоцептивная активность, соответствующие интервалам.

В работе исследуются стабิโลметрические данные анонимных лиц с использованием части методики компьютерной стабิโลграфии, разработанной в Военно – медицинской академии, которая включает в себя пробы с открытыми и закрытыми глазами. Для обоих тестов анализировались сагиттальные колебания. Реализация методов осуществлялась в программном обеспечении MATLAB.

Таким образом, была осуществлена оценка компьютерной стабิโลметрии в зависимости от методики исследования, написана программа для обработки результатов оценки, были установлены возможности для практического использования разработанной методики в клинических исследованиях, а также была произведена оценка сигналов ЭМГ относительно активированной и деактивированной зрительной регуляции. Показано, что спектральный анализ, основанный на преобразовании Гильберта – Хуанга позволяет найти новые закономерности и возможности исследования стабิโลметрических и электромиографических данных, что, несомненно, является важным результатом в развитии новых диагностических и реабилитационных методов постуральной устойчивости.

Моделирование биомеханических систем на основе спайковых нейронных сетей

¹Иванова А.Д., ¹Харин Н.В., ¹Вансков П.С.,

¹Хаматнурова Р.А., ¹Саченков О.А.

¹ Казанский федеральный университет, г. Казань, ул. Кремлевская 18, Россия
e-mail: ivanovaanastasya0449@gmail.com

Нейронные сети широко распространены во всем мире для обработки данных. Исторически модель персептрона является одной из первых математических моделей биологического нейрона. Разработка таких моделей продолжается. Спайковые нейронные сети в настоящее время являются наиболее близким типом сети для описания нейрона с точки зрения биологического происхождения. Подходы, основанные на таком типе сетей, получают все большее распространение в задачах стабилизации и управления. Ряд авторов применяют такие модели к агентному управлению, но с применением таких моделей, происходящих на агентном макроуровне. Чаще всего для агента определены два управляющих воздействия - правый и левый локомоторы и сенсорная система, определяемая углом обзора. В этом случае спайковая сеть запускает каждый локомотор. А ориентация агента определяется разностью скоростей левого и правого локомоторов. Распространена модель и одноколесного агента с аналогичной сенсорной системой и управление агентом основаны на обратной связи, скорости и ориентации одноколесного велосипеда. В обоих случаях имеется только один вид обратной связи - реакция на окружающую среду. На самом деле в реальных биологических системах существует ряд обратных связей в системах управления. Более того, эти механизмы обратной связи существуют в виде многоуровневых систем в реальных биологических организмах. Это означает, что одни обратные связи осуществляются по паре сенсор-мотонейрон, а другие через центральную нервную систему. Этот механизм называется рефлексными дугами. По этой причине исследование было посвящено моделированию нейромеханической модели с обратной связью не только через датчик, но и через другие рефлексные дуги.

Представлено исследование алгоритма моделирования мышечного тонуса с помощью импульсной нейронной сети. Моделирование подразумевает биологическую архитектуру нейронной сети. Мышечный тонус можно понимать как длительное напряжение или сокращение мышцы. Топологически конструкция импульсной нейронной сети похожа на многослойный персептрон. Принципиальное отличие заключается в математической модели персептрона. С биологической точки зрения нейроны представляют собой сложные структуры с электрохимическим механизмом передачи информации. В настоящее время существует несколько соответствующих математических моделей. В исследовании использовалась модель нейрона Leaky Integrate-and-Fire (LIF). В качестве математической модели мышцы для имитации механической реакции мышцы была выбрана трехэлементная модель, основанная на модели Хилла. Как описано в, модель включает в себя пассивные последовательные и параллельные нелинейные пружинящие элементы и активный сократительный элемент. Упругий элемент мышцы находится под действием внешней силы. Поскольку длина мышцы должна быть постоянной, растяжение последовательного элемента может происходить только при равном сокращении сократительного элемента. Таким образом, сокращение мышцы приводит в действие сократительный элемент, поэтому на него будет воздействовать управление (нейронный спайк). Задача - определить функцию управления для реализации мышечного тонуса. При этом мышца сохраняет заданное удлинение. Для проектирования топологии нейронной сети использовались биологические. Топология предлагаемой сети была основана на архитектуре из литературных данных. Сенсорный нейрон получает информацию о растяжении мышцы. При достижении определенного порога сенсорный нейрон генерирует возбуждающие сигналы, поступающие на двигательный нейрон, что описывается моделью LIF. Двигательный нейрон генерирует сигнал активации на сократительный

элемент и сигнал торможения на себя. За счет активации сократительного элемента мышца сокращается и изменяется ее длина.

По мере того, как удлинение сглаживает кривую, спайки запускаются с постоянной частотой. Можно сделать вывод о появлении тонового нейропаттерна. Однако при изменении значения синаптического веса характер удлинения мышц принципиально меняется. Происходит колебательное движение. Такое поведение можно объяснить гиперактивным рефлексом. В этом случае система управления быстро реагирует на небольшие изменения в динамической системе. Критическое значение синаптического веса можно понимать как бифуркационный параметр динамической системы. Это значение может быть найдено путем анализа динамической системы. При таком подходе модель мышц, основанную на Хилле, можно понимать как динамическую систему с некоторыми частыми исходящими и входными сигналами. Модель LIF можно рассматривать как нелинейный преобразователь частоты.

Вычисление индекса здоровья больных COVID-19 в собственном признаковом пространстве объекта

¹Игнатъев Н.А., ¹Рахимова М.А., ²Рахимов Б.Б.

¹ *Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека, Ташкент,*
e-mail: mehribonu@gmail.com

² *Ташкентская Медицинская Академия, Ташкент*
e-mail: rakhimov.b.b@gmail.com

Рассматривается вычисление количественных оценок состояния (индекса) здоровья. Доказывается, что для определения индекса конкретного человека необходимо использовать его собственное пространство (набор) из симптомов и синдромов.

Множество методических указаний по определению экспертных оценок индекса здоровья практически бесполезны так как невозможно проследить изменение их значений на различных наборах измеряемых показателей. Нет практически реализованных методик обоснования выбора информативных наборов зависимых показателей с учётом различных шкал измерений.

Для снижения роли субъективных факторов рекомендуется решение проблемы реализовывать в рамках интеллектуальных систем, с помощью которых для каждого индивидуума можно вычислять индекс здоровья, выделять диагностические показатели, определяющие значение индекса и при необходимости рекомендовать использование оздоровительных процедур.

Вычисление количественных оценок здоровья является предметом исследования в работе. Будем различать оценки как относительно группы так и отдельных людей.

Общим для этих случаев является представление данных для анализа в виде выборки из двух классов. Для оценки отдельного человека будем использовать термин индекс здоровья. При вычислении индекса здоровья необходимо показатели конкретного человека сравнивать с представителями своего и противоположного класса с целью отбора собственного пространства.

Задачи отбора информативных признаков является NP-полными и для их решения разработано несколько эвристик. Эти эвристики различаются по: выбору меры близости между объектами; способам предобработки данных; используемым критериям отбора. Такая сложная система как человеческий организм определяется сложным сочетанием симптомов и синдромов, которые изменяется в определённых диапазонах и стремится к устойчивому равновесию. Для идентификации устойчивого равновесия чаще всего используют термины норма здоровья. Норма здоровья в общем – то является нечётким, размытым понятием для принятия решения по усредненным показателям.

Существует концепция, согласно которой считается, что каждый объект в признаковом пространстве характеризуется своей логической закономерностью. Для нахождения этих закономерностей в интеллектуальной системе предлагается использовать результаты решения следующих задач:

- вычисления параметров локальной метрики для каждого объекта обучающего множества;
- выделения локальных областей разнотипного признакового пространства для определения устойчивости объекта в классе;
- отбора информативных наборов разнотипных признаков для принятия решения по описанию допустимого объекта.

Литература

1. 1. *Игнатъев Н. А.* Индексирование объектов по индивидуальным наборам информативных признаков. Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2016, № 4(37), С. 27 - 35.

Устойчивость нелинейной модели Лотки-Вольтерра с запаздыванием

¹Каххоров А.Э., ²Соатов У.А., ³Хусанов Д.Х.

¹ Академический лицей им. И.Каримова ТГТУ, Ташкент, Узбекистан,
e-mail: azizqahhorov@gmail.com

² Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан,
e-mail: ulugbeksoatov595@gmail.com

³ Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан,
e-mail: d.khusanov1952@mail.ru

В работе рассматривается задача об устойчивости биологических, экономических и других процессов, моделируемых уравнениями Лотки-Вольтерра с запаздыванием. Отличие исследуемых уравнений от известных состоит в том, что входящие в них функции приспособленности и коэффициенты относительного изменения взаимодействующих субъектов или объектов, составляющих моделируемый процесс, являются нелинейными и учитывают переменное запаздывание в действии факторов, влияющих на количество субъектов или объектов.

Пусть R^n -линейное вещественное пространство векторов x с нормой $|x|$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, $R_+^n = \{x \in R^n : x_k \geq 0 \forall k \in Z, 1 \leq k \leq n\}$, $intR_+^n = \{x \in R^n : x_k > 0 \forall k \in Z, 1 \leq k \leq n\}$, $\partial R_+^n = R_+^n \setminus intR_+^n$. Let $h_0 > 0$ -некоторое число, C -банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h_0, 0] \rightarrow R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \max(|\varphi(s)|, -h_0 \leq s \leq 0)$, $C_+ = \{\varphi \in C : \varphi : [-h_0, 0] \rightarrow R_+^n\}$, $intC_+ = \{\varphi \in C_+ : \varphi_k(0) \neq 0 \forall k \in Z, 1 \leq k \leq n\}$, $\partial C_+ = C_+ \setminus intC_+$.

Для непрерывной функции $x : [\alpha - h_0, \beta) \rightarrow R_+^n$ ($\alpha, \beta \in R^+$, $\alpha < \beta$) функцию $x_t \in C_+$ определим равенством $x_t(s) = x(t + s)$, $-h_0 \leq s \leq 0$. Под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассматривается следующее векторное уравнение типа Лотки-Вольтерра с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = D(x(t))(A + BF(x(t)) + GF(x(t - h(t)))), \quad (1)$$

где функции $D(x)$, $F(x)$ и $h(t)$, а также постоянные вектор A и матрицы B и G удовлетворяют условиям:

- 1) $D(x) = \text{diag}(d_1(x_1), d_2(x_2), \dots, d_n(x_n))$, $d_k \in C^1(R^+ \rightarrow R^+)$, $d_k(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$;

- 2) $F(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T$ ((здесь и далее $(\cdot)^T$ -операция транспонирования), $f_k \in C^1(R^+ \rightarrow R^+)$, $f_k(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = 0$, $df_k(x_k)/dx_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$;
 3) $A = \{a_k\}$, $A \in R^n$, $B = \{b_{jk}\}$, $B \in R^{n \times n}$, $G = \{g_{jk}\}$, $G \in R^{n \times n}$;
 4) $h = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))^T$, $h_k \in C^1(R^+ \rightarrow [0, h_0])$, $\mu_0 \leq \dot{h}_k(t) \leq 1 - \mu_1$ ($\mu_1 > 0$), $k = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим: $A^{(1)} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^T$, $B^{(1)} = \{b_{jk}\}$, $G^{(1)} = \{g_{jk}\}$ ($j, k = 1, 2, \dots, n-1$).

Допустим, что системы уравнений

$$(B + G)y + A = 0, \quad (B^{(1)} + G^{(1)})y^{(1)} + A^{(1)} = 0$$

имеют единственные решения

$$y = y_0 \in \text{int}R_+^n, \quad y^{(1)} = y_0^{(1)} \in \text{int}R_+^{n-1}.$$

Тогда система (1) имеет три типа положения равновесия:

1) тривиальное

$$x(t, \alpha, \varphi) = 0, \quad t \geq \alpha - h; \quad (2)$$

2) единственное нетривиальное в области $\text{int}R_+^n$

$$x(t, \alpha, \varphi) = x_0, \quad t \geq \alpha - h, \quad F(x_0) = y_0; \quad (3)$$

3) единственное нетривиальное в области ∂R_+^n следующего вида

$$x(t, \alpha, \varphi) = x_0^{(1)} = (x_{10}^{(1)}, x_{20}^{(1)}, \dots, x_{(n-1)0}^{(1)}, 0)^T, \quad t \geq \alpha, \quad (4)$$

$$F^{(1)}(x_0^{(1)}) = y_0^{(1)}, \quad F^{(1)}(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_{n-1}(x_{n-1}))^T.$$

На основе работ [1, 2, 3, 4] доказан ряд теорем об устойчивости положений равновесия системы (1) типов (2), (3), (4), в том числе, следующие теоремы.

Теорема 1. При условии $a_k < 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$ положение равновесия (2) равномерно асимптотически устойчиво. Если же $\exists a_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, то положение (2) неустойчиво.

Введем функции

$$s_k(x_k) = \int_{x_{k0}}^{x_k} \frac{(f_k(\tau) - f_k(x_{k0}))}{d_k(\tau)} d\tau.$$

Теорема 2. Предположим, что найдутся постоянные $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$, $q_1, q_2, \dots, q_n > 0$, такие, что:

$$x^T(PB + B^T P + Q + \beta_0^{-1}PBB^T P)x \leq -\gamma_0 \|x\|^2,$$

где $P = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$, $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\beta_0 = \min(q_1, q_2, \dots, q_n)\mu_1$, $\gamma_0 > 0$.

Тогда положение равновесия (3) равномерно асимптотически устойчиво.

При дополнительном условии $s_k(x_k) \rightarrow \infty$ при $x_k \rightarrow \infty$ ($k = 1, 2, \dots, n$) положение (3) глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Теорема 3. Предположим, что найдутся постоянные $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$, $q_1, q_2, \dots, q_n > 0$, такие, что выполнены неравенства:

$$x^T(\beta_0 E - G^{(1)}(G^{(1)})^T)x \leq \nu_0 \|x\|^2 \quad (\nu_0 > 0),$$

$$\begin{aligned} & 2p_n a_n^{(1)} d_n(y_n) + 2p_n (d_n(y_n) - f_n(y_n))(B^{(1)})^T F^{(1)}(y) + \\ & + y^T(PB + B^T P + Q + \beta_0^{-1}PBB^T P)y + \\ & + p_n^2 (d_n(y_n) - f_n(y_n))^2 \leq -W(y) \leq 0, \\ & y = x - x_0^{(1)}. \end{aligned}$$

Тогда положение равновесия (4) равномерно устойчиво. Если же $W(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$, то положение (4) равномерно асимптотически устойчиво.

Литература

1. Hale J. Theory of Functional Differential Equations, New York: Springer-Verlag, 1977, 366 p.
2. Андреев А.С., Хусанов Д.Х. О методе функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости. Диффер. Уравн. 1998. Т. 34, № 7. С. 876–885.
3. Хусанов Д.Х. К конструктивной и качественной теории функционально-дифференциальных уравнений (монография). Ташкент: Изд-во ФАН АН РУз, 2002. 256 с.
4. Хусанов Д.Х., Каххаров А.Э. Устойчивость модели Лотки-Вольтерры с запаздыванием. Журнал СВМО. 2022. Т. 24, № 2. С. 175–184

Построение многопараметрической математической модели фильтрации нелинейных флюидов в двухслойной пористой среде

¹Каюмов Ш., ²Арзикулов Г.П., ³Марданов А.П.,
⁴Хаитов Т.О., ⁵Бекчанов Ш.Э.

^{1,2,3,4,5} Ташкентский государственный технический университет. г.Ташкент,
e-mail: ¹kayumovmatemic@gmail.com, ²arzikulov79@mail.ru, ³apardayevich@mail.ru,
⁴tojiboy.xaitov.77@gmail.ru, ⁵sherzodbekjonov@gmail.com

Как известно построением математической модели фильтрации различных флюидов в многослойных пластах занимается многочисленными учеными всего мира [1-3].

Эти исследования в основном проведены для ньютоновских флюидов и многие из них апробированы на реальных пористых многослойных пластах и внедрены в процессы эксплуатации месторождений, и они облегчают работу разработчиков пласта по определению техника - экономических параметров промысла. Все эти исследования в основном посвящены к одному виду выбираемых исследователями законов фильтрации и соответственно суммарном виде затраты на них огромные.

Можно процесс моделирования оптимизировать используя многопараметрические модели [4]. Отдельные исследователи [3] сочли необходимыми ввести понятия многопараметрический закон, вводя в выражение скорости фильтрации параметры. Однако эта идея не была поддержана другими учеными так как закон предполагает единственности и ему соответствует одна кривая. Поэтому была разработана многопараметрические математические модели задачи фильтрации флюидов обобщающие все ранее известных математических моделей [4,5]. В этих моделях путем введения параметризованной функции (известно, что функция бывает однозначной или многозначной) удалось по одной математической модели описывать все виды законов фильтрации с соответствующими начальными, граничными и краевыми условиями. Параметризации краевых условий позволил взаимно однозначное отображения уравнений с его граничными условиями. Создание многопараметрической модели позволило разработать параметризованные вычислительные алгоритмы и соответствующие математические обеспечения. Она дала возможность провести классификацию моделей и алгоритмов решения, исходя из схожести законов фильтрации и их алгоритмов решения. Тем самым исследователь получил возможность по данным конкретного изучаемого месторождений, пропуская этап моделирования, из многопараметрической модели получить ту краевую задачу которую ему нужно и вводя данные провести вычислительные процедуры. Таким образом многопараметрическая модель дала возможность использовать этапы вычислительных технологий.

В данной работе сделано попытка применять описанные технологии к двухпластовой системе имеющие гидродинамическую связанности.

Предполагается область фильтрации Ω состоит из двух (D_1 и D_2) подобластей, причем D_1 хорошопроницаемый где горизонтальные характеристики пласта и флюида преобладает над вертикальными и следовательно движения флюида происходить по горизонтальным направлениям, а область D_2 такова что в нём вертикальные характеристики преобладает над горизонтальными, что дает возможности считать движения флюида в ней происходить по вертикали.

Если область D_1 насыщенно неньютоновскими (аномальными или структурированными) флюидами, то с началом эксплуатации этого пласта происходит возмущение области фильтрации, в результате чего из области D_2 осуществляется переток флюида по всей контактной границы к нижнему области D_1 . Величина перетока зависит от свойства флюида, от интенсивности отбора флюида, а также от неоднородности приграничных структур пласта. Для построения алгоритма решения задачи, сначала применено метод итерации по нелинейным коэффициентам уравнений и по переменному t . В дальнейшем проведена интегрирование задачи, на отрезках $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ по переменному x и на отрезках $[z_{i-1/2}, z_{i+1/2}]$ по переменному z . Полученные дискретные краевые задачи использует разностный вариант сеточной потоковый прогонки [6]. В неизвестных подвижных границах возмущений используется метод ловля границ, или метод челночных итераций [4,7].

Сначала предполагается, что коэффициент перетока равен нулю и решается задача в области D_1 , дальнейшим решается задача в D_2 и полученные решения позволяет уточнить исходную решения области D_1 . Это процедура вычисления продолжается до требуемой точности метода итерации, и т.д. На гипотетических данных апробирован вычислительная процедура для некоторых законов фильтрации и сравнены ранее полученными решениями, что позволило сделать вывод о применимости данной модели для определения тактика - технических характеристик промысловых данных месторождений которая подобна к данной модели.

Литература

1. Гусейнзаде М.А., Колосовская А.К. Упругий режим в однопластовых и многопластовых системах, М. "Недра". 1972 г. 226с. 1972.
2. Аббасов М.Т., Кулиев А.М. Методы гидродинамических расчетов разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Баку, "ЭЛМ", 1976г. 284с.
3. Мухитдинов Н.М. Методы расчета показателей разработки многопластовых месторождений нефти и газа. Издательство "Фан", Ташкент, 1978. 117 с.
4. Каюмов Ш. Приближенно-аналитические методы решения задач теории фильтрации вязкопластических флюидов. Ташкент. Издательство "ФАН". 1991г. 156 с.
5. Qayumov Sh., Mardanov A.P., Xaitov T.O., Qayumov A.B. Multiparameter mathematical models of the problem of filtration of unstructured and structured fluids. E3S. Web of conferences 264. 01030(2021) "Construktion Mechanics, Hydraulics and Water Resources Engineering.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука. 1989. 484 с.
7. Каюмов Ш. Математическое моделирование задачи теории фильтрации со свободными границами. Ташкент. ТГТУ, 2017 г. 274 с.

Об устойчивости криволинейного движения автомобиля с учетом упругости и деформируемости шин

¹Маматкабилов А. Х.

¹ Кафедра прикладной математики и информатики Термезского государственного университета, г. Термез, Узбекистан,
e-mail: abdilmajid@mail.ru

В работе рассмотрена задача об устойчивости криволинейного движения автомобиля с учетом упругости и деформируемости шин с целью определения рациональных значений конструктивных параметров.

В работе рассматривается задача об устойчивости криволинейного движения автомобиля с учетом упругости и деформируемости шин, поперечного и продольного углов крена кузова с целью определения рациональных значений параметров.

Кинематические уравнения движения автомобиля по криволинейному пути достаточно малой кривизны имеют следующий вид[1]:

$$\begin{aligned}
 & \dot{x}(\theta + \vartheta_1 + \varphi_1) - \dot{y} + \dot{\theta}((l_3 - ll - l_1)\varphi_1 + (l_3 - ll - l_1)\vartheta_1 + (l_3 - ll)\theta) + \\
 & + (r_1\theta + 2r_1\vartheta_1 + r_1\varphi_1)\dot{\psi} + (r_1\beta_0 - r_1\gamma_0\varphi_1 + r_1\psi + l_3 - r_1\gamma_0\vartheta_1 - r_1\gamma_0\theta)\dot{\vartheta}_1 + \dot{\xi}_1 = 0, \\
 & \dot{x}(\beta_1\varphi_1 - \beta_1\alpha_1\xi_1) + \dot{\theta}(1 - (\beta_1l_1\alpha_1 - \beta_1l_3\alpha_1 + \beta_1ll\alpha_1)\xi_1 + (\beta_1l_3\varphi_1 - \beta_1ll\varphi_1 - \beta_1l_1\varphi_1)\varphi_1) + \\
 & + \dot{\psi}(\beta_1r_1\varphi_1 - \beta_1r_1\alpha_1\xi_1) + \dot{\vartheta}(1 + ((\beta_1r_1\gamma_0\alpha_1)\xi_1 - (\beta_1r_1\gamma_0)\varphi_1) + \dot{\varphi}_1 + (\gamma_1\gamma_0)\vartheta_1 - \gamma_1\psi = 0, \\
 & \dot{\xi}(\mu_1r_1 + 1 + \lambda_1\eta_1 - \mu_1ro_1) + \dot{y}((\mu_1r_1 - \mu_1ro_1)\vartheta_1 + (\mu_1r_1 - \mu_1ro_1)\theta) + \dot{\theta}((l_3 - ll - l_1 - \\
 & - l_1\mu_1r_1 + l_1\mu_1ro_1 + ll\mu_1ro_1 - l_3\mu_1ro_1 + l_3\mu_1r_1 - ll\mu_1r_1) + (l_3\lambda_1 - l_1\lambda_1 - ll\lambda_1)\eta_1 + \\
 & + \dot{\eta}_1 + r_1\dot{\Delta}_1 + ((-l_3 - r_1^2\beta_0\mu_1 - l_3\mu_1r_1 + l_3\mu_1ro_1 - r_1\beta_0 + r_1\beta_0\mu_1ro_1)\theta) + (-r_1^2\beta_0\mu_1 + \\
 & l_3\mu_1ro_1 + r_1\beta_0\mu_1ro_1 - l_3\mu_1r_1 - l_3r_1\beta_0)\vartheta_1 - (r_1\gamma_0\lambda_1)\eta_1 - r_1^2\gamma_0\mu_1 + r_1\gamma_0\mu_1ro_1 - r_1\gamma_0)\dot{\vartheta}_1 = 0, \\
 & \dot{x}(\theta + \vartheta_2 + \varphi_2) - \dot{y} + \dot{\theta}((-l_3 + ll - l_1)\varphi_2 + (ll - l_3 - l_1)\vartheta_2 + (ll - l_3)\theta) + \\
 & + (r_2\theta + 2r_2\vartheta_2 - r_2\psi\gamma_0 + r_2\varphi_2)\dot{\psi} + (-r_2\beta_0 - r_2\gamma_0\varphi_2 + r_2\psi - l_3 - 2r_2\gamma_0\vartheta_2 - r_2\gamma_0\theta)\dot{\vartheta}_2 + \dot{\xi}_2 = 0, \quad (1) \\
 & \dot{x}(\beta_2\varphi_2 - \beta_2\alpha_2\xi_2) + \dot{\theta}(1 + (\beta_2l_1\alpha_2 + \beta_2l_3\alpha_2 - \beta_2ll\alpha_2)\xi_2 - (\beta_2l_3\varphi_2 + \beta_2ll\varphi_2 - \beta_2l_1\varphi_2)\varphi_2) + \\
 & + \dot{\psi}(\beta_2r_2\varphi_2 - \beta_2r_2\alpha_2\xi_2) + \dot{\vartheta}(1 + ((\beta_2r_2\gamma_2\alpha_2)\xi_2 - (\beta_2r_2\gamma_2)\varphi_2) + \dot{\varphi}_2 + (\gamma_2\gamma_0)\vartheta_2 - \gamma_2\psi = 0, \\
 & \dot{\xi}(1 + \mu_2r_2 + \lambda_2\eta_2 - \mu_2ro_2) + \dot{y}((\mu_2r_2 - \mu_2ro_2)\vartheta_2 + (\mu_2r_2 - \mu_2ro_2)\theta) + \dot{\theta}((ll - l_3 - l_1 - \\
 & - l_1\mu_2r_2 + l_1\mu_2ro_2 - ll\mu_2ro_2 + l_3\mu_2ro_2 + l_3\mu_2r_2 + ll\mu_2r_2) + (ll\lambda_2 - l_3\lambda_2 - l_1\lambda_2)\eta_2 + \\
 & + \dot{\eta}_2 + r_2\dot{\Delta}_2 + ((l_3 - r_2^2\beta_0\mu_2 + l_3\mu_2r_2 - l_3\mu_2ro_2 - r_2\beta_0 - r_2\beta_0\mu_2ro_2)\theta) + (2r_2^2\beta_0\mu_2 + \\
 & l_3\mu_2ro_2 - 2r_2\beta_0\mu_2ro_2 + l_3\mu_2r_2 + l_3 + 2r_2\beta_0)\vartheta_2 - (r_2\gamma_0\lambda_2)\eta_2 - r_2^2\gamma_0\mu_2 + r_2\gamma_0\mu_2ro_2 - r_2\gamma_0)\dot{\vartheta}_2 = 0, \\
 & \dot{x}(\theta + \varphi_3) - \dot{y} + \dot{\theta}((l_2 - r_3\beta)\varphi_3 + (-l_2 - r_3\beta)\theta + (ll + l_3)) + \dot{\xi}_3 = 0 \\
 & \dot{x}(\beta_3\varphi_3 - \beta_3\alpha_3\xi_3) + \dot{\theta}((1 + \beta_3r_3\alpha_3 - \beta_3l_2\alpha_3)\xi_3 + (\beta_3l_2 - \beta_3r_3\beta)\varphi_3) - \gamma_3\beta + \dot{\varphi}_3 = 0, \\
 & \dot{x}(1 + \lambda_3\eta_3 + \mu_3r_3 - \mu_3ro_3) + \dot{y}((\mu_3r_3 - \mu_3ro_3)\theta) + \dot{\theta}((l_2 - r_3\beta + l_2\mu_3r_3 - \\
 & - l_2\mu_3ro_3 - r_3^2\beta\mu_3 + r_3\beta\mu_3ro_3) + (l_2\lambda_3 - r_3\beta\lambda_3)\eta_3) + \dot{\eta}_3 + r_3\dot{\Delta}_3 = 0, \\
 & \dot{x}(\theta + \varphi_4) - \dot{y} + \dot{\theta}((l_2 - r_4\beta)\varphi_4 + (-l_2 - r_4\beta)\theta + (-ll - l_3)) + \dot{\xi}_4 = 0 \\
 & \dot{x}(1 + \lambda_4\eta_4 + \mu_4r_4 - \mu_4ro_4) + \dot{y}((\mu_4r_4 - \mu_4ro_4)\theta) + \dot{\theta}((l_2 - r_4\beta + l_2\mu_4r_4 - \\
 & - l_2\mu_4ro_4 - r_4^2\beta\mu_4 + r_4\beta\mu_4ro_4) + (l_2\lambda_4 - r_4\beta\lambda_4)\eta_4) + \dot{\eta}_4 + r_4\dot{\Delta}_4 = 0.
 \end{aligned}$$

Динамические уравнения имеют следующий вид [1]:

$$\begin{aligned}
 & mw_1 + \alpha_4 w_4 - h_{21} w_5 + \gamma_0 h_{21} w_6 + \gamma_0 h_{22} w_7 + 2\sigma_1 N_1 \psi + 2\sigma_2 N_2 \psi - \sigma_1 N_1 \gamma_0 \vartheta_1 - \sigma_2 N_2 \gamma_0 \vartheta_2 + \\
 & + h_{11} \dot{\xi}_1 + h_{12} \dot{\xi}_2 + h_{13} \dot{\xi}_3 + h_{14} \dot{\xi}_4 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3 + a_4 \xi_4 = 0. \\
 & mw_2 + \beta_4 w_4 - m_{21} l_3 w_6 + m_{22} l_3 w_7 - \sigma_3 N_3 \beta \theta + \sigma_4 N_4 \beta \theta - \sigma_3 N_3 \beta \vartheta_1 + \sigma_4 N_4 \beta \vartheta_2 + \\
 & + K_{\tau_1} \eta_1 + K_{\tau_2} \eta_2 + K_{\tau_3} \eta_3 + K_{\tau_4} \eta_4 = 0. \\
 & mw_3 + \gamma_5 w_5 + \gamma_0 m_{21} l_3 w_6 - \gamma_0 m_{22} l_3 w_7 - K_{r_1} r_1 - h_{61} r_1 \\
 & - K_{r_2} r_2 - h_{62} r_2 - K_{r_3} r_3 - h_{63} r_3 - K_{r_4} r_4 - h_{64} r_4 + K_{r_1} r_{o1} + \\
 & + h_{61} r_{o1} + K_{r_2} r_{o2} + h_{62} r_{o2} + K_{r_3} r_{o3} + h_{63} r_{o3} + K_{r_4} r_{o4} + h_{64} r_{o4} \\
 & - N_1 - N_2 - N_3 - N_4 + k_3 z + h_3 \dot{z} = 0. \\
 & m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_4 w_4 + A_1 w_6 + A_2 w_7 + \beta C_3 w_{10} + \beta C_4 w_{11} + (l_1 h_{21} + l_* h_{22} + l_3 h_{21} + l_* h_{21} + l_1 h_{22}) a_5 - \\
 & + (l_1 - l_3 + l_*) \gamma_0 h_{21} a_6 + (l_1 - l_3 - l_*) \gamma_0 h_{22} a_7 + h_{11} l_1 \dot{\xi}_1 + h_{12} l_1 \dot{\xi}_2 + h_{13} l_2 \dot{\xi}_3 + h_{14} l_2 \dot{\xi}_4 - \\
 & - (\sigma_1 N_1 l_1 + \sigma_2 N_2 l_* + \sigma_1 N_1 l_3 - \sigma_2 N_2 l_1 - \sigma_1 N_1 l_* - \sigma_2 N_2 l_3) \psi + (\sigma_4 N_4 l_3 \beta + \sigma_4 N_4 l_* \beta + \sigma_3 N_3 l_3 \beta + \\
 & + \sigma_4 N_4 l_* \beta + \sigma_1 N_1 l_1 \gamma_0 + \sigma_1 N_1 l_* \gamma_0 - \sigma_1 N_1 l_3 \gamma_0) \vartheta_1 + \sigma_2 N_2 \gamma_0 (l_1 - l_* + l_3) \vartheta_2 + \\
 & + (2\sigma_4 N_4 l_3 \beta_0 + 2\sigma_4 N_4 l_* \beta_0 + 2\sigma_3 N_3 l_3 \beta_0 + 2\sigma_3 N_3 l_* \beta_0) \theta - \eta_{24} b_4 \beta + \eta_{23} b_3 \beta - \\
 & - a_1 \xi_1 l_1 + a_1 \xi_1 l_3 - a_1 \xi_1 l_* - a_2 \xi_2 l_1 + a_2 \xi_2 l_* + a_4 \xi_4 l_2 - a_3 \xi_3 r_3 \beta - a_4 \xi_4 r_4 \beta + \sigma_4 N_4 r_4 - \\
 & \sigma_3 N_3 r_3 + \sigma_3 N_3 \beta l_2 - \sigma_4 N_4 \beta l_2 - K\tau_{u3} \eta_3 l_* - K\tau_{u3} \eta_3 l_3 + K\tau_{u4} \eta_4 l_3 + K\tau_{u4} \eta_4 l_* = 0. \quad (2) \\
 & m_3 w_3 + m_5 w_5 + \gamma_0 m_6 w_6 + \gamma_0 m_7 w_7 + (r_1 h_{21} + r_2 h_{22} + h_{42} + h_{41}) a_5 + (h_{21} r_1 - h_{41}) \gamma_0 a_6 - \\
 & - (h_{22} r_2 - h_{42}) \gamma_0 a_7 + h_{11} \dot{\xi}_1 r_1 + h_{12} \dot{\xi}_2 r_2 + h_{31} \dot{\xi}_1 + h_{32} \dot{\xi}_2 + (\sigma_1 N_1 r - \sigma_2 N_2 r_2 + r_{o1} N_1) \psi + \\
 & + a_1 \xi_1 r_1 + a_2 \xi_2 r_2 - (\sigma_1 r_1 - r_{o1}) N_1 \gamma_0 \vartheta_1 - (\sigma_2 r_2 - r_{o2}) N_2 \gamma_0 \vartheta_2 + k_1 \psi + h_1 \dot{\psi} = 0. \\
 & l_5 w_2 + l_6 w_3 + A w_4 + l_7 w_5 + l_8 w_6 - \beta_0 C_1 w_8 - (h_{41} - h_{21} r_1) \gamma_0 a_5 - (h_{31} - h_{11} r_1) \gamma_0 \dot{\xi}_1 - \\
 & - (K\tau_{u1} r_1 \eta_1 - \gamma_0 r_{o1} N_1) \psi - (\sigma_1 N_1 - a_1 r_1) \gamma_0 \xi_1 \\
 & - (K\tau_{u1} r_1 \beta_0 - K\tau_{u1} l_3) \eta_1 + k_2^{(1)} \vartheta_1 + h_2^{(1)} \dot{\vartheta}_1 = 0. \\
 & l_{55} w_2 - l_{66} w_3 + A_2 w_4 + l_{77} w_5 + l_{88} w_7 - \beta_0 C_2 w_9 - (h_{42} - h_{22} r_2) \gamma_0 a_5 - (h_{32} - h_{12} r_2) \gamma_0 \dot{\xi}_2 + \\
 & + (r_{o2} - \sigma_2 r_2) N_2 \gamma_0 \psi - (\sigma_2 N_2 - a_2 r_2) \gamma_0 \xi_2 - (K\tau_{u2} r_2 \beta_0 - K\tau_{u2} l_3) \eta_2 + k_2^{(2)} \vartheta_2 + h_2^{(2)} \dot{\vartheta}_2 = 0. \\
 & C_1 (-\beta_0 w_6 + w_8) - (r_1 K_{\tau_1} - \mu_1 N_1) \eta_1 = 0. \quad C_2 (\beta_0 w_7 + w_9) - (r_1 K_{\tau_2} - \mu_2 N_2) \eta_2 = 0. \\
 & C_3 (-\beta_0 w_4 + w_{10}) - (r_3 K_{\tau_3} - \mu_3 N_3) \eta_3 = 0. \quad C_4 (\beta_0 w_4 + w_{11}) - (r_4 K_{\tau_4} - \mu_4 N_4) \eta_4 = 0.
 \end{aligned}$$

Система уравнений (1) и (2) представляют математическую модель криволинейного движения автомобиля с учетом упругости и деформируемости шин (поперечной, угловой, продольной деформации шин и наклона колеса), а также не потенциальных сил в материале шины.

Был проведен вычислительный эксперимент с помощью программно-инструментальной системы AVTO по исследованию задач об устойчивости движения автомобиля[2].

Литература

1. *Dusmatov O.M., Mamatkabilov A.Kh.* Mathematical modeling of the curvilinear motion of the car, taking into account the elasticity and deformability of tires. *Annali d'Italia* (Italy's scientific journal) is a peer-reviewed European journal covering top themes and problems in various fields of science, e33, 2022, 34-47 pp, ISSN 3572-2436

2. *Mamatkabilov A.X., Nurmatov Z.O.* Avtomobil harakatida shinalarning elastikligi va deformatsiyalanishini dampersiz yechish dasturiy ta'minoti. No DGU 10219, 2021.

Об одной задаче оптимального управления дискретными нелинейными уравнениями дробного порядка с функциональными ограничениями типа равенств и неравенств

¹ Мансимов К. Б., ² Алиева С. Т.

¹ Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан,
e-mail: kamilbmansimov@gmail.com

² Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан,
e-mail: saadata@mail.ru

В работах [1,2] рассмотрена одна задача оптимального управления описываемый системой нелинейных разностных уравнений дробного порядка со свободным правым концом траектории и получены ряд необходимых условий оптимальности типа дискретного и линеаризованного принципа максимума.

В предлагаемой докладе рассматривается задача, оптимального управления объектом описываемый системой обыкновенных нелинейных разностных уравнения дробного порядка при наличии функциональных ограничений типа равенств и неравенств на состояние траектории системы.

При предположении открытости области управления, получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Пусть управляемый процесс описывается следующей системой нелинейных разностных уравнений дробного порядка α .

$$\Delta^\alpha x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (2)$$

Здесь $x(t)$ — n — мерный вектор фазовых переменных, $u(t)$ — r — мерный вектор управляющих воздействий, t_0, t_1, x_0 — заданы, $f(t, x, u)$ — заданная n — мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно, а $\Delta^\alpha x(t), 0 < \alpha \leq 1$ — дробный оператор порядка α (см. например [1-5]).

Управление $u(t) = \{u(t_0), u(t_0 + 1), \dots, u(t_1 - 1)\}$ называется допустимым управлением, если оно удовлетворяет ограничению

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T. \quad (3)$$

Здесь U — заданное непустое, ограниченное и открытое множество.

Управляющую функцию $u(t) \in U, t \in T$ назовем допустимым управлением, если соответствующее ему решение $x(t)$, задачи (1)-(2) удовлетворяет ограничениям

$$S_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) \leq 0, i = \overline{1, p}, \quad (4)$$

$$S_i(u) = \varphi_i(x(t_1)) = 0, i = \overline{p+1, q}, \quad (5)$$

Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала

$$S_0(u) = \varphi_0(x(t_1)), \quad (6)$$

где $\varphi_i(x), i = \overline{0, q}$ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Пусть $(u(t), x(t))$ некоторых допустимых процесс.
Введем обозначения

$$I(u) = \{i : \varphi_i(x(t_1)) = 0, i = \overline{1, p}\}, J(u) = \{0\} \cup I(u).$$

Для простоты изложения будем считать что,

$$I(u) = \{1, 2, \dots, m\}, (m \leq p).$$

В рассматриваемой задаче вычислены первая и вторая вариации (в классическом смысле) функционалов. С помощью этих вариации функционалов сформулированы необходимые условия первого и второго порядков носящие конструктивный характер [6,7]. Далее изучены некоторые частные случаи.

Литература

1. Алиева С.Т. Принцип максимума Понтрягина для нелинейных разностных уравнений дробного порядка. Вестник Томского Государственного Университета. Управление, вычислительная техника. 2021. № 54. С. 4–11.
2. Алиева С.Т., Мансимов К.Б. Аналог линеаризованного принципа максимума для задачи оптимального управления нелинейными разностными уравнениями дробного порядка Вестник Пермского Университета, Мат.Мех и Информатика, 2021, 25(52), С. 9–15.
3. Miller K., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: Wiley, 1993, 366 p.
4. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1996, 340 p.
5. J. Jagan Mohan and G. V. S. R. Deekshitulu. Fractional Order Difference Equations. Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equations 2012. Article ID 780619, 11 pages doi:10.1155/2012/780619
6. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. Баку: ЭЛМ, 2013. 224 с.
7. Габасов Р., Кирилова Ф.М., Альсевич В.В., Калинин А.И. Методы оптимизации, "Четыре четверти Минск, 2011, 472 с.

Оценка для blow-up решения нелинейного параболического уравнения недивергентного вида с граничными условиями

¹Матякубов А.С., ²Раупов Д.Р., ³Нортиллаев К.Н.,

¹ Заведующий кафедры ПМКА НУУЗ, д.ф.-м.н.,
e-mail: almasa@list.ru

² Старший преподаватель кафедры ВМиИ Академии МЧС РУз.,
e-mail: raupov.dilmurod@mail.ru

³ Научный сотрудник Академии МЧС РУз.
e-mail: raupov.dilmurod@mail.ru

В этой работе мы рассмотрим Blow-up свойства решения следующей задачи,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^\alpha \nabla (u^{m-1} \nabla u) + u^p \quad (x, t) \in D \times (0, T), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x, t)u = 0 \quad (x, t) \in \partial D \times (0, T), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) > 0 \quad x \in \bar{D}, \quad (3)$$

где D - гладкая ограниченная область в R^N , $N \geq 2$, $0 < T < +\infty$.

Blow-up свойства решения для параболических уравнений изучаются большим числом авторов, так как показанном в [1-7].

Немаловажное место в теории нелинейных уравнений занимает исследование неограниченных решений, или по-другому, режимов с обострением (blow-up). Нелинейные задачи, допускающие неограниченные решения, являются глобально неразрешимыми по времени: решение неограниченно возрастает в течение конечного промежутка времени.

Допустим T максимальное время существования решения $u(x, t)$ которое может быть конечное или бесконечное. Если $T < \infty$, тогда u неограниченна в конечном времени и допускается режим с обострением. Если $T = \infty$, мы говорим решение глобальное.

Теорема 1. Пусть $u(x, t)$ - решение ($u \in C^3(D \times (0, T)) \cap C^2(\bar{D} \times (0, T))$) задачи (1)-(3)

Предположим, что выполняется следующие условия:

$$1) \quad 1 \leq m \leq p,$$

$$2) \quad \text{В } D \times (0, T) \quad \sigma(x, t) \geq 0, \quad \sigma_t(x, t) \leq 0$$

$$(3) \quad \beta = \min_{\bar{D}} \left\{ \frac{u_0^{m-1}}{u_0^p} \left[u_0^\alpha \nabla (u_0^{m-1} \nabla u_0) + u_0^p \right] \right\} > 0$$

$$(4) \quad \int_{M_0}^{+\infty} s^{m-p-1} ds = \frac{M_0^{m-p}}{p-m}, \quad m < p$$

$$\text{где } M_0 = \max_{\bar{D}} u_0.$$

$$\text{Тогда } u(x, t) \text{ решение существует за конечное время } T \text{ и } T \leq \frac{1}{\beta} \frac{M_0^{m-p}}{p-m},$$

так же как $u(x, t) \leq H^{-1}(\beta(T-t)) = ((p-m)\beta(T-t))^{\frac{1}{m-p}}$ где $H(z) = \frac{z^{m-p}}{p-m}$, $z > 0$ и H^{-1} - обратная функция H .

В этой работе была рассмотрена задача (1) - (3) и получены нелинейных параболических уравнений существования и неограниченных (blow-up) решений за конечное время, а также показаны верхние оценки blow-up решений.

Литература

1. Juntang Ding and Shenjia Li. Blow-up Solutions and Global Solutions for a Class of Quasilinear Parabolic Equations with Robin Boundary Conditions. Computers and Mathematics with Applications 49, 689-701, (2005).
2. A. Friedman and B. McLeod. Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations, Indiana Univ. Math. J. 34, 425-447, (1985).
3. M.H. Protter and H.F. Weinberger Maximum Principles in Differential Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J, (1967).
4. R.P. Sperb, Maximum Principles and Their Applications, Academic Press, New York, (1981).
5. J.M. Chadam, A. Peirce and H.M. Yin, Two blow-up property of solutions to some diffusion equations with localized nonlinear reactions, J. Math. Anal. Appl. 169 (3), 313-328, (1992).
6. Yu.V. Egorov and V.A. Kondratiev Two theorems on blow-up solutions for semilinear parabolic equations of second order, Partial Differential Equations 327 (1), 47-52, (1998).
7. H.M. Yin Blow-up versus global solvability for a class of nonlinear parabolic equations, Anal. TMA 23(7), 911-924, (1994).

Численное решение задачи аномальной фильтрации и переноса вещества в пористой среде

Махмудов Ж.М., Усмонов А.И., Кулжонов Ж.Б.

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.,

e-mail: j.makhmudov@inbox.ru; a.usmonov.91@mail.ru;

При фильтрации и переносе вещества в нелинейных средах, а также при течении реологически сложных сред характеристики часто обнаруживают масштабную инвариантность (фрактальность) как по пространственным, так и временным параметрам. Это обстоятельство позволяет выработать некоторые общие методы моделирования сложнопостроенных сред и в ряде случаев облегчает описание протекающих в них процессов [1].

Здесь рассматривается фильтрация и перенос вещества в двумерной среде с фрактальной структурой.

Пусть область исследования задачи состоит из $R \{0 \leq x < \infty, 0 \leq y \leq h\}$. Первоначально область R заполнена жидкостью без частиц.

Верхняя и нижняя граница области R непроницаема для жидкости и частиц. Жидкость движется в направлениях x и y в области R . Процесс переноса вещества с учетом аномальных эффектов можно описать уравнением[2]

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_x \frac{\partial^{\beta_1} c}{\partial x^{\beta_1}} + D_y \frac{\partial^{\beta_2} c}{\partial y^{\beta_2}} - \frac{\partial (v_x c)}{\partial x} - \frac{\partial (v_y c)}{\partial y}, \quad (1)$$

где c - концентрация твердых частиц в жидкости, v_x, v_y - компоненты скорости фильтрации, D_x, D_y - продольный и поперечный коэффициенты диффузии, β_1, β_2 - показатели производной, t - время.

Компоненты скорости фильтрации определяются как [3]

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial^{\gamma_1} p}{\partial x^{\gamma_1}}, v_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial^{\gamma_2} p}{\partial y^{\gamma_2}}, \quad (2)$$

где p - давление, μ - коэффициент вязкости суспензии, k - коэффициент проницаемости, γ_1, γ_2 - показатели производной.

Уравнение неразрывности течения сжимаемой жидкости через пористую среду можно записать как [18]

$$\frac{\partial(\rho m)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (3)$$

где m - коэффициент пористости, ρ - плотность жидкости.

Используем уравнения состояния упругой жидкости и упругой пористой среды [10]

$$\rho = \rho_0(1 + \beta_l(p - p_0)), m = m_0 + \beta_m(p - p_0), \quad (4)$$

где β_l - коэффициент объемного сжатия жидкости, β_m - коэффициент упругости среды, ρ_0 - первоначальная плотность жидкости, p_0 - первоначальное давление.

Подставив (2), (4) в (3), можно получить уравнение пьезопроводности с дробной производной

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^{\gamma_1+1} p}{\partial x^{\gamma_1+1}} + \frac{\partial^{\gamma_2+1} p}{\partial y^{\gamma_2+1}} \right), \quad (5)$$

где $\chi = \frac{k}{\mu \beta^*}$ - коэффициент пьезопроводности, β^* - коэффициент упругоемкости среды.

Начальные и граничные условия задачи имеют вид

$$c(0, x, y) = 0, \quad (6)$$

$$c(t, 0, y) = c_0, c_0 = \text{const}, y = h/2, \quad (7)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(t, x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (8)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y}(t, x, h) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (9)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(t, 0, y) = 0, \quad y \neq h/2, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (10)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(t, \infty, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (11)$$

$$p(0, x, y) = p_0, \quad p_0 = \text{const}, \quad (12)$$

$$p(t, 0, y) = p_c, \quad p_c > p_0, \quad p_c = \text{const}, \quad y = h/2, \quad (13)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(t, x, 0) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (14)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}(t, x, h) = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(t, 0, y) = 0, \quad y \neq h/2, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(t, \infty, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h. \quad (17)$$

Для решения задачи (5) - (17) используем метод конечных разностей.

Рассмотрена задача фильтрации и переноса веществ в двумерной пористой среде с фрактальной структурой. Перенос вещества в таких средах описан уравнением с дробными производными как по времени, так и по координате. На основе численного решения уравнения при соответствующих начальных и граничных условиях показано, что уменьшение показателя дробной производной по координате от 1, приводит к большему распределению общей массы

Литература

1. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
2. Khuzhayorov B., Usmonov A., Nik Long N.M.A., Fayziev B. Anomalous solute transport in a cylindrical two-zone medium with fractal structure, Applied Sciences (Switzerland), 10, 2020, 5349.
3. Nikita S. Belevtsov, Stanislav Yu. Lukashchuk. Lie group analysis of 2-dimensional space-fractional model for flow in porous media, Math Meth Appl Sci, 2018, 1–11.
4. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа., М.: Недра, 1972.

Математическое моделирование гидродинамического сопротивления в колебательном потоке вязкоупругой жидкости

Наврузов К.¹, Шарипова Ш.Б.¹, Абдикаримов Н.И.¹

¹ Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,
shshb1990@gmail.com

Практический интерес предоставляет изучение колебательного течения вязкоупругой жидкости в плоском канале и в цилиндрической трубе под воздействием гармонических колебаний градиента давления или при наложении на течение гармонических колебаний расхода жидкости. В связи с этим, решены задачи колебательного течения вязкоупругой несжимаемой жидкости между двумя неподвижными параллельными плоскостями. Обозначены расстояния между стенками через $2h$. Ось ox проходит горизонтально в середине канала вдоль потока. Ось oy направлено перпендикулярно k оси ox . Течение вязкоупругой жидкости происходит симметрично по оси канала.

Реологические уравнения состояния жидкости принимается в виде обобщенного уравнения Максвелла [1, 2]

$$\tau = \tau_s + \tau_p, \tau_s = -\eta_s \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \lambda \frac{\tau_p}{\partial t} + \tau_p = -\eta_p \frac{\partial u}{\partial y}$$

Здесь λ - время релаксация; τ_s - касательная напряжения Ньютоновской жидкости; τ_p - касательная напряжения Максвелловской жидкости; τ - касательная напряжения раствора; η_s - динамическая вязкость Ньютоновской жидкости; η_p - динамическая вязкость Максвелловской жидкости. Между динамических вязкостей выполняется равенство

$$\eta_0 = \eta_s + \eta_p$$

где η_0 - динамическая вязкость раствора.

Уравнение движения для скорости жидкости, получаем [3]

$$\rho(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial u}{\partial t} = -(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

Считаем, что колебательное течение вязкоупругой жидкости происходит за счет заданного гармонического колебание расхода жидкости или продольной скорости осреднённой по сечению канала.

$$Q = a_Q \cos \omega t = \text{Re} a_Q e^{i\omega t}, \quad u = a_u \cos \omega t = \text{Re} a_u e^{i\omega t} \quad (2)$$

где a_Q и a_u - амплитуды расхода жидкости и амплитуды продольной скорости осреднённой по сечению канала. В данном случае течение происходит симметрично по оси канала, а стенке канала удовлетворяется условия прилипание. В силу линейности уравнение (1) продольной скорости, давление, касательное напряжение на стене можно записывать в следующем образом

$$u(y, t) = \text{Re} u_1(y) e^{i\omega t}, \quad (x, t) = \text{Re} p_1(x) e^{i\omega t}, \quad \tau(t) = \text{Re} \tau_1 e^{i\omega t}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (1), получаем

$$\frac{\partial^2 u_1(y)}{\partial y^2} - \frac{\rho i \omega}{\eta_0} (X + \frac{Z}{(1 + i\omega \lambda)})^{-1} u_1(y) = \frac{1}{\eta_0} (X + \frac{Z}{(1 + i\omega \lambda)})^{-1} \frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \quad (3)$$

Здесь

$$X = \frac{\eta_s}{\eta_0}, \quad Z = \frac{\eta_p}{\eta_0}, \quad X + Z = \frac{\eta_s}{\eta_0} + \frac{\eta_p}{\eta_0} = 1$$

Решения уравнение (3) будет

$$u_1(y) = \frac{1}{\rho i \omega} \left(-\frac{\partial p_1(x)}{\partial x} \right) \left(1 - \frac{\cos(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \frac{y}{h})}{\cos(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega))} \right) \quad (4)$$

где $\alpha_0 = \sqrt{\frac{\omega}{\nu_0}} h$ колебательное число Уомерсли (безразмерная частота колебаний); ν_0 - кинематическая вязкость раствора. С помощью решение (3) определяем передаточную функцию $W_{\tau, u}(i\omega)$ для касательного напряжения на стенки, как

$$W_{\tau_1, u_1}(i\omega) = \frac{h}{3\eta_0} \frac{\tau_1(i\omega)}{u_1(i\omega)} = - \frac{(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0)^2 \sin(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega))}{3(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega) \cos(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega)) - \sin(i^{\frac{3}{2}} \alpha_0 \eta(i\omega)))} \quad (6)$$

Передаточная функция (5), иногда называется амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ). Эти функции позволяет определить изменение гидродинамическое сопротивление при заданном законе изменение во времени продольной скорости осредненной по сечению канала.

Литература

1. *Casanellas L., Ortin J.* Laminar oscillatory flow of Maxwell and Oldroyd-B fluids // J. Non-Newtonian Fluid. Mechanics. 166. (2011). – p.1315-1326.
2. *Ding Z., Jian Y.* Electrokinetic oscillatory flow and energy microchannelis: a linear analysis // J. Fluid. Mech., 2021., vol. 919, A20. Doi:10.1017/j fm. 2021. 380 A20.1-31.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003.-840 с.

Концентрация напряжений в волокнистой пластине с упрочняющими отверстиями

Полатов А.М., Икрамов А.М.

*Национальный университет Узбекистана,
e-mail: asad3@yandex.ru*

Композиционные материалы получили широкое применение в различных отраслях производства. Композиты применяются в строительстве, машиностроении, ракетной и ядерной технике, самолетостроении и создании автономных глубоководных аппаратов. Новейшие технологии позволяют создавать композитные материалы и конструкции с заранее заданными оптимальными свойствами. В связи с этим большое значение имеют исследования деформирования элементов конструкций, изготовленных из композиционных материалов. При создании различных конструкций часто приходится по технологической необходимости делать в их элементах отверстия различного назначения. При эксплуатации конструкций эти отверстия становятся концентраторами - создают вокруг себя области повышенных напряжений разнообразных конфигураций. Концентрации напряжений являются одним из основных факторов, определяющих прочность конструкции, и потому исследование влияния различных типов концентраторов на поведение композитных элементов конструкций и поиск путей снижения концентрации напряжений представляется одной из важных задач современной механики [1-5].

При изучении поведения элементов конструкций, изготовленных из композитов, наиболее распространенным подходом является сведение рассматриваемых материалов

к однородным, в общем случае анизотропным, с некоторыми эффективными характеристиками [6]. Этот подход позволяет достаточно точно описывать статическое поведение композитных конструкций, все геометрические размеры которых существенно превышают характерный размер структурной неоднородности исследуемого композита. Однако, он не дает возможности рассматривать задачи исследования концентраций напряжений, возникающих вблизи трещин, вырезов, различных технологических отверстий, имеющих размеры, сравнимые с характерным размером структуры. Между тем влияние это может быть очень велико и способно как приводить к изменению прочностных характеристик материала вблизи концентраторов напряжений, так и служить причиной разрушения конструкций, которое невозможно предсказать, рассматривая композит как однородное тело.

Для различных типов композитов существуют упрощенные модели, учитывающие структуру материала. Однако, они позволяют решать задачи лишь для достаточно простой геометрии образцов и небольшого количества структурных элементов. К тому же эти модели часто предполагают существенные упрощения реального напряженно-деформированного состояния, как например, пренебрежение некоторыми компонентами напряжений, которые, однако, в некоторых ситуациях могут играть существенную роль в разрушении композитов. Имеющиеся на данный момент общие подходы не позволяют учесть многие эффекты, связанные со структурной неоднородностью композиционных материалов, в то время как эти эффекты в различных ситуациях способны оказывать существенное влияние на поведение элементов конструкций.

В статье рассматривается численное исследование деформирования композитных элементов конструкций с различными типами концентраторов напряжений с учетом структурной неоднородности материала на примере бороалюминия. Исследование концентрации напряжений вблизи кругового отверстия в пластине из бороалюминия проводится с использованием плоской волокнистой конечно-элементной модели, явным образом воспроизводящей структуру материала с сохранением объемных долей составляющих и характерных структурных размеров в двумерном представлении. Используется волокнистая структура, составленная из однородных элементов разной жесткости с размерами меньше характерного размера структурной неоднородности. Подобная модель позволяет рассмотреть концентрацию напряжений вблизи отверстия, радиус которого на порядок превышает ширину волокна, без пренебрежения различными компонентами напряженного состояния, свойственного приближенным подходам. Волокнистая конечно-элементная модель также используется для изучения концентрации напряжений в волокнах и связующем при растяжении вдоль волокон и при сдвиге.

Объект исследования и модель. Исследуемый материал, бороалюминий, представляет собой волокнистый композит, в котором роль связующего выполняет дюралюминий D-16, а роль арматуры – борные волокна, направленные по одной оси. В [1] приведены схемы действительной конструкции из бороалюминия и ее плоского представления, где сохранена волокнистая структура, соотношение долей бора и дюралюминия и характерный размер структуры. Также представлены три задачи, решения которых сравнивались для проверки корректности волокнистой модели и возможности ее дальнейшего использования. Первые две – задачи об одноосном растяжении квадратной пластинки с круговым отверстием, решавшиеся в упругой постановке. Первая задача решалась по волокнистой модели, составленной из пакетов плоских четырехузловых конечных элементов. Вторая задача решалась по модели однородного ортотропного материала с эффективными упругими характеристиками бороалюминия. Третья задача – задача об одноосном растяжении бесконечной ортотропной пластины с круговым отверстием, аналитическое решение которой использовалось для проверки расчетов по конечно-элементным моделям. Из анализа результатов проверки адекватности предложенной трехмерной модели, можно заключить, что волокнистую модель можно считать корректной и использовать для дальнейших расчетов.

Исследуется задача об определении месторасположения дополнительных малых концентраторов в пластине из бороалюминия, способных ослабить концентрацию напряжений, которая формируется из-за наличия кругового отверстия. Для этой цели используются квадратные отверстия приблизительно квадратной формы, размеры которых определялись количеством пересеченных ими волокон. Квадратная форма отверстий была выбрана в связи с тем, что в волокнистом материале трудно создать круглое отверстие, имеющее диаметр того же порядка, что и характерные размеры структуры. Размеры отверстия увеличивались до тех пор, пока либо не переставали ослаблять напряжение в первоначальной области, либо сами отверстия не создавали областей опасной концентрации, превышающей значения в первоначальной зоне. На рис 1. приведены результаты расчетов для двух расположений отверстия.

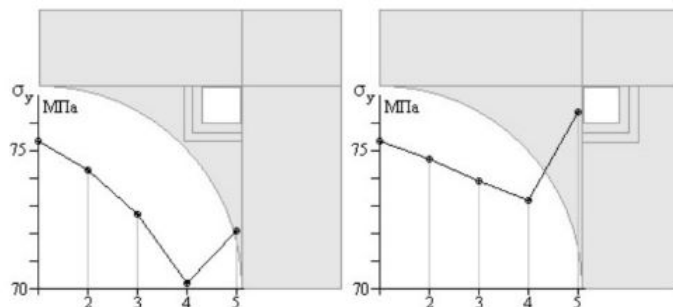


Рис 1. Результаты расчетов для двух расположений отверстия

Первое – у вершины квадрата, описанного вокруг отверстия (наилучшее с точки зрения снижения концентрации), второе – сдвинутое вправо, пересекающее те волокна, на которые приходится область наибольшей концентрации. Наибольший эффект, которого удастся достичь при помощи такого упрочняющего отверстия – снижение напряжения в зоне наибольшей концентрации без создания новой опасной зоны примерно на 7 %.

Литература

1. Карпов Е.В. Влияние волокнистой структуры на концентрацию напряжений вблизи кругового отверстия в бороалюмине. Динамика сплошной среды. – 2002. № 120., ст. 137-144.
2. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий Киев: Наукова думка. 1968. 887 с.
3. Polatov A.M. Numerical simulation of elastic-plastic stress concentration in fibrous composites. Coupled Systems Mechanics, An International Journal, Techno-Press Ltd., Yuseong-gu Daejeon, Korea. 2013, 2(3), pp. 271-288. DOI:10.12989/csm.2013.2.3.299
4. Yang Fan, Chow C.L. Progressive damage of unidirectional graphite/epoxy composites containing a circular hole. J. Compos. Mater. 1998, 32(6), p. 504-525.
5. Brovko, G.L., Bykov, D.L., Vasin, R.A., Georgievskii, D.V., Kiiko, I.A., Molodtsov, I.N., Pobedrya, B.E. A. A. Il'yushin's scientific heritage and development of his ideas in mechanics, Mech. Solids. 2011, 46(1), pp.3-14. <https://doi.org/10.3103/S002565441101002X>.
6. Neuber H. Theory of notch stresses, Edwards, London. 1946. - 201 p.

Method logical recognition systems by solving systems of Boolean equations

^{1,2,3,4,5,6} **Anvar Kabulov**, ⁷ **Abdussattar Baizhumanov**, ^{1,2,3,5} **Islambek Saymanov**,
¹ **Mansur Berdimurodov**

¹ *National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan*

² *Karakalpak State University, Nukus, Uzbekistan*

³ *Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi*

⁴ *Engineering Federation of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

⁵ *Nukus branch of Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Nukus, Uzbekistan*

⁶ *Tashkent State Technical University, Tashkent, Uzbekistan*

⁷ *South Kazakhstan State Pedagogical University, Shymkent, Kazakhstan*

e-mail: anvarkabulov@mail.ru, e-mail: absattar52@mail.ru, e-mail[Corresponding author:] islambeksaymanov@gmail.com, e-mail:mansur_alisherovich@mail.ru

In logical recognition systems, logical methods based on discrete analysis and propositional calculus based on it are used to construct recognition algorithms proper. In the general case, the logical recognition method provides for the presence of logical connections expressed through a system of Boolean equations, in which the variables are the logical features of the objects or phenomena being recognized.

The logical signs of recognizable objects can be considered as elementary statements that take two truth values: true and false [1].

First of all, logical signs include signs that do not have a quantitative expression. These signs are judgments of a qualitative nature (the presence or absence of certain properties or certain elements of recognizable objects or phenomena) [2]. Logical signs, for example, in medical diagnostics, may be the following symptoms: sore throat, cough, runny nose, etc. The engine type of the recognizable aircraft - jet, turboprop or piston - can also be considered as a logical feature. In geology, logical signs can be solubility or insolubility in certain acids or in certain mixtures of acids, the presence or absence of odor, color, etc [3].

The number of logical features can also include features that have a quantitative expression, however, it is important (and taken into account) not in itself the value of the feature of the recognized object, but only the fact that it falls or does not fall into a given interval. In practice, logical features of this kind take place in situations where measurement errors can either be neglected, or the intervals of feature values are chosen in such a way that measurement errors practically do not affect the reliability of decisions made regarding whether the measured quantity falls within a given interval.

A new area of application of the methods of algebra of logic, which has emerged recently, is the problem of recognizing a set of objects and phenomena, which can be reduced to solving systems of logical equations. This paper describes the basic principles for solving systems of logical equations and constructs algorithms for obtaining solutions to the maximum joint subsystems of Boolean equations.

References

1. *Kabulov A., Saymanov I., Yarashov I., Muxammadiev F.* Algorithmic method of security of the Internet of Things based on steganographic coding, 2021 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), 2021, pp. 1-5.
2. *Kabulov A., Normatov I., Urumbaev E., Muhammadiev F.* Invariant continuation of discrete multi-valued functions and their implementation, 2021 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), 2021, pp. 1-6.
3. *Kabulov A., Normatov I., Seytov A., Kudaybergenov A.* Optimal management of water resources in large main canals with cascade pumping stations, 2020 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), 2020, pp. 1-4.

4. *Kabulov A., Yarashov I., Otakhonov A.* Algorithmic Analysis of the System Based on the Functioning Table and Information Security, 2022 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), 2022, pp. 1-5.
5. *Babadzhanov A., Saymanov I.* Algebraic methods for solving recognition problems with non-crossing classes, 2020 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), 2022, pp. 1-5.

Mexanika masalalarini matematik modellashtirish va MAPLE dasturida yechish Sabirjanov T. M.

Farg'ona politehnika instituti, Farg'ona, O'zbekiston

e-mail: talibjan1956@mail.ru

Nazariy mexanika fani harakatlarning eng oddiysi – mexanik harakatni o'rganadi. Mexanik harakat deb, vaqt o'tishi bilan jismlarning fazodagi bir-biriga nisbatan holatlarining o'zgarishiga aytiladi. Harakatning boshqa turlari – issiqlik, ximik va boshqa jarayonlardagi harakatlar ham mexanik harakatlar asosida yuz beradi. Shuning uchun mexanik harakatni to'la bilgan holdagina boshqa harakatlarni tekshirishga kirishish mumkin. Ikkinchidan, jismlarning tinch holati aslida nisbiy tushuncha bo'lib, tabiatda absolyut qo'zg'almas jism topilmaydi. Demak, biz tinch holatda deb hisoblagan jismlar yer kurrasi va planetalar bilan birga juda murakkab harakatda bo'ladi.

Nazariy mexanika masalalarini yechishda *Maple* dasturidan foydalanish katta ahamiyatga ega. Chunki statika masalalaridagi ko'p sonli chiziqli tenglamalarini yechishni avtomatlashtirish mumkin bo'lsa, kinematika va dinamika masalalarida moddiy nuqta va jismlarning harakatini tekislikda va fazoda o'rganish uchun grafik tasvirlash va animasiyani qo'llash ularni chuqur o'rganishga yordam beradi [1].

Statikadagi tenglamalar sistemasini yechishning kompyuter modelini ko'ramiz. Tenglamalar sistemasini matrisa ko'rinishida ifodalaymiz:

$$A * X = B \quad (1)$$

Bunda A – ma'lum qiymatlar koeffitsiyentlaridan tuzilgan matrisa, X – noma'lumlar matrisa ustuni, B – ozod koeffitsiyentlar matrisa ustuni. Bunday modelning qurilishi masala parametrlarining turli qiymatlari uchun ayni bir xil sonli hisoblash ishlarini takror bajarilishida vaqtni tejasa, ikkinchidan kuchlarning ta'sir chiziqlarida tayanch reaksiya qiymatlarining optimal (eng kichik yoki eng katta) qiymatlarini topishda, talabalar mushohada qilishi va masala shartlarini grafik tasvirlashida qo'shimcha imkoniyatlar yaratadi. Tashqi ta'sir kuchining qiymatini va ta'sir qilish chegaralarini o'zgartira borib, reaksiya kuchlarining o'zgarishini hisoblash va natijalarni displey ekranida ko'rsatish mumkin bo'ladi.

Kompyuterda o'tkazilgan sonli hisoblash ishlarini har doim tiklash va takror o'tkazish mumkin. Nazariy mexanika darslarida kompyuter bilan muloqot talabalarda masala yechish malakalarini rivojlantirib, zamonaviy kompyuter texnologiyalari asosida ilmiy tadqiqotlar o'tkazishga o'rgatadi.

Kinematikada jismlarning massasi va ularga ta'sir etuvchi kuchni hisobga olmagan holda ularning harakati ko'riladi. Ko'p masalalarda jismning o'lchamlari hisobga olinmaydi va bu jismni (material) nuqta sifatida ko'riladi. Nuqta harakatini hamma karakteristikalarini (tezlik, tezlanish, yo'l) shu nuqta harakatini tenglamasidan olish mumkin. Parametr sifatida mexanika masalalarida vaqt bo'ladi.

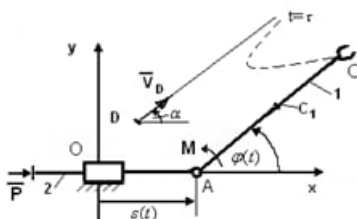
Yuqoridagi ishlarning natijalarini to'ldirgan holda, erkinlik darajasi ikkiga teng bo'lgan manipulyatorlarning kinematik va dinamik hisoblarini matematik dasturlash paketida bajarib ko'ramiz. Hisoblashlar tajriba ishlari ko'rinishida berilgan va o'quvchilarga tekis mexanizmlarning harakatini tadqiq qilishga o'rgatadi.

Horizontaal XOY tekislikda harakatlanuvchi, erkinlik darajasi ikkiga teng bo'lgan manipulyator mexanik sistema sifatida qaraladi (1-rasm). Uning geometrik va dinamik parametrlari berilgan bo'lib, kinematik juftliklardagi ishqalanish kuchlari va elementlarning deformatsiyalari hisobga olinmaydi.

Boshqaruv dvigatelining quvvati, C panjaning va D detalni τ vaqt oraligidagi ushlash uchun sarflanadigan kuch aniqlansin.

Aniqlansin:

- boshqaruv kuchi $P(t)$ va moment $M(t)$;
- dvigatellarning quvvatini $N_1(t)$ va $N_2(t)$;
- umumlashgan koordinatalar $s(t)$, $\varphi(t)$ va dekart koordinata x_c , y_c larning vaqt bo'yicha o'zgarish qonunini.



1-rasm. Erkinlik darajasi ikkiga teng bo'lgan manipulyator.

Sistemaning harakat differensial tenglamalarini Lagranjning II-tur tenglamalari ko'rinishida chiqaramiz

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_s, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

bunda T – kinetik energiya, Q_s, Q_φ – umumlashgan koordinatalarga $s(t), \varphi(t)$ mos keluvchi umumlashgan kuchlar. O'zgaruvchining tepasidagi nuqta vaqt bo'yicha hosilani bildiradi.

Xulosalar:

- Maple* matematik paketlari yordamida matematik masalalardan tashqari boshqa texnika fanlari masalalarini ham analitik va grafik ko'rinishlarda yechish mumkin.
- Bundan tashqari *Maple* ko'plab mexanizmlarni harakatini ko'rsatish, animasiyalarini hosil qilish uchun juda qulay dasturlash vositasi hisoblanadi.
- Maple* dasturini maktablar, kollejlarda va oliy o'quv yurtlarida chuqurroq o'rganilsa, faqat matematika masalalaridan tashqari boshqa fanlarning murakkab masalalarini ham ixcham dasturlar orqali yechish mumkin bo'ladi. Bu esa o'quvchi va talabalarda masalaning mohiyatiga yetish, ularning grafiklari va animasiyalarini yaqqol ko'rish imkoniyatiga ega bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

- E.Mirzakarimov* MAPLE dasturida Oliy matematika masalalarini yechish, O'quv qo'llanma, Ziyonet tarmog'i.
- И.В.Новожилов, М.Ф.Зацепин* Типовые расчеты по теоретической механике. Москва, 1986 .
- Мурсаидов М.М., Сабиржанов Т.М.* Назарий механика. Математик дастурлаштириш асослари билан. Дарслик. Классик. Фарзона., 2020.
- X.M.Mirsaidov, R.Abdikarimov, Sh.Khudainazarov, T.Sabirjanov.* Damping of high-rise structure vibrations with viscoelastic dynamic dampers. Topical Problems of Agriculture, Civil and Environmental Engineering (TPACEE 2020). VOLUME 224, E3S WEB CONF., 224(2020) 02020

Представление внутренней архитектуры биологических объектов через аппроксимирующий тензор структуры

¹ Семенова Е.В., ² Ахметзянова А.И., ³ Шарофутдинова К.Р., ⁴ Саченков О.А.

¹ Казанский Федеральный Университет, ул. Кремлевская, 18, г. Казань, Россия
e-mail: elena.semionova2011@gmail.com

² Казанский Федеральный Университет, ул. Кремлевская, 18, г. Казань, Россия
e-mail: ahmetzyanovaa0@gmail.com

³ Казанский Федеральный Университет, ул. Кремлевская, 18, г. Казань, Россия
e-mail: KaRSharafutdinova@stud.kpfu.ru

Казанский Федеральный Университет, ул. Кремлевская, 18, г. Казань, Россия
4works@bk.ru

Для некоторых объектов как природного, так и искусственного происхождения механические свойства связаны в большей степени со сложной внутренней архитектурой, тогда как сами материалы можно считать однородными и изотропными. В таком случае большой интерес, наряду с относительным объемом, представляет ориентация исследуемой фазы и оценка распределения интересующего вещества в объекте.

Для решения подобных задач были развиты методы стреографии, позволяющие вычислять интересующие значения для трехмерных образцов посредством исследования плоских сечений [1]. Такой подход широко применим в метоллаграфии, а также в гистологических исследованиях. Также было показано, что для некоторых биологических структур распределение может быть описано эллипсом в двумерном случае или эллипсоидом в трехмерном, квадратичная форма которых представляет тензор второго ранга-тензор анизотропии [2,3]. С появлением методов реконструктивной томографии появилась возможность неразрушающего исследования непосредственно внутреннего строения образцов и представления внутренней структуры в воксельной форме.

В работе рассмотрены возможные методы описания структурных свойств двумерных и трехмерных биологических объектов тензорами второго четвертого рангов. В качестве входных данных были использованы изображения и данные компьютерной томографии. Для описания неоднородной среды был использован МП-метод, позволяющий получить распределение интересующей фазы в объекте. Полученное распределение представляет собой функциональную зависимость, интегрируемую с квадратом, которая может быть разложена в ряд Фурье. В работе были рассмотрены три члена разложения. Наибольший интерес представляют тензор второго ранга, который характеризует оси ортотропии или степень вытянутости осредненной поры и тензор четвертого ранга, так как потенциально он может связать характеристику распределения с тензором модулей упругости.

Литература

1. Салтыков С.А. Стреометрическая метоллаграфия, М.:Метоллургия, 1976.
2. Киченко А.А, Тверье В.М., Няшин Ю.И. Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани, Российский журнал биомеханики, 2011, Т.15, №4, С. 78-93.
3. Няшина Ю.И., Подгайца Р.М. Экспериментальные методы в биомеханике: Учебное пособие, Издательство Пермского государственного технического университета, 2008.

Методы автоматизации и объективизации обработки гистологических данных.

¹Смирнова В.В., ¹Семенова Е.В., ²Балтина Т.В.,

³Саченков О.А., ⁴Гордиенко К.В.

¹ *Институт вычислительной математики и информационных технологий НИЛ медицинского интернета вещей, Казанский Федеральный Университет, Россия*
e-mail: yaikovavictoriya@mail.ru

² *Институт фундаментальной медицины и биологии, Высшая школа биологии, Центр биологии и педагогического образования, кафедра физиологии человека и животных, Казанский Федеральный Университет, Россия*
e-mail: tvbaltina@kpfu.ru

³ *Институт вычислительной математики и информационных технологий, Научно-исследовательский центр Центр превосходства Специальная робототехника и искусственный интеллект, Казанский Федеральный Университет, Россия*
e-mail: 4works@bk.ru

⁴ *Государственный научный центр Российской Федерации, Институт медико-биологических проблем Российской Академии Наук, Россия*
e-mail: k.vl.gordienko@gmail.com

Костная ткань образует скелет большинства позвоночных и необходима для передвижения и защиты органов. Она перестраивается на протяжении всей жизни как живая ткань, чтобы оставаться неповрежденной. Кости остаются максимально легкими и в сочетании с мышцами, сухожилиями и связками делают возможным эффективное движение. Кости могут изменить свою структуру в зависимости от нагрузок и физиологических особенностей. Анализ качества костной ткани важен в различных областях медицины. Знания о состоянии костной ткани могут помочь понять процессы, происходящие в ней.

Традиционно анализ биологических данных проводится вручную и качество анализа зависит от опыта специалиста [1–5]. В целом автоматизация такого анализа затруднена из-за случайных входных данных [6–8]. Можно выделить следующие подходы к обработке изображений: отсеивание шума различными фильтрами, сегментация изображения и анализ элементов. Предлагаемый подход является в некотором роде гибридом этих подходов.

Были решены следующие типовые задачи для снимков с расширением 2x10: идентификация трабекул на снимке; вычисление среднего значения толщина каждой трабекулы; вычисление среднего расстояния между соседними трабекулами. Для снимков с расширением 10x10 выделялась зона размножения и зона гипертрофированного хряща. В дальнейшем будет подсчитано количество ядер в зоне размножения.

Для решения первого набора задач необходимо провести сегментацию изображения. Использование алгоритма кластеризации К-средних позволяет разделить изображение на слои. На каждом слое остаются объекты со схожими цветовыми свойствами. Необходимо выбрать слой, на котором остались интересующие нас объекты. Далее производится устранение шумов изображения. Таким образом на изображении остаются только искомые объекты – трабекулы.

Каждая трабекула описывается эллипсоидом, что позволяет определить главные направления объекта. Для вычисления ширины необходимо провести отрезки перпендикулярные первому главному направлению, соединяющие крайние точки трабекулы. Так получают данные об изменении ширины трабекулы. Для вычисления расстояния между соседними трабекулами проводится нормаль от одной трабекулы к другой и измеряется его длина. Данная процедура выполняется вдоль одной трабекулы, пока не исчезнут пересечения. Далее производится аналогичная процедура, но нормали строятся от второй трабекулы к первой.

Алгоритм выполняется автоматически с использованием пакета прикладных программ Matlab.

Для решения второго набора задач необходимо провести операции для предварительной обработки изображения, такие как: поиск величины градиента и направление двумерного изображения; размытие изображения; морфологическая реконструкция изображения; удаление незначительных объектов с бинарного изображения. Выделение зоны гипертрофированного хряща производится путем разбиения изображения на сетку и поиска наиболее густо сосредоточенных объектов в каждой клетке. Выделение зоны размножения происходит путем сегментации изображения на основе кластеризации К-средних оставшегося изображения.

Входными данными для работы программы служит снимок микроскопии, выходными данными являются обработанные изображения и Excel-файл с количественными характеристиками.

В данной работе представлен метод автоматического анализа данных микроскопии. Предложенный способ позволяет упростить расчет гистологических параметров. Описанная методика была использована для анализа срезов кости. Описанный алгоритм может быть легко перенесен в какое-либо программное обеспечение для биологического анализа.

Литература

1. Jones A.C., Arns C.H., Sheppard A.P., Hutmacher D.W., Milthorpe B.K., Knackstedt M.A. Assessment of bone ingrowth into porous biomaterials using MICRO-CT. *Biomaterials*. 2007, 28:2491–504.
2. Stock S.R., Naik N.K., Wilkinson A.P., Kurtis K.E. X-ray microtomography (microCT) of the progression of sulfate attack of cement paste. *Cement Concrete Res*. 2002, 32:1673–5.
3. Van Lenthe G.H., Hagenmuller H., Böhner M., Hollister S.J., Meinel L., Müller R. Nondestructive micro-computed tomography for biological imaging and quantification of sca?old-bone interaction in vivo. *Biomaterials*. 2007, 28:2479–90.
4. Moriya T., Roth H.R., Nakamura S., Oda H., Nagara K., Oda M., et al. Unsupervised segmentation of 3D medical images based on clustering and deep representation learning. *Progr Biomed Opt Imaging*. 2018, 10578.
5. Bobyn J.D., Pilliar R.M., Cameron H.U., Weatherly G.C. The optimum pore size for the ?xation of porous surfaced metal implants by the ingrowth of bone. *Clin Orthopaed Relat Res*. 1980, 150:263–70.
6. Sweedy A., Böhner M., Baroud G. Multimodal analysis of in vivo resorbable CaP bone substitutes by combining histology, SEM, and microcomputed tomography data. *J Biomed Mater Res*. 2018, 106:1567–77.
7. Polak S.J., Candido S., Levensgood S., Wagoner Johnson A.J. Automated segmentation of micro-CT images of bone formation in calcium phosphate sca?olds. *Comput Med Imaging Graph*. 2012, 36:54–65.
8. Brown M.S., McNitt-Gray M.F., Mankovich N.J., Goldin J.G., Hiller J., Wilson L. S., et al. Method for segmenting chest CT image data using an anatomical model: preliminary results. *IEEE Trans Med Imaging*. 2002, 16:828–39.

Определение механических свойств костного органа по данным компьютерной томографии.

¹Харин Н.В., ¹Большаков П.В., ²Саченков О.А., ¹Герасимов О.В

¹ Институт вычислительной математики и информационных технологий НИЛ медицинского интернета вещей, Казанский Федеральный Университет, Россия, e-mail: nik1314@mail.ru

² Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казанский Федеральный Университет, Россия, e-mail: OASachenkov@kpfu.ru

Актуальной задачей является моделирование напряжённо-деформированного состояния пористых многофазных сред, примером такой среды является костная ткань. При симуляции поведения костной ткани [1] необходимо учесть анизотропные свойства среды, определяемые особенностями различных видов костных органов в зависимости от их функционала, возраста, пола, среды обитания и т.п.; такая задача - актуальна. В случае моделирования адаптационных процессов [2], возникающих в костной ткани при воздействии внешних факторов, необходимо знать первоначальное состояние костного органа, а значит, распределение в теле анизотропных свойств. Для определения ортотропных свойств необходимо проведение натурных экспериментов, такой метод невозможен, так как требует большое количество образцов; более того данный метод требует разрушение костного органа.

На сегодняшний день развитие компьютерной томографии позволяет получать информацию о структуре образца без разрушения, а распространённость компьютерных томографов в клинике развивает область применения методики в задачах биомеханики. Развитие направления компьютерной томографии расширяет область применения метода на микроуровне (микробиология, кристаллография и т.п.) и макроуровне (медицина, машиностроение и т.п.).

Целью данной работы является создание методики анализа распределения ортотропных свойств костного органа по данным компьютерной томографии.

Литература

1. Саченков О.А., Герасимов О.В., Королева Е.В., Мухин Д.А., Яикова В.В., Ахтямов И.Ф., Шакирова Ф.В., Коробейникова Д.А., Хань Х.Ч. Построение негетерогенной конечно-элементной модели по данным компьютерной томографии Российский журнал биомеханики. – 2018 – Т. 22, (3), ст. 332–344.
2. Gerasimov O.V, Yaikova V.V, Baltina T.V, Baltin M.E, Fedyanin A.O, Zamaliev R.R, Sachenkov O.A Modeling the change in the stiffness parameters of bone tissue under the influence of external loads. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1158., 022045. DOI:10.1088/1742-6596/1158/2/022045.

Обратная задача переноса загрязняющих веществ в пористых средах.

¹Хужаеров Б.Х. , ²Холияров Э.Ч., ³Хайдаров О.Ш.

^{1 3} Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.,
e-mail: b.khuzhayorov@mail.ru; khaydarovodiljon1981@gmail.com;

² Педагогический институт Термезского государственного университета, Термез,
Узбекистан.,
e-mail: e.kholiyarov@mail.ru;

Рассмотрим следующие уравнение переноса вещества в пористой среде

$$R \frac{\partial c}{\partial t} - D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{v}{m} \frac{\partial c}{\partial x} + \lambda R q - \frac{q c^*}{m} = 0, \quad (1)$$

где R – ретардационный фактор; c – концентрация массы вещества в жидкой фазе, т.е. масса растворенного вещества в единице объема раствора ($\text{кг}/\text{м}^3$), m – пористость пористой среде ($\text{м}^3/\text{м}^3$), q – объемная скорость закачки исходной жидкости на единицу объема среды (с^{-1}), t – время (с), v – скорость течения жидкости в пористой среде ($\text{м}/\text{с}$), c^* – концентрация вещества в закачиваемой жидкости в пористой среде.

Для решения уравнение (1) используется следующие начальное и граничное условия

$$c(0, x) = 0, \quad (2)$$

$$c(t, 0) = c_0, \quad c(t, l) = 0, \quad (3)$$

$$c(t, x_k) = z_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

где $z_k(t)$ – значения функции $A(t, x_k)$ в точках x_k , полученные обычно путем измерений, $k = 1, 2, \dots, n$.

Рассмотрим теперь задачу определения коэффициент R из условия минимума следующего функционала невязки

$$J(R) = \sum_{k=1}^n \int_0^T [c(t, x_k) - z_k(t)]^2 dt. \quad (5)$$

Условие стационарности функционала (5) имеет вид [5]

$$\frac{dJ}{dR} = 2 \sum_{k=1}^n \int_0^T [c(t, x_k) - z_k(t)] w(t, x_k) dt = 0, \quad (6)$$

Разложим функцию $A(t, x)$ в окрестности некоторого $\overset{s}{R}$ в ряд с точностью до членов второго порядка [5]

$$\overset{s+1}{A}(t, x) \approx \overset{s}{c}(t, x) + (\overset{s+1}{R} - \overset{s}{R}) \overset{s}{w}(t, x), \quad (7)$$

где $\overset{s+1}{A}$ означат значение $A(t, x)$ при $R = \overset{s+1}{R}$.

Исходный функционал невязки (5) на каждой итерации в окрестности $\overset{s}{R}$ разложим до членов третьего порядка, т.е.

$$J\left(\overset{s+1}{R}\right) = J\left(\overset{s}{R}\right) + \frac{dJ\left(\overset{s}{R}\right)}{dR} \left(\overset{s+1}{R} - \overset{s}{R}\right) + \frac{1}{2} \frac{d^2 J\left(\overset{s}{R}\right)}{dR^2} \left(\overset{s+1}{R} - \overset{s}{R}\right)^2. \quad (8)$$

Тогда условие стационарности (5) имеет вид

$$\frac{dJ\left(\overset{s+1}{R}\right)}{dR} = \frac{dJ\left(\overset{s}{R}\right)}{dR} + \frac{d^2 J\left(\overset{s}{R}\right)}{dR^2} \left(\overset{s+1}{R} - \overset{s}{R}\right) = 0. \quad (9)$$

Из условия (7) в результате находим следующие приближения $\overset{s+1}{R}$

Литература

1. *Salama, A.; Van Geel, P.J.* Flow and Solute Transport in Saturated Porous Media: 1. The Continuum Hypothesis, J. Porous Media, 11, 2008, 403-413.
2. *Cussler E.L.* Diffusion Mass Transfer in Fluid Systems, 3rd ed., Cambridge University Press: Cambridge, 2009.
3. *V. Lakshminarayana, Tej Ram Nayak.* Modelling contaminant transport in saturated aquifers Department of Civil Engineering Indian Institute of Technology, Kanpur, India.
4. *Бабе Г.Д., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А.* Идентификация моделей гидравлики, Новосибирск: Наука, 1980.
5. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач, Москва: Наука, 1998.
6. *Hao D. N.* Methods for inverse heat conduction problems, Lang. pub. Inc., Peter, 1998.

Алгоритм расчета потребности водных ресурсов участков магистрального канала

¹Эсонтурдиев М.Н., ²Seytov A., ³Haydarova R., ⁴Ergashev I.

¹ Чирчикский Государственный педагогический университет, Чирчик.

e-mail: esonturdiyev80@mail.ru

² доцент Чирчикского государственного педагогического университета, Чирчик.

e-mail: seyrov.aybek@mail.ru

³ Докторант Термезского государственного университета, Термез, Узбекистан,

e-mail: roziyadavronovna0412@gmail.com

⁴ Чирчикский Государственный педагогический университет, Чирчик, Узбекистан

e-mail: isroilbek19960818@gmail.com

Рассмотрим последовательность вычисления потребностей водных ресурсов магистрального канала состоящих из $m \in M$ участков, в каждом участке канала имеются отводы $j \in J_m$, и каждый отвод j орошает площади ω_{jmik} .

- $m \in M$ — номера участков магистрального канала, M — множество номеров участков магистрального канала;
- $i \in I_{mj}$ — виды сельхозкультур посеянные на подвешенных землях j — го отвода на участке канала с номером m , I_{mj} — множество видов сельхозкультур подвешенных землям j — го отвода на участке канала с номером m ;
- $k \in K_{mjk}$ — типы гидромодульных районов подвешенных землям j — го отвода на участке канала с номером m , K_{mjk} — множество типов;
- гидромодульных районов подвешенных землям j —го отвода на участке канала с номером.

Таким образом, ω_{jmik} представляет собой структуру посевных площадей всего магистрального канала, тогда для каждого отвода с учетом режимов орошения сельхозкультур потребность в водных ресурсах определяется следующим образом [1]

$$Q_{Omjn}^{\Pi} = \sum_{i \in I_{mj}} \sum_{k \in K_{mji}} \frac{q_{ikn} \omega_{jmik}}{\eta_{xmj}}, \quad Q_{mjn}^{\Pi} = Q_{Omjn}^{\Pi} + q_{\Pi mjn}^{\Pi}, \quad (1)$$

где q_{ikn} — декадные гидромодули i — ой сельхозкультуры k — го гидромодульного района для n — ой декады; Q_{Omjn}^{Π} — потребный расход на орошение воды, $q_{\Pi mjn}^{\Pi}$ — потребные расходы несельскохозяйственных потребителей, Q_{mjn}^{Π} — всего потребный расход воды j — го отвода m — го участка магистрального канала для n — ой декады; η_{xmj} — коэффициент полезного действия внутрихозяйственных каналов j — го отвода m — го участка магистрального канала.

Поливные площади по потребителям определяются в виде

$$S_{mjn}^{\Pi} = \sum_{i \in I_{mj}} \sum_{k \in K_{mji}} s_{ikn} \omega_{jmik}, \quad (3)$$

где S_{mjn}^{Π} — поливные площади j —го отвода m — го участка магистрального канала для n — ой декады вегетационного периода; s_{ikn} — декадные поливные модули i — ой сельхозкультуры k — го гидромодульного района для n — ой декады [2].

Аналогично по формуле (1) определяются потребные расходы воды на конечных отводах магистрального канала.

1. Аракелян Э.К., Пикина Г.А. Оптимизация и оптимальное управление. –М.: Издательский дом МЭИ, 2008.–408 с.
2. Рахимов Ш.Х., Бегимов И., Гаффаров Х.Ш., Сейтов А.Ж. Теория оптимального управления распределением воды в каналах ирригационных систем в условиях дискретности водоподачи потребителям. Монография.–Ташкент: ООО “Белгим”. 2017, –С.169.

Об одном решении устранения проблемы в кредитной системе обучения

¹Ядгаров Т. Г., ²Аликулов А. Х.

¹ Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан,
e-mail: t.yadgarov52@mail.ru

² Ташкентский университет информационных технологий, Ташкент, Узбекистан,
e-mail: akmalaliqulov@gmail.com

В кредитной системе обучения возникают много проблем в связи с учебными материалами и выбором данных о преподавателях. В современной кредитной системе обучения ставится вопрос об автоматизированном процессе получения информационных данных в системы управления обучением.

Здесь надо учесть, что объектом исследования является учебный процесс в кредитной системе обучения.

В настоящее время, студенты сами определяют и выбирают предметы (исключая базовые) и естественно соответствующих преподавателей в этой области.

Основной проблемой в современной кредитной системе обучения считаем, что нет общедоступной базы данных или как можно точно определить информационной базы данных. Должным образом, должна быть система передачи (программное обеспечение) информационных данных для обеспечения работы с необходимыми данными в процессе кредитной системе обучения.

Для устранения этих все необходимые информационные данные должны напрямую находится на сервере. Далее, через запросы на сервер управляющих систем, например LMS, NEMIS и другие передаётся соответствующий информационный поток данных.

Информационные данные:

- 1) Учебные материалы.
- 2) Информации о преподавателей.

В современном понятии они называются контентом в учебном процессе обучения. Для того, чтобы все информационные данные, каждый преподаватель готовит и пересылает через локальную сеть или через интернет все необходимые учебные материалы и данные о себе.

Для уточнения напомним, что все существующие системы управления обучением требует от преподавателя внести по одиночку учебные материалы. И надо учесть, что дополнительно вводится наиболее полная справка о преподавателе, где должна содержаться вся информация.

Принцип работы передачи информационных данных схематически можно представить следующим образом:

Естественно, на сервере у каждого преподавателя свой код, логин и пароль.

Пусть учебные материалы одного преподавателя считаем как переменные X_i и функцию передачи информации обозначим $V(X_i)$. Для информации о преподавателей введем переменную Y_i и соответственно функцию передачи данных обозначим $U(Y_i)$. Здесь можно ввести переменную зависящимся от времени t и при конкретном интервале значений $t = t_p$ передаются данные.

Тогда получается следующие суммы:



Рис.1 Схема передачи контент

$$V_p = \sum_{i=1}^n V(X_i, t_p), \quad (1) \quad U_p = \sum_{j=1}^m V(Y_j, t_p), \quad (2)$$

Главной частью работы системы управления обучением является запросы на сервер управления контентом для выбора данных.



Рис.2 Запрос – передача.

На сервере управления информационные данные представляется в виде следующих систем функционалов:

$$F(x) = \sum_{p=1}^k V_p, \quad Z(l) = \sum_{p=1}^l U_p.$$

Следовательно, каждая функция отвечает за соответствующий контент.

Литература

1. *Larry ULLman PHP and MySQL for Dynamic Web Sites*, Fourth Edition, 1249 Eighth Street, Berkeley, CA 94710, 2012 y.
2. *Bible Tim Converse and Joyce Park with Clark Morgan PHP5 and MySQL*, Wiley Publishing, Inc., Indianapolis, Indiana 2004.
3. *Избачков Ю.С., Петров В.Н., Васильев А.А., Телина И.С.* И74 Информационные системы: Учебник для вузов. 3-е изд. – СПб.: Питер, 2011. –544 с.: ил. ISBN 978-5-49807-158-9.
4. *Ядгаров Т.Г., Аликулов А.Х.* Технология создания информационной базы данных в среде yii framework для использования в кредитной системе обучения. ТАТУ Мухаммад ал-Хоразмий авлодлари 2019й, 5 бет.

