ABSTRACTS

of the international conference

MATHEMATICAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS IN MODERN MATHEMATICAL PHYSICS

PART I

Samarkand
September 23-24, 2022

MINISTRY OF HIGHER AND SECONDARY SPECIAL
EDUCATION OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SH.RASHIDOV
MATHEMATICS INSTITUTE OF THE ACADEMY OF SCIENCE OF UZBEKISTAN

INTERNATIONAL CONFERENCE

MATHEMATICAL ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS IN MODERN MATHEMATICAL PHYSICS

September 23-24, 2022; Samarkand, Uzbekistan

PART I

SAMARKAND – 2022

UDK 51:517

Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics: international scientific conference (September 23-24, 2022 y. Samarkand).

Chief Editor Lakaev S.N. – Samarkand, 2022 y.

The collection of abstracts of the reports of the international scientific conference "Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics" contains scientific reports on the following areas: Mathematical analysis, differential equations, mathematical physics, algebra, geometry, numerical mathematics, mathematical modeling, probability theory, mathematical statistics, mathematical engineering and information technologies .

It is intended for specialists in the field of physical and mathematical sciences and information technologies, teachers, doctoral students and undergraduates of universities.

ORGANIZING COMMITTEE OF THE CONFERENCE

Chairman:

Khalmuradov R.I. – *professor, rector of SamSU (Uzbekistan)*

Vice-chairman:

Soleev A.S. – *professor, vice-rector of SamSU (Uzbekistan)*
Khushvaktov Kh.A. – *DSc, vice-rector of SamSU (Uzbekistan)*

Members of the organizing committee:

Ayupov Sh.A. – *academician of the AS RUz, director of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky (Uzbekistan)*
Lakaev S.N. – *academician of the AS RUz,head of the Department of SamSU (Uzbekistan)*
Alimov Sh.A. – *academician of the AS RUz (Uzbekistan)*
Sadullaev A.S. – *academician of the AS RUz (Uzbekistan)*
Azamov A.A. – *academician of the AS RUz (Uzbekistan)*
Farmonov Sh.K. – *academician of the AS RUz (Uzbekistan)*
Motovilov A.K. – *professor, head of the Sector of the Laboratory of Theoretical Physics named after N.N.Bogolyubov (Russia)*
Makarov K.A. – *professor at the University of Missouri (USA)*
Kurasov P.B. – *professor at the Stockholm University (Sweden)*
Darus M. – *professor at the Kebangsaan University (Malaysia)*
Rakhimov I.S. – *professor at the MARA University of Technology (Malaysia)*
Turmetov B.X. – *professor at the International Kazakh-Turkish University named after H.A. Yassavi (Kazakhstan)*
Kholmatov Sh.Y. – *professor at the University of Vienna (Austria)*
Rozikov U.A. – *professor, deputy director of the at the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky (Uzbekistan)*
Ashurov R.R. – *professor at the Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky (Uzbekistan)*
Khalkhuzhaev A.M. – *professor, head of Samarkand branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky (Uzbekistan)*
Akhatov A.R. – *professor, vice-rector of SamSU (Uzbekistan)*
Abdujabborov S.B. – *PhD, vice-rector of SamSU (Uzbekistan)*
Ruzimurodov Kh.Kh. – *dean of the Faculty of Mathematics, SamSU (Uzbekistan)*
Khasanov A.B. – *professor, head of the Department of SamSU (Uzbekistan)*
Khuzhayorov B.Kh. – *professor, head of the Department of SamSU (Uzbekistan)*
Ikromov I.A. – *professor at the Samarkand branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky (Uzbekistan)*

PROGRAM COMMITTEE OF THE CONFERENCE

Chairman:

Khalkhuzhaev A.M. – *professor, head of the Samarkand branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*

Members of the organizing committee:

Alimov Sh.A. – *academician of the AS RUz*
Ayupov Sh.A. – *academician of the AS RUz, director of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*
Ashurov R.R. – *professor, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*
Rozikov U.A. – *professor, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*
Yuldashev T.K – *professor, Tashkent State University of Economics*
Khasanov A.B. – *professor, head of the Department of SamSU*
Khuzhayorov B.Kh. – *professor, head of the Department of SamSU*
Ikromov I.A. – *professor, Samarkand branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*
Imomkulov S.A. – *professor, head of the Urgench branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*
Muminov M.E. – *professor, SamSU*
Khayotov A.R. – *professor, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*
Abdullaev J.I. – *professor, SamSU*
Rasulov T.H. – *professor, Bukhara State University*
Kudaybergenov K.K. – *professor, Nukus branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*
Durdiev D.K. – *professor, head of the Bukhara branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*
Omirov B.A. – *professor, NUU*
Muminov Z.E. – *professor, TSUE*
Kholmatov Sh.Y. – *PhD, University of Vienna, Austria*
Botirov G.I – *professor, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*
Zikirov O.S. – *professor, NUU*
Rahmatullaev M.M. – *professor, head of the Namangan branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky*
Bozorov I.N. – *associate professor, SamSU*
Latipov Sh.M. – *associate professor, SamSU*
Alladustov Sh.U. – *professor, NUU*
Madrakhimov Sh. – *professor, NUU*
Kudaybergenov K.K. – *associate professor, NUU*
Saidov D. – *associate professor, NUU*

SECRETARIAT OF THE CONFERENCE:

PhD. Boltaev A., PhD. Khamidov Sh., PhD. Abdukhakimov S., Almuratov F., Alladustova I., Ismoilov G., Azizova M.

ORGANIZER OF THE CONFERENCE:

Samarkand State University named after Sh. Rashidov, Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky

CONTENTS

SECTION I. MATHEMATICAL ANALYSIS

SECTION II. DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL PHYSICS

SECTION I. MATHEMATICAL ANALYSIS

On the existence of bound states of a system of two fermions on the one dimensional lattice

[1]Abdukhakimov S.Kh., [2]Azizova M.A.
[1,2]*Samarkand State University (Uzbekistan),*
e-mail: abduxakimov93@mail.ru, amukammal@mail.ru

Let $\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ be the Hilbert space of square summable functions on the cartesian product $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ of the one dimensional lattice $\mathbb{Z}$ and $\ell^{2,a}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})\subset\ell^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ be the subspace of antisymmetric functions on $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

In contrast to the results of [1-2] we prove the existence of eigenvalues below the essential spectrum of the operator $H_\mu(k)$ in the following two cases: in the case $k=0$ for all $\mu<0$ and in the case of $k\neq 0$ for large $\mu<0$.

In a position-space representation the two particle Hamiltonian $\widehat{\mathbb{H}}_\mu$, associated a system of two-particles interacting by means of the potential $\hat{v}$, in the position space representation is the bounded self–adjoint operator acting in $\ell^{2,a}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ as

$$\widehat{\mathbb{H}}_\mu=\widehat{\mathbb{H}}_0+\mu\widehat{\mathbb{V}},\ \mu<0.$$

The free hamiltonian $\widehat{\mathbb{H}}_0$ of a system of two identical quantum-machanical particles (fermions) is the bounded self–adjoint operator acting in the Hilbert space $\ell^{2,a}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ as

$$\widehat{\mathbb{H}}_0=\hat{h}_0\otimes I+I\otimes\hat{h}_0.$$

Here $\widehat{h}_0$ is

$$\widehat{h}_0:=\hat{\triangle}\hat{\triangle}+\hat{\triangle}\hat{\triangle}\hat{\triangle},$$

where

$$\hat{\triangle}\hat{f}(x)=\hat{f}(x)-\frac{\hat{f}(x+1)+\hat{f}(x-1)}{2},\ \hat{f}\in\ell^2(\mathbb{Z}).$$

The interaction $\widehat{\mathbb{V}}$ of the two identical particles (fermions), in the position space representation, is given as the multiplication operator by function $\hat{v}$:

$$[\widehat{\mathbb{V}}\hat{f}](x,y)=\hat{v}(x-y)\hat{f}(x,y),\ \ \hat{f}\in\ell^{2,a}(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}),$$

where the function $\hat{v}$ is defined on $\mathbb{Z}$ as

$$\hat{v}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & |x|=1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

Let $\mathbb{T}=(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})\equiv(-\pi,\pi]$ be the two dimensional torus, the Pontryagin dual group of $\mathbb{Z}$, equipped with the (normalized) Haar measure

$$\eta(\mathrm{d}p):=\frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\ .$$

Let $L^2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square-integrable odd functions on $\mathbb{T}$.

The discrete Schrödinger operator $H_\mu(k)$ acting in $L^{2,o}(\mathbb{T})$ is of the form

$$H_\mu(k)=H_0(k)+\mu V,$$

where $H_0(k)$ is the multiplication operator by function $\mathcal{E}_k(p)$:

$$[H_0(k)f](p)=\mathcal{E}_k(p)f(p),\quad f\in L^{2,o}(\mathbb{T}),$$

$$\mathcal{E}_k(p)=\varepsilon(\frac{k}{2}-p)+\varepsilon(\frac{k}{2}+p),$$

and

$$\varepsilon(p) = (1-\cos p)^2 + (1-\cos p)^3.$$

The corresponding two-particle dispersion relation $\mathcal{E}_k(\cdot)$ is of the form

$$\mathcal{E}_k(p) = 8 - \frac{23}{2}\cos\frac{k}{2}\cos p + 4\cos k\cos 2p - \frac{1}{2}\cos\frac{3k}{2}\cos 3p$$

and V is the integral operator of rank one

$$[Vf](p) = \sin p \int_{\mathbb{T}} \sin t f(t)\eta(dt), \quad f \in L^{2,o}(\mathbb{T}).$$

The perturbation V is operator of rank one. Hence, by the Weyl theorem the essential spectrum of $H_\mu(k)$ coincides with the spectrum of $H_0(k)$, i.e.,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\mu(k)) = \sigma(H_0(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k),\, \mathcal{E}_{\max}(k)],$$

with

$$\mathcal{E}_{\min}(k) := \min_{p\in\mathbb{T}} \mathcal{E}_k(p) = 2\left[(1-\cos\frac{k}{2})^2 + (1-\cos\frac{k}{2})^3\right] \geq 0,$$

$$\mathcal{E}_{\max}(k) := \max_{p\in\mathbb{T}} \mathcal{E}_k(p) = 2\left[(1+\cos\frac{k}{2})^2 + (1+\cos\frac{k}{2})^3\right] \leq 24.$$

Theorem 1. *Let $k = 0$. Then for any $\mu > 0$ the operator $H_\mu(0)$ has an eigenvalue $z_\mu(0)$ below the threshold $\mathcal{E}_{\min}(0)$ of the essential spectrum $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\mu(0))$.*

We define the following finite integral for each $k \in \mathbb{T}\backslash\{0\}$:

$$a(k, \mathcal{E}_{\min}(k)) = \int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 p\, \eta(\mathrm{d}p)}{\mathcal{E}_{\min}(k) - \mathcal{E}_k(p)}.$$

Let

$$\mu_{th}(k) = \frac{1}{a(k, \mathcal{E}_{\min}(k))}.$$

Theorem 1. *Let $k \neq 0$.*

(i) If $\mu_{th}(k) < \mu < 0$, then the operator $H_\mu(k)$ has no eigenvalues below the threshold $\mathcal{E}_{\min}(k)$;

(ii) If $\mu < \mu_{th}(k)$, then the operator $H_\mu(k)$ has an eigenvalue $z_\mu(k)$ below the threshold $\mathcal{E}_{\min}(k)$.

References

1. *S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov.* The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices, Comm.Math.Phys., **262**, 2006, 91–115.

2. *S.N. Lakaev, S.Kh. Abdukhakimov.* Threshold effects in a two-fermion system on an optical lattice, Theoret. and Math. Phys., **203**, 2020, 251–268.

Monotonicity of the eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice

[1]Abdullaev J.I., [2]Usmonov L.S.
[1]*Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,*
e-mail: jabdullaev@mail.ru
[2]*Samarkand State University, University Boulevard 15, Samarkand 140104, Uzbekistan,*
e-mail: u.lochinbek@bk.ru

We consider the two-particle Schrödinger operator $H(\mathbf{k})$, ($\mathbf{k} \in \mathbf{T}^3 \equiv (-\pi, \pi]^3$ is the total quasimomentum of a system of two particles) corresponding to the Hamiltonian of the two-particle system on the three-dimensional lattice $\mathbf{Z}^3$. Under some additional conditions potential $\hat{v}$, the monotonicity of each eigenvalue $z_n(\mathbf{k}) \equiv z_n(k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)})$ of the operator $H(\mathbf{k})$ in $k^{(i)} \in [0, \pi], i = 1, 2, 3$ with fixed other coordinates is proved.

Energy operator $\hat{H}$ of a system of two quantum particles on a three-dimensional lattice $\mathbf{Z}^3$ acts in the Hilbert space $\ell_2((\mathbf{Z}^3)^2)$ by formula (see [1-4])

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V},$$

where the free energy operator $\hat{H}_0$ acts in $\ell_2((\mathbf{Z}^3)^2)$ as

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2}.$$

Here $m_1, m_2 > 0$ are denoted the masses of particles, which in the future are considered equal to one, $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I$ and $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta$, lattice Laplacian Δ is a difference operator describing the transfer of a particle from a side to neighboring side

$$(\Delta\hat{\psi})(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3}[\hat{\psi}(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i) + \hat{\psi}(\mathbf{x}-\mathbf{e}_i) - 2\hat{\psi}(\mathbf{x})], \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbf{Z}^3),$$

where $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ are the unit vectors in $\mathbf{Z}^3$.

The interaction of two particles is described by the operator $\hat{V}$:

$$(\hat{V}\hat{\psi})(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = \hat{v}(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2})\hat{\psi}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}), \quad \hat{\psi} \in \ell_2((\mathbf{Z}^3)^2),$$

where $\hat{v}(\mathbf{x}) \geq 0$ and $\hat{v} \in l_1(\mathbf{Z}^3)$. The energy operator $\hat{H}$ is the bounded self-adjoint operator in the space $\ell_2((\mathbf{Z}^3)^2)$. Transition to impulse representation is performed by using the Fourier transform $\mathcal{F} : L_2((\mathbf{T}^3)^2) \to \ell_2((\mathbf{Z}^3)^2)$. Operator energy $H = \mathcal{F}^{-1}\hat{H}\mathcal{F}$ in the momentum representation commutes with the group of unitary operators $U_{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathbf{Z}^3$:

$$(U_{\mathbf{s}}f)(\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}) = \exp\big(-i(\mathbf{s}, \mathbf{k_1} + \mathbf{k_2})\big)f(\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}), \quad f \in L_2((\mathbf{T}^3)^2).$$

From the last fact we obtain [5] that there are decompositions of the space $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$, operators $U_{\mathbf{s}}$ and H into direct integrals:

$$L_2((\mathbf{T}^3)^2) = \int_{\mathbf{T}^3} \oplus L_2(F_{\mathbf{k}})d\mathbf{k}, \quad U_{\mathbf{s}} = \int_{\mathbf{T}^3} \oplus U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k})d\mathbf{k}, \quad H = \int_{\mathbf{T}^3} \oplus \tilde{H}(\mathbf{k})d\mathbf{k}.$$

Here

$$F_{\mathbf{k}} = \{(\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}) \in (\mathbf{T}^3)^2 : \quad \mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} = \mathbf{k}\};$$

$U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k}), \mathbf{k} \in \mathbf{T}^3$ is the multiplication operator by the function $\exp(-i(\mathbf{s}, \mathbf{k}))$ in the space $L_2(F_{\mathbf{k}})$, and fiber operators $\tilde{H}(\mathbf{k}), \mathbf{k} \in \mathbf{T}^3$ in $L_2(F_{\mathbf{k}})$ are defined according to the formula

$$(\tilde{H}(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) = (\mathcal{E}(\mathbf{q}) + \mathcal{E}(\mathbf{k}-\mathbf{q}))f(\mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) - (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\int\limits_{\mathbf{T}^3} v(\mathbf{q}-\mathbf{s})f(\mathbf{s}, \mathbf{k}-\mathbf{s})d\mathbf{s}$$

and it unitarily equivalent to the operator $H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$, so-called the Schrödinger operator. Unitarity is carried out using the unitary transformation

$$u_{\mathbf{k}} : L_2(F_{\mathbf{k}}) \to L_2(\mathbf{T}^3), \quad (u_{\mathbf{k}}g)(\mathbf{q}) = g(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}, \frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}).$$

$H_0(\mathbf{k})$ is the multiplication operator by the function

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \mathcal{E}(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}) + \mathcal{E}(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}),$$

where

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{3}(1 - \cos q^{(j)})$$

and V is the integral operator in $L_2(\mathbf{T}^3)$, generated by the kernel $(2\pi)^{-3/2}v(\mathbf{q} - \mathbf{s})$. The kernel v of the integral operator V is the Fourier transform of the potensial $\hat{v}$.

Assumption 1 Let be

$$\hat{v}(2s, n^{(2)}, n^{(3)}) = 0, \forall s \in \mathbf{Z}$$

or

$$\hat{v}(2s + 1, n^{(2)}, n^{(3)}) = 0, \forall s \in \mathbf{Z}.$$

Theorem 1. Let assumption 1 be fulfilled. Then each eigenvalue $z_n(\mathbf{k}) \equiv z_n(k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)})-$ of the operator $H(\mathbf{k})$ increases in $k^{(1)} \in [0, \pi]$.

Remark 2.4. Let be

$$\hat{v}(n^{(1)}, 2s, n^{(3)}) = 0, \forall s \in \mathbf{Z}$$

or

$$\hat{v}(n^{(1)}, 2s + 1, n^{(3)}) = 0, \forall s \in \mathbf{Z}$$

(respectively

$$\hat{v}(n^{(1)}, n^{(2)}, 2s) = 0, \forall s \in \mathbf{Z}$$

or

$$\hat{v}(n^{(1)}, n^{(2)}, 2s + 1) = 0, \forall s \in \mathbf{Z}).$$

Then each eigenvalue $z_n(\mathbf{k})$ of the operator $H(\mathbf{k})$ increases in $k^{(2)} \in [0, \pi]$ (respectively in $k^{(3)} \in [0, \pi]$).

References

1. *P.A. Faria da Viega, L.Ioriatti and M.O'Carrol.* Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonian. Phys. Rev. E(3) 66, 016130, 9 pp. (2002).
2. *D. C. Mattis.* The few-body problem on a lattice. Rev. Modern Phys., 58, 361?379 (1986).
3. *S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov.* The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices, Commun. Math. Phys., 262:1 (2006), 91, 115.
4. *S.N. Lakaev, A.M. Khalkhuzhaev.* Spectrum of the two-particle Schrödinger Operator on a lattice, Theor. Math. Phys., 155 (2): 753-764 (2008).
5. *M. Reed and B. Simon,* Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators. Academic Press, N.Y., 1979.

Point spectrum of the operator matrices with the Fredholm integral operators

Abdullaeva M.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
e-mail:abdullayevamuhayyo9598@gmail.com

In mathematics, Fredholm operators are certain operators that arise in the Fredholm theory of integral equations. They are named in honour of Erik Ivar Fredholm.

A linear operator $\mathcal{A}$ from a Banach space X to a Banach space Y is called a Fredholm operator if

1. $\mathcal{A}$ is closed;
2. the domain $D(\mathcal{A})$ of $\mathcal{A}$ is dense in X;
3. $\alpha(\mathcal{A})$, the dimension of the null space $N(\mathcal{A})$ of $\mathcal{A}$, is finite;
4. $R(\mathcal{A})$, the range of $\mathcal{A}$, is closed in Y;
5. $\beta(\mathcal{A})$, the codimension of $R(\mathcal{A})$ in Y, is finite.

In particular, on the spaces $C[a;b]$ or $L_2[a;b]$ an operator of the form

$$(\mathcal{A}\phi)(x) = \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt, \tag{1}$$

where the kernel $K(\cdot,\cdot)$ is continuous and hence square-integrable function on $[a;b] \times [a;b]$, is Fredholm. The operator of the form (1) is also called a linear Fredholm integral operator with the kernel $K(\cdot,\cdot)$. In the present note we considered the case where the kernel $K(\cdot,\cdot)$ is degenerate.

Let $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ be the d-dimensional torus and $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ be the Hilbert space of square integrable symmetric (complex) functions defined on $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

In the Hilbert space $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ we consider the Fredholm integral operators of the form

$$(A_{ij}f_j)(x) = a_{ji}(x)\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} a_{ij}(t)f_j(t)dt, \quad f_i \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}), \quad i \leq j, \quad i,j = 1,2,3,$$

where $a_{ij}(\cdot)$, $i,j = 1,2,3$ are the real-valued continuous functions on $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$. Then it is easy to see that $A_{ij}^* = A_{ji}$ for all $i,j = 1,2,3$.

First we investigate the spectrum of $\mathcal{A}_1 := A_{11}$. Direct calculations show that the operator $\mathcal{A}_1$ has a purely point spectrum and the equality $\sigma_{\mathrm{pp}}(\mathcal{A}_1) = \{0, \|a_{11}\|^2\}$ holds, where the number $\lambda = 0$ is an eigenvalue of $\mathcal{A}_1$ with infinite multiplicity, the number $\lambda = \|a_{11}\|^2$ is a simple eigenvalue of $\mathcal{A}_1$.

For the further discussions we denote

$$L_2^{(2)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) := \{f = (f_1, f_2) : \, f_\alpha \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}), \, \alpha = 1,2\},$$
$$L_2^{(3)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) := \{f = (f_1, f_2, f_3) : \, f_\alpha \in L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}), \, \alpha = 1,2,3\}.$$

Notice that the norm and scalar product in $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ are defined as

$$\|f\| = \left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} |f_1(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} |f_2(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} |f_3(t)|^2 dt\right)^{1/2};$$
$$(f,g) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_1(t)\overline{g_1(t)}dt + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_2(t)\overline{g_2(t)}dt + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} f_3(t)\overline{g_3(t)}dt$$

for $f = (f_1, f_2, f_3), g = (g_1, g_2, g_3) \in L_2^{(3)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$.

For $n = 2,3$ in the Hilbert space $L_2^{(n)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ we consider the following $n \times n$ operator matrix

$$\mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_3 := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Under these assumptions the operator matrix $\mathcal{A}_\alpha$ is bounded and self-adjoint in $L_2^{(\alpha)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ for $\alpha = 2,3$.

Operators of this type are arise in the process of constructing the Faddeev equations for the eigenfunctions of the model operators corresponding to the Hamiltonians of a three-particle system on a lattice [1,2].

Note that all matrix elements A_{ij} of $\mathcal{A}_3$ are one-dimensional operators, and hence depending on the functions $a_{ij}(\cdot)$, $i,j=1,2,3$ the operator matrix $\mathcal{A}_3$ is an at most 9-dimensional operator. Analogously, the operator matrix $\mathcal{A}_2$ is an at most 4-dimensional operator. Since $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$, $L_2^{(2)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ and $L_2^{(3)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ are the infinite-dimensional Hilbert spaces, that is,

$$\dim L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) = \dim L_2^{(2)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) = \dim L_2^{(3)}(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) = \infty,$$

the equalities hold:

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3) = \{0\}.$$

To study the non zero eigenvalues of the operator matrices $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha=2,3$ we introduce the following functions:

$$\Delta_2(\lambda) := \begin{vmatrix} \Delta_{11}(\lambda) & \Delta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_{22}(\lambda) & \Delta_{14} & \Delta_{15} \\ \Delta_{12} & \Delta_{42} & \Delta_{33}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_{25} & \Delta_{44}(\lambda) \end{vmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) := \begin{vmatrix} \Delta_{11}(\lambda) & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{19} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22}(\lambda) & \cdots & \Delta_{29} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{91} & \Delta_{92} & \cdots & \Delta_{99}(\lambda) \end{vmatrix},$$

where the matrix elements are defined by

$$\begin{aligned}
&\Delta_{11}(\lambda) := \|a_{11}\|^2 - \lambda, \quad \Delta_{12} := (a_{11}, a_{21}), \quad \Delta_{13} := (a_{11}, a_{31});\\
&\Delta_{22}(\lambda) := -\lambda, \quad \Delta_{24} := \|a_{12}\|^2, \quad \Delta_{25} := (a_{12}, a_{22}), \quad \Delta_{26} := (a_{12}, a_{32});\\
&\Delta_{33}(\lambda) := -\lambda, \quad \Delta_{37} := \|a_{13}\|^2, \quad \Delta_{38} := (a_{13}, a_{23}), \quad \Delta_{39} := (a_{13}, a_{33});\\
&\Delta_{41} := (a_{21}, a_{11}), \quad \Delta_{42} := \|a_{21}\|^2, \quad \Delta_{43} := (a_{21}, a_{31}), \quad \Delta_{44}(\lambda) := -\lambda;\\
&\Delta_{54} := (a_{22}, a_{12}), \quad \Delta_{55} := \|a_{22}\|^2 - \lambda, \quad \Delta_{56} := (a_{22}, a_{32});\\
&\Delta_{66}(\lambda) := -\lambda, \quad \Delta_{67} := (a_{23}, a_{13}), \quad \Delta_{68} := \|a_{23}\|^2, \quad \Delta_{69} := (a_{23}, a_{33});\\
&\Delta_{71} := (a_{31}, a_{11}), \quad \Delta_{72} := (a_{31}, a_{21}), \quad \Delta_{73} := \|a_{31}\|^2, \quad \Delta_{77}(\lambda) := -\lambda;\\
&\Delta_{84} := (a_{32}, a_{12}), \quad \Delta_{85} := (a_{32}, a_{22}), \quad \Delta_{86} := \|a_{32}\|^2, \quad \Delta_{88}(\lambda) := -\lambda;\\
&\Delta_{97} := (a_{33}, a_{13}), \quad \Delta_{98} := (a_{33}, a_{23}), \quad \Delta_{86} := \|a_{32}\|^2, \quad \Delta_{99}(\lambda) := \|a_{33}\|^2 - \lambda\\
&\Delta_{ij} = 0, \quad \text{otherwise.}
\end{aligned}$$

In the following theorem we describe the point spectrum of $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha=2,3$.

Theorem 1. *For $\alpha=2,3$ the operator matrix $\mathcal{A}_\alpha$ has a purely point spectrum and*

$$\sigma_{\mathrm{pp}}(\mathcal{A}_\alpha) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{R} : \Delta_\alpha(\lambda) = 0\}.$$

Moreover, the number $\lambda=0$ is an eigenvalue of $\mathcal{A}_\alpha$ with infinite multiplicity.

It can be seen that the function $\Delta_2(\cdot)$ is a polynomial of order 4 with respect to λ. Therefore, it has at most 4 real zeros (taking into account the multiplicity). Therefore, by virtue of Theorem 1, an operator matrix $\mathcal{A}_2$ can have at most 4 (taking into account the multiplicity) eigenvalues with finite multiplicity. Analogously, an operator matrix $\mathcal{A}_3$ can have at most 9 (taking into account the multiplicity) eigenvalues with finite multiplicity.

Using Theorem 1 and the fact about $\sigma_{\mathrm{pp}}(\mathcal{A}_1)$ it is possible to find an exact representation of the numerical range of the operator $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha=1,2,3$. It should be noted that since the operator $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha=1,2,3$ has a purely point spectrum, its numerical range $W(\mathcal{A}_\alpha)$ always a bounded (closed) segment and for $\alpha=1,2,3$ the equality

$$W(\mathcal{A}_\alpha) = [\min \sigma_{\mathrm{pp}}(\mathcal{A}_\alpha); \max \sigma_{\mathrm{pp}}(\mathcal{A}_\alpha)]$$

is valid. In particular, we have $W(\mathcal{A}_1) = \left[0; \|a_{11}\|^2\right]$. The study of quadratic numerical range of $\mathcal{A}_2$ and cubic numerical range of $\mathcal{A}_3$ needs an additional investigations.

Reference

1. *S. Albeverio, S.N. Lakaev, Z.I. Muminov.* On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices, Russ. J. Math. Phys., **14**:4 (2007), 377–387.
2. *T.H. Rasulov.* Essential spectrum of a model operator associated with a three-particle system on a lattice, Theoret. and Math. Phys., **166**:1 (2011), pp. 81–93.

Panjaradagi ikki fermionli sistemaga mos Schrödinger operatori xos qiymati uchun asimptotik formula

[1]**Abduxakimov S.X.**, [2]**Vahobov M.A.**, [3]**Umirzokov L.A.**
[1]*Samarqand davlat universiteti (Samarqand, O'zbekiston),*
e-mail: abduxakimov93@mail.ru
[2]*Samarqand davlat universiteti (Samarqand, O'zbekiston),*
e-mail: vahobovmehroj62@gmail.com
[3]*Samarqand davlat universiteti (Samarqand, O'zbekiston),*
e-mail: umirzokovlaziz@gmail.com

Biz panjarada ikki qadamda o'zaro tortishuvchi potentsial yordamida ta'sirlashuvchi ikkita bir xil fermionlar sistemasini qaraymiz.

Bu tezisning asosiy maqsadi panjaradagi ikkita bir xil fermionlar sistemasiga mos diskret Schrödinger operatorlari oilasi $H_\mu(k)$, $k \in T$ ning muhim spektrdan chapda yagona xos qiymatga ega yoki ega emasligini ko'rsatish va xos qiymati uchun asimptotik formula topishdan iborat.

Z^d panjaradagi ikki zarrachali sistemalar hamiltonianlarining spektral xossalari keyingi vaqtlarda faol o'rganilyapti([1-2]larga qarang).

Faraz qilaylik, Z bir-o'lchamli panjara va $T = (-\pi, \pi]$ esa bir-o'lchamli tor bo'lib, $\ell^{2,o}(Z)$ va $L^{2,o}(T)$ lar orqali kvadrati bilan jamlanuvchi va integrallanuvchi toq funksiyalarning Hilbert fazolari belgilangan bo'lsin.

Panjarada ikki qadamda o'zaro ta'sirlashuvchi ikkita bir xil fermionli sistemaga mos ikki zarrachali diskret Schrödinger operatori $H_\mu(k), k \in T$ koordinata tasvirda quyidagi

$$H_\mu(k) = H_0(k) + \mu V, k \in T, \mu < 0$$

formula bilan aniqlanadi.

Har bir $k \in T$ uchun qo'zg'almagan operator $H_0(k)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$[H_0(k)f](x) = \sum_{y \in Z} \mathcal{E}_k(x-y)f(y), f \in \ell^{2,o}(Z).$$

Bunda

$$\mathcal{E}_k(x) = [e^{\mathrm{i}\frac{k}{2}x} + e^{-\mathrm{i}\frac{k}{2}x}]\varepsilon(x)$$

va

$$\hat{\varepsilon}(s) = \begin{cases} 2, & |s| = 0, \\ -\frac{1}{2}, & |s| = 2, \\ 0, & |s| \neq 0, 2. \end{cases}$$

Ta'sir operatori $V-$ ko'paytirish operatori bo'lib, u

$$[Vf](x) = v(x)f(x), f \in \ell^{2,o}(Z^d).$$

kabi aniqlanadi. Bunda $v(\cdot)$ funksiya

$$v(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| = 2, \\ 0, & |x| \neq 2 \end{cases}$$

kabi aniqlangan.

Impuls tasvirda qaralayotgan operatorlar oilasi $\hat{H}(k), k \in T$ quyidagi ko'rinishga ega:

$$\hat{H}_\mu(k) = \hat{H}_0(k) + \mu\hat{V}, k \in T,\ \mu < 0.$$

Bunda $\hat{H}_0(k) = \mathcal{F}H_0(k)\mathcal{F}^*$, $k \in T$ bo'lib, u

$$[\hat{H}_0(k)\hat{f}](q) = \hat{\mathcal{E}}_k(q)\hat{f}(q), \hat{f} \in L^{2,o}(T),$$

bunda

$$\hat{\mathcal{E}}_k(q) = 2 - 2\cos\frac{k}{2}\cos 2q.$$

Qo'zg'alish, ya'ni ta'sir operatori $\hat{V}$ quyidagi formula

$$[\hat{V}\hat{f}](p) = \sin 2p \int_T \sin 2t\hat{f}(t)dt, \hat{f} \in L^{2,o}(T),$$

orqali aniqlanadi.

Bu holda Z panjarada aniqlangan V operator rangi birga teng bo'lgani uchun Weyl teoremasiga ko'ra $H_\mu(k)$, $k \in T$ operatorning $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$ muhim spektri $H_0(k)$ operatorning $\sigma(H_0(k))$, $k \in T$ spektri bilan ustma-ust tushadi. Ravshanki,

$$\sigma_{ess}(H_\mu(k)) = \sigma_{ess}(\hat{H}_\mu(k)) = [\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k), \hat{\mathcal{E}}_{\max}(k)]$$

bunda,

$$\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k) = 2 - 2\cos\frac{k}{2}, \quad \hat{\mathcal{E}}_{\max}(k) = 2 + 2\cos\frac{k}{2}.$$

Min-max prinsipi va V operatorning musbatligidan $H_\mu(k), k \in T$ operatorning faqat muhim spektr $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$ ning chapida va faqat chekli karrali xos qiymatlarga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Eslatib o'tamizki, itarishuvchi zarrachalar sistemasi bo'lgan $\mu > 0$ bo'lganda natijalar biz qarayotgan holdagi kabi o'rganiladi.

Theorem 1. *a)Agar $\mu \le \mu(k) = \frac{1}{\pi}\cos\frac{k}{2}$ bo'lsa, $H_\mu(k)$ operatorning muhim spektrdan chapda xos qiymati mavjud emas.*

b) Agar $\mu > \mu(k)$ bo'lsa, $H_\mu(k)$ operatorning muhim spektrdan chapda yagona $z_\mu(k)$ xos qiymatga ega va ushbu xos qiymat quyidagi ko'rinishga ega:

$$z_\mu(k) = 2 + \frac{\cos^2\frac{k}{2} + \pi^2\mu^2}{\pi\mu}.$$

Theorem 1. *Yetarlicha kichik $\mu - \mu(k) < 0$ lar uchun quyidagi yoyilma o'rinli*

$$z_\mu(k) - \hat{\mathcal{E}}_{\min}(k) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n!\pi^n}{\cos^{n-1}\frac{k}{2}}(\mu(k) - \mu)^n.$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov.* The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices, Comm.Math.Phys., **262**, 2006, 91–115.

2. *S.N. Lakaev, S.Kh. Abdukhakimov.* Threshold effects in a two-fermion system on an optical lattice, Theoret. and Math. Phys., **203**, 2020, 251–268.

Ground states for the SOS model with special external field and countable set of spin values on a Cayley tree

Abraev B.
Chirchik state pedagogical institute, Chirchik, Uzbekistan,
e-mail: abrayev89@mail.ru

At low temperatures, a periodic ground state corresponds to a periodic Gibbs measure. Therefore, the problem of description of periodic ground states naturally arises (see [1]).

Let $\Gamma^k = (V, L)$ be the Cayley tree, where each vertex has $k+1$ neighbors with V being the set of vertices and L the set of edges (see [1]). For an arbitrary vertex $x_0 \in V$, we put $W_n = \{x \in V|\ \ d(x, x^0) = n\}, V_n = \{x \in V|\ d(x, x^0) \leq n\}$, where $d(x, y)$ is the distance between x and y in the Cayley tree, i.e., the number of edges of the path between x and y. Two vertices x and y are called *nearest neighbors* if there exists an edge $l \in L$ connecting them and we denote $l = \langle x, y\rangle$. Let $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(y, x) = 1\}$ be the set of direct successors of x.

It is well-known that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k+1$ cyclic groups of second order with generators $a_1, a_2, a_3, ...a_{k+1}$, (see [1]). Assume that spin takes its values in the set $\mathbb{Z}$. By a configuration σ on V we mean a function taking $\sigma : V \to \mathbb{Z}$. The set of all configurations coincides with the set $\Omega = \mathbb{Z}^V$.

Denote

$$\Omega' = \{\sigma :\ \langle x, y\rangle \in L,\ \ |\ \sigma(x) - \sigma(y)\ |\leq P\},$$

where P is a finite natural number. In this work we study translation-invariant and periodic ground states of the model with spin values in the set $\mathbb{Z}$ on the Cayley tree of order two.

Definition 1. A configuration $\sigma(x)$ is said to be G_k^*-periodic if $\sigma(x) = \sigma_i$ for all $x \in G_k$ with $x \in H_i$. A G_k-periodic configuration is said to be translation-invariant.

The SOS model with special external field is given by Hamiltonian:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)| + \alpha \sum_{x \in V} \sigma(x) mod P, \tag{1}$$

where $J \in \mathbb{R}$ is coupling constant, $\alpha \in \mathbb{R}$ is external field and $\sigma \in \Omega$.

By the *restricted configuration* σ_b we mean the restriction of a configuration σ to a unit ball $b \in M$. Let c_b denote the center of a unit ball b. The energy of a configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = -\frac{1}{2} J \sum_{(x,y): x,y \in b} |\sigma(x) - \sigma(y)| + \alpha\sigma(c_b) mod P. \tag{2}$$

Note that the energy of configuration σ_b (2) way be infinity. Therefore we consider $\Omega' = \{\sigma(x) : \langle x, y\rangle \in L, |\ \sigma(x) - \sigma(y)\ |\leq P\}$, where P is a finite natural number and on the set Ω' we study the translation-invariant, periodic ground states of model (1) with spin values in the set $\mathbb{Z}$ on the Cayley tree of order two. It is easy to see that $U(\sigma_b) \in \{U_{i,j} :\ \ i = 0, 1, 2, \dots, 3P,\ j = 0, 1, 2 \dots, P-1\}$ for all σ_b, where

$$U_{0,0} = 0,\ U_{0,1} = \alpha,\ U_{0,2} = 2\alpha, \dots, U_{0,P-1} = (P-1)\alpha,$$

$$U_{1,0} = -\frac{1}{2}J,\ U_{1,1} = -\frac{1}{2}J + \alpha,\ U_{1,2} = -\frac{1}{2}J + 2\alpha, \dots, U_{1,P-1} = -\frac{1}{2}J + (P-1)\alpha,$$

$$\dots,$$

$$U_{3P-1,0} = -\frac{3P-1}{2}J,\ U_{3P-1,1} = -\frac{3P-1}{2}J + \alpha, \dots, U_{3P-1,P-1} = -\frac{3P-1}{2}J + (P-1)\alpha.$$

$$U_{3P,0} = -\frac{3P}{2}J,\ U_{3P,1} = -\frac{3P}{2}J + \alpha,\ U_{3P,2} = -\frac{3P}{2}J + 2\alpha, \dots, U_{3P,P-1} = -\frac{3P}{2}J + (P-1)\alpha.$$

Definition 2. A configuration $\varphi \in \Omega'$ is called a *ground state* for the Hamiltonian H, if $U(\varphi_b) = \min\{U_{i,j} :\ i = 0, 1, 2, \dots, 3P,\ j = 0, 1, 2 \dots, P-1\}$, for any $b \in M$.

For $i = 0, 1, 2, \ldots, 3P$, $j = 0, 1, 2 \ldots, P-1$. We put $C_{i,j} = \{\sigma_b : U(\sigma_b) = U_{i,j}\}$ and

$$A_{i,j} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : U_{i,j} = \min\{U_{0,0},\ U_{0,1},\ U_{0,2}, ..., U_{3P,P-1}\}.$$

Quite cumbersome, but not difficult calculations show that:

$$A_{0,0} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \leq 0, \alpha \geq 0\},\ A_{i,0} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J = 0, \alpha \geq 0\},\ i = 1, 2, \ldots, 3P-1,$$

$$A_{3P,0} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \geq 0, \alpha \geq 0\},\ A_{0,j} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \leq 0, \alpha = 0\},\ j = 1, 2, \ldots, P-2,$$

$$A_{i,j} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J = 0, \alpha = 0\},\ i = 1, 2, \ldots, 3P-1,\ j = 1, 2, \ldots, P-2,$$

$$A_{3P,j} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \geq 0, \alpha = 0\},\ j = 1, 2, \ldots, P-2,\ A_{0,P-1} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \leq 0, \alpha \leq 0\},$$

$$A_{i,P-1} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J = 0, \alpha \leq 0\},\ i = 1, 2, \ldots, 3P-1,\ A_{3P,P-1} = \{(J, \alpha) \in \mathbb{R}^2 : J \geq 0, \alpha \leq 0\},$$

and $\bigcup\limits_{i,j} A_{i,j} = \mathbb{R}^2$.

In [2], it is proved that for the three-state SOS model with non-zero external field on Cayley tree of order two all ground states are translation-invariant. In the present paper, the existence of a set of countable periodic ground states is proved on Cayley tree of order two.

Theorem 1. Let $\alpha \neq 0$. For the Hamiltonian (1) the following assertions hold:

i) If $(J, \alpha) \in A_{0,0}$, then there exists at least a countable set of ground states, which is given by $\{\sigma(x) \equiv 0 \pmod P,\ \forall x \in V\}$.

ii) If $(J, \alpha) \in A_{0,P-1}$, then there exists at least a countable set of ground states, which is given by $\{\sigma(x) \equiv P-1 \pmod P,\ \forall x \in V\}$.

Remark 1. *The configuration $\sigma(x) \equiv 0 \pmod P$, $\forall x \in V$, in general, might be non-translation-invariant. If we take translation-invariant configuration $\sigma(x) = z \cdot P$, $z \in \mathbb{Z}$ then due to Theorem 1 this configuration is a translation-invariant ground states on the set $A_{0,0}$. Since $z \in \mathbb{Z}$, we can conclude that such kind of configurations are countable.*

Similar remarks also applies to the configurations $\sigma(x) \equiv P-1 \pmod P$, $\forall x \in V$.

Let $H_A = \{x \in G_k : \sum\limits_{i \in A} \omega_x(a_i) - \text{even}\}$, where $\omega_x(a_i)$ is the number of a_i in the word x. If $\mid A \mid = k+1$, then $H_A \equiv G_k^{(2)} = \{x \in G_k : \mid x \mid -\text{even}\}$, where $|x|$ means length of the word x. Note that H_A is a normal subgroup of index two (see [1]). Let $G_k/H_A = \{H_A, G_k \backslash H_A\}$ be the quotient group. Denote $H_0 = H_A, H_1 = G_k \backslash H_A$. We note that each H_0-periodic configuration has the following form:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, & \text{if } x \in H_0, \\ \sigma_2, & \text{if } x \in H_1, \end{cases} \tag{3}$$

where $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\mid \sigma_1 - \sigma_2 \mid = P$, $\sigma_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$.

Theorem 2. Let $|A| = r$, $r = 1, 2, 3$ and $\alpha \neq 0$. If $(J, \alpha) \in A_{r \cdot P, q}$, $q \in \{0; P-1\}$ then there exists at least a countable set of H_0-periodic ground states, which are given by

$$\sigma(x) = \begin{cases} z_1 \equiv q \pmod P, \text{ if } x \in H_0, \\ z_2 \equiv q \pmod P, \text{ if } x \in H_1, \end{cases}$$

where $z_1 \neq z_2$, $\mid z_1 - z_2 \mid = P$, $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$.

References

1. *Rozikov U. A.,* Gibbs measures on Cayley trees. World scientific.(2013).

2. *Rahmatullaev M.M., Abdusalomova M.R., Rasulova M.A.,* Ground states for the SOS model with an external field on the Cayley tree, Uz. Math. Journal, No. 2, pp.145-156 (2020).

On the Fixed points of a Gonosomal Evolution Operator

[1]Absalamov A., [2]Ziyadinov B.
[1]*Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan),*
e-mail: absalamov@gmail.com
[2]*Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan),*

Population dynamics theory is important to a proper understanding of living populations at all levels. This is a well developed branch of mathematical biology, which has a history of more than two hundred years.

In this paper we consider a bisexual population which consists females partitioned into types indexed by $\{1,2,\dots,n\}$ and the males partitioned into types indexed by $\{1,2,\dots,\nu\}$ (see [1], [2], [3] for details).

Let $\gamma^{(f)}_{ik,j}$ and $\gamma^{(m)}_{ik,l}$ be inheritance coefficients defined as the probability that a female offspring is type j and, respectively, that a male offspring is of type l, when the parental pair is ik ($i,j=1,\dots,n$; and $k,l=1,\dots,\nu$). These quantities satisfy the following

$$\begin{aligned}&\gamma^{(f)}_{ik,j}\geq 0,\quad \gamma^{(m)}_{ik,l}\geq 0,\\ &\textstyle\sum_{j=1}^{n}\gamma^{(f)}_{ik,j}+\sum_{l=1}^{\nu}\gamma^{(m)}_{ik,l}=1,\quad \text{for all}\quad i,k,j,l.\end{aligned}\tag{1}$$

Denote

$$\mathcal{O}=\left\{s\in S^{n+\nu-1}:(x_1,\dots,x_n)=(0,\dots,0)\,\text{or}\,(y_1,\dots,y_\nu)=(0,\dots,0)\right\}.$$

$$\mathcal{S}^{n,\nu}=S^{n+\nu-1}\setminus\mathcal{O}.$$

Following [1] define an evolution operator $W_0:\mathcal{S}^{n,\nu}\to\mathcal{S}^{n,\nu}$ (which is called normalized gonosomal operator) as

$$W_0:\begin{cases} x'_j &= \dfrac{\sum_{i,k=1}^{n,\nu}\gamma^{(f)}_{ik,j}x_iy_k}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} y_j\right)},\quad j=1,\dots,n\\[2ex] y'_l &= \dfrac{\sum_{i,k=1}^{n,\nu}\gamma^{(m)}_{ik,l}x_iy_k}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\nu} y_j\right)},\quad l=1,\dots,\nu.\end{cases}\tag{2}$$

In this paper we consider the special case: $n=\nu=2$ and the following coefficients:

$$\begin{aligned}&\gamma^{(f)}_{11,1}=a_1,\quad \gamma^{(f)}_{11,2}=0,\quad \gamma^{(m)}_{11,1}=a_2,\quad \gamma^{(m)}_{11,2}=0,\\ &\gamma^{(f)}_{12,1}=0,\quad \gamma^{(f)}_{12,2}=c_1,\quad \gamma^{(m)}_{12,1}=c_2,\quad \gamma^{(m)}_{12,2}=0,\\ &\gamma^{(f)}_{21,1}=b_1,\quad \gamma^{(f)}_{21,2}=b_2,\quad \gamma^{(m)}_{21,1}=b_3,\quad \gamma^{(m)}_{21,2}=b_4,\\ &\gamma^{(f)}_{22,1}=0\quad \gamma^{(f)}_{22,2}=d_1,\quad \gamma^{(m)}_{22,1}=d_2,\quad \gamma^{(m)}_{22,2}=d_3.\end{aligned}\tag{3}$$

Then corresponding evolution operator $W:S^{2,2}\to S^{2,2}$ is

$$W:\begin{cases} x' &= \dfrac{a_1xu+b_1yu}{(x+y)(u+v)}\\[2ex] y' &= \dfrac{b_2yu+c_1xv+d_1yv}{(x+y)(u+v)}\\[2ex] u' &= \dfrac{a_2xu+b_3yu+c_2xv+d_2yv}{(x+y)(u+v)}\\[2ex] v' &= \dfrac{b_4yu+d_3yv}{(x+y)(u+v)},\end{cases}\tag{4}$$

where coefficients satisfy

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = c_1 + c_2 = d_1 + d_2 + d_3 = 1,$$

and

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ c_1,\ c_2,\ d_1,\ d_2,\ d_3 \in [0,1].$$

The main problem is for the given operator W and arbitrarily initial point $s^{(0)} \in S^{2,2}$, we will study the trajectory $\{s^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$, where

$$s^{(m)} = W^m(s^{(0)}) = \underbrace{W(W(...W}_{m}(s^{(0)}))...).$$

In general, this is very difficult problem. In book [4] several recently obtained results related to this main problem are given.

To find fixed point of gonosomal operator plays essential role for solving this main problem. A point s is called a fixed point of the operator W if $s = W(s)$. The set of all fixed points denoted by $\mathrm{Fix}(W)$.

Let us find all the fixed points of W given by (1), i.e. we solve the following system of equations for (x, y, u, v):

$$\begin{cases} x(x+y)(u+v) = a_1xu + b_1yu, \\ y(x+y)(u+v) = b_2yu + c_1xv + d_1yv, \\ u(x+y)(u+v) = a_2xu + b_3yu + c_2xv + d_2yv, \\ v(x+y)(u+v) = b_4yu + d_3yv. \end{cases} \tag{5}$$

We make the following notaions in order to get an easy way to find fixed points of the operator W.

$$\alpha = \frac{x}{x+y}, \quad \beta = \frac{v}{u+v}, \quad \alpha' = \frac{x'}{x'+y'}, \quad \beta' = \frac{v'}{u'+v'}, \tag{6}$$

which yields the nonlinear dynamical system

$$V: \begin{cases} \alpha' = \dfrac{(1-\beta)(m_1 + m_2\alpha)}{n_1 + n_2\alpha + n_3\beta + n_4\alpha\beta}, \\ \beta' = \dfrac{(1-\alpha)(m_3 + m_4\beta)}{1 - (n_1 + n_2\alpha + n_3\beta + n_4\alpha\beta)} \end{cases} \tag{7}$$

with the initial point $(\alpha^{(0)}, \beta^{(0)}) \in \Delta$, where

$$\Delta := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \alpha \le 1,\ 0 \le \beta \le 1\} = [0,1]^2,$$

and

$$m_1 = b_1,\ m_2 = a_1 - b_1,\ m_3 = b_4,\ m_4 = d_3 - b_4,$$

$$n_1 = b_1 + b_2,\ n_2 = a_1 - b_1 - b_2,\ n_3 = d_1 - b_1 - b_2,\ n_4 = c_1 - a_1 + b_1 + b_2 - d_1.$$

Lemma 1. There is one to one correspondence between the set of fixed points of the operator W and the set of fixed points of the operator V.

Thus in order to find the fixed points of the operator W it is sufficient to find all fixed points of the operator V.

Theorem 1. For the fixed point of the operator V we have the following:
i) $(\alpha, 0)$ is fixed point if $b_1 = b_4 = 0, \quad a_1 = b_2, \quad a_2 = b_3$, where $\alpha \in (0,1)$;
ii) $(1, 0)$ is fixed point if $b_1 \neq 0, \quad a_1 = b_1 + b_2$;
iii) $(0, 1)$ is fixed point if $d_2 = 0$;
iv) $(0, \frac{b_4}{b_4+d_2})$ is fixed point if $b_1 = 0, \quad d_1 = b_2, \quad b_4 + d_2 \neq 0$;
v) $(0, 0)$ is fixed point if $b_1 = b_4 = 0, \quad d_1 \neq b_2, \quad 1 = d_3 + b_2$;

vi) $(0, \frac{-d_3+b_4-b_2+1}{2(d_1-b_2)})$ is fixed point if

$$b_1 = 0, \quad b_4 \neq 0, d_1 \geq d_2 + b_2 + b_4, \quad (d_3 - b_4 + b_2 - 1)^2 = 4b_4(d_1 - b_2)$$

;

References

1. *Absalamov A.T., Rozikov U.A.* The Dynamics of Gonosomal Evolution Operators, Jour. Applied Nonlinear Dynamics. **9**(2) (2020), 247–257.
2. *Absalamov A.T.* The Global Attractiveness of the Fixed Point of a Gonosomal Evolution Operator. Discontinuity Nonlinearity and Complexity. **10**(1) (2021), 143–149.
3. *Bacaër N.* A short history of mathematical population dynamics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.
4. *Rozikov U.A.* Population dynamics: algebraic and probabilistic approach. *World Sci. Publ.* Singapore. 2020.

Singularity of invariant measure of generalized exchange maps of the circle

[1,2]**Akhadkulov H.**, [3]**Safarov U.**

[1] *School of Quantitative Sciences, CAS, University Utara Malaysia 06010, UUM Sintok, Malaysia,*
[2] *Department of General and Exact Sciences, Tashkent State University of Economics, 49 Islam Karimov street, 100066, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: akhadkulov@yahoo.com
[3] *Department of Natural and Mathematical Science, Turin Polytechnic University in Tashkent, 100095, Uzbekistan,*
e-mail: safarovua@mail.ru

In this work, we consider two generalized exchange maps of the circle with a finite number of break-points, whose first derivatives have discontinuities of the first kind at these points and satisfy certain Zygmund conditions. We prove that if these two generalized exchange maps have zero mean nonlinearity and do not break equivalent then the conjugating map between these two maps is singular.

Estimates for the best M-term approximations of functions with bounded mixed derivative in the Lorentz space

[1]**Akishev G.**, [2]**Myrzagaliyeva A.**

[1]*Lomonosov Moscow University, Kazakhstan Branch, Str. Kazhymukan, 11, Nur-Sultan, Kazakhstan,*
e-mail: akishev_g@mail.ru
[2]*Astana IT University, EXPO BC, C.1, Nur-Sultan, Kazakhstan,*
e-mail: aigul.myrzagalieva@astanait.edu.kz

We denote by $L_{p,\tau}$ the Lorentz space of all real-valued Lebesgue measurable functions f that have 2π-period in each variable and for which

$$\|f\|_{p,\tau} = \left\{ \frac{\tau}{p} \int\limits_0^1 \left(f^*(t)\right)^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{1/\tau} < +\infty, \ 1 < p < \infty, 1 \leqslant \tau < \infty,$$

$f^*(t)$ is a non-increasing rearrangement of the function $|f(2\pi\overline{x})|$, $\overline{x} \in [0,1)^m$. Let $\overline{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$ and $F_{\overline{r}}(\overline{x})$ – m-dimensional Bernoulli kernel (see [1], [2]). We consider a functional class $W^{\overline{r}}_{p,\tau} = \{f\colon f = \varphi \star F_{\overline{r}}, \ \|\varphi\|_{p,\tau} \leq 1\}$, where $1 < p < \infty$, $1 \leq \tau < \infty$,

$$(\varphi \star F_{\overline{r}})(\overline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} \varphi(\overline{x} - \overline{u}) F_{\overline{r}})(\overline{u}) d\overline{u}, \ \mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m.$$

In case when $\tau = p$ the class $W^{\overline{r}}_{p,\tau}$ has been considered in [2], [3]. $e_M(f)_{p,\tau}$ is the best M-term trigonometric approximation of a function $f \in L_{p,\tau}$, $M \in \mathbb{N}$.

The work presents order-sharp estimates for the best M-term approximations of functions of $W^{\overline{r}}_{q,\tau_1}$ in the space L_{p,τ_2} for various relations between the parameters p, q, τ_1, τ_2. The obtained result is formulated as

Theorem. *Let* $0 < r_1 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \ldots r_m$, $q = 2 < p < \infty$, $\max\{\tau_1, 2\} \leq \tau_2 < \infty$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{p} < r_1 < \frac{1}{2}$. *Then*

$$e_M(W^{\overline{r}}_{2,\tau_1})_{p,\tau_2} \leq C\, M^{-\frac{p}{2}\left(r_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right)} (\log_2^{\nu-1} M)^{\frac{p}{\tau_2'}(r_1 - (\frac{1}{2\tau_2'} - \frac{1}{p\tau_1'})\tau_2')_+} (\log_2 M)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_1}},$$

where $a_+ = \max\{a, 0\}$, *and* $\tau_2' = \frac{\tau_2}{\tau_2 - 1}$.

Remark. For $\tau_1 = 2$ and $\tau_2 = p$ the theorem is proved in [1]–[3]. In case when $1 < q < 2 < p < \infty$ an analog of this theorem is given in [4].

References

1. *Belinsky E.S.* Approximation by a "floating"system of exponentials on classes of periodic functions with bounded mixed derivative, Research on the theory of functions of several real variables, 1988, P. 16-33.

2. *Temlyakov V.N.* Constructive sparse trigonometric approximations and other problems for functions with mixed smoothness, Sbornik: Mathematics, 206 (11), 2015, P. 131-1160.

3. *Temlyakov V.N.* On approximation of periodic functions of several variables, Dokl. AN SSSR, V, 279, № 2, 1984, P. 301-305.

4. *Akishev G., Myrzagaliyeva A.Kh.* On estimates of the best M-term approximations on classes of functions with bounded mixed derivative in Lorentz space, Proceedings of the International Symposium "Fourier series and their applications 2022, P. 4.

The existence of eigenvalues of the discrete Schrödinger operator on a one-dimensional lattice

Alladustova I.U.

Samarkand State University, University Boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan,
e-mail:alladustova.iroda@mail.ru

We study the eigenvalues of the Schrödinger operators $H_{\lambda\mu}(k)$ which models a system of two identical fermions interacting via the *indefinite sign* potential $V_{\lambda\mu}$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$ of rank-two. We investigate the number and location of isolated eigenvalues of the operators $H_{\lambda\mu}(k)$, $k \in \mathbb{T}$ for all values of the interactions λ, $\mu \in \mathbb{R}$ and the quasi-momentum k. We establish one-to-one correspondence between the isolated eigenvalues of the operator $H_{\lambda\mu}(k)$ and zeros of the associated Fredholm determinant.

For any λ, $\mu \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{T}$, the Schrödinger operator $H_{\lambda\mu}(k)$ is bounded and self-adjoint which acts in $L^{2,o}(\mathbb{T}, \eta)$ as

$$H_{\lambda\mu}(k) = H_0(k) + V_{\lambda\mu}.$$

Here the non-perturbed operator $H_0(k)$, $k \in \mathbb{T}$ is the multiplication operator by the function $\mathcal{E}_k(\cdot)$ (quasi-momentum dependent pair dispersion relation) as

$$(H_0(k)f)(p) = \mathcal{E}_k(p)f(p), \quad \mathcal{E}_k(p) = 2\left[1 - \cos\frac{k}{2}\cos p\right], \ p \in \mathbb{T}.$$

The perturbation operator $V_{\lambda\mu}$ is defined as

$$(V_{\lambda\mu}f)(p) = \int\limits_{\mathbb{T}} \Big(\mu \sin p \, \sin t + \lambda \sin 2p \, \sin 2t\Big) f(t)dt, \quad f \in L^{2,o}(\mathbb{T}, \eta).$$

The perturbation $V_{\lambda\mu}$ is an operator of rank two. Hence, from the Weyl theorem (see [4]) the essential spectrum of $H_{\lambda\mu}(k)$ coincides with the spectrum of $H_0(k)$, i.e.,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\lambda\mu}(k)) = \sigma(H_0(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k),\, \mathcal{E}_{\max}(k)],$$

with

$$\mathcal{E}_{\min}(k) := \min_{p\in\mathbb{T}} \mathcal{E}_k(p) = 2(1-\cos\frac{k}{2}) \geq 0, \quad \mathcal{E}_{\max}(k) := \max_{p\in\mathbb{T}} \mathcal{E}_k(p) = 2(1+\cos\frac{k}{2}) \leq 4.$$

For any $(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2$ and $k \in \mathbb{T}$, we define the Birman–Schwinger operator on $L^{2,o}(\mathbb{T},\, \eta)$ as

$$B_{\lambda\mu}(k,\, z) = -V_{\lambda\mu}R_0(k,\, z),$$

where $R_0(k,\, z) = (H_0(k) - zI)^{-1}$ is the resolvent of $H_0(k)$ for the point $z \in \mathbb{C}\backslash[\mathcal{E}_{\min}(k),\, \mathcal{E}_{\max}(k)]$.

We denote the determinant associated to the operator $B_{\lambda\mu}(k,\, z)$ by $\mathcal{D}(\lambda,\, \mu;\, k,\, z)$.

For each $(\lambda,\, \mu)$, the following asymptotic relations hold

$$\begin{aligned}(i)\quad \mathcal{D}(\lambda,\, \mu;\, k,\, z) =& \frac{1}{4\cos^2\frac{k}{2}}\, C_0^-(\lambda,\, \mu;\, k) + \frac{1}{2\cos^2\frac{k}{2}\sqrt{\cos\frac{k}{2}}}\, C_{\frac{1}{2}}^-(\lambda,\, \mu;\, k)(\mathcal{E}_{\min}(k)-z)^{\frac{1}{2}} \\ &+ O(\mathcal{E}_{\min}(k)-z), \quad \textit{as } z \to \mathcal{E}_{\min}(k)-,\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} C_0^-(\lambda,\, \mu;\, k) &= 4\cos^2\frac{k}{2} + 4\lambda\cos\frac{k}{2} + 2\mu\cos\frac{k}{2} + \lambda\mu, \\ C_{\frac{1}{2}}^-(\lambda,\, \mu;\, k) &= 4\lambda\cos\frac{k}{2} + \mu\cos\frac{k}{2} + \lambda\mu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii)\quad \mathcal{D}(\lambda,\, \mu;\, k,\, z) =& \frac{1}{4\cos^2\frac{k}{2}}\, C_0^+(\lambda,\, \mu;\, k) + \frac{1}{2\cos^2\frac{k}{2}\sqrt{\cos\frac{k}{2}}}\, C_{\frac{1}{2}}^+(\lambda,\, \mu;\, k)(z-\mathcal{E}_{\max}(k))^{\frac{1}{2}} \\ &+ O(z-\mathcal{E}_{\max}(k)), \quad \textit{as } z \to \mathcal{E}_{\max}(k)+,\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} C_0^+(\lambda,\, \mu;\, k) &= 4\cos^2\frac{k}{2} - 4\lambda\cos\frac{k}{2} - 2\mu\cos\frac{k}{2} + \lambda\mu, \\ C_{\frac{1}{2}}^+(\lambda,\, \mu;\, k) &= 4\lambda\cos\frac{k}{2} + \mu\cos\frac{k}{2} - \lambda\mu. \end{aligned}$$

Note that for a fixed $k \in \mathbb{T}\backslash\{\pi\}$, the curves (hyperbolas) $C_0^+(\lambda,\, \mu;\, k) = 0$ and $C_0^-(\lambda,\, \mu;\, k) = 0$ divide the λ-μ-plane into several connected components. Let us denote those components with $\mathbb{G}_2^+(k)$, $\mathbb{G}_1^+(k)$, $\mathbb{G}_0^+(k)$ and $\mathbb{G}_2^-(k)$, $\mathbb{G}_1^-(k)$, $\mathbb{G}_0^-(k)$ as

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_2^+(k) &= \{(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ C_0^+(\lambda,\, \mu;\, k) < 0, \quad \lambda > 2\cos\frac{k}{2}\}, \\ \mathbb{G}_1^+(k) &= \{(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ C_0^+(\lambda,\, \mu;\, k) > 0\}, \\ \mathbb{G}_0^+(k) &= \{(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ C_0^+(\lambda,\, \mu; k) < 0, \quad \lambda < 2\cos\frac{k}{2}\} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_2^-(k) &= \{(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ C_0^-(\lambda,\, \mu;\, k) < 0, \quad \lambda < -2\cos\frac{k}{2}\}, \\ \mathbb{G}_1^-(k) &= \{(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ C_0^-(\lambda,\, \mu;\, k) > 0\}, \\ \mathbb{G}_0^-(k) &= \{(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2 :\ C_0^-(\lambda,\, \mu;\, k) < 0, \quad \lambda > -2\cos\frac{k}{2}\}. \end{aligned}$$

In notations, the lower index corresponds to the number of eigenvalues of the operator which will be stated later.

The following theorem is about the number and locations of the isolated eigenvalues of the operator $H_{\lambda\mu}(k)$ for all $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

TheoremLet $k \in \mathbb{T} \setminus \{\pi\}$ be fixed.

(i) For any $(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{G}_{20}(k) = \mathbb{G}_2^-(k) \cap \mathbb{G}_0^+(k)$, the operator $H_{\lambda\mu}(k)$ has exactly two eigenvalues $z_1(\lambda,\ \mu;\ k)$ and $z_2(\lambda,\ \mu;\ k)$ in the interval $(-\infty,\ \mathcal{E}_{\min}(k))$, which satisfy the relations

$$z_1(\lambda,\ \mu;\ k) < \zeta^-_{\min}(\lambda,\ \mu;\ k) \le \zeta^-_{\max}(\lambda,\ \mu;\ k) < z_2(\lambda,\ \mu;\ k) < \mathcal{E}_{\min}(k).$$

(ii) For any $(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{G}_{10}(k) = \mathbb{G}_1^-(k) \cap \mathbb{G}_0^+(k)$, the operator $H_{\lambda\mu}(k)$ has a unique eigenvalue $z_1(\lambda,\ \mu;\ k)$, which lies in $(-\infty,\ \mathcal{E}_{\min}(k))$.

(iii) For any $(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{G}_{00}(k) = \mathbb{G}_0^-(k) \cap \mathbb{G}_0^+(k)$, the operator $H_{\lambda\mu}$ has no eigenvalues outside the essential spectrum.

(iv) For any $(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{G}_{11}(k) = \mathbb{G}_1^-(k) \cap \mathbb{G}_1^+(k)$, the operator $H_{\lambda\mu}(k)$ has two eigenvalues satisfying $z_1(\lambda,\ \mu;\ k) < \mathcal{E}_{\min}(k)$ and $z_2(\lambda,\ \mu;\ k) > \mathcal{E}_{\max}(k)$.

(v) For any $(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{G}_{01}(k) = \mathbb{G}_0^-(k) \cap \mathbb{G}_1^+(k)$, the operator $H_{\lambda\mu}(k)$ has a unique eigenvalue $z_1(\lambda,\ \mu;\ k)$, which lies in $(\mathcal{E}_{\max}(k),\ +\infty)$.

(vi) For any $(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{G}_{02}(k) = \mathbb{G}_0^-(k) \cap \mathbb{G}_2^+(k)$, the operator $H_{\lambda\mu}(k)$ has two eigenvalues $z_1(\lambda,\ \mu;\ k)$ and $z_2(\lambda,\ \mu;\ k)$ satisfying

$$\mathcal{E}_{\max}(k) < z_2(\lambda,\ \mu;\ k) < \zeta^+_{\min}(\lambda,\ \mu;\ k) \le \zeta^+_{\max}(\lambda,\ \mu;\ k) < z_1(\lambda,\ \mu;\ k).$$

References

1. *M.Klaus.* On the bound state of Schrödinger operators in one dimension, Ann. Phys. **108**, 288–300 (1977).

2. *B.Simon.* The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions, Ann. Phys. **97**, 279–288 (1976).

3. *S.N. Lakaev and E. Özdemir.* The existence and location of eigenvalues of the one particle Hamiltonians on lattices, Hacettepe J. Math. Stat. **45**, 1693–1703 (2016).

4. *M. Reed and B. Simon.* Modern Methods of Mathematical Physics. IV: Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978.

Asymptotics of the eigenvalues of a discrete Schrödinger-type operators on two dimensional lattices

[1]**Almuratov F.M.** [2]**Avalboyev I.B.**

[1] *Samarkand State University, University boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan*
e-mail: almurotov93@mail.ru

[2] *Samarkand State University, University boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan*

Let $\mathbb{Z}^2$ be the two dimensional cubical lattice and $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ be the Hilbert space of square-summable functions on $\mathbb{Z}^2$. We denote by $\mathbb{T}^2 := (-\pi, \pi]^2$, the two dimensional torus, the dual group of $\mathbb{Z}^2$. Let $L^2(\mathbb{T}^2)$ be the Hilbert space of square-integrable functions on $\mathbb{T}^2$.

In the coordinate space representation the energy operator $\hat{H}_\mu$ of a one-particle system on the two-dimensional lattice $\mathbb{Z}^2$ with a potential field $\hat{v}$ is defined as

$$\hat{H}_\mu := \hat{H}_0 + \mu\widehat{V}, \qquad \mu \ge 0,$$

where the free energy operator $\hat{H}_0$ is a Laurent-Toeplitz-type operator in $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$

$$\hat{H}_0\hat{f}(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^2} \hat{\mathfrak{e}}(x-y)\hat{f}(y), \qquad \hat{f}\in\ell^2(\mathbb{Z}^2),$$

given by given by a *Hopping matrix* $\hat{\mathfrak{e}}\in\ell^1(\mathbb{Z}^2)$ of the particle which satisfies $\hat{\mathfrak{e}}(x)=\overline{\hat{\mathfrak{e}}(-x)}$ for all $x\in\mathbb{Z}^2$, and the potential energy operator is the multiplication in $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ by the function

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} a, & \text{if } x=0,\\ b, & \text{if } |x|=1,\\ 0, & \text{if } |x|>1,\end{cases}$$

where $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

In the momentum space representation, the operator acts in $L^2(\mathbb{T})$ by

$$H_\mu = \mathcal{F}\hat{H}_0\mathcal{F}^* + \mu\mathcal{F}\widehat{V}\mathcal{F}^* = H_0+\mu V,$$

where

$$\mathcal{F}:\ell^2(\mathbb{Z}^2)\to L^2(\mathbb{T}^2), \quad \mathcal{F}\hat{f}(p) = \frac{1}{2\pi}\sum_{x\in\mathbb{Z}^2}\hat{f}(x)e^{\mathrm{i}(p,x)}$$

is the standard Fourier transform with the inverse

$$\mathcal{F}^*:L^2(\mathbb{T}^2)\to\ell^2(\mathbb{Z}^2), \quad \mathcal{F}^*f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^2} f(p)e^{-\mathrm{i}(p,x)}dp.$$

The free hamiltonian H_0 is the multiplication operator in $L^2(\mathbb{T}^2)$ by the function $\mathfrak{e}:=2\pi\mathcal{F}\hat{\mathfrak{e}}$ so-called the *dispersion relation* of the particle and the potential V acts on $L^2(\mathbb{T}^2)$ as a convolution operator

$$Vf(p) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\Big(a+2b\sum_{i=1}^{2}\cos(p_i-q_i)\Big)f(q)dq.$$

Since V is compact, by Weyl's Theorem [4],

$$\sigma_{ess}(H_\mu) = \sigma(H_0) = [\min\mathfrak{e},\max\mathfrak{e}] = [\mathfrak{e}_{\min},\mathfrak{e}_{\max}].$$

Hypothesis *The dispersion relation $\mathfrak{e}$ is a real-valued even function, symmetric with respect to coordinate permutations and having a non-degenerate unique maximum at $\vec{\pi}=(\pi,\pi)\in\mathbb{T}^2$. Moreover, $\mathfrak{e}$ is analytic near $\vec{\pi}$.*

Let $L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T}^2)$ and $L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T}^2)$ be the subspaces of essentially even and essentially odd functions in $L^2(\mathbb{T}^2)$ and let

$$\begin{aligned}
L^{2,es}(\mathbb{T}^2) :=& \{f\in L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T}^2): f(p_1,p_2)=f(p_2,p_1) \text{ for a.e } (p_1,p_2)\in\mathbb{T}^2\},\\
L^{2,ea}(\mathbb{T}^2) :=& \{f\in L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T}^2): f(p_1,p_2)=-f(p_2,p_1) \text{ for a.e } (p_1,p_2)\in\mathbb{T}^2\},\\
L^{2,os}(\mathbb{T}^2) :=& \{f\in L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T}^2): f(p_1,p_2)=f(p_2,p_1) \text{ for a.e } (p_1,p_2)\in\mathbb{T}^2\},\\
L^{2,oa}(\mathbb{T}^2) :=& \{f\in L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T}^2): f(p_1,p_2)=-f(p_2,p_1) \text{ for a.e } (p_1,p_2)\in\mathbb{T}^2\}
\end{aligned}$$

be the (Hilbert) subspaces of (essentially) even-symmetric, even-antisymmetric, odd-symmetric and odd-antisymmetric functions in $L^2(\mathbb{T}^2)$, respectively. Recall that

$$L^2(\mathbb{T}^2) = L^{2,os}(\mathbb{T}^2)\oplus L^{2,oa}(\mathbb{T}^2)\oplus L^{2,ea}(\mathbb{T}^2)\otimes L^{2,es}(\mathbb{T}^2).$$

We remark that by the symmetricity of $\mathfrak{e}$ each of the subspaces $L^{2,\omega}(\mathbb{T}^2)$ is invariant with respect to H_μ.

Thus, we study the discrete spectrum of H_μ separately restricted to these subspaces. Moreover, we study the asymptotics of eigenvalues as $\mu\to+\infty$. The existence of eigenvalues for this operator is explored in this work [3]. In this work, we only define the asymptotic expansions of eigenvalues as $\mu \to +\infty$.

Theorem 1. *(a) Let $\omega = es$, $ab < 0$ and let $E_{es}(\cdot)$ be the unique eigenvalue of $H_\mu\big|_{L^{2,es}(\mathbb{T}^2)}$. Then*

$$E_{es}(\mu) = \begin{cases} b\mu + \frac{b}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}(\cos q_1 + \cos q_2)^2 \mathfrak{e}(q)dq + O(1/\mu) & \text{if } b > 0 > a \\ a\mu + \frac{a}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\mathfrak{e}(q)dq + O(1/\mu) & \text{if } a > 0 > b \end{cases}$$

as $\mu \to +\infty$.

(b) Let $\omega = es$, $a, b > 0$ and let $E_{es}^{(1)}(\cdot)$ and $E_{es}^{(2)}(\cdot)$ be the eigenvalues of $H_\mu\big|_{L^{2,es}(\mathbb{T}^2)}$. Then

$$\max\{E_{es}^{(1)}(\mu), E_{es}^{(2)}(\mu)\} = \max\{\psi_a(\mu), \psi_b(\mu)\} + O(1/\mu)$$

and

$$\min\{E_{es}^{(1)}(\mu), E_{es}^{(2)}(\mu)\} = \min\{\psi_a(\mu), \psi_b(\mu)\} + O(1/\mu)$$

as $\mu \to +\infty$, where

$$\psi_a(\mu) := a\mu + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\mathfrak{e}(q)dq, \quad \psi_b(\mu) := b\mu + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}(\sin q_1 + \sin q_2)^2\mathfrak{e}(q)dq.$$

(c) Let $\omega \in \{ea, os, oa\}$ and let $E_\omega(\cdot)$ be the unique eigenvalue of $H_\mu\big|_{L^{2,\omega}(\mathbb{T}^2)}$. Then

$$E_\omega(\mu) = \begin{cases} b\mu + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}(\cos q_1 - \cos q_2)^2\mathfrak{e}(q)dq + O(1/\mu) & \text{if } \omega = ea, \\ b\mu + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}(\sin q_1 + \sin q_2)^2\mathfrak{e}(q)dq + O(1/\mu) & \text{if } \omega = os, \\ b\mu + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}(\sin q_1 - \sin q_2)^2\mathfrak{e}(q)dq + O(1/\mu) & \text{if } \omega = oa \end{cases}$$

as $\mu \to +\infty$.

References

1. *M. Klaus, B. Simon.*Coupling constant thresholds in nonrelativistic Quantum Mechanics. I. Short-range two-body case. Ann. Phys. **130** (1980), 251–281.
2. *Sh. Kholmatov, S. Lakaev, F. Almuratov.* Bound states of Schrodinger-type operators on one and two dimensional lattices. J. Math. Anal. Appl. **503** (2021), 125280.
3. *Sh. Kholmatov, S. Lakaev, F. Almuratov.* On the spectrum of Schrodinger-type operators on two dimensional lattices. J. Math. Anal. Appl. **514** (2), 126363 (2022).
4. *M. Reed, B. Simon.* Modern Methods of Mathematical Physics. IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York. (1978).

About a class of partially integral operators

[1,2]**Arziev A.**, [1]**Orinbaev P.**

[1]*Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy, Uzbekistan Academy of Sciences, Uzbekistan,*

[2] *Karakalpak State University, Uzbekistan,*

e-mail: allabayarziev@inbox.ru, paraxatorinbaev@gmail.com

Let (Ω, Σ, μ) be a measure space having the direct sum property and let $L_0 = L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ be an algebra of all complex measurable functions on Ω (functions equal almost everywhere are identified).

Consider a linear space X over the field of complex numbers $\mathbb{C}$. A mapping $\|\cdot\| : X \to L_0$ is called a L_0-valued norm on X, if for every $x,\ y \in X,\ \lambda \in \mathbb{C}$ the following relations hold:

$\|x\| \geq 0,\ \ \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$; $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

The pair $(X,\ \|\cdot\|)$ is called a lattice-normed space over L_0.

A lattice-normed space X is called d-decomposable, if for any $x \in X$ with $\|x\| = \lambda_1 + \lambda_2,\ 0 \leq \lambda_1,\ \lambda_2 \in L_0,\ \lambda_1\lambda_2 = 0$ there exist $x_1, x_2 \in X$ such that $x = x_1 + x_2$ and $\|x_1\| = \lambda_1, \|x_2\| = \lambda_2$. A net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ (bo)-converges to an element $x \in X$, if the net $\{\|x_\alpha - x\|\}_{\alpha\in A}$ (o)-converges to zero in L_0 (note that the (o)-convergence in L_0 coincides with convergence almost everywhere). A (bo)-complete d-decomposable lattice-normed space over L_0 is called a Banach–Kantorovich space over L_0. It is known that every Banach–Kantorovich space X over L_0 is a module over L_0 and $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ for all $\lambda \in L^0$, $u \in X$ (see [1-2]).

Let X be a Banach–Kantorovich space over L_0 and let C be a subset in X and ∇ be a Boolean algebra of all idempotents in L_0 i.e. $\nabla = \{\chi_A : A \in \Sigma\}$, where χ_A is characteristic function of the set A. Denote by $\mathrm{mix}(C)$ the set of all elements x from X for which there is a partition of unit $\{\pi_i\}_{i\in I}$ in ∇ such that $\pi_i x \in C$ for all $i \in I$, i.e.

$$\mathrm{mix}(C) = \left\{x \in X : \exists\, \pi_i \in \nabla, \pi_i\pi_j = 0, i \neq j, \bigvee_{i\in I} \pi_i = \mathbf{1}, \pi_i x \in C, i \in I\right\}.$$

In other words $\mathrm{mix}(C)$ is the set of all mixings obtained by families $\{x_i\}_{i\in I}$ taken from C. A subset C is said to be *cyclic*, if $C = \mathrm{mix}(C)$.

A L_0-module H equipped with a mapping

$$(\cdot|\cdot) : X \times X \to L_0$$

is called a pre-Hilbert module over L_0 if the following conditions are satisfied:

1) For $x \in H$ we have $(x|x) > 0$. Moreover, $(x|x) = 0$ if and only if $x = 0$.

2) The map $(\cdot|\cdot) : H \to L_0$, $x \longmapsto (x|y)$ is L_0-linear for every $y \in H$.

3) $\overline{(x|y)} = (y|x)$ for all $x, y \in H$.

In a pre-Hilbert module H the Cauchy–Schwarz inequality

$$|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$$

holds for all $x, y \in X$. The pre-Hilbert module H is called a Kaplansky–Hilbert module, if it is complete with respect to this norm.

Let $T : H \to H$ is a L_0 operator that maps Kaplansky – Hilbert module H into itself and denote by $B(H)$ is a set of all L_0-linear L_0-bounded operators on H.

The spectrum of the operator T is the set $\mathrm{sp}(T)$ $(T \in B(X))$ – the set of all $\lambda \in L_0$ such that the operator $T - I\lambda$ is not invertible in $B(X)$.

By $\mathrm{spm}(T)$ we denote the set of all $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$ such that for every $\pi \in \nabla$, $\pi \neq 0$, the operator $\pi(T - \lambda I)$ is invertible for any $0 \neq \pi \in \nabla$ in $\pi B(X)$.

Now consider a partial integral operators on mixed norm space gives, which gives an important classes of homomorphisms. Note that partial integral operators and equations arise in different areas (see [3-5]).

Let $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mu)$ and (S, Σ_S, ν) be the measure spaces with complete finite measures μ and ν, respectively.

Let $L_{p,q}(\Omega \times S)$, $1 \leq p, q < \infty$ be a space of all classes of complex-valued measurable functions x on $\Omega \times S$ such that

$$\int_\Omega \left[\int_S |x(\omega, s)|^p d\nu(s)\right]^{\frac{q}{p}} d\mu(\omega)$$

exists and finite (see [4]). For $x \in L_{p,q}(\Omega \times S)$ set

$$\|x\|_p = \left(\int_S |x(\omega, s)|^p d\nu(s)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Then $(L_{p,q}(\Omega \times S), \|\cdot\|_p)$ is a Banach–Kantorovich space over $L^q(\Omega)$.

Now we consider the case when $p = q = 2$, and $\Omega = S = [a,b]$, i.e. $L_2\left([a,b]^2\right)$. Then $\left(L_2\left([a,b]^2\right), (\cdot|\cdot)\right)$ is a Kaplansky–Hilbert module over $L_2[a,b]$, where

$$(x|y) = \|x\|_2 = \left(\int_a^b x(\omega,s)y(\omega,s)d\nu(s)\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x(\omega,s), y(\omega,s) \in L_2([a,b]^2)$$

Let $k(\omega,t,s)$ be a complex-valued measurable function on $[a,b]^3$ such that

$$\int_a^b\int_a^b |K(\omega,t,s)|^2 \, d\nu(t)d\nu(s)$$

exists for almost all $\omega \in [a,b]$ and this function satisfies the following conditions:

1) $K(\omega,t,s) = K_1(\omega)K(t,s), \quad a \le \omega \le b$;

2) $K_1(\omega)$ satisfies the Lipschitz condition i.e. $|K_1(\omega_1) - K_1(\omega_2)| \le L|\omega_1 - \omega_2|$ for all $\omega_1, \omega_2 \in [a;b]$.

Assume that the partial integral operator T defined as

$$T(x)(\omega,t) = \int_a^b K(\omega,t,s)x(\omega,s)d\nu(s), \quad x \in L_2\left([a,b]^2\right) \tag{1}$$

maps the Kaplansky – Hilbert module $L_2\left([a,b]^2\right)$ into itself. For any $\omega \in \Omega$ we consider a integral operator T_ω with kernel $K_\omega(t,s)$,

$$T_\omega(x)(t) = \int_0^1 k_\omega(t,s)x(s)d\nu(s), \quad x(s) \in L_2\left([a,b]^2\right)$$

in particular

$$T_0(x)(t) = \int_a^b k_0(t,s)x(s)d\nu(s), \quad x(s) \in L_2\left([a,b]^2\right)$$

Let $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ be eigenvalues of T_0. Set

$$\tilde{\lambda}_0(\omega) = 0, \quad \tilde{\lambda}_n = \lambda_n K_1(\omega),\ n \ge 1$$

$$m_n = \inf_\omega \tilde{\lambda}_n(\omega), \quad M_n = \sup_\omega \tilde{\lambda}_n(\omega)\ n \ge 1.$$

Theorem 1. *Let operator (1) has the kernel which satisfies the conditions 1)-2). Then the spectrum and cyclic spectrum of this operator has the following form respectively:*

$$\operatorname{sp}(T) = \bigcup_{n \le 1} [m_n,\ M_n] \cup \{0\} \ \textit{ and } \operatorname{spm}(T) = \operatorname{mix}\{\tilde{\lambda}_n :\ n \ge 0\}$$

References

1. *Kusraev, A.G.* Dominated operators. Mathematics and its Applications, 519. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. 2000.

2. *Kusraev, A.G.* Vector duality and its applications. Nauka, Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1985.

3. *Albeverio, S., Alimov, Sh.* On some integral equations in Hilbert space with an application to the theory of elasticity. Integral Equations Operator Theory. 2006. Vol.55, No.2. p.153–168

4. *Appell, J.M., Kalitvin, A.S., Zabrejko, P.P.* Partial integral operators and integro–differential equations. Marcel Dekker, New York, 2000.

5. *Appell J.M., Eletskikh, I.A., Kalitvin, A.S.* A note on the Fredholm property of partial integral equations of Romanovskij type. J. Integral Equations Appl. 2004. Vol.16, No.1. p.25–32.

Separately-analytic function with singularities set of positive Lebesgue measure

[1]**Atamuratov A.**, [2]**Rasulov K.**

[1] *Khorezm branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, Khorezm, Uzbekistan,*
e-mail: avtor1@mail.ru

[2] *Urgench State University, Khorezm, Uzbekistan,*
e-mail: avtor2@mail.ru

The well-known Hartogs' theorem [1] states that if a function f is holomorphic at any point of the domain $D \subset \mathbb{C}^n$ with respect to each of the variables z_ν, then it is holomorphic in D with respect to the set of all variables. This fundamental result laid the foundation for the theory of separately analytic functions. HartogsŸ theorem has different variations and generalizations in the works of many authors. Significant results in this direction were obtained in the works of M.Hukuhara [3], I.Shimoda [4], T.Terada [5], J.Siciak [6], V.P.Zaharyuta [7], A.A.Gonchar [8], A.S.Sadullaev and E.M.Chirka [9], A.S.Sadullaev and S.A.Imomkulov [10], A.S.Sadullaev and T.T.Tuichiev [11].

In 1942, Hukuhara stated the next problem: If a function $f(z,w)$ be regular or not in a domain $U \times V \subset \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$ when $f(z,w)$ is regular with respect to w for each fixed $z \in U$ and it is regular with respect to z for only w_m which converged to an inner point $w_0 \in V$.

In 1957, Shimoda [4] gave the next solution for the problem.

Shimoda's theorem. Let $f(z,w)$ be a function defined in a polydisc $U \times V = \{|z| < 1\} \times \{|w| < 1\} \subset \mathbb{C}^2$ and let $E \subset V$ be a countable subset having at least one limit point belonging to V. If

1. for each fixed $z^0 \in U$, $f(z^0,w) \in O(V)$,
2. for each fixed $w^0 \in E$, $f(z,w^0) \in O(U)$,

then there exists a nowhere dense closed set $S \subset U$ such that $f(z,w) \in O((U \setminus S) \times V)$.

In this paper we construct an example separately-holomorphic function with singularities set of positive Lebesgue measure.

Example. First of all we construct Cantor type set with positive Lebesgue measure: let F be the segment $[0,1]$ on the real line of complex plane $\mathbb{C}_z$. Let us remove the interval $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ from F and denote the remaining closed set by F_1. Then we remove from F_1 the intervals $(\frac{5}{36},\frac{7}{36})$ and $(\frac{29}{36},\frac{31}{36})$ which are of length $\frac{1}{2\cdot 3^2}$, and denote the remaining closed set by F_2. In each of these four segments, we remove the intervals of length $\frac{1}{2^2\cdot 3^3}$ from their middle, and so on in every next step we remove from middle of remaining segments intervals of the length 6 times less than lengths of previous removed intervals. Continuing this process, we obtain a decreasing sequence of closed sets F_n.

If we put

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n,$$

then we get Cantor type set K with Lebesgue measure $mesK = \frac{1}{2}$.
Obviously, the points

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{36}, \quad \frac{7}{36}, \quad \frac{29}{36}, \quad \frac{31}{36}, \ldots$$

i.e. the endpoints of the discarded intervals belong to K. Let's designate the left border points of the removed intervals by z_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, (for example, $z_1 = \frac{1}{3}$, $z_2 = \frac{5}{36}$, $z_3 = \frac{29}{36}, \ldots$). Now we fix an arbitrary ν and consider the point z_ν as well as the discarded interval J_ν adjoining it. We take a strictly decreasing sequence of points $\{x_m^{(\nu)}\}$ from the interval J_ν that converges to z_ν. Let $\varepsilon_m^{(\nu)}$ be a vanishing sequence of positive real numbers satisfying the relation $x_{m+1}^{(\nu)} + \varepsilon_{m+1}^{(\nu)} < x_m^{(\nu)} - \varepsilon_m^{(\nu)}$ for any $m \in \mathbb{N}$.

Let $U = |z| < 1 \subset \mathbb{C}_z$ be a unit disc. We put

$$I_m^\nu = \{z \in U : \ z = x_m^{(\nu)} + iy, \ y \geq 0\}$$

and consider the sets $G_m^\nu = U \setminus \{z : \ dist(z, I_m^\nu) \leq \varepsilon_m^{(\nu)}\}$.

Obviously, complements $\mathbb{C}_z \setminus \bar{G}_m^\nu$ of compact sets $\bar{G}_m^\nu$ are connected and their intersections with unit disc U are pairwise disjointed. On the complex plane $\mathbb{C}_z$ we construct polynomials $p_{\nu m}(z)$ of some degree satisfying conditions $|p_{\nu m}(x_m^{(\nu)})| \geq m$ and $\|p_{\nu m}(z)\|_{\bar{G}_m^\nu} \leq \frac{1}{3}$. By the MergelyanŸs theorem $\bar{G}_m^\nu$ is polynomially convex and such polynomial always exists (see [2]).

We put $\|p_{\nu m}(z)\|_{\bar{U}} = A_{\nu m}$ and

$$A_j = \max_{\nu+m=j} A_{\nu m}, \quad j = 2, 3, \dots . \tag{1}$$

Let $V = \{|w| < 1\}$ be a unit disc on the complex plane $\mathbb{C}_w$ and $E \subset V$ be a polar compact. We denote by $t_m(w)$ the Chebyshev polynomials for the compact set E, all zeros of which also lie on E. Since the capacity is $C(E) = 0$, we have $\|t_m(w)\|_E^{\frac{1}{m}} \to 0$ as $m \to \infty$. This implies that there is a sequence of numbers s_j $(s_j < s_{j+1})$ such that $\|t_{s_j}(w)\|_E^{\frac{1}{s_j}} \leq \frac{1}{2A_j}$ holds where sequence A_j defined by (1). Let's put $P_{\nu m}(z) = [p_{\nu m}(z)]^{s_j}$. Since, all the roots of the polynomials $t_m(w)$ lie on the unit circle V, it holds the inequality $\|t_m(w)\|_{\bar{V}} \leq 2^m$.

Consider now the series

$$f(z, w) = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{\nu+m=j}^{\infty} \frac{1}{j-1} P_{\nu m}(z) \cdot t_{s_j}(w). \tag{2}$$

For the series (2), all conditions of the Shimoda theorem are satisfied and $f(z, w) \in O((U \setminus S) \times V)$, where $S = \{z = x + iy \in U : \ x \in K, \ y \geq 0\}$.

References

1. *Shabat B.V.* Introduction to complex analysis, Part II, Moscow, Nauka, 1985, (In Russian).
2. *Gamelin T.W.* Uniform Algebras, Prentice-Hall 1969.
3. *Hukuhara M.* L'extensions du theoreme d'Osgood et de Hartogs, Kansu-hoteisiki ogobi Oyo-Kaiseki 1930, pp. 48-49.
4. *Shimoda I.* Notes on the functions of two complex variables, J. Gakugei Tokushima Univ., 1957, Vol. 8, pp. 1-3.
5. *Terada T.* Sur une certaine condition sous laquelle une fonction de plusieurs variables complexes est holomorphe, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyota Univ., Ser. A, 2 (1967) 383-396.
6. *Siciak J.* Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of C^n, Ann. Pol. Math. 1969. Vol. 22, No1. pp. 145-171.
7. *Zaharyuta V.P.* Separately analytic functions, generalizations of Hartogs' theorem and envelopes of holomorphy, Mat. Sb.,1976, Vol. 101(143), No1, pp. 57-76. (In Russian)
8. *Gonchar A.A.* On analytic continuation from the "edge of the wedge Ann. Acad. sci. Fenn. Ser. AI: Math. 1985, Vol. 10, pp. 221-225.
9. *Sadullaev A.S., Chirka E.M.* On continuation of functions with polar singularities, Mat. Sb., 1987, Vol. 132(174), No3, pp. 383-390. (In Russian)
10. *Sadullaev A.S., Imomkulov S.A.* Extension of holomorphic and pluriharmonic functions with thin singularities on parallel sections, Trudy Mat. Inst. Steklova, 2006, Vol. 253, pp. 158-174. (In Russian)
11. *Sadullaev A.S., Tuichiev T.T.* On continuation of Hartogs series that admit holomorphic extension to parallel sections, Uzb. Math. Journal, 2009, No1, pp. 148-157. (In Russian)

Approximate solution of BVP by Ritz finite element method using an optimal interpolation formula.

[1,2]**Babaev S.**, [2]**Amonova N.**

V.I.Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 46, University str., Tashkent 100170, Uzbekistan,
bssamandar@gmail.com.
Bukhara State University, 11, M.Ikbol str., Bukhara 200114, Uzbekistan.

The finite element (FE) method was developed to solve complicated prob- lems in engineering, notably in elasticity and structural mechanics modeling involving elliptic PDEs and complicated geometries.

There are at least three different formulation to consider 1D model

$$-u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{1}$$

problem [4]. These are the (D)-form, the original differential equation, the (V)-form, the variational form or weak form, the (M)-form, the minimization form. The minimization form

$$\min_{\nu\in H_0^1(0,1)} \left\{ \int_0^1 (\frac{1}{2}(\nu')^2 - f\nu)dx \right\} \tag{2}$$

when the corresponding finite element method is often called the Ritz method.

In this work we examine the (M)-form, i.e., the Ritz method.

Approximate solution of problem (1) by the Ritz finite element method described in the following steps.
1. Construct a minimization (M) formulation (2).
2. Generate a mesh, e.g., a uniform Cartesian mesh $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, where $h = 1/n$, defining the intervals (x_{i-1}, x_i), $i = 1, 2, \ldots, n$.
3. Construct a set of basis functions based on the mesh, such as the piecewise functions ($i = 1, 2, \ldots, n-1$). 4. Represent the approximate (FE) solution by a linear combination of the basis functions

$$u_h(x) = \sum_{\beta=1}^{n-1} \alpha_\beta \phi_\beta(x) \tag{3}$$

where the coefficients α_j are the unknowns to be determined. On assuming the hat basis functions, obviously $u_h(x)$ is also a piecewise function, although this is not usually the case for the true solution $u(x)$. We then derive a linear system of equations for the coefficients by substituting the approximate solution $u_h(x)$ for the exact solution $u(x)$ in the minimization form is

$$\min_{\nu\in H_0^1(0,1)} F(\nu): \quad F(\nu) = \frac{1}{2}\int_0^1 (\nu_x)^2 dx - \int_0^1 f\nu dx.$$

we look for an approximate solution of the form (3). Substituting this into the functional form gives

$$F(u_h) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sum_{\beta=1}^{n-1} \alpha_\beta \phi'_\beta(x) \right)^2 dx - \int_0^1 f \sum_{\beta=1}^{n-1} \alpha_\beta \phi_\beta(x) dx, \tag{4}$$

which is a multivariate function of α_1, α_2,..., α_{n-1}. The necessary condition for a global minimum (also a local minimum) is

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_{n-1}} = 0.$$

Here we use coefficients of optimal interpolation formula in the space $W_2^{(1,0)}$ instead of $\phi_\beta(x)$. We could execute an optimal interpolation formula

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^{n} \phi_\beta(x) \cdot \varphi(x_\beta),$$

with equal spaced nodes in $W_2^{(1,0)}$ space [1-3]. Coefficients of the optimal interpolation formula have the following form

$$\begin{aligned}\phi_\beta(z) = \quad & \tfrac{1}{2(1-e^{2h})}\Big[\mathrm{sgn}(z-h\beta-h)\cdot(e^{h\beta+2h-z}-e^{z-h\beta}) \\ & +\mathrm{sgn}(z-h\beta+h)\cdot(e^{h\beta-z}-e^{z-h\beta+2h}) \\ & +(1+e^{2h})\cdot\mathrm{sgn}(z-h\beta)\cdot(e^{z-h\beta}-e^{h\beta-z})\Big], \quad \beta=0,1,...,n.\end{aligned}$$

and the finite element solution sought is

$$u_h(x) = \sum_{\beta=1}^{n-1} \alpha_\beta \phi_\beta(x)$$

and the minimization form (M) can be used to derive a linear system of equations for the coefficients α_β.

References

1. *Babaev S.S., Hayotov A.R.* Optimal interpolation formulas in the space $W_2^{(m,m-1)}$. *Calcolo* (2019)
2. *Babaev S.S, Davronov J.R., Mamatova N.H.* On an optimal interpolation formula in the space $W_{2,\sigma}^{(1,0)}$ Bulletin of the Institute of Mathematics, (2020), No.4, pp.1-12
3. *Hayotov A.R., Babaev S.S.* Calculation of the coefficients of optimal interpolation formulas in the space $W_2^{(2,1)}(0,1)$. Uzbek Mathematical Journal, 2014, no.3, pp.126-133. (in Russian)
4. *Zhilin Li, Zhonghua Qiao, Tao Tang* Numerical solution of differential equations. Cambridge University Press , 2018.

On the spectrum of a tensor sum of the Friedrichs models with rank 2 perturbations

Bakhronov B.
Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan;
email: *b.bahronov@mail.ru*

Let $\mathbb{T}$ be the one-dimensional torus and $L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2)$ be the Hilbert space of square integrable symmetric (complex) functions defined on $\mathbb{T}^2$.

Let us consider the Hamiltonian:

$$H_{\mu,\lambda} : L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2) \to L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2), \quad H_{\mu,\lambda} := H_{0,0} - \mu(V_{11}+V_{12}) + \lambda(V_{21}+V_{22}), \quad \mu,\lambda > 0,$$

where $H_{0,0}$ is the multiplication operator:

$$(H_{0,0}f)(p,q) = (u(p)+u(q))f(p,q)$$

and V_{ij}, $i,j=1,2$ are non-local interaction operators:

$$(V_{i1}f)(p,q) = v_i(p)\int_{\mathbb{T}} v_i(t)f(t,q)dt, \quad (V_{i2}f)(p,q) = v_i(q)\int_{\mathbb{T}} v_i(t)f(p,t)dt, \ i=1,2.$$

Here $f \in L_2^{\rm s}(\mathbb{T}^2)$, are positive reals, $u(\cdot)$ and $v_i(\cdot)$, $i=1,2$ are real-valued continuous functions on $\mathbb{T}$. By the definition, the operators V_{ij}, $i,j=1,2$ are partial integral operators with degenerate kernel of rank 1.

Under these assumptions the operator $H_{\mu,\lambda}$ is bounded and self-adjoint.

The spectrum, the essential spectrum and the discrete spectrum of a bounded self-adjoint operator will be denoted by $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\rm ess}(\cdot)$ and $\sigma_{\rm disc}(\cdot)$, respectively.

To study the spectral properties of the model operator $H_{\mu,\lambda}$ we introduce a Friedrichs model $h_{\mu,\lambda}$ with rank 2 perturbation, acting on $L_2(\mathbb{T})$ by the rule:

$$h_{\mu,\lambda} := h_{0,0} - \mu k_1 + \lambda k_2,$$

where the operators $h_{0,0}$ and $k_i, i=1,2$ are defined as

$$(h_{0,0}g)(p) = u(p)g(p),$$

$$(k_i g)(p) = v_i(p)\int_{\mathbb{T}} v_i(t)g(t)dt,\ \ i=1,2.$$

From the definitions of $H_{\mu,\lambda}$ and $h_{\mu,\lambda}$ we obtain the representation

$$H_{\mu,\lambda} = h_{\mu,\lambda}\otimes I + I \otimes h_{\mu,\lambda},$$

where I is an identity operator on $L_2(\mathbb{T})$.

Therefore, by theorem on the spectrum of the tensor sum of two operators [1] the equality

$$\sigma(H_{\mu,\lambda}) = \sigma(h_{\mu,\lambda}) + \sigma(h_{\mu,\lambda})$$

holds.

Let $\mathrm{supp}\{v_\alpha(\cdot)\}$ be the support of the function $v_\alpha(\cdot)$ and $\mathrm{mes}(\Omega)$ be the Lebesgue measure of the measurable set $\Omega \in \mathbb{T}$ and

$$m := \min_{p\in\mathbb{T}} u(p), \quad M := \max_{p\in\mathbb{T}} u(p);$$

$$I_\alpha(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{v_\alpha^2(t)}{u(t)-z}dt, \quad \alpha=1,2, \quad z \in \mathbb{C}\setminus[m;M].$$

Since the function $I_\alpha(\cdot)$ is monotonically increasing in the intervals $(-\infty;m)$ and $(M;+\infty)$ by the dominated convergence theorem there exist the following finite or infinite limits

$$I_1(m) = \lim_{z\to m-0} I_1(z), \quad I_2(M) = \lim_{z\to M+0} I_z(z).$$

From now on we suppose that

$$\mathrm{mes}(\mathrm{supp}\{v_1(\cdot)\}\cap \mathrm{supp}\{v_2(\cdot)\}) = 0 \tag{1}$$

and

$$|I_1(m)| < +\infty, \quad |I_2(M)| < +\infty. \tag{2}$$

In the latter case we set

$$\mu_0 := (I_1(m))^{-1}, \quad \lambda_0 := -(I_2(M))^{-1}.$$

In the following lemma we describe the number and location of the eigenvalues of $h_{\mu,\lambda}$.

Theorem 1. Let the conditions (1) and (2) be fulfilled.

(i) If $0<\mu\le\mu_0$, then for any λ the operator $h_{\mu,\lambda}$ has no eigenvalues in $(-\infty;m)$;

(ii) If $\mu>\mu_0$, then for any λ the operator $h_{\mu,\lambda}$ has an unique eigenvalue $E_\mu^{(1)}$ located in $(-\infty;m)$;

(iii) If $0<\lambda\le\lambda_0$, then for any $\mu>0$ the operator $h_{\mu,\lambda}$ has no eigenvalues in $(M;\infty)$;

(iv) If $\lambda > \lambda_0$, then for any $\mu > 0$ the operator $h_{\mu,\lambda}$ has an unique eigenvalue $E_\lambda^{(2)}$ located in $(M;\infty)$.

Now, we precisely describe the spectrum of $H_{\mu,\lambda}$.

Theorem 2. Let the conditions (1) and (2) be fulfilled.

(i) For any $0 < \mu \le \mu_0$ and $0 < \lambda \le \lambda_0$ we have

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [2m;2M], \quad \sigma_{\text{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \emptyset.$$

(ii) For any $\mu > \mu_0$ and $0 < \lambda \le \lambda_0$ the number $2E_\mu^{(1)}$ is a simple eigenvalue of $H_{\mu,\lambda}$ and

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_\mu^{(1)} + m; E_\mu^{(1)} + M] \cup [2m;2M], \quad \sigma_{\text{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \{2E_\mu^{(1)}\}.$$

(iii) For any $0 < \mu \le \mu_0$ and $\lambda > \lambda_0$ the number $2E_\lambda^{(2)}$ is a simple eigenvalue of $H_{\mu,\lambda}$ and

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = \cup[2m;2M] \cup [E_\lambda^{(2)} + m; E_\lambda^{(2)} + M], \quad \sigma_{\text{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \{2E_\lambda^{(2)}\}.$$

(iv) For any $\mu > \mu_0$ and $\lambda > \lambda_0$ the number $2E_\mu^{(1)}$ are $2E_\lambda^{(2)}$ are the simple eigenvalues of $H_{\mu,\lambda}$. Moreover, the equalities

$$\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda}) = [E_\mu^{(1)} + m; E_\mu^{(1)} + M] \cup [2m;2M] \cup [E_\lambda^{(2)} + m; E_\lambda^{(2)} + M];$$

$$\sigma_{\text{pp}}(H_{\mu,\lambda}) = \{2E_\mu^{(1)}; E_\mu^{(1)} + E_\lambda^{(2)}; 2E_\lambda^{(2)}\}$$

hold.

Remark 1. In the assertion (iv) the location of the eigenvalue $E_\mu^{(1)} + E_\lambda^{(2)}$ of $H_{\mu,\lambda}$ depends on the value of the parameters $\mu > 0$ and $\lambda > 0$. Choosing $\mu > 0$ and $\lambda > 0$ one can show that $E_\mu^{(1)} + E_\lambda^{(2)} \in \sigma_{\text{ess}}(H_{\mu,\lambda})$.

Reference

1. *M. Reed, B. Simon.* Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York, 1979.

Uniqueness and stability issues in general integral geometry problem on the plane

Begmatov A.H.
Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia
e-mail: akbar_begmatov@mail.ru

Integral geometry studies the transformations assigning to functions on a manifold X their (weighted) integrals over submanifolds from certain set M [1].This important and intensively developing domain of modern mathematics is closely connected with the theory of PDE, mathematical physics, geometric analysis [2], [3].

With the advance of the technical base of computerized tomography and widening of the field of applications of tomography methods the problem of determination of functions from their integrals over manifolds of quite complicated shape acquire greater importance. The importance of such the general problems of integral geometry is also caused by the intrinsic demands of the theory of inverse problems for PDE and ill-posed problems of mathematical physics and analysis [2], [4].

We investigate new wide classes of integral geometry problems on curved manifolds as well as the problems of inversion the Radon transform.

The following results will be presented:

1) Theorems of uniqueness and estimates of conditional stability of general integral geometry problems on smooth convex plane curves.

2) Uniqueness and stability of integral geometry problems with sufficiently general perturbations in a strip (layer) for special families of curves (surfaces) were investigated, evolution equations connected with such problems of integral geometry were considered and explicit analytic formulas for solutions to the problems without perturbations are obtained [5-7].

References

1. *Gelfand I.M., Graev M.I., and Vilenkin N.Ya.* Generalized functions. Vol. 5. Integral geometry and representation theory, Academic Press, 1964.
2. *Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., and Shishatskii S.P.* Ill-posed problems of mathematical physics and analysis, AMS, Providence, RI, 1986.
3. *Begmatov Akbar Kh.* The uniqueness of a solution to a Volterra-type integral problem in the plane, Doklady Mathematics, Vol. 80, No. 1, 2009, 528-530.
4. *Ehrenpreis L.* The Radon transform, Oxford University Press, 2003.
5. *Begmatov Akbar H.* Reduction of an integral geometry problem in the three-dimensional space to polysingular integral equation with perturbation, Doklady Mathematics, 57, 1998, 424-426.
6. *Begmatov Akbar H.* A perturbed integral geometry problem in three-dimensional space, Siberian. Math. J., 41, 2000, 1-12.
7. *Begmatov Akb. Kh., Petrova N.N.* The problem of integral geometry with perturbation on elliptic curves in a strip, Doklady Mathematics, 2011, Vol. 83, No. 1, 22-25.

Combinatorial properties of cayley tree

[1]Botirov G., [2]Xusainova M.

[1] *Deputy Director of Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*
e-mail: botirovg@mathinst.uz

[2] *Master's student of the Faculty of Physics and Mathematics,Bukhara state university, Uzbekistan*
e-mail: m.i.xusainova1998@gmail.com

Combinatorial properties have become more important contour method on the trees. The contour method on the lattice Z^d $d \geq 1$, is generally called the Pirigov-Sinai theory [3]-[8].

The Cayley tree $\Im^k$ of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, with exactly $k+1$ edges issuing from each vertex. We suppose that $\Im^k = (V, L, i)$, where V is the set of vertices of $\Im^k$, L is the set of its edges, i is the incidence function assigning each edge $l \in L$ its endpoints $x, y \in V$. If $i(l) = \{x, y\}$,then the vertices x and y are called nearest neighbors, and we write $l = \langle x, y\rangle$. The distance $d(x, y)$, $x, y \in V$, on the Cayley tree is defined by the formula $d(x, y) = mind\{\exists x = x_0, x_1, x_2, x_{d-1}, x_d = y \in V$ such that $\langle x_0, x_1\rangle, , \langle x_{d-1}, x_d\rangle$.

For a fixed $x^0 \in V$, we set

$$W_n = \{x \in V|\ d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \{x \in V|\ d(x, x_0) \leq n\}, \quad L_n = \{\ell = \langle x, y\rangle \in L|\ x, y \in V_n\}. \quad (1)$$

It is well known that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of free products of a $k+1$ cyclic group of order two with the generators $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$.

We consider the models in which the spin takes values in the set $\Phi = 1, 2, q, q \geq 2$. A configuration σ on the set V is then defined as a function $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; the set of all configurations coincides with $\Omega = \Phi^V$.

Let $\lambda \subset V$ be a finite set, $\lambda' = V \setminus \lambda$, and $\omega_\lambda = \{\omega(x), x \in \lambda'\}$. Let $\sigma_\lambda = \{\omega(x), x \in V\}$ be given configurations. Let $\omega^{(i)}_{\lambda'} \equiv i$ $i = 1, ..., q$, be constant configurations outside λ. For each configuration σ_λ in the interior of λ we extend the configuration to the entire tree using the i th constant configuration; we let $\sigma^{(i)}_\lambda$ denote this configuration and set $\omega^{(i)}_\lambda = \{\sigma^{(i)}_\lambda\}$.

We consider V_n and $V^{(j)}_n \equiv V^{(j)}_n(\sigma^{(i)}_\lambda) = \{t \in V_n : \sigma^{(i)}_\lambda(t) = j\}, j = 1, ..., q, j \neq i$, for a given configuration $\sigma^{(i)}_\lambda \in \Omega^{(i)}_\lambda, \lambda \subset V_n$. Let $G^{n,j} = (V^{(j)}_n, L^{(j)}_n)$ be a graph such that

$$L_n^{(j)} = l = \langle x, y\rangle \in L : x, y \in V_n^{(j)}, j = 1, ..., q.$$

It is obvious that the graph $G^{n,j}$ contains finitely many (m) maximal connected subgraphs $G_r^{n,j}$ for a fixed n, i.e.,

$$G^{n,j} = \{G_1^{n,j}, ..., G_m^{n,j}\},\ G_r^{n,j} = (V_{n,r}^{(j)}, L_{n,r}^{(j)}),\ r = 1, ..., n,$$

where $V_{n,r}^{(j)}$ is the set of vertices and $L_{n,r}^{(j)}$ is the set of edges of $G_r^{n,j}$.

The number of elements of a set A is denoted by |A|.

Two edges $l_1, l_2 \in L, l_1 \neq l_2$, are called *nearest neighboring edges* if $|i(l_1) \cap i(l_2)| = 1$, and we write $< l_1, l_2 >_1$ in this case.

Let G be a graph. We let $V(G)$ and $E(G)$ denote the sets of vertices and edges of the graph G. For any two subcontoursT_1 and T_2 the distance dist (T_1, T_2) is defined as

$$dist(T_1, T_2) = min_{x\in V(T_1) y\in(T_2)} d(x, y)$$

where $d(x, y)$ is the distance between the points $x, y \in V$.

Definition 1. The sub-contours T_1 and T_2 are said to be adjacent if $d(T_1, T_2) \leq 2$. The set of sub-contours A is said to be connected if for any two sub-contours $T_1, T_2 \in A$, there exist sub-contours $\tilde{T}_1 = T_1$, $\tilde{T}_2 = T_2$ in the set A such that the sub-contours $\tilde{T}_i$ and $\tilde{T}_{i+1}$ are adjacent for each $i = 1, , i - 1$.

Definition 2. Any maximal connected set (component) of sub-contours is called the contour of the boundary Γ.

Theorem 1. *Let K be a connected sub-graph of the Cayley tree $\Im^k$ $k \geq 2$. Then*

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} (k + 1)k^{i-1} \tag{2}$$

Theorem 2. Let K be a connected subgraph of the Cayley tree $\Im^k$ $k \geq 2$. Then

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} (k + 1)k^{i}$$

References

1. *Rozikov U.A., Botirov G.I.* Potts model with competing interactions on the Cayley tree: the contour method// Theoretical and Mathematical Physics, 2007, V-153, N-1, pp.1423-1433.

2. *Rozikov U.A.,* Gibbs measures on Cayley tree, World Sci.Publ., Singapore, 2013, 404 pp.

The number of eigenvalues of the one-particle Schrödinger operator on a lattice

[1]**Bozorov I.N.**, [2]**Abduhamidova D.B.**, [3]**Sayfullayeva F.M.**

[1] *Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan),*

e-mail: islomnb@mail.ru

[2] *Jizzakh State Pedagogical University (Jizzakh, Uzbekistan)*

[3] *Bukhara State University (Bukhara, Uzbekistan)*

e-mail: sayfullayevafotima11@gmail.com

Let $\mathbb{T}^3 \equiv (-\pi, \pi]^3$ be a three-dimensional torus, i.e., a three-dimensional cube whose opposite faces are identified. We note that the operations of addition and multiplication by a real number for the elements of the set $\mathbb{T}^3 \subset \mathbb{R}^3$ are understood as operations modulo $(2\pi\mathbb{Z})^3$ in $\mathbb{R}^3$. Let $L_2(\mathbb{T}^3)$ be the Hilbert space of square integrable functions on $\mathbb{T}^3$.

The one-particle Schrödinger operator h_μ, $\mu \in \mathbb{R}$, associated to the Hamiltonian h of one particle on the lattice $\mathbb{Z}^3$ interacting via attractive short-range potential, is a self-adjoint operator acting in $L_2(\mathbb{T}^3)$ as

$$h_\mu = h_0 - \mu \mathbf{v}, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

where h_0 is the multiplication operator by

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{3}(1 - \cos 2p_i),$$

and $\mathbf{v}$ is the integral operator with kernel

$$v(p - s) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{3} \cos(p_\alpha - s_\alpha).$$

Note that by the Weyl theorem (see [1]), the continuous spectrum $\sigma_{cont}(h_\mu)$ of the operator h_μ is therefore independent of the parameter $\mu \in \mathbb{R}$ and coincides with the spectrum $\sigma_{cont}(h_\mu)$ of h_μ. Hence, the equality

$$\sigma_{cont}(h_\mu) = \sigma(h_0) = [0, 6]$$

holds.

Since $\mathbf{v} \geqslant 0$ with $\mu > 0$,

$$\sup_{\|f\|=1} (h_\mu f, f) \leqslant \sup_{\|f\|=1} (h_0 f, f) = 6(f, f), \qquad f \in L_2(\mathbb{T}^3).$$

Hence, h_μ does not have eigenvalues lying to the right of the continuous spectrum, i.e.,

$$\sigma(h_\mu) \cap (6, \infty) = \varnothing.$$

Similarly, since $\mu < 0$

$$\inf_{\|f\|=1} (h_\mu f, f) \geqslant \inf_{\|f\|=1} (h_0 f, f) = 0, \qquad f \in L_2(\mathbb{T}^3).$$

Therefore, h_μ has no eigenvalues lying to the left of the continuous spectrum, i.e.,

$$\sigma(h_\mu) \cap (-\infty, 0) = \varnothing.$$

Let the functions φ_l be defined as

$$\varphi_l(p) = \eta_l(p_\alpha), \quad \{\eta_l(p_\alpha)\} \in \{1, \cos p_1, \cos p_2, \cos p_3, \sin p_1, \sin p_2, \sin p_3\}. \tag{1}$$

These functions consist of a 7 orthogonal system $\{\varphi_l\}$. The operator $\mathbf{v}$ can be expressed via the functions $\{\varphi_l(\cdot)\}$, defined in (1), in the form

$$(\mathbf{v}f)(p) = \sum_{l=1}^{7} (\varphi_l, f)\varphi_l(p).$$

Below, we describe the conditions for the existence of eigenvalues of h_μ.

We introduce the following subspaces $\mathcal{H}_l$, $l=\overline{1,7}$, of $L_2(\mathbb{T}^3)$ as

$$\mathcal{H}_1=\mathcal{H}^{eee}_{000},\ \mathcal{H}_2=\mathcal{H}^{eee}_{\pi 00},\ \mathcal{H}_3=\mathcal{H}^{eee}_{0\pi 0},\ \mathcal{H}_4=\mathcal{H}^{eee}_{00\pi},\ \mathcal{H}_5=\mathcal{H}^{oee}_{\pi 00},\ \mathcal{H}_6=\mathcal{H}^{eoe}_{0\pi 0},\ \mathcal{H}_7=\mathcal{H}^{eeo}_{00\pi},$$

where o, e, 0 and π denote even, odd, π-even and π-odd notions of variable, respectively. For example $\mathcal{H}^{eeo}_{00\pi}$ denotes a space of functions $f(p)$ which are even with respect to each variables p_1, p_2 and odd with respect to p_3, and π-even with respect to p_1, p_2, and π-odd with respect to each variable p_3.

Remark that the space $\mathcal{H}_l$, $l=\overline{1,7}$ is invariant under the operator h_μ. We denote by $h_{\mu,l}$ the restriction of $h_\mu\big|_{\mathcal{H}_l}$ of h_μ to $\mathcal{H}_l$.

Note that $\varphi_l\in\mathcal{H}_l,\quad l=\overline{1,7}$. Therefore, the operator $h_{\mu,l}$, $l=\overline{1,7}$ acts in $\mathcal{H}_l$ as

$$h_{\mu,l}=h_0-\mu\mathbf{v}_l,$$

where

$$(\mathbf{v}_l f)(p)=(\varphi_l,f)\varphi_l(p),\quad \varphi_l\in\mathcal{H}_l,\quad l=\overline{1,7}.$$

Then we have

$$\sigma(h_\mu)=\bigcup_{l=1}^{7}\sigma(h_{\mu,l}).$$

Next, we study the operator $h_{\mu,l}$, $l=\overline{1,7}$.

We set

$$\xi_l(z)=\int\limits_{\mathbb{T}^3}\frac{\varphi_l^2(s)ds}{\varepsilon(s)-z},\quad \varphi_l\in\mathcal{H}_l,\quad l=\overline{1,7},\quad z\in\mathbb{C}\backslash[0,6]. \tag{2}$$

Remark that the integral (2) converges as $z=0$ ($z=6$) (see [2]).

We set

$$\mu_l^0(0)=\frac{1}{\xi_l(0)},\qquad \mu_l^0(6)=\frac{1}{\xi_l(6)},\quad l=\overline{1,7}.$$

Let $C(\mathbb{T}^3)$ be the Banach space of continuous (periodic) functions on $\mathbb{T}^3$ and $G_l(z)$, $l\in\{1,2,\ldots,7\}$ be the (Birman–Schwinger) integral operator with the kernel

$$G_l(p,q;z)=\frac{\varphi_l(p)\varphi_l(q)}{\varepsilon(q)-z},\quad z\in(-\infty,0)]\cup[6,+\infty).$$

Definition. *Let f be a solution of $h_{\mu,l}f=0$ (resp. $h_{\mu,l}f=6f$).*

1. If $f\in L_2(\mathbb{T}^3)$, then we say that 0 (resp. 6) is a threshold eigenvalue of $h_{\mu,l}$.

2. If $f\in L_1(\mathbb{T}^3)\backslash L_2(\mathbb{T}^3)$, then we say that 0 (resp. 6) is a virtual level of $h_{\mu,l}$.

Theorem 1. *The following statements are true:*

1. For any $0<\mu<\mu_l^0(0)$ (resp. $\mu_l^0(6)<\mu<0$) the operator $h_{\mu,l}$ has no eigenvalues lying to the left (resp. to the right) of the continuous spectrum.

2. Let $0<\mu=\mu_l^0(0)$ (resp. $\mu_l^0(6)=\mu<0$). If $\varphi_l(\mathbf{0})\neq 0$, then $h_{\mu,l}$ has a virtual level at $z=0$ (resp. at $z=6$), if $\varphi_l(\mathbf{0})=0$, then the number $z=0$ (resp. $z=6$) is a threshold eigenvalue of $h_{\mu,l}$.

3. For any $\mu>\mu_l^0(0)>0$ (resp. $\mu<\mu_l^0(6)<0$), the operator $h_{\mu,l}$ has a unique eigenvalue lying to the left (resp. to the right) of the continuous spectrum.

Theorem 2. *The following statements are true:*

1. For any $0<\mu<\mu_l^0(0)$ (resp. $\mu_l^0(6)<\mu<0$), $l=1,2,\ldots,7$, the operator h_μ has no eigenvalues lying to the left (resp. to the right) of the continuous spectrum.

2. Let $0<\mu=\mu_l^0(0)$ (resp. $\mu_l^0(6)=\mu<0$). If $\varphi_l(\mathbf{0})\neq 0$, then h_μ has a virtual level at $z=0$ (resp. at $z=6$) of multiplicity $q\geqslant 1$, if $\varphi_l(\mathbf{0})=0$, then the number $z=0$ (resp. $z=6$) is a threshold eigenvalue of multiplicity $q\geqslant 1$ of h_μ.

3. For any $\mu>\mu_l^0(0)>0$ (resp. $\mu<\mu_l^0(6)<0$), $l=1,2,\ldots,7$, the operator h_μ has exactly 7 eigenvalues (counting multiplicities) lying to the left (resp. to the right) of the continuous spectrum.

Remark. Note that the item 2 of the Theorem 2 shows that the number $z=0$ (resp. $z=6$) might be a virtual level or a threshold eigenvalue for the operator h_μ. For the case $\mu=\mu_1^0(0)$, the number $z=0$ is a simple virtual level of h_μ with

$$f_1(p)=\frac{1}{\varepsilon(p)}\in L_1(\mathbb{T}^3)\backslash L_2(\mathbb{T}^3).$$

For the case $\mu=\mu_2^0(0)=\mu_3^0(0)=\mu_4^0(0)$ or $\mu=\mu_5^0(0)=\mu_6^0(0)=\mu_7^0(0)$, the number $z=0$ is a virtual level of multiplicity 3 or a threshold eigenvalue of multiplicity 3 of h_μ, respectively, with

$$f_{1+i}(p)=\frac{\cos p_i}{\varepsilon(p)}\in L_1(\mathbb{T}^3)\backslash L_2(\mathbb{T}^3) \quad \text{or} \quad f_{4+i}(p)=\frac{\sin p_i}{\varepsilon(p)}\in L_2(\mathbb{T}^3),$$

$i=1,2,3.$

References

1. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978.
2. *Muminov M.I., Khurramov A.M.* Spectral properties of a two-particle Hamiltonian on a lattice, Theor. Math. Phys., **177** (3), 2013, 482–496.
3. *Lakaev S.N., Bozorov I.N.* The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice, Theoret. and Math. Phys., **158** (3), 2009, 360–376.
4. *Bozorov I.N., Khurramov A.M.* On the number of eigenvalues of the lattice model operator in one-dimensional case, Lobachevskii J. Math., **43** (2), 2022, 353–365.
5. *Muminov M.I., Khurramov A.M., Bozorov I. N.* Conditions for the existence of bound states of a two-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice, Nanosystems: Phys. Chem. Math., **13** (3), 2022, 237–244.

Estimates for the number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice

[1]Bozorov I.N., [2]Raxmatova F.V., [3]Pulatova G.B.

[1]*Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan),*

e-mail: islomnb@mail.ru

[2]*Jizzakh State Pedagogical University (Jizzakh, Uzbekistan)*

[3]*Bukhara State University (Bukhara, Uzbekistan)*

e-mail: pulatovagulsara1997@gmail.com

Let $\mathbb{T}^d\equiv(-\pi,\pi]^d$ be d-dimensional torus, $L_2(\mathbb{T}^d)$ be the Hilbert space of square integrable functions on $\mathbb{T}^d$.

The two-particle Schrödinger operator $h_\mu(k)$, $\mu>0$, $k\in\mathbb{T}^d$, $d=1,2$, associated to the Hamiltonian h of a system of two particles on the lattice $\mathbb{Z}^d$ interacting via attractive short-range potential, is a self-adjoint operator acting in $L_2(\mathbb{T}^d)$ as

$$h_\mu(k)=h_0(k)-\mu\mathbf{v}, \quad k=\in\mathbb{T}^d, \quad \mu>0,$$

where $h_0(k)$ is the multiplication operator by

$$\mathcal{E}_k(p)=\sum_{i=1}^{d}\Big(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\sqrt{\frac{1}{m_1^2}+\frac{2}{m_1m_2}\cos 2k_i+\frac{1}{m_2^2}\cos 2p_i}\Big),$$

$m_i>0$ is the mass of the i-th particle, $i=1,2$ and $\mathbf{v}$ is the integral operator with kernel

$$v(p-s)=1+\sum_{\alpha=1}^{d}\cos(p_\alpha-s_\alpha)+\cos(p_1-s_1)\cos(p_2-s_2).$$

Note that by the Weyl theorem [1] the essential spectrum $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$ of the operator $h_\mu(k)$ coincides with the spectrum of the unperturbed operator $h_0(k)$

$$\sigma_{ess}(h_\mu(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

where $m(k) = \min\limits_{p\in\mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(p), M(k) = \max\limits_{p\in\mathbb{T}^d} \mathcal{E}_k(p)$.

Since $\mathbf{v} \geqslant 0$ and $\mu > 0$,

$$\sup_{\|f\|=1} (h_\mu(k)f, f) \leqslant \sup_{\|f\|=1} (h_0(k)f, f) = M(k)(f, f), \qquad f \in L_2(\mathbb{T}^d).$$

Hence, $h_\mu(k)$ has no eigenvalues lying to the right of the essential spectrum, i.e.,

$$\sigma(h_\mu(k)) \cap (M(k), \infty) = \varnothing.$$

Let the functions φ_l be defined as

$$\varphi_l(p) = \prod_{\alpha=1}^{d} \eta_l(p_\alpha), \quad \{\eta_l(p_\alpha)\} \in \{1, \cos p_1, \cos p_2, \sin p_1, \sin p_2\}. \tag{1}$$

These functions consist of a 3^d orthogonal system $\{\varphi_l\}$. The operator $\mathbf{v}$ can be expressed via the functions $\{\varphi_l(\cdot)\}$, defined in (1), in the form

$$(\mathbf{v}f)(p) = \sum_{l=1}^{3^d} (\varphi_l, f)\varphi_l(p).$$

Below, we describe the conditions for the existence of eigenvalues of $h_\mu(k)$.

We denote by $\mathcal{H}_l \subset L_2(\mathbb{T}^d)$, $l = 1, 2, \ldots, 3^d$ the subspace spaned by the functions $\{\varphi_l(\cdot)\}$ which defined by (1).

Remark that the space $\mathcal{H}_l$, $l = 1, 2, \ldots, 3^d$ is invariant under the operator $h_\mu(k)$. We denote by $h_{\mu,l}(k)$ the restriction $h_\mu(k)\big|_{\mathcal{H}_l}$ of the operator $h_\mu(k)$ to $\mathcal{H}_l$.

Note that $\varphi_l \in \mathcal{H}_l$, $\quad l = 1, 2, \ldots, 3^d$. Therefore, the operator $h_{\mu,l}(k)$, $l = 1, 2, \ldots, 3^d$ acts in $\mathcal{H}_l$ as

$$h_{\mu,l}(k) = h_0(k) - \mu\mathbf{v}_l,$$

where

$$(\mathbf{v}_l f)(p) = (\varphi_l, f)\varphi_l(p), \quad \varphi_l \in \mathcal{H}_l, \quad l = 1, 2, \ldots, 3^d.$$

Then we have

$$\sigma(h_\mu(k)) = \bigcup_{l=1}^{3^d} \sigma(h_{\mu,l}(k)).$$

Next, we study the operator $h_{\mu,l}(k)$, $l = 1, 2, \ldots, 3^d$.

There exist (finite or infinite) limits:

$$\lim_{z\nearrow m(k)} \xi_l(k; z), \quad l = 1, 2, \ldots, 3^d,$$

where

$$\xi_l(k; z) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\varphi_l^2(s)ds}{\mathcal{E}_k(s) - z}, \quad \varphi_l \in \mathcal{H}_l, \quad l = 1, 2, \ldots, 3^d, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[m(k), M(k)]. \tag{2}$$

Assumption. Assume that $m = m_1 = m_2$ and $k \in \Pi$, where Π is a set of $k \in \mathbb{T}^d$ with $k_\alpha = -\frac{\pi}{2}$ or $k_\alpha = \frac{\pi}{2}$ for some $\alpha \in \{1, 2\}$.

If the Assumption 1 is not fulfilled, then for any $k \in \mathbb{T}^d$ there exists finite limits:

$$\mu_l^0(k) := \mu_l^0(m(k)) = \lim_{z\nearrow m(k)} \frac{1}{\xi_l(k; z)}, \quad l = 1, 2, \ldots, 3^d.$$

Moreover, if $\varphi_l(\mathbf{0}) \neq 0$, then $\mu_l^0(k) = 0$ and if $\varphi_l(\mathbf{0}) = 0$, then $0 < \mu_l^0(k) < \infty$.

Let us define the functions

$$\alpha_l(\mu; k) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad \mu \in (0, \mu_l^0(k)), \quad \varphi_l(\mathbf{0}) = 0, \\ 1, & \text{if} \quad \mu = \mu_l^0(k), \quad \varphi_l(\mathbf{0}) = 0, \\ 1, & \text{if} \quad \mu \in (\mu_l^0(k), \infty), \quad \varphi_l(\mathbf{0}) = 0, \\ 1, & \text{if} \quad \mu \in (0, \infty), \quad \varphi_l(\mathbf{0}) \neq 0, \end{cases}$$

for all $l = 1, 2, \ldots, 3^d$.

Theorem 1. *Suppose that the Assumption 1 are not fulfilled. Then the following statements are true:*

1. *For all $\mu > 0$ the operator $h_{\mu,l}(k)$, $l = 1, 2, \ldots, 3^d$ has $\alpha_l(\mu; k)$ eigenvalue lying to the left of the essential spectrum.*

2. *Let $\mu = \mu_l^0(k)$ and $\varphi_l(\mathbf{0}) = 0$, $l \in \{1, 2, \ldots, 3^d\}$, then the number $z = m(k)$ is an eigenvalue of the operator $h_{\mu,l}(k)$.*

Theorem 2. *The following statements are true:*

1. *For all $\mu > 0$ the operator $h_\mu(k)$ has*

$$2^d \leqslant \sum_{l=1}^{3^d} \alpha_l(\mu; k) \leqslant 3^d$$

eigenvalues (counting multiplicities) lying to the left of the essential spectrum.

2. *Let $\mu = \mu_l^0(k)$ and $\varphi_l(\mathbf{0}) = 0$, $l \in \{1, 2, \ldots, 3^d\}$.*

2.1. *If $|k_1| \neq |k_2|$, for $d = 1, 2$, then the number $z = m(k)$ is a simple eigenvalue of the operator $h_\mu(k)$.*

2.2. *If $|k_1| = |k_2|$, there exist $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 \in \{1, 2, \ldots, 3^d\}$ such that the operator $h_{\mu_{l_i}^0(k)}(k)$, $i = \overline{1, 5}$, has an eigenvalue at $z = m(k)$ with multiplicity*

$$\sum_{l_i} \alpha_{l_i}(\mu_{l_i}^0(k); k), \quad i = \overline{1, 5},$$

$$\mu_{l_1}^0(k) = \mu_{l_2}^0(k) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2 s_i(s) ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}, \quad \mu_{l_3}^0(k) = \mu_{l_4}^0(k) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos^2 s_i \sin^2 s_j(s) ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j,$$

$$\mu_{l_5}^0(k) = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{\sin^2 s_1 \sin^2 s_2(s) ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}.$$

We set

$$\mu_{\min}^0(k) = \min\{\mu_l^0(k)\}, \quad \mu_{\max}^0(k) = \max\{\mu_l^0(k)\}, \quad l = 1, 2, \ldots, 3^d.$$

Remark. By the item 1 of the Theorem 2, if $\mu < \mu_{\min}^0(k)$ (resp. $\mu > \mu_{\max}^0(k)$) then the operator $h_\mu(k)$ has an eigenvalue of multiplicity 2^d (resp. 3^d) (counting multiplicities) lying to the left of the essential spectrum. If $\mu > \mu_{\max}^0(k)$ and $\varphi_l(\mathbf{0}) \neq 0$ (resp. $\varphi_l(\mathbf{0}) = 0$), $l = 1, 2, \ldots, 3^d$, then the operator $h_\mu(k)$ has an eigenvalue of multiplicity 2^d (resp. $3^d - 2^d$) (counting multiplicities) lying to the left of the essential spectrum.

References

1. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978.
2. *Muminov M.I., Khurramov A.M.* Spectral properties of a two-particle Hamiltonian on a lattice, Theor. Math. Phys., **177** (3), 2013, 482–496.

3. *Lakaev S.N., Bozorov I.N.* The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice, Theoret. and Math. Phys., **158** (3), 2009, 360–376.

4. *Bozorov I.N., Khurramov A.M.* On the number of eigenvalues of the lattice model operator in one-dimensional case, Lobachevskii J. Math., **43** (2), 2022, 353–365.

5. *Muminov M.I., Khurramov A.M., Bozorov I.N.* Conditions for the existence of bound states of a two-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice, Nanosystems: Phys. Chem. Math., **13** (3), 2022, 237–244.

First Schur complement corresponding to a lattice spin-boson model with at most two photons

[1]**Dilmurodov E.**, [2]**Rasulov T.**

[1,2] *Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

[1,2] *Bukhara branch of the Institute of Mathematics, Bukhara, Uzbekistan*

e-mail: elyor.dilmurodov@mail.ru[1], rth@mail.ru[2]

Let $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ be the d-dimensional torus, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ be the set of all complex numbers, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{sym}}((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)$ be the Hilbert space of square integrable (complex) symmetric functions defined on $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2$ and $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

We consider a lattice spin-boson Hamiltonian $\mathcal{A}$ with most two photons. Then [1] the operator $\mathcal{A}$ act on $\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}$ and has the 3×3 tridiagonal block operator matrix representation

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix},$$

where matrix elements $A_{ij}, i,j = 0,1,2, i \le j$ are defined by

$$\mathcal{A}_{00} f_0^{(\mathrm{s})} = \mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})}, \quad \mathcal{A}_{01} f_1^{(\mathrm{s})} = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1^{(-\mathrm{s})}(t)dt,$$

$$(\mathcal{A}_{11} f_1^{(\mathrm{s})})(p) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(p)) f_1^{(\mathrm{s})}(p), \quad (\mathcal{A}_{12} f_2^{(\mathrm{s})})(p) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(s) f_2^{(-\mathrm{s})}(p,t)dt,$$

$$(\mathcal{A}_{22} f_2^{(\mathrm{s})})(p,q) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(p) + w(q)) f_2^{(\mathrm{s})}(p,q), \quad f = \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}; \mathrm{s} = \pm\} \in \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{H}.$$

Here $\mathrm{s} = \pm$, $\varepsilon > 0$, the dispersion $w(\cdot)$ is a continuous function on $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$; $v(\cdot)$ is a real-valued continuous function on $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$; the coupling constant $\alpha > 0$ is an arbitrary.

To study the spectral properties of $\mathcal{A}$ we introduce the following two bounded self-adjoint operators $\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s} = \pm$, which acts in $\mathcal{H}$ as

$$\mathcal{A}^{(\mathrm{s})} := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} & 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathcal{A}}_{12} \\ 0 & \widehat{\mathcal{A}}_{12}^* & \widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix}$$

with the entries

$$\widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} f_0 = \mathrm{s}\varepsilon f_0, \quad \widehat{\mathcal{A}}_{01} f_1 = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1(t)dt,$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} f_1)(p) = (-\mathrm{s}\varepsilon + w(p)) f_1(p), \quad (\widehat{\mathcal{A}}_{12} f_2)(p) = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_2(p,t)dt,$$

$$(\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} f_2)(p,q) = (\mathrm{s}\varepsilon + w(p) + w(q)) f_2(p,q), \quad (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}.$$

For any $p \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ we define an analytic function $\Delta^{(\mathrm{s})}(p\,;\cdot)$ in $\mathbb{C} \setminus [\mathrm{s}\varepsilon + w(p); \mathrm{s}\varepsilon + M + w(p)]$ by

$$\Delta^{(\mathrm{s})}(p\,;z) := -\mathrm{s}\varepsilon + w(p) - z - \frac{\alpha^2}{2} \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{\mathrm{s}\varepsilon + w(p) + w(t) - z},$$

where

$$m := \min_{p\in\mathbb{T}^{\rm d}} w(p), \quad M := \max_{p\in\mathbb{T}^{\rm d}} w(p).$$

Let $\sigma^{(\rm s)}$ be the set of all complex numbers $z \in \mathbb{C}$ such that the equality $\Delta^{(\rm s)}(p\,;z) = 0$ holds for some $p \in \mathbb{T}^{\rm d}$. Then (see [2]) for the essential spectrum of $\mathcal{A}^{(\rm s)}$ we have

$$\sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}^{(\rm s)}) = \sigma^{(\rm s)} \cup [{\rm s}\varepsilon + 2m; {\rm s}\varepsilon + 2M].$$

Using the unitary equivalence of the operators $\mathcal{A}$ and $\operatorname{diag}\{\mathcal{A}^{(+)}, \mathcal{A}^{(-)}\}$ we describe the spectrum of the operator $\mathcal{A}$, see [1].

Lemma 1. We have $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}^{(+)}) \cup \sigma(\mathcal{A}^{(-)})$. Moreover,

$$\sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}) = \sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}^{(+)}) \cup \sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}^{(-)}); \quad \sigma_{\rm p}(\mathcal{A}) = \sigma_{\rm p}(\mathcal{A}^{(+)}) \cup \sigma_{\rm p}(\mathcal{A}^{(-)}).$$

Next, we represent the space $\mathcal{H}$ as a direct sum of two Hilbert spaces $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$, that is, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{01} \oplus \mathcal{H}_2$. Then the first Schur complement of the operator $\mathcal{A}^{(\rm s)}$ with respect to this decomposition (see [3]) is defined as

$$S^{(\rm s)}(z) : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \quad z \in \rho(\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\rm s)});$$
$$S^{(\rm s)}(z) := \begin{pmatrix} \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\rm s)} & \widehat{\mathcal{A}}_{01} \\ \widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*} & \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\rm s)} \end{pmatrix} - z - \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{\mathcal{A}}_{12} \end{pmatrix} (\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\rm s)} - z)^{-1} (0 \;\; \widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*}).$$

Define

$$S_{00}^{(\rm s)}(z) := \widehat{\mathcal{A}}_{00}^{(\rm s)} - z, \quad S_{01}^{(\rm s)}(z) := \widehat{\mathcal{A}}_{01};$$
$$S_{10}^{(\rm s)}(z) := \widehat{\mathcal{A}}_{01}^{*}, \quad S_{11}^{(\rm s)}(z) := \widehat{\mathcal{A}}_{11}^{(\rm s)} - z - \widehat{\mathcal{A}}_{12}(\widehat{\mathcal{A}}_{22}^{(\rm s)} - z)^{-1}\widehat{\mathcal{A}}_{12}^{*}.$$

Then the operator $S^{(\rm s)}(z)$ has form

$$S^{(\rm s)}(z) = \begin{pmatrix} S_{00}^{(\rm s)}(z) & S_{01}^{(\rm s)}(z) \\ S_{10}^{(\rm s)}(z) & S_{11}^{(\rm s)}(z) \end{pmatrix}.$$

For convenience we represent the operator $S_{11}^{(\rm s)}(z)$ as a difference of two operators

$$S_{11}^{(\rm s)}(z) := D^{(\rm s)}(z) - K^{(\rm s)}(z),$$

where the operators $D^{(\rm s)}(z)$, $K^{(\rm s)}(z) : L_2(\mathbb{T}^{\rm d}) \to L_2(\mathbb{T}^{\rm d})$ are defined by

$$(D^{(\rm s)}(z)f)(p) = \Delta^{(\rm s)}(p\,;z)f(p); \quad (K^{(\rm s)}(z)f)(p) = \frac{\alpha^2 v(p)}{2} \int_{\mathbb{T}^{\rm d}} \frac{v(t)f(t)dt}{{\rm s}\varepsilon + w(p) + w(t) - z}.$$

Since for any fixed $z \in \mathbb{R} \setminus [{\rm s}\varepsilon + 2m, {\rm s}\varepsilon + 2M]$ the kernel of the integral operator $K^{(\rm s)}(z)$ is a continuous on $(\mathbb{T}^{\rm d})^2$, it is a Hilbert-Schmidt operator. By the Weyl theorem on the invariance of the essential spectrum under compact perturbations and by the continuity of the function $\Delta^{(\rm s)}(\cdot\,;z)$ as $z \in \mathbb{R} \setminus [{\rm s}\varepsilon + 2m, {\rm s}\varepsilon + 2M]$ on the compact set $\mathbb{T}^{\rm d}$ we obtain

$$\sigma_{\rm ess}(S^{(\rm s)}(z)) = \operatorname{Ran}(\Delta^{(\rm s)}(\cdot\,;z)).$$

Proposition 1. The following equality holds:

$$\sigma(\mathcal{A}^{(\rm s)}) \setminus [{\rm s}\varepsilon + 2m, {\rm s}\varepsilon + 2M] = \sigma(S^{(\rm s)}).$$

Proposition 2. $\lambda_0 \in \sigma_{\rm disc}(\mathcal{A}^{(\rm s)})$ if and only if $0 \in \sigma_{\rm disc}(S^{(\rm s)}(\lambda_0))$. Moreover, the eigenvalues λ_0 and 0 have the same multiplicity.

Let us denote by $N_{(a,b)}(\mathcal{A}^{(\rm s)})$ the number of eigenvalues of $\mathcal{A}^{(\rm s)}$ lying in $(a, b) \subset \mathbb{R} \setminus \sigma_{\rm ess}(\mathcal{A}^{(\rm s)})$.

Proposition 3. For any $\lambda < E^{(\mathrm{s})}_{\min} := \min \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})})$ the equality holds

$$N_{(-\infty;\lambda)}(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}) = N_{(-\infty;0)}(S^{(\mathrm{s})}(\lambda)).$$

Remark 1. In the same manner we can see that for all $\lambda > E^{(\mathrm{s})}_{\max} := \max \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})})$ the inclusion $\sigma_{\mathrm{ess}}(S^{(\mathrm{s})}(\lambda)) \subset (-\infty, 0)$ holds. Moreover, the equality

$$N_{(\lambda,\infty)}(\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}) = N_{(0,\infty)}(S^{(\mathrm{s})}(\lambda))$$

holds for any $\lambda > E^{(\mathrm{s})}_{\max}$.

From Proposition 3 one can conclude that for any $\lambda < \min \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A})$ the equality

$$N_{(-\infty;\lambda)}(\mathcal{A}) = N_{(-\infty;0)}(S^{(+)}(\lambda)) + N_{(-\infty;0)}(S^{(-)}(\lambda))$$

holds.

References

1. *M. Muminov, H. Neidhardt, T. Rasulov.* On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case, J. Math. Phys., 56 (2015), 053507

2. *S.N. Lakaev, T.Kh. Rasulov.* A model in the theory of perturbations of the essential spectrum of multi-particle operators, Math. Notes. **73**:4 (2003), pp. 521–528.

3. *C. Tretter.* Spectral theory of block operator matrices and applications. Imperial College Press, 2008.

On spectrum of convolution operator with potential

[1] **Elena Zhizhina**

[1] *Institute for Information Transmission Problem (Kharkevich Institute) of RAS, Moscow, Russia*

e-mail: ejj@iitp.ru

In my talk I present results of our paper [1] on the spectral properties of a bounded self-adjoint operator in $L_2(R^d)$ being the sum of a convolution operator with an integrable convolution kernel and an operator of multiplication by a continuous potential vanishing at infinity. We study both the essential and the discrete spectra of this operator. It is shown that the essential spectrum of the sum is the union of the essential spectrum of the convolution operator and the image of the potential. We then provide a number of sufficient conditions for the existence of discrete spectrum and obtain lower and upper bounds for the number of discrete eigenvalues. We also compare the spectral properties of the operators considered in this work with those of classical Schrödinger operators, and discuss the connection of the spectral problem with the so-called contact model in continuum [2].

References

1. *Denis I. Borisov, Andrey L. Piatnitski, Elena A. Zhizhina*, On spectra of convolution operators with potentials, JMAA (Journal of mathematical analysis and applications), 2023, Vol. **517**(1), 126568; http://arxiv.org/abs/2201.04511, 13 January 2022.

2. *Kondratiev Yu., Molchanov S., Pirogov S., Zhizhina E.*, On ground state of some non local Schrodinger operator, *Applicable Analysis*, **96**(8), 1390–1400, 2017.

Diskret Hardi tengsizligiga oid ba'zi natijalar

[1]Eshimova M. [2] Ismatov N. [3]Eliyeva F.

[1] *O'zFA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Toshkent 100174, Uzbekistan*

e-mail: eshimova_math@mail.ru

[2] *Jizzax davlat pedagogika universiteti, Jizzax 130100, Uzbekistan,*

e-mail: ismatov@gmail.ru

[3] *Buxoro davlat universiteti, Buxoro 200114, Uzbekistan,*

e-mail: eliyevaferuza@gmail.ru

p va q haqiqiy sonlar, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ nomanfiy sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Ixtiyoriy $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ nomanfiy ketma-ketlik uchun quyidagi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)^{q} u_n\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^p v_n\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

diskret Hardi tengsizligi bajarilishi uchun $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklarga qo'yiladigan zarur va yetarli shartlar oilasini topish masalasini ko'rib chiqamiz. $1 < p \leq q < \infty$ holda quyidagi

$$A_1 := \sup_{n\in N}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

$$A_2 := \sup_{n\in N}\left(\sum_{k=1}^{N} v_k^{1-p'}\right)^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{N} u_k\left(\sum_{n=1}^{k} v_k^{1-p'}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

$$A_3 := \sup_{n\in N}\left(\sum_{k=N}^{\infty} u_k\right)^{-\frac{1}{q'}}\left(\sum_{k=N}^{\infty} v_k^{1-p'}\left(\sum_{n=k}^{\infty} u_n\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

shartlarning ixtiyoriy birining bajarilishi, $0 < p \leq 1, p \leq q < \infty$ holda

$$A_4 := \sup_{n\in N}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{1}{q}} v_n^{-1/p} < \infty,$$

$1 < p < \infty, 0 < q < p, 1/r = 1/q - 1/p$ holda

$$A_5 := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{r}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{r}{p'}} u_n\right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

$q < p = 1$ holda

$$A_6 := \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{q/(1-q)} \max_{1\leq k\leq n} v_k^{q/(q-1)}\right) < \infty,$$

$0 < q < 1 < p < \infty, 1/r = 1/q - 1/p$ holda esa

$$A_7 := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{r}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty$$

shart (1) Hardi tengsizligi o'rinli bo'lishi uchun zarur va yetarlidir[3]. Bundan tashqari, [2] ishda (1) tengsizlik bajarilishi uchun parametrga bog'liq bir qator ekvivalent shartlar keltirilgan, ya'ni, agar $1 < p \leq q < \infty$ bo'lsa, (1) Hardi tengsizligining o'rinli bo'lishi quyidagi shartlarning ixtiyoriy birining bajarilishiga ekvivalentdir:

$$A_1(s) := \sup_{N\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{N} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{s-1}{p}}\left(\sum_{n=N}^{\infty} u_n\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{q(p-s)}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,\ 1 < s \leq p, \tag{2}$$

$$A_2(s) := \sup_{N\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{N} v_k^{1-p'}\right)^{-s}\left(\sum_{k=1}^{N} u_k\left(\sum_{n=1}^{k} v_n^{1-p'}\right)^{q\left(\frac{1}{p'}+s\right)}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,\ 1 < s \leq \frac{1}{p}, \tag{3}$$

$$A_3(s) := \sup_{N\geq 1}\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)^{\frac{s-1}{q'}}\left(\sum_{n=1}^{N} v_n^{1-p'}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{p'(q'-s)}{q'}}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,\ 1 < s \leq q', \tag{4}$$

$$A_4(s) := \sup_{N\geq 1}\left(\sum_{n=N}^{\infty} u_n\right)^{-s}\left(\sum_{n=N}^{\infty} v_n^{1-p'}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{p'\left(\frac{1}{q}+s\right)}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,\ 0 < s \leq \frac{1}{q'}. \tag{5}$$

Xususan, $A_1(p) = A_3(q') = A_1$, $A_2(\frac{1}{p}) = A_2$ va $A_4(\frac{1}{q'}) = A_3$.

Biz ushbu ishda (1) Hardi tengsizligi oʻrinli boʻlishiga ekvivalent boʻlgan (2)-(5) parametrga bogʻliq shartlar oilasini kengaytirib, qushimcha ravishda oʻzaro ekvivalent boʻlgan yangi oltita shartlarni keltiramiz.

Teorema. $1 < p \leq q < \infty, 0 < s < \infty$ *boʻlsin. (1) Hardi tengsizligi barcha* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, f_n \geq 0$ *da oʻrinli boʻlishi uchun quyidagi shartlarning ixtiyoriy birining bajarilishi zarur va yetarlidir:*

$$A_5(s) := \sup_{N\geq 1}\left(\sum_{k=N}^{\infty} u_k\right)^{-s}\left(\sum_{k=N}^{\infty} u_k\left(\sum_{n=1}^{k} v_n^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'(1+qs)}}\right)^{\frac{1}{q}+s} < \infty,\ 0 < s \leq \frac{1}{q'},$$

$$A_6(s) := \sup_{N\geq 1}\left(\sum_{n=1}^{N} v_n^{1-p'}\right)^{-s}\left(\sum_{k=1}^{N} v_k^{1-p'}\left(\sum_{n=k}^{\infty} u_n\right)^{\frac{p'}{q(1+sp')}}\right)^{\frac{1}{p'}+s} < \infty,\ 0 < s \leq \frac{1}{p},$$

$$A_7(s) := \sup_{N\geq 1}\left(\sum_{k=N}^{\infty} u_k\right)^{s}\left(\sum_{k=1}^{N} u_k\left(\sum_{n=1}^{k} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'(1-qs)}}\right)^{\frac{1}{q}-s} < \infty,\ 1 < s \leq \frac{1}{q},$$

$$A_8(s) := \sup_{N\geq 1}\left(\sum_{k=N}^{\infty} u_k\right)^{s}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\left(\sum_{n=1}^{k} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{q}{p'(1-qs)}}\right)^{\frac{1}{q}-s} < \infty,\ s \geq \frac{1}{q},$$

$$A_9(s) := \sup_{N\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{N} v_k^{1-p'}\right)^{s}\left(\sum_{k=N}^{\infty} v_k^{1-p'}\left(\sum_{n=k}^{\infty} u_k\right)^{\frac{p'}{q(1-sp')}}\right)^{\frac{1}{p'}-s} < \infty,\ 1 < s \leq \frac{1}{p'}$$

$$A_{10}(s) := \sup_{N\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{N} v_k^{1-p'}\right)^{s}\left(\sum_{k=1}^{N} v_k^{1-p'}\left(\sum_{n=k}^{\infty} u_k\right)^{\frac{p'}{q(1-sp')}}\right)^{\frac{1}{p'}-s} < \infty,\ s \geq \frac{1}{p'}.$$

Bundan tashqari, (1) tengsizlikning eng yaxshi konstantasi uchun $C \approx A_i(s), i = 1, 2, ..., 10$ *oʻrinli.*

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E.* The Hardy inequality-about its history and some related results, Pilsen, 2007 y.
2. *Okpoti C. A., Persson L.E., Wedestig A.* Scales of weight characterizations for the discrete Hardy and Carleman type inequalities, In: Proc. Conf. "Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis FSDONA 2004, Math.Inst.Acad.Sci. Czech Republic, Prague 2005, 236-258.
3. *Bennett G.* Some elementary inequalities III. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 42(166):149–174, 1991.
4. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities.—-Cambridge University Press: Cambridge, Chap. 9, 1952.

Hardi operatori normasi uchun baholar

[1]Eshimova M., [2] Kuliyeva G., [3] Nurullayeva M.
[1] *O'zFA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Toshkent 100174, O'zbekiston*
e-mail: eshimova_math@mail.ru
[2] *Toshkent Axborot Texnologiyalari Universiteti Samarqand filiali, Samarqand 140100, O'zbekiston*
e-mail: kulievag@mail.ru
[3] *Buxoro davlat universiteti, Buxoro 200114, O'zbekiston,*
e-mail: nurullayeva.f@gmail.ru

Faraz qilaylik $(a,b) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ixtiyoriy interval bo'lsin. Berilgan $1 < p, q < \infty$ va u, v vazn funksiyalari uchun quyidagi vaznli Lebeg fazolarini

$$L^p(u) = \{f : \|f\|_{p,v} := \left(\int_a^b |f(x)|^p v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$

$$L^q(u) = \{f : \|f\|_{q,u} := \left(\int_a^b |f(x)|^q u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\},$$

hamda, Hardi operatorini kiritaylik

$$H : L^p(v) \to L^q(u), \ \ (Hf)(x) := \int_a^x \ln^\alpha(x/t) f(t)dt, \tag{1}$$

bunda $\alpha \geq 0$, $x > t > 0$. Ushbu ishda (1) operatorning chegaralanganligi, ya'ni

$$\|Hf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v}$$

va uning normasi uchun baholar olish bilan shug'illanamiz.

Agar $\alpha = 0$ bo'lsa u holda (1) operator

$$(Hf)(x) := \int_a^x f(t)dt$$

ko'rinishni oladi, bu operatorga klassik Hardi operatori deyiladi. Bunday operatorlar o'tgan asrning o'rtalarida juda yaxshi o'rganilgan bo'lib, operatorning chegaralangan bo'lishi uchun zarur va yetarli shartlar barcha p va q uchun olingan. Bundan tashqari, operator normasi uchun turli baholar keltirilgan. Bu haqda to'liq ma'lumotlarni [1-3] adabiyotlarda ko'rish mumkin.

Agar $\alpha \neq 0$ bo'lsa u holda bunday operatorlarni o'rganishda birmuncha qiyinchiliklar paydo bo'ladi. (1) operatordagi $k(x,t) = \ln^\alpha(x/t)$ operatorning yadrosi deyiladi. Yadroning qulay tomoni shundaki, u birinchi argument bo'yicha o'suvchi va ikkinchi argument bo'yicha kamayuvchi funksiyadir. Bundan tashqari bu funksiya berilgan $(a,b) \times (a,b)$ to'plamda uzluksizdir. $k(x,t)$ funksiyaning mana shu xossalari Oynarov yadrosi shartlarini bajarilishini ta'minlaydi. Bunday operatorlarning chegaralanganligi masalasi o'tgan asrning oxirgi o'n yilliklarida o'rganila boshladi. Bu haqida, yetarlicha ma'lumotlar [1-2] adabiyotlarda berilgan.

Ushbu ishda bizlar $1 < p \leq q < \infty$ bo'lgan holni qaraymiz. Quyidagicha belgilashlar kiritaylik:

$$A_1 := \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b u(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x \ln^{\alpha p'}(x/t) v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}}$$

va

$$A_2 := \sup_{a<x<b} \left(\int_x^b \ln^{\alpha q}(t/x) u(t)dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^x v^{1-p'}(t)dt\right)^{\frac{1}{p'}},$$

bunda $p' = \frac{p}{p-1}$.

Teorema. *Faraz qilaylik,* $1 < p \leq q < \infty$ *va* $\alpha \geq 0$ *bo'lsin. U holda (1) operator chegaralangan bo'lishi uchun*

$$A_1 < \infty, \quad A_2 < \infty$$

shartlarning bajarilishi yetarli va zarurdir. Bundan tashqari (1) operatorning normasi uchun quyidagi baholar o'rinlidir:

$$A \leq \|H\| \leq X,$$

bu yerda X quyidagi nochiziqli algebraik tenglamaning yechimi

$$X^{q'} - 2^{\alpha-1} q^{\frac{1}{q-1}} (q')^{\frac{1}{q-1}} A^{\frac{1}{q-1}} X = 2^{\alpha-1} q^{\frac{1}{q-1}} (p')^{\frac{p'}{q'}} A^{q'}, \tag{2}$$

bunda $A = \max\{A_1, A_2\}$.

Izoh. *(2) tenglama yagona musbat yechimga ega, sababi, agar uni $F(X) = 2^{\alpha-1}$ deb yozsak, u holda*

$$F(x) = \frac{x^{q'}}{q^{\frac{1}{q-1}} (p')^{\frac{p'}{q'}} A^{q'} + q^{\frac{1}{q-1}} (q')^{\frac{1}{q-1}} A^{\frac{1}{q-1}} x}$$

funksiya $(0, \infty)$ yarim intervalda x ning uzluksiz va monoton o'suvchi funksiyasi, hamda $F(0) = 0$ va $F(\infty) = \infty$.

Misol. *$1 < p \leq q = 2$ bo'lsin. U holda (2) tenglama va uning musbat yechimi mos ravishda quyidagi ko'rinishda bo'ladi:*

$$X^2 - 2^{\alpha+1} AX = 2^{\alpha} (p')^{\frac{2}{p'}} A^2$$

va

$$X = \left(2^{\alpha} + \sqrt{2^{2\alpha} + 2^{\alpha} (p')^{\frac{2}{p'}}}\right) A.$$

Natija. Faraz qilaylik $1 < p \leq q = 2$ bo'lsin. U holda (1) operator uzluksiz bo'lishi uchun mos

$$A_1 < \infty, \quad A_2 < \infty$$

shartlarning bajarilishi yetarli va zarurdir. Bundan tashqari operator normasi uchun quyidagi baholar

$$A \leq \|H\| \leq \left(2^{\alpha} + \sqrt{2^{2\alpha} + 2^{\alpha} (p')^{\frac{2}{p'}}}\right) A$$

o'rinlidir.

Adabiyotlar

1. *Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E.* The Hardy inequality-about its history and some related results, Pilsen, 2007 y.
2. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type, World scientific: New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2003.
3. *Bennett G.* Some elementary inequalities III. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 42(166):149–174, 1991.
4. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. –Cambridge University Press: Cambridge, Chap. 9, 1952.

Non-tangential boundary values for $A(z)-$analytic functions

Husenov B.
Bukhara State University (Muhammad Ikbal street, 705018, Bukhara, 11, Uzbekistan),
e-mail: husenovbehzod@mail.ru

Let $A(z)$ be an antianalytic function, i. e. $\frac{\partial A}{\partial z}=0$ in the domain $D\subset\mathbb{C}$; moreover, let $|A(z)|\le C<1$ for all $z\in D$. The function $f(z)$ is said to be $A(z)-$analytic in the domain D if for any $z\in D$, the following equality holds:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}=A(z)\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

We denote by $O_A(D)$ the class of all $A(z)-$analytic functions defined in the domain D.

According to, the function

$$\psi\left(z;a\right)=z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(a;z)}\overline{A(\tau)}d\tau}$$

is an $A(z)-$analytic function.

The following set is an open subset of arbitrary convex domain D :

$$L\left(a;r\right)=\left\{\left|\psi\left(z;a\right)\right|=\left|z-a+\overline{\int\limits_{\gamma(a;z)}\overline{A(\tau)}d\tau}\right|<r\right\}.$$

For sufficiently small $r>0$, this set compactly lies in D (we denote this fact by $L(a;r)\subset\subset D$) and contains the point a. This set $L(a;r)$ is called the $A(z)-$lemniscate centered at the point a. The lemniscate $L(a;r)$ is a simply - connected set (see [2]).

Hardy classes H^p were introduced by F. Riesz's. The Hardy class $H^p_A, p>0$ for $A(z)$-analytic functions is given in [4]. Before we will introduce this class for $A(z)$-analytic functions in the case $p=1$.

Definition 1. *$f(z)\in O_A(L(a;r))$ is said to be in H^1_A, if*

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho}|f(z)||dz+A(z)d\bar z| \tag{2}$$

is bounded in lemniscate $L(a;r)$, where $\rho<r, z\in L(a;r)$.

Let $f=u+iv$.

Theorem 1. (see [3]). *The real part of the $A(z)-$analytic functions of $f(z)\in O_A(D)$ satisfies equation*

$$\Delta_A u=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left((1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial \bar z}-2A\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial \bar z}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left((1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z}-2\bar A\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right)\right)=0 \tag{3}$$

in the domain of D.

In connection with Theorem 1, it is natural to define the $A(z)-$harmonic function as follows.

Definition 2 (see [3]). *A double differentiable function $u\in C^2(D),\quad u:D\to R^1$ is called $A(z)-$harmonic in the D domain if the D domain if it satisfies the differential equation (3).*

The class of $A(z)-$harmonic functions in the domain of D is denoted as $h_A(D)$. Thus, the real part and hence the imaginary part, of the $A(z)-$harmonic function in the domain of D. The inverse theorem is also true for simply connected domains.

Theorem 2. (see [3]). *If the function is $u(z) \in h_A(D)$, where D is a simply connected domain, then $f \in O_A(D) : u = Re\, f$.*

For $A(z)-$analytic and $A(z)-$harmonic functions, the following Dirichlet problem is naturally considered:

Dirichlet problem. *A bounded domain of $G \subset D$ is given and a continuous function of $\omega(\zeta)$ is set at the boundary of ∂G. It is required to find $A(z)-$harmonic in the domain of G, continuous on the closure of $\bar{G}$ the function of $u(z) \in h_A(G) \cap C(\bar{G}) : u|_{\partial G} = \omega$.*

Theorem 3. (see [3]) (an analogue of the Poisson formula for $A(z)-$harmonic functions). *If the $\omega(\zeta)$ function is continuous on the boundary of the lemniscate of $L(a;r) \subset D$, then the function*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\psi(\zeta;a)|=r} \omega(\zeta) \frac{r^2 - |\psi(z;a)|^2}{|\psi(\zeta;z)|^2} |d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}| \tag{4}$$

is the solution of the Dirichlet problem in $L(a;r)$.

The $f(\zeta;z) = \frac{\psi(a;\zeta)+\psi(a;z)}{\psi(z;\zeta)}$ function is an $A(z)-$analytic function for $z \in L(a;r)$, where $\zeta \in \partial L(a;r)$. Then

$$P(\zeta;z) = \frac{1}{2\pi r}(f(\zeta;z) + \bar{f}(z;\zeta)) = \frac{1}{2\pi r}\left(\frac{\psi(a;\zeta)+\psi(a;z)}{\psi(a;\zeta)-\psi(a;z)} + \frac{\bar{\psi}(a;\zeta)+\bar{\psi}(a;z)}{\bar{\psi}(a;\zeta)-\bar{\psi}(a;z)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\left(\frac{|\psi(a;\zeta)|^2 - |\psi(a;z)|^2}{|\psi(z;\zeta)|^2}\right) = \frac{1}{2\pi r}\left(\frac{r^2 - |\psi(a;z)|^2}{|\psi(z;\zeta)|^2}\right).$$

Formula (4) is called an analogue of the Poisson formula for $A(z)-$harmonic functions.

The Hardy class $H_A^p, p > 0$ for $A(z)$-analytic functions is given in [4]. Initially, we will introduce this class for also $A(z)$-harmonic functions in the case $p > 1$.

Statement 1. *$u(z) \in h_A(L(a;r))$ is said to be in H_A^p, if the average integral*

$$\left(\frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho} |u(z)||dz + A(z)d\bar{z}|\right)^{\frac{1}{p}} \leq T \tag{5}$$

is bounded in lemniscate $L(a;r)$, where $T > 0$.

Now, we introduce an angular limit for $A(z)-$analytic functions.

Notation 1. *$u(z)$ is called the (non-tangential or angular $\sphericalangle$) boundary value function for $A(z)-$harmonic function $u(z)$, we frequently write*

$$u(\zeta) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ \sphericalangle}} u(z), \tag{6}$$

$L(a;R)$ lemniscate is almost everywhere.

Now we give the following theorem.

Theorem 4. *Let $u(z) \in H^p(L(a;R)), p > 1$ and let $u(z)$ be $A(z)-$harmonic function this lemniscate $L(a;R)$. Then, for almost all $\zeta \in \partial L(a;R)$, $u(z)$ tends to a finite limit, say $u(\zeta)$, as $\underset{\sphericalangle}{z \to \zeta}$*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\psi(\zeta;a)|=r} u(\zeta) P(\zeta;z) |d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}|, \tag{7}$$

where $z \in L(a;R)$.

In future, whenever we have a function $u(z) \in h_A(L(a;R))$, satisfying the hypothesis of the above theorem (for class $H_A^p, p > 1$), we assume it to be automatically extended a. e. to boundary lemniscate $\partial L(a;R)$ in the manner described.

References

1. *P.Koosis.* Introduction to H^p spaces, United Kingdom. Cambridge University Press, 1998.
2. *A.Sadullayev, N.M.Zhabborov.* On a class of A-analytic functions, J. Siberian Fed. Univ., no. 3(9), 2016, 374-383 p.
3. *N.M.Zhabborov, T.U.Otaboyev and Sh.Ya.Khursanov.* Schwarz inequality and Schwarz formula for A-analytic functions, J. Modern math. Fundamental directions., no. 4(64), 2018, 637-649 p. (Russian)
4. *B.E.Husenov.* Generalization of the Hardy class for $A(z)-$analytic functions, J. Scientific Reports of Bukhara State Univ., no. 4(86), 2021, 29-46 p.

Estimates for convolution operators

[1]Ikromov I. A., [2] Ikromova D. I.

[1] *Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, Samarkand , Uzbekistan,*
e-mail: i.ikromov@mathinst.uz

[2] *Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: ikromova-89@mail.ru

In this paper we consider the convolution operator M_k with oscillatory kernel given by :

$$M_k = F^{-1}[e^{i\varphi(\xi)}a_k]F,$$

where F is the Fourier transform operator, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}), \varphi > 0$, besides φ is a homogeneous function of order one, $a_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ is a classical symbol of PDO of order $-k$.

Problem. *Let $1 \leq p \leq 2$ be a fixed number. We consider the problem: find a number $k(p)$ such that the onepamop $M_k : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ is bounded for $k > k(p)$, where p' is a conjugate exponent, e.g. $1/p + 1/p' = 1$.*

Note that if $a(\xi) = |\xi|^{-k}$ with $0 < k < n$ and $\varphi \equiv 0$ then the problem is reduced to Hardy-Littlewood-Sobolev's inequality. Then if $k = 2n(1/p - 1/2)$ then the operator is bounded from $L^p(\mathbb{R}^n)$ to $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Moreover, if a is a symbol of PDO and $\varphi \equiv 0$ then we dealt with $L^p \mapsto L^{p'}$ boundedness problem for the pseudo-differential operators. Note that, the oscillation factor gain better estimate for the order k of the symbol a.

It turns out that the number $k(p)$ depends on the geometric properties of the following smooth hypersurface:

$$\Sigma = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \varphi(\xi) = 1\}.$$

Further, we use notation:

$$k(p,\Sigma) := \inf_{k>0}\{k > 0 : M_k : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n) \quad \text{is bounded}\}.$$

M. Sugimoto [2] consider the problem for the case when $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ is a smooth hypersurface having at least one non-vanishing principal curvature at every point and obtained an upper bound for the number $k(p,\Sigma)$. We consider more general surfaces in $\mathbb{R}^3$ for which both principal curvatures can vanish and obtain an upper bound for $k(p,\Sigma)$ in terms of a height of smooth functions improving the results proved by M. Sugimoto for the case $n = 3$. Moreover, we obtain the exact value of $k(p,\Sigma)$ for some partial classes of surfaces.

Since Σ is a compact hypersurface, following M. Sugimoto it is enough to consider the local version of the problem. More, precisely we will assume that the amplitude function $a_k(\xi)$ is concentrated in a sufficiently small conic neighborhood Γ of a fixed point $v \in S^2$ (where S^2 is a unit sphere centered at the origin of the space $\mathbb{R}^3$) and $\varphi(\xi) \in C^\infty(\Gamma)$.

Also, for the sake of being definite we will assume $v = (0, 0, 1)$ and $\varphi(0, 0, 1) = 1$. Thus, in a sufficiently small neighborhood of the point v the hypersurface Σ is given as the graph of a smooth function:

$$\Sigma \cap \Gamma = \{\xi \in \Gamma : \varphi(\xi) = 1\} = \{(\xi_1, \xi_2), \xi_3 = 1 + \phi(\xi_1, \xi_2), (\xi_1, \xi_2) \in U\},$$

where $U \subset \mathbb{R}^2$ is a sufficiently small neighborhood of the origin and, $\phi \in C^\infty(U)$ is a smooth function satisfying the conditions $\phi(0,0) = 0, \nabla\phi(0,0) = 0$ (compare with [2]).

If P is any given polynomial which is homogeneous, then we denote by

$$n(P) := ord_{S^1} P$$

the maximal order of vanishing of P along the unit circle S^1.

Also we use notion of height introduced by A.N. Varchenko [3]. We introduce the necessary definitions: Let ϕ be a smooth real-valued function defined in a neighborhood of the origin. Consider the associated Taylor series

$$\phi(\xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha$$

of ϕ centered at the origin. Where $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2$, $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}$.

The set

$$\mathcal{T}(\phi) := \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^2 \setminus \{0\} : c_\alpha = \frac{1}{\alpha_1!\alpha_2!}\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\phi(0) \neq 0\}$$

will be called the Taylor support of ϕ at the origin. The Newton polyhedron or polygon $\mathcal{N}(\phi)$ of ϕ at the origin is defined to be the convex hull of the union of all the octants $\alpha + \mathbb{R}_+^2$ in $\mathbb{R}^2$, with $\alpha \in \mathcal{T}(\phi)$. We use coordinates $t := (t_1, t_2)$ in the space $\mathbb{R}^2 \supset \mathcal{N}(\phi)$.

The Newton distance in the sense of Varchenko [3], or shorter distance, $d = d(\phi)$ between the Newton polyhedron and the origin is given by the coordinate d of the point (d, d) at which the bi-sectrix $t_1 = t_2$ intersects the boundary of the Newton polyhedron. The height of the smooth function ϕ is defined by [3]:

$$h(\phi) := sup\{d_y\}, \tag{1}$$

where the supremum is taken over all local coordinate systems y at the origin (it means the smooth change of variables in a neighborhood of the origin which preserves the origin), and where d_y is the distance between the Newton polyhedron and the origin in the coordinates y.

We use the following Proposition [1]:

Proposition. Assume that $\phi(0,0) = 0$, $\nabla\phi(0,0) = 0$ and also $D^2\phi(0,0) = 0$ or equivalently $\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\phi(0,0) = 0$ for any α with $|\alpha| \leq 2$. Then the following statements hold:
a) If P_3 the homogeneous part of degree 3 of the Taylor polynomial of ϕ satisfies the condition $n(P_3) < 3$, then, ϕ after possible linear change of variables can be written in the following form on a sufficiently small neighborhood of the origin:

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = b(\xi_1, \xi_2)(\xi_2 - \psi(\xi_1))^2 + b_0(\xi_1), \tag{2}$$

where b, b_0, ψ are smooth functions, and $b(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 b_1(\xi_1, \xi_2) + \xi_2^2 b_2(\xi_2)$, here b_1 and b_2 are smooth functions, with $b_1(0,0) \neq 0$, and also $\psi(\xi_1) = \xi_1^m\omega(\xi_1)$ with $m \geq 2$ and $\omega(0) \neq 0$ unless ψ is a flat function.

Moreover, either

(ai) b_0 is flat, (singularity of type D_∞), and $h(\phi) = 2$,

or

(aii) $b_0(\xi_1) = \xi_1^n\beta(\xi_1)$ with $n \geq 3$, where $\beta(0) \neq 0$ (singularity of type D_{n+1}) and $h(\phi) = \frac{2n}{n+1}$.
In these cases we say that ϕ is of type D.

b) If $n(P_3) = 3$ and $h(\phi) < 2$, then, ϕ after a possible linear transformation it can be written as follows:

$$\phi(\xi_1, \xi_2) = b_3(\xi_1, \xi_2)(\xi_2 - \xi_1^m\omega(\xi_1))^3 + \xi_2\xi_1^{k_1}b_1(\xi_1) + \xi_1^{k_0}b_0(\xi_1),$$

where b_3, b_1, b_0, ω are smooth functions. Moreover, $b_3(0,0) \neq 0$ and either
(bi) $k_0 = 4$ with $b_0(0) \neq 0$ and $k_1 \geq 4$ this E_6 type singularity and $h(\phi) = \frac{12}{7}$;
(bii) $k_1 = 3$ with $b_1(0) \neq 0$ and $k_0 \geq 5$ this is E_7 type singularity and $h(\phi) = \frac{9}{5}$;
(biii) $k_0 = 5$ with $b_0(0) \neq 0$ and $k_1 \geq 4$ this is E_8 type singularity and $h(\phi) = \frac{15}{8}$.

In these cases we say that ϕ is of type E.

The main our result is the following:

Theorem. *If the smooth function ϕ defined by (2) satisfies the condition of Proposition and $1 \leq p \leq 2$ is a fixed number then for*

$$k > k_p := \left(6 - \frac{2}{h}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$$

the operator $M_k : L^p(\mathbb{R}^3) \mapsto L^{p'}(\mathbb{R}^3)$ is bounded. Moreover, in the case a) $2m + 2 \geq n$ and in the case b) $k(p, \Sigma) = k_p$.

Remark. Note that the condition $2m+2 \geq n$ corresponds to the linearly adapted coordinates system introduced in [1]. It means that in the relation (2) the "supremum"is attained in linear change of variables. So, there exists a linear change of variables y such that $d_y = h(\phi)$ under the condition $2m + 2 \geq n$. Moreover, if $2m + 2 < n$ then for any linear change of variables we have $d_y < h(\phi)$.

References

1. *Ikromov, I. A., Müller, D.* Fourier restriction for hypersurfaces in three dimensions and Newton polyhedra; *Annals of Mathematics Studies 194*, Princeton University Press, Princeton and Oxford 2016; 260 pp.
2. *Sugimoto M.* Estimates for Hyperbolic Equations of Space Dimension 3, Journal of Functional Analysi, 160, 382-407 (1998).
3. *Varchenko, A. N.,* Newton polyhedra and estimates of oscillating integrals. *Funktional Anal. Appl.*, 18 (1976), 175–196.

On the sharp estimates for maximal operators

[1]**Ikromov I.**, [2] **Barakayev A.**

[1] *V.I.Romanovsky Institute of Mathematics 15 university boulevard str., Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: ikromov1@rambler.ru

[2]*Samarkand state University, 15 university boulevard str., Samarkand, 140104 Uzbekistan*
e-mail: azamat1_9@mail.ru

Let $\mathbb{S}$ be a smooth hypersurface in $\mathbb{R}^{n+1}$ and let $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ be a smooth non-negative function with compact support. We consider the associated averaging operator A_t given by

$$A_t f(x) = \int\limits_S f(x - ty)\psi(y)d\sigma(y),$$

where $d\sigma$ denotes the surface measure on $\mathbb{S}$. Then, let $\mathbf{M}f(x)$ be associated maximal operator given by

$$\mathbf{M}f(x) = \sup_{t>0} |A_t f(x)|. \tag{1}$$

We investigate L^p-boundedness of $\mathbf{M}$, i.e., we would like to determine

$$\|\mathbf{M}f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p},$$

for all $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Defination 1. *The maximal function $\mathbf{M}$ is said to be bounded in L^p, if there exists such constant C_p that for any functions $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ holds following inequality*

$$\|\mathbf{M}f\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p},$$

where $\| \cdot \|_{L^p}$ -is norm of the space L^p.

E.Stein [1] proved that, if $\mathbb{S}$ is the Euclidean unit sphere in $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, then the corresponding spherical maximal operator (1) is bounded on $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$ for every $p > \frac{n+1}{n}$. Later the analogous result in demension $d = 2$ was proven by J.Bourgain [2]. The key property of spheres which allows to prove such results is the non-vanishing of the Gaussian curvature on spheres. The problem of boundedness of the maximal operators in L^p associated with hypersurfaces for which the Gaussian curvature vanishes at some points is actual. In [3], it is proved that, if $\mathbb{S}$ is convex hypersurface of finite linear type and $p \geq 2$ then the condition

$$d(x, H)^{-\frac{1}{p}} \in L^1_{loc}(\mathbb{S}) \tag{2}$$

is necessary and sufficient for the boundedness of the maximal operators in $L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, where H- is any hyperplane not passing through the origin and $d(x, H)$- is the distance from $x \in \mathbb{S}$ to H. Moreover, in [4], it is proved the necessity of condition (2). I.A.Ikromov, M.Kempe, D.Müller [5] proved that if $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ is a smooth hypersurface, then for $p > h \geq 2$ (where $h(\mathbb{S})$ is the hypersurface height introduced in the classical work by A.N. Varchenko [6]) the maximal operator is bounded. If $\mathbb{S}$ is an analytic hypersurface, then for $p \leq h$ the maximal operator is unbounded.

Let us $\mathbb{S} = \{(x, y, z(x, y))\} \subset \mathbb{R}^3$ be given surface and H its tangent plane at the origin. Denote by $d(Y, H)$ the distance from the point $Y := (x, y, z(x, y))$ of the surface to its tangent plane H. Moreover, let the surface $\mathbb{S}$ be given by the following formula in some neighborhood of the origin:

$$z(x, y) = (y - \psi(x))^2 + \varphi(x) + C,$$

where $c \neq 0$ is a constant $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ and $\varphi(x)$ is a convex function, and derivatives of all orders vanish at the origin, i.e. $0 = \varphi(0) = \varphi^{'}(0) = ...\varphi^n(0) = ...$. Moreover, let $\varphi^{''}(x) \geq 0$ for all $x \in U$. If there exists $x_1 > 0$ such that $\varphi'(x_1) = 0$, then for $x \in [0, x_1]$ we have: $\varphi'(x) = 0$ and therefore $\varphi(x) \equiv 0$ on the segment $[0, x_1]$. Next, it is easy to show that the maximal operator is unbounded in L^2. Similarly, if for some $x_2 < 0$ $\varphi'(x_2) = 0$, then the maximal operator is also unbounded in L^2. Therefore, in what follows, we will assume that for $x > 0$ $\varphi'(x) > 0$ and $\varphi'(x) < 0$ for $x < 0$. Thus, for each $u > 0$ we have $\varphi^{-1}(u) = \{z_1, z_2\}$, where $z_2 > 0$ and $z_1 < 0$. We give the following proposition, the proof of which follows from an analogue of G. Shulz's theorem [7](and also see [8])

Proposition 1. *Suppose $rankHess\Phi(0, 0) = 1$. Then, after changing the appropriate linear coordinates, the function Φ in a sufficiently small neighborhood of the origin can be written in the following form:*

$$\Phi(x, y) = b(x, y)(y - \psi(x))^2 + \varphi(x),$$

where b,φ and ψ are smooth functions, and $\psi(x) = cx^m + O(x^{m+1})$, where $c \neq 0$ and $m \geq 2$, and $b(0, 0) \neq 0$.

Proposition 2. *Let the function Φ be given in the form*

$$\Phi = b(x, y)(y - \psi(x))^2 + \varphi(x).$$

If the function Φ is convex and φ is a flat function , then the function ψ is also flat.

We formulate the main result of the paper in the form of the following theorem.

Theorem 1. *If $\mathbb{S}$ is a convex surface and the function φ is a flat function, then for the maximal operator $\mathbf{M}$ to be bounded in the space $L^2(\mathbb{R}^3)$ it is necessary and sufficient that the following condition be satisfied:*

$$\frac{1}{(d(Y, H))^{\frac{1}{2}}} \in L^1(\mathbb{S} \bigcap U).$$

References

1. *Stein E.M.* Maximal functions.I.Spherical means,// Proc.Nat. Acad. Sci.U.S.A. –1976.–73. 7. –P.2174–2175.

2. *Bourgain J.* Averages in the plane convex cuves and maximal operators// J.Anal.Math.,–1986.–47.–P.69-85.

3. *Iosevich A., Sawyer E.* Maximal Averages over surfaces.// Adv. in Math.,–1997.–132.–46.–P.119–187.

4. *Iosevich A., Sawyer E.* Oscillatory integrals and maximal averages over homogeneous surfaces//Duke Math.,–1996.–82.–1.–P.103–131.

5. *Ikromov I. A., Kempe M., Müller D.* Estimates for maximal functions assosiated to hypersurfaces in R^3 and related problems of harmonic analysis // Acta Math.,–2010.-204.–P.151-271

6. *Varchenko A.N.* Newton's polytopes and estimates of oscillating integrals.//Functional analysis and its applications,–1976.10, No3.–P.13–38.

7. *Schulz H.* Convex hypersurfaces of finite type and the asymptotics of their Fourier transforms.//Indiana Univ. Math. J. –1999. –40.–No4.–P.1267–1275.

8. *Ikromov I.A., Müller D.* Fourier Restriction for Hypersurfaces in Three Dimensions and Newton Polyhedra (AM-194)//Princeton University Press.–2016.

Hardy-Volterra operatori normasi uchun baholar

Ismatov N., Ismoilov M., Qodirova M.

Jizzax davlat pedagogika universiteti

Jizzax 130100, Uzbekistan,

e-mail: ismatov.normurod@mail.com, mirolimi@list.ru, islomovamunisa1998@gmail.com

Faraz qilaylik, $1 < p, q < \infty$ va u, v lar vazn funksiyalari bo'lsin, ya'ni (a, b) da aniqlangan o'lchovli musbat funksiyalar. $L_p(v)$ va $L_q(u)$ orqali vaznli Lebeg fazosilarini belgilaymiz:

$$L_p(v) := \{f : \|f\|_{p,v}^p := \int_a^b |f(t)|^p v(t)dt < \infty\}$$

va

$$L_q(u) := \{f : \|f\|_{q,u}^q := \int_a^b |f(t)|^q u(t)dt < \infty\}.$$

Ushbu ishda $L_p(v)$ fazoni $L_q(u)$ fazoga akslantiruvchi Hardy-Volterra operatorini

$$(Hf)(x) = \int_a^x k(x,t)f(t)dt \tag{1}$$

qaraymiz, bunda $k(x, t)$ operatorning yadrosi bo'lib u $(a, b) \times (a, b)$ da aniqlangan o'lchovli musbat funksiyadir.

(1) operatorning chegaralanganligi masalasi o'tgan asrning ohirgi o'n yilliklarida shiddat bilan o'rganila boshladi. Masalan, F.J. Martin-Reyes, E. Sawyer va V.D. Stepanovlar Riman-Liuvil kasr tartibli integral operatorini, ya'ni, (1) operator $k(x, t) = \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $\alpha \geq 1$ yadro bilan berilgan holni o'rganishgan, bunda $\Gamma(\alpha)$ Gamma funksiya. S.Bloom va R.Kerman, va R.Oinarov umumiyroq yadro bo'lgan holda, ya'ni, $k(x, t)$ uzluksiz nomanfiy funksiya bo'lib birinchi argument bo'yicha o'suvchi, ikkinchi argument bo'yicha kamyuvchi va shunday$C_1, C_2 \geq 1$ sonlar mavjudki ixtiyoriy $a < s \leq t \leq x < b$ uchlik uchun

$$C_1(k(x, t) + k(t, s)) \leq k(x, s) \leq C_2(k(x, t) + k(t, s))$$

o'rinli bo'lgan holda (1) ning chegaralangan bo'lishini o'rganishgan, bu haqda batafsil ma'lumotni [1-2] adabiyotlarda ko'rish mumkin. Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi yadroga *Oynarov yadrosi* deb ham ataladi.

Keltirilgan ishlarda avtorlar ko'proq e'tiborni (1) operatorning chegaralangan bo'lishi uchun yetarli va zaruriy shart olishga qaratishgan. Lekin, matematik fizika va differensial tenglamalar nazariyasida, spektral nazariyada operatorning normasi uchun baholar ham juda muhim hisoblnadi.

Ushbu ishda bizlar (1) operatorni $k(x,t) = (x-t)^\alpha, \alpha > 0$ holda qaraymiz, va bunda bizni shu operatorning normasi uchun baholar olish qiziqtiradi.

Ma'lumki, (1) operatorning vaznli Lebeg fazolarida chegaralanganligi quyidagicha yoziladi

$$\|Hf\|_{q,u} \leq C\|f\|_{p,v},$$

bunda $f \in L_p(v)$, C esa o'zgarmas sondir. Ohirgi tengsizlik, Hardy tengsizliklar nazariyasi Hardy-Volterra tengsizligi ham deb yuritiladi

$$\left(\int\limits_a^b \left|\int\limits_a^x (x,t)^\alpha f(t)dt\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Bundan tashqari, bu tengsizlikka qo'shma tengsizlik

$$\left(\int\limits_a^b \left|\int\limits_x^b (t-x)^\alpha f(t)dt\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

uchun ham natijalar beramiz.

Teorema 1. *Faraz qilaylik, $1 < p \leq q < \infty$ bo'lsin. U holda (2) tengsizlik o'rinli bo'lishi, ya'ni (1) operatorning chegaralangan bo'lishi uchun quyidagi*

$$A_1(a,b) := \sup_{a<t<b}\left(\int_t^b u(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^t (t-\tau)^{\alpha p'} v^{1-p'}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

va

$$A_2(a,b) := \sup_{a<t<b}\left(\int_t^b (\tau-t)^{\alpha q} u(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^t v^{1-p'}(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

shartlarning bajarilishi yetarli va zarurdir. Bundan tashqari tengsizlikning eng yaxshi konstantasi- (1) operatorning normasi- $C = C(a,b)$ uchun ushbu baholar o'rinli

$$A(a,b) \leq C(a,b) \leq (2C_2)^q qq' A(a,b),$$

bunda

$$A(a,b) := \max\{A_1(a,b), A_2(a,b)\}.$$

Huddi shunday, (3) tengsizlik uchun ham quyidagi natijani berish mumkin.

Teorema 2. *Faraz qilaylik, $1 < p \leq q < \infty$ bo'lsin. U holda (3) tengsizlik o'rinli bo'lishi uchun, ya'ni*

$$(\tilde{H}f)(x) = \int_x^b (t-x)^\alpha f(t)dt \tag{4}$$

operatorning chegaralangan bo'lishi uchun

$$A_3(a,b) := \sup_{a<t<b}\left(\int_a^t u(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_t^b (\tau-t)^{\alpha p'} v^{1-p'}(\tau)d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

va

$$A_4(a,b) := \sup_{a<t<b}\left(\int_a^t (t-\tau)^{\alpha q} u(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_t^b v^{1-p'}(\tau)\,d\tau\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

shartlarning bajarilishi yetarli va zarurdir. Bundan tashqari tengsizlikning eng yaxshi konstantasi- (4) operatorning normasi- $\tilde{C} = \tilde{C}(a,b)$ uchun ushbu baholar o'rinli

$$\tilde{A}(a,b) \leq \tilde{C}(a,b) \leq (2C_2)^q qq' \tilde{A}(a,b),$$

bunda

$$\tilde{A}(a,b) := \max\{A_3(a,b), A_4(a,b)\}.$$

References

1. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type, World scientific: New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2003.
2. *Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E.* The Hardy inequality-about its history and some related results, Pilsen, 2007 y..
3. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities.—-Cambridge University Press: Cambridge, Chap. 9, 1952.

Non-ergodicity of Lotka-Volterra operators

[1]**Jamilov U.**, [2]**Mukhitdinov R.**
[1] *V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan),*
e-mail: uygun.jamilov@mathinst.uz
[2] *Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan),*
e-mail: muxitdinov-ramazon@rambler.ru

Let $E = 1,\dots,m$ be a finite set and the set of all probability distributions on E

$$S^{m-1} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \quad x_i \geq 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

be the $(m-1)$ -dimensional simplex.

A map V of S^{m-1} into itself is called a *quadratic stochastic operator* (QSO) if

$$(V\mathbf{x})_k = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} x_i x_j \tag{1}$$

for any $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ and for all $k = 1, ..., m$ where

$$P_{ij,k} \geq 0, \quad P_{ij,k} = P_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^m P_{ij,k} = 1. \tag{2}$$

In [2] developed the theory of Volterra QSOs. A *Volterra* QSO is defined by (1), (2) and with the additional assumption

$$P_{ij,k} = 0 \quad \text{if} \quad k \notin \{i, j\}, \quad i, j, k \in E.$$

The trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n\geq 0}$ of an operator V for a point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is defined by $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)})$ for all $n = 0, 1, 2, \dots$

Denote by $\omega_V\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ the set of limit points of the trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n\geq 0}$.

A QSO V is called *regular* if there is the limit $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x})$ for any initial $\mathbf{x} \in S^{m-1}$.

A QSO V is said to be *ergodic* if the limit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V^k(\mathbf{x})$ exists for any $\mathbf{x} \in S^{m-1}$.

On the basis of numerical calculations Ulam, conjectured that the any QSO is ergodic[3]. But in 1977 in [4], Zakharevich considered the following QSO on S^2

$$x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2, \quad x_2' = x_2^2 + 2x_2x_3, \quad x_3' = x_3^2 + 2x_1x_3 \tag{3}$$

and showed that it is a non-ergodic transformation, that is he proved that Ulam's conjecture is false in general. The Zakharevich's QSO (3) is called the Stein Ulam Spiral map in some references. Later in [1] established a necessary condition for a QSO defined on S^2 to be a non-ergodic transformation, that is Zakharevich's result was generalized to a class of Volterra QSOs defined on S^2.

A discrete-time Kolmogorov system $\mathcal{K} : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+^m$ is given by

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}) := \big(x_1 g_1(\mathbf{x}), x_2 g_2(\mathbf{x}), \dots, x_m g_m(\mathbf{x})\big), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^m$$

where x_i is a population density of the species i and the function g_i is a growth rate of the species i which depends on a population density vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Depending on the properties of the functions g_i, the discrete-time Kolmogorov system represents different kinds of species interactions.

A mapping $V : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^m_+$ is called *stochastic* if $V(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$. In what follows, a stochastic Kolmogorov system $\mathcal{K} : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^m_+$ is called a *Lotka-Volterra operator* (in short, an LV-operator). If $\mathcal{K}$ is an LV-operator, then every face of the simplex is invariant under $\mathcal{K}$, i.e., $\mathcal{K}(\Gamma_\alpha) \subset \Gamma_\alpha$, for all $\alpha \subset E$.

A continuous function $\varphi : S^{m-1} \to \mathbb{R}$ is called a Lyapunov function for an operator V if the limit $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi\left(V^n(\mathbf{x})\right)$ exists and finite for all $\mathbf{x} \in S^{m-1}$.

Let $f(\mathbf{x}) : S^2 \to [0, 1]$ be a continuous function and let $r > 0$ be a real number. Consider on S^2 the following operator

$$V : \begin{cases} x_1' = x_1 \left(1 + \left(\dfrac{x_1^r x_2}{s - x_1 + \|\mathbf{x}\|} - \dfrac{x_3^{r+1}}{s - x_3 + \|\mathbf{x}\|}\right) f(\mathbf{x})\right), \\ x_2' = x_2 \left(1 + \left(\dfrac{x_2^r x_3}{s - x_2 + \|\mathbf{x}\|} - \dfrac{x_1^{r+1}}{s - x_1 + \|\mathbf{x}\|}\right) f(\mathbf{x})\right), \\ x_3' = x_3 \left(1 + \left(\dfrac{x_3^r x_1}{s - x_3 + \|\mathbf{x}\|} - \dfrac{x_2^{r+1}}{s - x_2 + \|\mathbf{x}\|}\right) f(\mathbf{x})\right), \end{cases} \tag{4}$$

where $\|\cdot\|-$ a norm in $\mathbb{R}^3$ and $s \geq 3$ is a natural number.

Let $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ be the vertexes of the simplex S^2. It is easy to verify that the faces $\Gamma_{\{1,2\}}, \Gamma_{\{1,3\}}, \Gamma_{\{2,3\}}$ are invariant sets with respect to V. The vertexes $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ and the point $\mathbf{c} = (1/3, 1/3, 1/3)$ are the fixed points of the operator (4).

Theorem. For the operator V defined by (4) the following assertions true:

i) The function $\varphi(\mathbf{x}) = x_1 x_2 x_3$ is a Lyapunov function for LV-operator (4);

ii) $\omega_V\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ is an infinite subset of ∂S^2 for any $\mathbf{x}^{(0)} \in \operatorname{int} S^2 \setminus \{\mathbf{c}\}$;

iii) For any $\mathbf{x} \in \operatorname{int} S^2 \setminus \{\mathbf{c}\}$ and the LV-operator V the limit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} W^k(\mathbf{x})$ does not exists, that is the operator W is a non-ergodic transformation.

References

1. *N. N. Ganikhodzhaev, D. V. Zanin.* On a necessary condition for the ergodicity of quadratic operators defined on a two-dimensional simplex, Russ. Math. Surv. 59 (3) (2004) 571–572.
2. *R. N. Ganikhodzhaev.* Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. Sb. Math. 76 (2) (1993), 489–506.
3. *S. M. Ulam.* A collection of mathematical problems, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8, Interscience Publishers, New York-London, 1960.
4. *M. I. Zakharevich.* On the behaviour of trajectories and the ergodic hypothesis for quadratic mappings of a simplex, Russ. Math. Surv. 33 (6) (1978) 265–266.

On a non-Volterra quadratic stochastic operator

[1]Jamilov U., [2]Qurbonov M.
[1] *V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, (Tashkent, Uzbekistan),*
e-mail: uygun.jamilov@mathinst.uz
[2] *Namangan State University, Namangan, Uzbekistan),*
e-mail: 73zmkurbanov@gmail.com

Let

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \ x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$$

be the $(m-1)$-dimensional simplex. It is known that any $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is a probability distribution on the set E.

A map V of S^{m-1} into itself is called a *quadratic stochastic operator* (QSO) if

$$(V\mathbf{x})_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j \tag{1}$$

for any $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ and for all $k = 1, ..., m$ where

$$P_{ij,k} \geq 0, \quad P_{ij,k} = P_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1. \tag{2}$$

In [1] developed the theory of Volterra QSOs. A *Volterra* QSO is defined by (1), (2) and with the additional assumption

$$P_{ij,k} = 0 \ \text{ if } \ k \notin \{i, j\}, \quad i, j, k \in E.$$

The trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n\geq 0}$ of an operator V for a point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is defined by $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)})$ for all $n = 0, 1, 2, \dots$

Denote by $\omega_V\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ the set of limit points of the trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n\geq 0}$.

A point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is called a *fixed point* of V if $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Let $DV(\mathbf{x}^*) = \Big(\partial V_i/\partial x_j\Big)(\mathbf{x}^*)$ be the Jacobian of V at the point $\mathbf{x}^*$.

A fixed point $\mathbf{x}^*$ is called hyperbolic if its Jacobian $D(V(\mathbf{x}^*))$ has no eigenvalues on the unit circle. A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called: (i) *attracting*, if all the eigenvalues of the Jacobian $D(V(\mathbf{x}^*))$ are less than 1 in absolute value; (ii) *repelling*, if all the eigenvalues of the Jacobian $D(V(\mathbf{x}^*))$ are greater than 1 in absolute value; (iii) a *saddle*, otherwise.

Let us consider a QSO $V : S^2 \to S^2$ which has the form:

$$V : \begin{cases} x_1' = \alpha x_1^2 + \beta x_3^2 + 2x_1x_3, \\ x_2' = \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + 2x_2x_3, \\ x_3' = (1-\alpha)x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + (1-2\beta)x_3^2 + 2x_1x_2, \end{cases} \tag{3}$$

where $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1/2$. Note the non-Volterra QSO (3) differs from the QSOs which are studied in [2,3,4].

Let $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ be the vertexes of the simplex S^2.

Theorem 1. For the QSO V defined by (3) the following assertions true:

i) if $\alpha = \beta = 0$ then the vertex $\mathbf{e}_3$ and any point of the set

$$\mathbf{X} = \left\{\mathbf{x} \in S^2 : x_1 + x_2 = 1/2, \quad x_3 = 1/2\right\}$$

are fixed points;

ii) if $\alpha > 0$ or $\beta > 0$ then there exists a fixed point $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in S^2$, where

$$x_1^* = x_2^* = \frac{4\beta - 1 - \sqrt{1 + 4\beta(2-\alpha)}}{2(\alpha + 4\beta - 4)}, \quad x_3^* = \frac{\alpha - 3 - \sqrt{1 + 4\beta(2-\alpha)}}{\alpha + 4\beta - 4}.$$

Besides, if $\alpha^2 \geq 4\alpha\beta(1-\alpha)^2$ and $\alpha > 0$ then there exist another two fixed points $\mathbf{x}^{**} \in S^2$, $\mathbf{x}^{***} \in S^2$ of the operator V, where

$$\mathbf{x}^{**} = \left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta(1-\alpha)^2}}{2\alpha(2-\alpha)}, \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta(1-\alpha)^2}}{2\alpha(2-\alpha)}, \frac{1-a}{2-a} \right),$$

$$\mathbf{x}^{***} = \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta(1-\alpha)^2}}{2\alpha(2-\alpha)}, \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha\beta(1-\alpha)^2}}{2\alpha(2-\alpha)}, \frac{1-a}{2-a} \right);$$

iii) the fixed point $\mathbf{x}^*$ is an attracting point;

iv) any fixed point from the set $\mathbf{X}$ is a non-hyperbolic point.

Theorem 2. Let $\alpha = 0$ then for the QSO V defined by (3) the following assertions true:

i) if $0 \leq \beta < 3/8$ then $\lim\limits_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^*$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$ except fixed points;

ii) if $3/8 < \beta \leq 1/8$ then there exists $\lim\limits_{n\to\infty} V^{2n}(\mathbf{x}^{(0)}) = \widetilde{\mathbf{x}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} V^{2n+1}(\mathbf{x}^{(0)}) = \widehat{\mathbf{x}}$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$ except fixed points, where

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \left(\frac{\beta\,(\widehat{x})^2 + 2\beta\,(\widetilde{x})^2\,\widehat{x}}{1 - 4\widehat{x}\widetilde{x}}, \frac{\beta\,(\widehat{x})^2 + 2\beta\,(\widetilde{x})^2\,\widehat{x}}{1 - 4\widehat{x}\widetilde{x}}, \widehat{x} \right),$$

$$\widehat{\mathbf{x}} = \left(\frac{\beta\,(\widetilde{x})^2 + 2\beta\,(\widehat{x})^2\,\widetilde{x}}{1 - 4\widehat{x}\widetilde{x}}, \frac{\beta\,(\widetilde{x})^2 + 2\beta\,(\widehat{x})^2\,\widetilde{x}}{1 - 4\widehat{x}\widetilde{x}}, \widetilde{x} \right)$$

References

1. *R. N. Ganikhodzhaev.* Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. Sb. Math. 76 (2) (1993), pp. 489–506.
2. *A. J. M. Hardin, U. A. Rozikov.* A quasi-strictly non-Volterra quadratic stochastic operator. QTDS. 18 (2019), pp. 1013–1029.
3. *U. U. Jamilov.* On a family of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators. Jour. Phys. Conf. Ser. 697 (2016), 012013.
4. *U. U. Zhamilov, U. A. Rozikov.* On the dynamics of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators on a two-dimensional simplex. Sb. Math. 200 (9) (2009), pp. 1339–1351.

On dynamics of a quasi strictly non-Volterra quadratic stochastic operator

[1]Jamilov U., [2]Rahmonova G.
[1] *V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan),*
e-mail: uygun.jamilov@mathinst.uz
[2] *Namangan State University, Namangan, Uzbekistan),*
e-mail: gulsanam1998@inbox.ru

Let

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : \ x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$$

be the $(m-1)$-dimensional simplex. A map V of S^{m-1} into itself is called a *quadratic stochastic operator* (QSO) if

$$(V\mathbf{x})_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j \tag{1}$$

for any $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ and for all $k = 1, \dots, m$ where

$$P_{ij,k} \geq 0, \quad P_{ij,k} = P_{ji,k}, \quad \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1. \tag{2}$$

In [1] developed the theory of Volterra QSOs. A *Volterra* QSO is defined by (1), (2) and with the additional assumption

$$P_{ij,k} = 0 \ \text{ if } \ k \notin \{i, j\}, \quad i, j, k \in E.$$

The trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n\geq 0}$ of an operator V for a point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is defined by $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)})$ for all $n = 0, 1, 2, \dots$

Denote by $\omega_V\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ the set of limit points of the trajectory $\{\mathbf{x}^{(n)}\}_{n\geq 0}$.

Definition 1. A point $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ is called a *periodic point* of V if there exists an n so that $V^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. The smallest positive integer n satisfying the above is called the prime period or least period of the point x. A period-one point is called a *fixed point* of V, denote the set of all fixed points by $\mathrm{Fix}\,(V)$.

Let $DV(\mathbf{x}^*) = \Big(\partial V_i/\partial x_j\Big)(\mathbf{x}^*)$ be the Jacobian of V at the point $\mathbf{x}^*$.

Definition 2. A fixed point $\mathbf{x}^*$ is called hyperbolic if its Jacobian $D(V(\mathbf{x}^*))$ has no eigenvalues on the unit circle. A hyperbolic fixed point $\mathbf{x}^*$ is called:
(a) *attracting*, if all the eigenvalues of the Jacobian $D(V(\mathbf{x}^*))$ are less than 1 in absolute value;
(b) *repelling*, if all the eigenvalues of the Jacobian $D(V(\mathbf{x}^*))$ are greater than 1 in absolute value;
(c) a *saddle*, otherwise.

Let us consider a QSO $V : S^2 \to S^2$ which has the form:

$$V: \begin{cases} x_1' = \alpha x_2^2 + \beta x_3^2 + 2x_1x_3, \\ x_2' = \alpha x_1^2 + \beta x_3^2 + 2x_2x_3, \\ x_3' = (1-\alpha)x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 + (1-2\beta)x_3^2 + 2x_1x_2, \end{cases} \tag{3}$$

where $0 \leq \alpha \leq 1$ and $0 \leq \beta \leq 1/2$. Note the quasi strictly non-Volterra QSO (3) differs from the QSOs which are studied in [2,3,4].

Let $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ be the vertexes of the simplex S^2.

Theorem 1. For the quasi strictly non-Volterra QSO V defined by (3)the following assertions true:

i) if $\alpha = \beta = 0$ then the vertex $\mathbf{e}_3$ and any point of the set

$$\mathbf{X} = \left\{\mathbf{x} \in S^2 : x_1 + x_2 = 1/2, \quad x_3 = 1/2\right\}$$

are fixed points;

ii) if $\alpha > 0$ or $\beta > 0$ then there exists a unique fixed point $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in S^2$, where

$$x_1^* = x_2^* = \frac{4\beta - 1 - \sqrt{1 + 4\beta(2-\alpha)}}{2(\alpha + 4\beta - 4)}, \quad x_3^* = \frac{\alpha - 3 - \sqrt{1 + 4\beta(2-\alpha)}}{\alpha + 4\beta - 4};$$

iii) the fixed point $\mathbf{x}^*$ is an attracting point;

iv) any fixed point from the set $\mathbf{X}$ is a non-hyperbolic point.

Theorem 2. Let $\alpha = 0$ then the quasi strictly non-Volterra QSO V defined by (3) the following assertions true:

i) if $0 \le \beta < 3/8$ then $\lim_{n\to\infty} V^n(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{x}^*$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$ except fixed points;

ii) if $3/8 < \beta \le 1/8$ then there exists $\lim_{n\to\infty} V^{2n}(\mathbf{x}^{(0)}) = \widetilde{\mathbf{x}}$, $\lim_{n\to\infty} V^{2n+1}(\mathbf{x}^{(0)}) = \widehat{\mathbf{x}}$ for any $\mathbf{x}^{(0)} \in S^2$ except fixed points, where

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \left(\frac{\beta\left(\widehat{x}\right)^2 + 2\beta\left(\widetilde{x}\right)^2 \widehat{x}}{1 - 4\widehat{x}\widetilde{x}}, \frac{\beta\left(\widehat{x}\right)^2 + 2\beta\left(\widetilde{x}\right)^2 \widehat{x}}{1 - 4\widehat{x}\widetilde{x}}, \widehat{x} \right),$$

$$\widehat{\mathbf{x}} = \left(\frac{\beta\left(\widetilde{x}\right)^2 + 2\beta\left(\widehat{x}\right)^2 \widetilde{x}}{1 - 4\widehat{x}\widetilde{x}}, \frac{\beta\left(\widetilde{x}\right)^2 + 2\beta\left(\widehat{x}\right)^2 \widetilde{x}}{1 - 4\widehat{x}\widetilde{x}}, \widetilde{x} \right)$$

References

1. *R. N. Ganikhodzhaev.* Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. Sb. Math. 76 (2) (1993), pp. 489–506.

2. *A. J. M. Hardin, U. A. Rozikov.* A quasi-strictly non-Volterra quadratic stochastic operator. QTDS. 18 (2019), pp. 1013–1029.

3. *U. U. Jamilov.* On a family of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators. Jour. Phys. Conf. Ser. 697 (2016), 012013.

4. *U. U. Zhamilov, U. A. Rozikov.* On the dynamics of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators on a two-dimensional simplex. Sb. Math. 200 (9) (2009), pp. 1339–1351.

Regularity of a non-Volterra quadratic stochastic operator

[1]Jamilov U.U., [2]Mamurov B.J.

[1] *V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 9, Universitet str.,Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: uygun.jamilov@mathinst.uz, jamilovu@yandex.ru

[2] *Faculty of Physics and Mathematics, Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan,*
e-mail: bmamurov.51@mail.ru

The evolution of a population can be studied by a dynamical system of a quadratic stochastic operator [2].

Let $E = \{1, \dots, m\}$ be a finite set and the set of all probability distributions on E

$$S^{m-1} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m : \, x_i \ge 0, \text{ for any } i \text{ and } \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$$

the $(m-1)$ -dimensional simplex.

A *quadratic stochastic operator* (QSO) is a mapping $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$ of the simplex into itself, of the form $V(x) = x' \in S^{m-1}$, where

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, \ldots, m \tag{1}$$

and the coefficients $p_{ij,k}$ satisfy

$$p_{ij,k} = p_{ji,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} p_{ij,k} = 1, \quad i, j, k \in E \tag{2}$$

The trajectory $\mathbf{x}^{(n)}, n = 0, 1, 2, \ldots$, of V for an initial point $\mathbf{x}^{(0)} \in S^{m-1}$ is defined by

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)}) = V^{n+1}(\mathbf{x}^{(0)}), n = 0, 1, 2, \ldots.$$

One of the main problems in mathematical biology consists of the study of the asymptotical behaviour of the trajectories. Note that the main problem is open even in two-dimensional case.

The main problem deeply studied for Volterra quadratic stochastic operators. In [1] developed the theory of Volterra QSOs. A *Volterra* QSO is defined by (1), (2) and with the additional assumption

$$p_{ij,k} = 0 \qquad \text{if} \qquad k \notin \{i, j\}, \quad \forall\, i, j, k \in E.$$

Consider the following non-Volterra quadratic stochastic operator which has the form

$$V : \begin{cases} x'_1 = (\frac{1}{3} + \alpha)x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{1}{3}x_1 x_2, \\ x'_2 = (\frac{1}{3} - \alpha)x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2, \\ x'_3 = \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{2}{3}x_1 x_2, \end{cases} \tag{3}$$

where $\alpha \in [0, 1/3]$.

Theorem. a) The operator (3) has a unique fixed point $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in S^2$, where $x_1^* = 1 - x_2^* - x_3^*$,

$$x_2^* = \frac{3\alpha\sqrt{17} + \sqrt{216\alpha - 78 - 72\alpha\sqrt{17} + 34\sqrt{17}} - \sqrt{17} - 3\alpha - 5}{4(3\alpha - 2)}, \; x_3^* = \frac{5 - \sqrt{17}}{4};$$

b) The operator (3) has no-periodic points except the fixed point;
c) Any trajectory of the operator converges to the unique fixed;
d) The operator (3) is a regular transformation.

References

1. *R. N. Ganikhodzhaev.* Quadratic stochastic operators, Lyapunov functions and tournaments. Sb. Math. 76 (2) (1993), pp. 489–506.
2. *Y. I. Lyubich* Mathematical structures in population genetics, vol. 22 of Biomathematics, Springer Verlag, Berlin, 1992.
3. *U. U. Jamilov* On a family of strictly non-Volterra quadratic stochastic operators, Jour. Phys. Conf. Ser. 697 (2016) 012013.

Uchinchi tartibli karrali harakteristikali tenglama uchun nolokal chegaraviy masala yechimining mavjudligi haqida

[1]Jo‘rayev B., [2]Xolboyev S.

[1] *Denov Tadbirkorlik va Pedagogika Instituti,*

[2] *Denov Tadbirkorlik va Pedagogika Instituti,*

Faraz qilaylik quyidagi tenglama berilgan bo‘lsin:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y) \tag{1}$$

Bu tenglamada umumiylikni buzmagan holda: $u(x,y) = v(x,y)\exp(\frac{1}{2}\int\limits_0^y b(x,t)dt)$ almashtirish yordamida

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = f(x,y) \tag{2}$$

ko‘rinishga keltirish mumkin. $b(x,y) \in C^{3,1}(\overline{D})$ shartni qanoatlantirishi talab qilinadi. Shuning uchun (1) tenglama o‘rniga (2) dan foydalanish mumkin.

Masalaning qo‘yilishi 1. (2) *tenglamaning chekli* $D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ *sohaga* $u(x,y) \in C^{2,1}(\overline{D}) \cap C^{3,2}(D)$ *sinfdan* (2) *tenglamaning shunday yechimi topilsinki, u quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin:*

$$\alpha_0(x)u(x,0) + \alpha_1(x)u_y(x,0) = m_0(x) \ \textit{(3)}$$

$$\beta_0(x)u(x,1) + \beta_1(x)u_y(x,1) = m_1(x), 0 \le x \le 1 \ \textit{(4)}$$

$$\gamma_0(y)u(0,y) + \gamma_1(y)u_{xx}(0,y) = n_0(y) \ \textit{(5)}$$

$$\delta_0(y)u_1(1,y) + \delta_1(y)u_{xx}(1,y) = n_1(y), 0 \le y \le 1 \ \textit{(6)}$$

$$u_x(1,y) = n_2(y), 0 \le y \le 1 \ \textit{(7)}$$

bu yerda: $\alpha_i(x), \beta_i(x), \gamma_i(y), \delta_i(y), m_j(x), n_i(y)$ $(i = 0,1; j = 0,1,2)$ *berilgan uzluksiz funksiyalar.Shu bilan birga* $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \ne 0, \beta_0^2 + \beta_1^2 \ne 0, \gamma_0^2 + \gamma_1^2 \ne 0, \delta_0^2 + \delta_1^2 \ne 0$.

Yuqorida qo‘yilgan masala yechimi yagonaligi [4] ga keltirilgan. Quyida masala yechimi mavjudligi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema 1. *Agar* $a_i(x,y) \in C^{i,0}(D), a_2(x,y) \le 0, a_0 - \frac{1}{2}a_{2x} + \frac{1}{2}a_{2xx} \equiv c(x,y) \ge 0$ *munosabat bajarilish bilan birgalikda quyidagi shartlar bajarilsa:*$\alpha_1\beta_1\gamma_2\delta_1 \ne 0$ *u holda* $\alpha_0\alpha_1 \le 0, \beta_0\beta_1 \ge 0, \delta_0\delta_1 \le 0, \gamma_0\gamma_1 \ge 0, -1 \le \frac{\gamma_1}{\gamma_2} - a_2(0,y), (-1)^i[a_1(i,0) - a_{2x}(i,y) + i] \ge 0, i = 0,1;$ *qo‘yilgan masala yechimi mavjuddir.*

Teorema isboti quyidagi sxema bo‘yicha bajariladi: Avval $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,y)$ D tenglama uchun yordamchi masalaga tuzilgan Grin funksiyasidan foydalanib [4] qo‘yilgan masala uchun Fredgolm tipidagi 2-tur integral tenglamalar sistemasiga keltiriladiki uning yechimining mavjudligi, isbotlangan yagonalik teoremasidan kelib chiqadi.

References

1. *А.Н.Тихонов, А.А.Самарский.* Уравнения математической физики¥ Москва-1972.

2. *Т.Д.Джураев.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов, Ташкент-1979, ФАН, С.240

3. *С.Абдиназаров.* Об одной краевой задаче для одного неклассического уравнения., Узб.мат.жур. Ташкент, ФАН, 1991, No.4, с:3-13.

4. *B.B.Jurayev, S.B.Xolboyev.* Bir turdagi uchinchi tartibli karrali harakteristikali tenglama uchun nolokal chegaraviy masala yechimining yagonaligi, Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiali to'plami I, Andijon,22-mart 2022-yil, 41-43-betlar.

On the number of the eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice

[1]Khalkhuzhaev A.M., [2]Usmonov L.S.

[1] *Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Mirzo Ulugbek 81, Tashkent 100170, Uzbekistan,*
e-mail: jabdullaev@mail.ru

[2] *Samarkand State University, University Boulevard 15, Samarkand 140104, Uzbekistan,*
e-mail: u.lochinbek@bk.ru

We consider the two-particle Schrödinger operator $H(\mathbf{k})$, ($\mathbf{k} \in \mathbf{T}^3 \equiv (-\pi,\pi]^3$ is the total quasimomentum of a system of two particles) corresponding to the Hamiltonian of the two-particle system on the three-dimensional lattice $\mathbf{Z}^3$. It is proved that the number $N(\mathbf{k}) \equiv N(k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)})$ of eigenvalues below the essential spectrum of the operator $H(\mathbf{k})$, non-decreasing function in each $k^{(i)} \in [0,\pi], i = 1,2,3$.

Energy operator $\hat{H}$ of a system of two quantum particles on a three-dimensional lattice $\mathbf{Z}^3$ acts in the Hilbert space $\ell_2((\mathbf{Z}^3)^2)$ by formula

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V},$$

where the free energy operator $\hat{H}_0$ acts in $\ell_2((\mathbf{Z}^3)^2)$ as

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2}.$$

Here $m_1, m_2 > 0$ are denoted the masses of particles, which in the future are considered equal to one, $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I$ and $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta$, lattice Laplacian Δ is a difference operator describing the transfer of a particle from a side to neighboring side

$$(\Delta\hat{\psi})(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{3}[\hat{\psi}(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i) + \hat{\psi}(\mathbf{x}-\mathbf{e}_i) - 2\hat{\psi}(\mathbf{x})], \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbf{Z}^3),$$

where $\mathbf{e}_1 = (1,0,0),\ \ \mathbf{e}_2 = (0,1,0),\ \ \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ are the unit vectors in $\mathbf{Z}^3$.

The interaction of two particles is described by the operator $\hat{V}$:

$$(\hat{V}\hat{\psi})(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) = \hat{v}(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})\hat{\psi}(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}), \quad \hat{\psi} \in \ell_2((\mathbf{Z}^3)^2),$$

where $\hat{v}(\mathbf{x}) \geq 0$ and $\hat{v} \in l_1(\mathbf{Z}^3)$. The energy operator $\hat{H}$ is the bounded self-adjoint operator in the space $\ell_2((\mathbf{Z}^3)^2)$. Transition to impulse representation is performed by using the Fourier transform $\mathcal{F}$: $L_2((\mathbf{T}^3)^2) \to \ell_2((\mathbf{Z}^3)^2)$. Operator energy $H = \mathcal{F}^{-1}\hat{H}\mathcal{F}$ in the momentum representation commutes with the group of unitary operators $U_{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathbf{Z}^3$:

$$(U_{\mathbf{s}}f)(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2}) = \exp\big(-i(\mathbf{s},\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2})\big)f(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2}), \quad f \in L_2((\mathbf{T}^3)^2).$$

From the last fact we obtain [5] that there are decompositions of the space $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$, operators $U_{\mathbf{s}}$ and H into direct integrals:

$$L_2((\mathbf{T}^3)^2) = \int_{\mathbf{T}^3} \oplus L_2(F_{\mathbf{k}})d\mathbf{k}, \quad U_{\mathbf{s}} = \int_{\mathbf{T}^3} \oplus U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k})d\mathbf{k}, \quad H = \int_{\mathbf{T}^3} \oplus \tilde{H}(\mathbf{k})d\mathbf{k}.$$

Here

$$F_{\mathbf{k}} = \{(\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2}) \in (\mathbf{T}^3)^2 : \quad \mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} = \mathbf{k}\};$$

$U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k}), \mathbf{k} \in \mathbf{T}^3$ is the multiplication operator by the function $\exp(-i(\mathbf{s}, \mathbf{k}))$ in the space $L_2(F_{\mathbf{k}})$, and fiber operators $\tilde{H}(\mathbf{k}), \mathbf{k} \in \mathbf{T}^3$ in $L_2(F_{\mathbf{k}})$ are defined according to the formula

$$(\tilde{H}(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) = (\mathcal{E}(\mathbf{q}) + \mathcal{E}(\mathbf{k}-\mathbf{q}))f(\mathbf{q}, \mathbf{k}-\mathbf{q}) - (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int\limits_{\mathbf{T}^3} v(\mathbf{q}-\mathbf{s}) f(\mathbf{s}, \mathbf{k}-\mathbf{s}) d\mathbf{s}$$

and it unitarily equivalent to the operator $H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$, so-called the Schrödinger operator. Unitarity is carried out using the unitary transformation

$$u_{\mathbf{k}} : L_2(F_{\mathbf{k}}) \to L_2(\mathbf{T}^3), \quad (u_{\mathbf{k}} g)(\mathbf{q}) = g(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}, \frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}).$$

$H_0(\mathbf{k})$ is the multiplication operator by the function

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \mathcal{E}(\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}) + \mathcal{E}(\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}),$$

where

$$\mathcal{E}(\mathbf{q}) = \sum_{j=1}^{3} (1 - \cos q^{(j)})$$

and V is the integral operator in $L_2(\mathbf{T}^3)$, generated by the kernel $(2\pi)^{-3/2} v(\mathbf{q}-\mathbf{s})$. The kernel v of the integral operator V is the Fourier transform of the potensial $\hat{v}$. The function v is continuous on $\mathbf{T}^3$.

We denote by $N(\mathbf{k})$ the number of eigenvalues of the operator $H(\mathbf{k})$, lying to the left $\mathcal{E}_{\min}(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q} \in \mathbf{T}^3} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$.

Theorem 1. $N(\mathbf{k}) \equiv N(k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)})$ *is non-decreasing function in each* $k^{(i)} \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, 3$ *with fixed other coordinates* $\mathbf{k} \in \mathbf{T}^3$.

References

1. *P.A. Faria da Viega, L.Ioriatti and M.O'Carrol.* Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonian. Phys. Rev. E(3) 66, 016130, 9 pp. (2002).
2. *D. C. Mattis.* The few-body problem on a lattice. Rev. Modern Phys., 58, 361?379 (1986).
3. *S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov.* The threshold effects for the two-particle Hamiltonians on lattices, Commun. Math. Phys., 262:1 (2006), 91– 115.
4. *S.N. Lakaev, A.M. Khalkhuzhaev.* Spectrum of the two-particle Schrödinger Operator on a lattice, Theor. Math. Phys., 155 (2): 753-764 (2008).
5. *M. Reed and B. Simon,* Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators. Academic Press, N.Y., 1979.

Analytic description of the essential spectrum of A operator matrix in fermionic fock space

[1]Khalxujayev A.M., [2]Khayitova K.G.

[1] *Samarkand branch of the Institute of Mathematics, Samarkand, Uzbekistan*
e-mail: rth@mail.ru

[2] *Department of Mathematical analysis, Faculty of Physics and Mathematics, Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*
e-mail: sh.mubina.sh@gmail.com

For $d \in \mathbb{N}$ denote by $\mathbb{T}^d$ the d-dimensional torus. Let $\mathbb{C}$ be the set of all complex numbers, and $L_2^{as}(\mathbb{T}^d)^2$ be the Hilbert space of square integrable (complex) antisymmetric functions defined on $\mathbb{T}^d$. Set $H := H_1 \bigoplus H_2$.

In the present work we consider the operator matrix $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(\gamma)$ acting in the Hilbert space H given by $H_1 = L_2(\mathbb{T})^d, H_2 = L_2^{as}(\mathbb{T}^d)^2 . H_1$ be the Hilbert space of square integrable functions on $\mathbb{T}^d$

$$\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(\gamma) := \begin{pmatrix} A_{11} & \lambda A_{12} \\ \lambda A_{12}^* & A_{22}^0(\gamma) - \mu V \end{pmatrix}.$$

The entries of $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(\gamma)$ are defined as

$$(A_{11}f_1)(x) = u(x)f_1(x), \qquad (A_{12}f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}^d} v(t)f_2(x,t)dt,$$

$$A_{22}^0(\gamma)(f_2) = w_\gamma(x,y)f_2(x,y), \qquad V = V_1 + V_2,$$

$$(V_1 f_2)(x,y) = \int_{\mathbb{T}^d} f_2(x,t)dt, \quad (V_1 f_2)(x,y) = \int_{\mathbb{T}^d} f_2(t,y)dt,$$

$$(A_{12}^* f_1)(x,y) = \frac{1}{2}(v(y)f_1(x) - v(x)f_1(y)).$$

$\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(\gamma)$ is a linear, bounded, self-joining operator.

In order to study the essential spectrum of the $\mathcal{A}_{\mu,\lambda}(\gamma)$ operator, we introduce an operator called the channel operator. Let $\overline{H}$ be the direct sum of Hilbert spaces $\overline{H}_1 = L_2(\mathbb{T}^d)$ and $\overline{H}_2 = L_2((\mathbb{T}^d)^2)$, that is, $\overline{H} = \overline{H}_1 \bigoplus \overline{H}_2$.

$$\mathcal{A}_{\mu,\lambda}^{CH}(\gamma) = \begin{pmatrix} A_{11} & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} A_{12} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} A_{12}^* & A_{22}^0(\gamma) - \mu V_1 \end{pmatrix}$$

Here, the matrix elements are defined as follows:

$$(A_{11}f_1)(x) = u(x)f_1(x), \qquad (A_{12}f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}^d} v(t)f_2(x,t)dt,$$

$$A_{22}^0(\gamma)(f_2) = w_\gamma(x,y)f_2(x,y), \qquad (V_1 f_2)(x,y) = \int_{\mathbb{T}^d} f_2(x,t)dt,$$

We introduce the operator $h_{\mu,\lambda}(\gamma,x)$ acting in the $\widehat{H} := \mathbb{C} \bigoplus L_2(\mathbb{T}^d)$ as

$$h_{\mu,\lambda}(\gamma,x) := \begin{pmatrix} h_{00}(x) & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} h_{01} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} h_{01}^* & h_{11}^0(\gamma,x) - \mu v \end{pmatrix}.$$

The matrix elements are defined as follows

$$h_{00}(x)f_0 = u(x)f_0, \quad h_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^d} v(t)f_1(t)dt, \quad (h_{01}^* f_0))y) = v(y)f_0,$$

$$(h_{11}^0(\lambda,x)f_1)(y) = w_\gamma(x,y)f_1(y), \quad (vf_1)(y) = \int_{\mathbb{T}^d} f_1 dt.$$

Theorem 1. *For the spectrum channel operator we have*

$$\sigma(H^{CH}_{\mu,\lambda}(\gamma)) = \sigma_{ess}(H^{CH}_{\mu,\lambda}(\gamma)) = \bigcup_{x\in\mathbb{T}^d} \sigma(h_{\mu,\lambda}(\gamma,x)).$$

Theorem 2. *The equality* $\sigma(H_{\mu,lambda}(\gamma)) = \sigma_{ess}(H^{CH}_{\mu,lambda}(\gamma))$ *holds.*

References

1. *C.Tretter* Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.

Ikki o‘lchamli Fridrixs modelidagi operatorlar uchun manfiy xos qiymatning mavjudligi

[1]**Ko‘chimov A.**, [2] **Kilichev N.**

[1] *Qarshi davlat universiteti, Ko‘chabog‘ ko‘chasi, 17-uy, 180119, Qarshi shahri, O‘zbekiston,*
e-mail: avazbekkochimov@gmail.com

[2] *Qarshi davlat universiteti, Ko‘chabog‘ ko‘chasi, 17-uy, 180119, Qarshi shahri, O‘zbekiston,*

$u(t) = u(t_1, t_2)$ - funksiya $\Omega = [0, 1]^2$ da manfiy bo‘lmagan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiya va $0 \in Ran(u)$ bo‘lsin. K - $L_2(\Omega)$ Hilbert fazosida $k(t, s) \in L_2(\Omega\times\Omega)$ yadroli kompakt integral operator bo‘lsin, bu yerda $k(t, s) = \overline{k(s, t)}$, $s = (s_1, s_2), t = (t_1, t_2) \in \Omega$.

$L_2(\Omega)$ fazoda quyidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorni qaraymiz

$$H = U - K, \tag{1}$$

bu yerda

$$(Uf)(t) = u(t)f(t), \quad f(t) \in L_2(\Omega),$$

$$(Kf)(t) = \int_\Omega k(t, s)f(s)d\mu(s_1)d\mu(s_2), \quad f(t) \in L_2(\Omega).$$

Bunda integral Lebeg ma’nosida, $\mu(\cdot)$ esa $\mathbb{R}^2$ da Lebeg o‘lchovini bildiradi.

Kompakt qo‘zg‘alish haqidagi Veyl teoremasiga [1] ko‘ra, H operatorning $\sigma_{ess}(H)$ muhim spektri $u(t)$ funksiyaning qiymatlari to‘plamidan iborat, ya’ni $\sigma_{ess}(H) = [0, u_{\max}]$, bu yerda $u_{\max} = \sup\limits_{t\in\Omega} u(t)$.

(1) ko‘rinishdagi operatorni birinchi marta K. O. Fridrixs [2] tomonidan muhim spektrning qo‘zg‘alishlar nazariyasining oddiy modeli sifatida ko‘rib chiqilgan. (1) ko‘rinishdagi ixtiyoriy operator Fridrixs modelidagi operator deb ataladi.

K - kompakt integral operatorning $k(t, s)$ yadrosi quyidagi ko‘rinishda berilgan bo‘lsin

$$k(t, s) = \alpha_1\varphi(t)\overline{\varphi(s)},$$

bu yerda $\alpha_1 > 0$ va $\varphi \in L_2(\Omega)$, $\|\varphi\| = 1$.

$(-\infty, 0)$ da $D(\lambda)$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$D(\lambda) = 1 - \alpha_1\Phi_1(\lambda),$$

bu yerda

$$\Phi_1(\lambda) = \int_\Omega \frac{\varphi^2(s)}{u(s) - \lambda} ds_1 ds_2.$$

Shuningdek quyidagi belgilashni kiritamiz

$$M_1 = \lim_{\lambda\to 0-0} \Phi_1(\lambda).$$

Tasdiq 1. *Agar* $M_1 = +\infty$ *shart bajarilsa, u holda* H *operator bitta manfiy xos qiymatga ega bo'ladi.*

Tasdiq 2. *a) Agar* $M_1 < \infty$ *bo'lib,* $\alpha_1 M_1 = 1$ *tenglik bajarilsa, u holda* H *operator bitta manfiy xos qiymatga ega bo'ladi.*
b) Agar $M_1 < \infty$ *bo'lib,* $\alpha_1 M_1 \neq 1$ *shart bajarilsa, u holda* H *operator manfiy xos qiymatga ega bo'lmaydi.*

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics, Volume 4: Operator Analysis. – M.: Mir, 1982.

2. *Friedrichs K.O.* Uber die Spectralzerlegung eines Integral Operators Math. Ann. 1938. V.115. No1. P. 249-272.

Diskret Hardi tipidagi tengsizliklar

[1] **Kuliev K.**, [2] **Kuchiboyeva D.**, [3] **Ismoilov M.**

[1] *Samarqand davlat universiteti, Samarqand 140104, Uzbekistan*
e-mail: komilkuliev@gmail.com

[2,3] *Jizzax davlat pedagogika universiteti, Jizzax 130100, Uzbekistan,*
e-mail: kuchiboyeva@list.ru; mirolimi@list.ru

1925 yilda G.Hardi tengsizlik

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_k\right|^p \leq \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|^p \tag{1}$$

ixtiyoriy $\{f_n\}$ ketma-ketlik uchun o'rinli bo'lishini, hamda, $\frac{p}{p-1}$ tengsizlikning eng yaxshi o'zgarmasi -tengsizlik o'rinli bo'ladigan o'garmaslar ichida eng kichigi- ekanligini isbotlagan. (1) tengsizlikka Hardining classik tengsizligi deb ataladi. So'ngra, bu tengsizlik turli olimlar tomonidan har xil usullarda kengaytirildi, bu haqda ma'lumotlar [1-3] adabiyotlarda batafsil keltirilgan. O'tgan asrning 70-yillariga kelib bu tengsizliklarning umumiy ko'rinishi paydo bo'ldi va u umumlashgan Hardi tengsizligi deb atala boshlandi:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\sum_{k=1}^{n} f_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_k v_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

bunda $\{f_n\}$ ixtiyoriy sonli ketma-ketlik, $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ lar musbat ketma-ketliklardir, $q > 0$ va $p \geq 1$.

Bunda asosan ikkita masala qaraladi, ular tengsizlik o'rinli bo'ladigan ekvivalent shartlar olish, hamda, tengsizlikning eng yaxshi konstantasini topish yoki uni baholashdir.

1983 yilda, Andersen va Heiniglar quyidagi shart

$$\sup_{m\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{m} u_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{m} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

(2) tengsizlik bajarilishi uchun $1 \leq p \leq q < \infty$ holda yetarli va zarurligini isbotlashgan, bundan tashqari uning eng yaxshi konstantasi uchun ham baholar olishgan. 1985 yilda Heinig (2) tengsizlikni $1 \leq q < p < \infty$ holda o'rinli bo'lishi uchun yetarli shart olgan, so'ngra bu shartning zarurligini Bennet isbotlagan. 1992 yilda Braverman va Stepanovlar parametrlarning qolgan hollarini, ya'ni $0 < p < 1 < q < \infty$ uchun (2) tengsizlikni o'rganishgan, bu haqda [2] da yetarlicha ma'lumot keltirilgan.

Ushbu ishda biz yadroga ega bo‘lgan ushbu tengsizliklarni o‘rganamiz:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n\sum_{k=1}^{n}(n-k)^{\alpha}f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_kv_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

va

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n\sum_{k=n}^{\infty}(k-n)^{\alpha}f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_kv_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

bunda $\alpha > 0$. [1-3] adabiyotlarda yuqoridagi (3) tengsizlik $l(k,n) = (k-n)^{\alpha}$ Oinarov yadrosi bilan berilgan diskret Hardi tipidagi tengsizlik va (4) ga unga qo‘shma tengsizlik deb ataladi. Yuqoridagi tengsizliklar va ularning turli umumlashmalari o‘tkan asrning ohirlarida intensiv tarzda o‘rganila boshladi. Bunga doir natijalarni [1-2] adabiyotlarda yoki internet sahifalarida bevosita ko‘rish mumkin. Keltirilgan natijalarda asosan tengsizliklar o‘rinli bo‘lishini taminlovchi shartlar olingan, lekin tadbiqiy nuqtai nazardan tengsizlikning eng yaxshi konstantasi uchun baholar olish ham juda muhim hisoblanadi. Ushbu ishda biz eng yaxshi konstanta uchun quyi va yuqori baholar olingan.

Teorema 1. *Faraz qilaylik $-\infty < q \leq p < 0$ va $\alpha > 0$ bo‘lsin. U holda (3) tengsizlik ixtiyoriy $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklarda o‘rinli bo‘lishi uchun ushbu shartlarning*

$$A_1 := \sup_{m\geq 1}\left(\sum_{n=m}^{\infty}(n-m)^{nq}u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{m}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty$$

and

$$A_2 := \sup_{m\geq 1}\left(\sum_{n=m}^{\infty}u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{m}(m-k)^{nq}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty$$

bajarilishi yetarli va zarurdir. Bundan tashqari, tengsizlikning eng yaxshi konstantasi uchun quyidagi baholar o‘rinli

$$A \leq C \leq 2^{q(1+\alpha)}qq'A,$$

bu yerda $A = \max\{A_1, A_2\}$.

Teorema 2. *Faraz qilaylik $-\infty < q \leq p < 0$ va $\alpha > 0$ bo‘lsin. U holda (4) tengsizlik ixtiyoriy $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklarda o‘rinli bo‘lishi uchun ushbu shartlarning*

$$A_3 := \sup_{m\geq 1}\left(\sum_{n=1}^{m}(m-n)^{nq}u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=m}^{\infty}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty$$

and

$$A_4 := \sup_{m\geq 1}\left(\sum_{n=1}^{m}u_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=m}^{\infty}(k-m)^{nq}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty$$

bajarilishi yetarli va zarurdir. Bundan tashqari, tengsizlikning eng yaxshi konstantasi uchun quyidagi baholar o‘rinli

$$\tilde{A} \leq C \leq 2^{q(1+\alpha)}qq'\tilde{A},$$

bu yerda $\tilde{A} = \max\{A_3, A_4\}$.

References

1. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type, World scientific: New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2003.
2. *Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E.* The Hardy inequality-about its history and some related results, Pilsen, 2007 y..
3. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. –Camb.Umiv.Press: Camb., Chap. 9, 1952.

Reverse discrete Hardy type inequalities with variable limits of summation

[1] **Kuliev K.D.**, [2] **Kulieva G.**, [3] **Eshimova M.K.**

[1] *Samarkand State University, Samarkand 140104, Uzbekistan*
e-mail: komilkuliev@gmail.com

[2] *Samarkand branch of Tashkent University of Informational Technology, Samarkand 140100, Uzbekistan*
e-mail: kulievag@mail.ru

[3] *Institute of Mathematics named after V.I.Ramonovsky at the Academy of Sciences of Uzbekistan, Samarkand 140104, Uzbekistan,*
e-mail: eshimova_math@mail.ru

Let p and q be real numbers. Let us consider the following discrete weighted Hardy type inequalities with variable limits of summation

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n\sum_{k=1}^{b(n)}f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_kv_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1}$$

and

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_kv_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n\sum_{k=1}^{b(n)}f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2}$$

for all sequences $\{f_n\}$ of positive numbers f_n, where $b(n)$ is a nondecreasing sequence such that $b(1)=1$ and $\lim\limits_{n\to\infty} b(n)=\infty$, $\{u_n\}$ and $\{v_n\}$ are sequences of positive numbers.

If $b(n)=n$, then inequalities (1) and (2) are called Hardy and "reverse"Hardy inequalities, respectively. In 1983, Andersen-Heinig gave the following equivalent condition

$$\sup_{m\ge1}\left(\sum_{k=m}^{\infty}u_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{m}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}<\infty$$

for the Hardy inequality (1) to hold in the case $1\le p\le q<\infty$ and estimates for its best possible constant C-the least constant for which the inequality holds. In 1985 Heinig proved a sufficient condition, later Bennet necessary and sufficient condition for inequality (1) to satisfy in the case $1\le q<p<\infty$. In 1992 Braverman-Stepanov considered the remaining case $0<p<1<q<\infty$, for more details see [2]. On the other hand, for $0<p=q<1$ and $u_n=\frac{1}{n}$, $v_n=1$ then the "reverse"Hardy inequality (2) is valid, see [4].

In 2010, all the above results on the Hardy inequality for the case $b(n)=n$ were generalized for a monotone increasing sequence $b(n)$ in [5-6]. Later, in 2021 the inequality (1) was also discussed in [3] for the case $1<p\le q<\infty$ and $b(n)$ is a nondecreasing, which was appeared in studying Hilbert-Stieltjes inequality.

In this paper we consider the "reverse"inequality (2) in the cases $-\infty<q\le p<0$ and $0<p\le q<1$ for $b(n)$ is a nondecreasing sequence such that $b(1)=1$ and $\lim\limits_{n\to\infty} b(n)=\infty$. We give a necessary and sufficient condition for the inequality to hold and lower and upper estimates for its best constant. Moreover, we study also the inequality with lower variable limit of summation

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_kv_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\le C\left(\sum_{n=1}^{\infty}|u_n\sum_{k=b(n)}^{\infty}f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

Theorem 1. *Let $-\infty<q\le p<0$. Then the inequality (2) holds for all $f=\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ if and only if*

$$A_1:=\sup_{m\ge1}\left(\sum_{n=1}^{m}u_n^q\right)^{-\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{b(m)}v_k^{-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}}<\infty. \tag{4}$$

Moreover, the best constant C of the inequality satisfies:

$$A_1 \le C \le \left(1 - \frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p'}} \left(-\frac{p'}{q}\right)^{-\frac{1}{q}} A_1.$$

Theorem 2. *Let $-\infty < q \le p < 0$. Then the inequality (3) holds for all $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ if and only if*

$$A_2 := \sup_{m \ge 1} \left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^q\right)^{-\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=b(m)}^{\infty} v_k^{-p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{5}$$

Moreover, the best constant C of the inequality satisfies:

$$A_2 \le C \le \left(1 + \frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(-1 - \frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} A_2.$$

Theorem 3. *Let $0 < p \le q < 1$. Then the inequality (2) holds for all $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ if and only if*

$$A_3 := \sup_{m \ge 1} \left(\sum_{n=m}^{\infty} u_n^{p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=b(m)}^{\infty} v_k^{-q}\right)^{-\frac{1}{q}} < \infty. \tag{5}$$

Moreover, the best constant C of the inequality satisfies:

$$A_3 \le C \le \left(1 + \frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{q}} \left(-1 - \frac{p'}{q}\right)^{\frac{1}{p'}} A_3.$$

Theorem 4. *Let $0 < p \le q < 1$. Then the inequality (3) holds for all $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ if and only if*

$$A_4 := \sup_{m \ge 1} \left(\sum_{n=1}^{m} u_n^{p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{b(m)} v_k^{-q}\right)^{-\frac{1}{q}} < \infty. \tag{4}$$

Moreover, the best constant C of the inequality satisfies:

$$A_4 \le C \le \left(1 - \frac{q}{p'}\right)^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{q}} \left(-\frac{q}{p'}\right)^{-\frac{1}{p'}} A_4.$$

References

1. *Kufner A., Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type, World scientific: New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, 2003.
2. *Kufner A., Maligranda L. and Persson L.-E.* The Hardy inequality-about its history and some related results, Pilsen, 2007 y..
3. *Temirkhanova A., Beszhanova A.* On a discrete Hilbert-Stieltjes inequality, Kazakh Math. Journal, 21:1(2021), 15-24.
4. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities.–Cambridge University Press: Cambridge, Chap. 9, 1952.
5. *Alkhliel A.* Discrete inequalities of Hardy type with variable limits of summation. I, Bull. PFUR, 4 (2010), 56-69 (in Russian).
6. *Alkhliel A.* Discrete inequalities of Hardy type with variable limits of summation. II, Bull. PFUR, 1 (2011), 5-13 (in Russian).

On the number and location of eigenvalues of the two particle Schrödinger operator on a lattice

[1]**Lakaev S.N.**, [2]**Abdukhakimov S.Kh**, [3]**Azizova M.A**
[1,2,3]*Samarkand State University (Uzbekistan),*
e-mail: abduxakimov93@mail.ru

Let $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \equiv [-\pi,\pi)^2$ be the two dimensional torus and $L^{2,o}(\mathbb{T}^2)$ be the Hilbert spaces of square-integrable odd functions on $\mathbb{T}^2$.

The two-particle Schrödinger operator $H_{\lambda\mu}(K)$, $K \in \mathbb{T}^2$ on the lattice $\mathbb{Z}^2$ associated to the Fermi-Hubbard Hamiltonian $\mathbb{H}_{\lambda\mu}$ of a system of two identical fermions interacting on nearest-neighbor and next nearest-neighbor sites in the two dimensional lattice $\mathbb{Z}^2$ with interaction magnitudes $\lambda \in \mathbb{R}$ and $\mu \in \mathbb{R}$, respectively, is a self-adjoint operator defined in $L^{2,o}(\mathbb{T}^2)$ as

$$H_{\lambda\mu}(K) := H_0(K) + V_{\lambda\mu},\ \ \lambda,\mu \in \mathbb{R},$$

where the unperturbed operator $H_0(K)$ is the multiplication operator by the function

$$\mathcal{E}_K(p) := 2\sum_{i=1}^{2}\Big(1 - \cos\tfrac{K_i}{2}\,\cos p_i\Big), \tag{1}$$

and the perturbation operator $V_{\lambda\mu}$ is given by

$$[V_{\lambda\mu}f](p) = \frac{\lambda}{(2\pi)^2}\sum_{i=1}^{2}\sin p_i\int\limits_{\mathbb{T}^2}\sin t_i f(t)\mathrm{d}t + \frac{\mu}{(2\pi)^2}\sum_{i=1}^{2}\sin 2p_i\int\limits_{\mathbb{T}^2}\sin 2t_i f(t)\mathrm{d}t$$
$$+\frac{\mu}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{i\neq j=1}^{2}\sin p_i\cos p_j\int\limits_{\mathbb{T}^2}\sin t_i\cos t_j f(t)\mathrm{d}t.$$

Recall that the two-particle Schrödinger operator $H_{\lambda\mu}(K)$, $K \in \mathbb{T}^2$ on the lattice $\mathbb{Z}^2$ and their essential and discrete spectra was studied (see e.g. [1,2,3]).

Since $V_{\lambda\mu}$ has rank at most six, by Weyl's Theorem for any $K \in \mathbb{T}^2$ the essential spectrum $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\lambda\mu}(K))$ of $H_{\lambda\mu}(K)$ coincides with the spectrum of $H_0(K)$, i.e.,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\lambda\mu}(K)) = \sigma(H_0(K)) = [\mathcal{E}_{\min}(K), \mathcal{E}_{\max}(K)],$$

where

$$\mathcal{E}_{\min}(K) := \min_{p\in\mathbb{T}^2}\ \mathcal{E}_K(p) = 2\sum_{i=1}^{2}\Big(1 - \cos\tfrac{K_i}{2}\Big) \geq 0 = \mathcal{E}_{\min}(0),$$
$$\mathcal{E}_{\max}(K) := \max_{p\in\mathbb{T}^2}\ \mathcal{E}_K(p) = 2\sum_{i=1}^{2}\Big(1 + \cos\tfrac{K_i}{2}\Big) \leq 8 = \mathcal{E}_{\max}(0),$$

where the function $\mathcal{E}_K$ is defined in (1).

Let

$$\mu_1^0 = \frac{88 - 30\pi + \sqrt{1044\pi^2 - 6720\pi + 10816}}{240\pi - 24\pi^2 - 512}\pi,$$
$$\mu_2^0 = \frac{88 - 30\pi - \sqrt{1044\pi^2 - 6720\pi + 10816}}{240\pi - 24\pi^2 - 512}\pi,$$
$$\mu_1 = \frac{128 - 16\pi - 9\pi^2 + \sqrt{225\pi^4 - 1440\pi^3 + 3904\pi^2 - 10240\pi + 16384}}{960\pi - 96\pi^2 - 2048},$$
$$\mu_2 = \frac{128 - 16\pi - 9\pi^2 - \sqrt{225\pi^4 - 1440\pi^3 + 3904\pi^2 - 10240\pi + 16384}}{960\pi - 96\pi^2 - 2048},$$
$$\mu_2 < \mu_2^0 < \mu_1 < \mu_1^0 < 0.$$

Theorem. *Let $K = 0$. Then followings are true:*

(i) *If* $\lambda < -3, \mu < -7$ *then* $H_{\lambda\mu}$ *has three eigenvalues of multiplicity two below the essential spectrum and has no eigenvalues above the essential spectrum.*

(ii) *If* $\lambda < -2$, $\mu_2 < \mu < \frac{\mu_1\mu_2-\mu_1^0\mu_2^0}{\mu_1+\mu_2-\mu_1^0-\mu_2^0}$ *or* $-2 < \lambda < \frac{2\pi}{\pi-2}$, $\mu < \mu_2$ *then* $H_{\lambda\mu}$ *has two eigenvalues of multiplicity two below the essential spectrum and has no eigenvalues above the essential spectrum.*

(iii) *If* $\lambda < -2$, $\mu_1 < \mu < -\mu_1^0$ *then* $H_{\lambda\mu}$ *has a one eigenvalue of multiplicity two below the essential spectrum and has no eigenvalues above the essential spectrum.*

(iv) *If* $\lambda > 2$, $\mu < \mu_2$ *then* $H_{\lambda\mu}$ *has two eigenvalues of multiplicity two below the essential spectrum and has a one eigenvalue of multiplicity two above the essential spectrum.*

(v) *If* $\lambda > 2$, $\frac{\mu_1\mu_2-\mu_1^0\mu_2^0}{\mu_1+\mu_2-\mu_1^0-\mu_2^0} < \mu < \mu_1$ *then* $H_{\lambda\mu}$ *has a one eigenvalue of multiplicity two below the essential spectrum and has a one eigenvalue of multiplicity two above the essential spectrum.*

(vi) *If* $-1.5 < \lambda < 1.5$, $-1.5 < \mu < 1.5$ *then* $H_{\lambda\mu}$ *has no eigenvalues outside of the essential spectrum.*

(vii) *If* $\lambda < -2$, $-\mu_1 < \mu < \frac{\mu_1\mu_2-\mu_1^0\mu_2^0}{\mu_1^0+\mu_2^0-\mu_1-\mu_2}$ *then* $H_{\lambda\mu}$ *has a one eigenvalue of multiplicity two above the essential spectrum and has a one eigenvalue of multiplicity two below the essential spectrum.*

(viii) *If* $\lambda < -2$, $\mu > -\mu_2$ *then* $H_{\lambda\mu}$ *has two eigenvalues of multiplicity two above the essential spectrum and has a one eigenvalue of multiplicity two below the essential spectrum.*

(ix) *If* $\lambda > 2$, $\mu_1^0 < \mu < -\mu_1$ *then* $H_{\lambda\mu}$ *has a one eigenvalue of multiplicity two above the essential spectrum and has no eigenvalues below the essential spectrum.*

(x) *If* $\lambda > 2$, $\frac{\mu_1\mu_2-\mu_1^0\mu_2^0}{\mu_1^0+\mu_2^0-\mu_1-\mu_2} < \mu < -\mu_2$ *or* $\frac{2\pi}{2-\pi} < \lambda < 2$, $\mu > -\mu_2$ *then* $H_{\lambda\mu}$ *has two eigenvalues of multiplicity two above the essential spectrum and has no eigenvalues below the essential spectrum.*

(xi) *If* $\lambda > 3, \mu > 7$ *then* $H_{\lambda\mu}$ *has three eigenvalues of multiplicity two above the essential spectrum and has no eigenvalues below the essential spectrum.*

References

1. *S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov.* The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices, Comm.Math.Phys., **262**, 2006, 91–115.
2. *S.N. Lakaev, S.Kh. Abdukhakimov.* Threshold effects in a two-fermion system on an optical lattice, Theoret. and Math. Phys., **203**, 2020, 251–268.
3. *S. Lakaev, Sh. Kholmatov, Sh. Khamidov.* Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: Exactly solvable case, J. Phys. A: Math. Theor. **54**, 2021, 245201.

Gershgorin's bounds for a 4×4 operator matrix in cut Fock space

Latipov H.

Bukhara State University, Uzbekistan

e-mail: hakimboylatipov@mail.ru

In the statistical physics, solid-state physics and theory of quantum fields, one considers the systems, where the number of quasi-particles is bounded, but not fixed. Often, the number of particles can be arbitrary large as in cases involving photons, in other cases, such as scattering of spin waves on defects, scattering massive particles and chemical reactions, there are only participants at any given time, though their number can be change. Recall that the study of systems describing

N particles in interaction, without conservation of the number of particles is reduced to the investigation of the spectral properties of self-adjoint operators, acting in the *cut subspace* of Fock space, consisting of $n \leq N$ particles. In the present note we discuss the case $N = 4$.

Let $\mathbb{C}$ be the field of complex numbers, $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ be the d-dimensional torus, $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^n$ be the Cartesian nth power of $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$ and $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^n)$ be the Hilbert space of square-integrable (complex) functions defined on $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^n$ for $n = 1, 2, 3$.

Denote

$$\mathcal{H}_0 := \mathbb{C},\ \mathcal{H}_n := L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^n),\ n = 1, 2, 3,\ \mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3.$$

The Hilbert space $\mathcal{H}$ is called *four-particle cut subspace* of Fock space or *cut* Fock space. We write elements f of the space $\mathcal{H}$ in the form

$$f = (f_0, f_1(k_1), f_2(k_1, k_2), f_3(k_1, k_2, k_3))$$

and its norm is given by

$$\|f\| := \left(|f_0|^2 + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} |f_1(k_1)|^2 dk_1 + \int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2} |f_2(k_1, k_2)|^2 dk_1 dk_2 + \int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3} |f_3(k_1, k_2, k_3)|^2 dk_1 dk_2 dk_3\right)^{1/2}.$$

Let A_{ij} be annihilation (creation) operators [1] defined in the Fock space for $i < j$ $(i > j)$. In this note we consider the case, where the number of annihilations and creations of the particles of the considering system equal to 1. It means that $A_{ij} \equiv 0$ for all $|i - j| > 1$. So, a model operator A associated to a system describing four particles in interaction, without conservation of the number of particles, acts in the Hilbert space $\mathcal{H}$ as a tridiagonal operator matrix

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Let its components $A_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2, 3$ are defined by the rule

$$A_{00} f_0 = \varepsilon f_0,\ A_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_0(t) f_1(t) dt;$$
$$(A_{11} f_1)(k_1) = (\varepsilon + u(k_1)) f_1(k_1),\ (A_{12} f_2)(k_1) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_1(t) f_2(k_1, t) dt;$$
$$(A_{22} f_2)(k_1, k_2) = (\varepsilon + u(k_1) + u(k_2)) f_2(k_1, k_2),\ (A_{23} f_3)(k_1, k_2) = \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v_2(t) f_3(k_1, k_2, t) dt;$$
$$(A_{33} f_3)(k_1, k_2, k_3) = (\varepsilon + u(k_1) + u(k_2) + u(k_3)) f_3(k_1, k_2, k_3),\ f_\alpha \in \mathcal{H}_\alpha,\ \alpha = 0, 1, 2, 3.$$

We make the following assumptions: $\varepsilon > 0$; the dispersion function $u(\cdot)$ and the interaction functions $v_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 0, 1, 2$ are real-valued continuous functions on $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$.

Under these assumptions the operator matrix $\mathcal{A}$ is bounded and self-adjoint in $\mathcal{H}$.

Remark that the operators A_{01}, A_{12} and A_{23} resp. A_{01}^*, A_{12}^* and A_{23}^* are called annihilation resp. creation operators, respectively. A trivial verification shows that

$$(A_{01}^* f_0)(k_1) = v_0(k_1) f_0, \quad f_0 \in \mathcal{H}_0;$$
$$(A_{12}^* f_1)(k_1, k_2) = v_1(k_2) f_1(k_1), \quad f_1 \in \mathcal{H}_1;$$
$$(A_{23}^* f_2)(k_1, k_2, k_3) = v_2(k_3) f_2(k_1, k_2), \quad f_2 \in \mathcal{H}_2.$$

These operators have widespread applications in quantum mechanics, notably in the study of quantum harmonic oscillators and many-particle systems. An annihilation operator lowers the number of particles in a given state by one. A creation operator increases the number of particles in a given state by one, and it is the adjoint of the annihilation operator.

Set

$$m := \min_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(k_1), \quad M := \max_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} u(k_1).$$

By $\|\cdot\|$ we denote the norm in $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$:

$$\|v_0\| = \left(\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} |v_0(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

The classical row sum Gershgorin theorem for matrices [2] was extended by Salas to bounded $n \times n$ operator matrices [3]. In the paper [4], for the self-adjoint semi-bounded $n \times n$ operator matrices an analogue of the Gershgorin theorem was proved and using it the Gershgorin bounds of the given operator are found. Here the Gershgorin bounds are calculated exactly using the properties of the elements of the operator matrix $\mathcal{A}$.

The main result of the present note is the following theorem.

Theorem 1. *For the lower and upper bounds of $\mathcal{A}$ we have*

$$\min \sigma(\mathcal{A}) \geq \min\{\varepsilon - \|v_0\|, \varepsilon + m - \|v_0\| - \|v_1\|, \varepsilon + 2m - \|v_1\| - \|v_2\|, \varepsilon + 3m - \|v_2\|\};$$
$$\max \sigma(\mathcal{A}) \leq \max\{\varepsilon + \|v_0\|, \varepsilon + M + \|v_0\| + \|v_1\|, \varepsilon + 2M + \|v_1\| + \|v_2\|, \varepsilon + 3M + \|v_2\|\}.$$

The formulated Theorem 1 is important in determining the location of the smallest and largest eigenvalues of the operator matrix $\mathcal{A}$.

Notice that, if $\mathrm{d} = 1$ and

$$u(x) = 1 - \cos x, \quad v_0(x) = v_1(x) = v_2(x) = \sin x,$$

then $m = 0$, $M = 2$ and $\|v_0\| = \sqrt{\pi}$, hence by Theorem 1 we have

$$\min \sigma(\mathcal{A}) \geq \varepsilon - 2\sqrt{\pi}, \ \max \sigma(\mathcal{A}) \leq \varepsilon + 4 + 2\sqrt{\pi}.$$

We remark that in [2] the cubic numerical range is used to establish new estimates for the spectrum of tridiagonal 3×3 self-adjoint operator matrices. This new bounds are compared with the classical perturbation theory as well as to the Gershgorin bounds and an application to three-channel Hamiltonians from quantum mechanics is given.

References

1. *K.O.Friedrichs.* Perturbation of spectra in Hilbert space. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1965.

2. *Roger A. Horn, Charles R. Johnson.* Matrix analysis, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

3. *H.N. Salas.* Gershgorin's theorem for matrices of operators, Lin. Alg. Appl. **291** (1999), pp. 15–36.

4. *T.H.Rasulov, C.Tretter.* Spectral inclusion for unbounded diagonally dominant $n \times n$ operator matrices, Rocky Mountain Journal of Mathematics. **48**:1 (2018), pp. 279–324.

Mixed fractional differential operators in Hölder spaces

[1]Mamatov T., [2]Rashidov A.
[1]*Bukhara Technological Institute of Engineering, Bukhara, Uzbekistan*
[2]*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*
e-mail: anvar.rashidov@bk.ru

In the present note we study mixed fractional derivatives in the Marchaud form of functions of two variables in Hölder spaces of different orders in each variables. We consider Hölder spaces defined both by first order differences in each variable and also by the mixed second order difference, the main interest being in the evaluation of the latter for the mixed fractional in both the cases where the density of the integral belongs to the Hölder class defined by usual or mixed differences. The obtained results extend the well known theorem of Hardy-Littlewood for one-dimensional fractional derivatives to the case of mixed Hölderness.

The mapping properties of the one-dimensional fractional Riemann-Liouville operator

$$(I^{\alpha}_{a+}f)(x)=\Gamma^{-1}(\alpha)(t_+^{\alpha-1}*f)(x),\quad 0<\alpha<1$$

are well studied both in Hölder spaces or in generalized Hölder spaces [1]-[4]. A non-weighted statement on action of the fractional integral operator from H_0^{β} into $H_0^{\beta+\alpha}$ is due to Hardy and Littlewood ([1], see Theorem 3.1), and it's known that the operator $I^{\alpha}_{\alpha+}$ with $0<\alpha<1$ establishes an isomorphism between the Hölder spaces $H_0^{\lambda}([a,b])$ and $H_0^{\lambda+\alpha}([a,b])$ of function vanishing at the point $x=a$ if $\lambda+\alpha<1$. The weighted results with power weights were obtained in [1] (see, Theorems 3.3 and 13.13). Such problems in the multidimensional case have been little studied, see [5],[6]. This paper is aimed to fill in this gap.

We consider the operator

$$(D^{\alpha_1,\alpha_2}_{0+,0+}\varphi)(x_1,x_2)=\frac{\varphi(x_1,x_2)}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}}$$

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)}\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\frac{\varphi(x_1,x_2)-\varphi(t_1,t_2)}{(x_1-t_1)^{1+\alpha_1}(x_2-t_2)^{1+\alpha_2}}dt_1dt_2,\ x_i>0, i=1,2 \qquad (1)$$

in the rectangle $Q=\{(x_1,x_2):0<x_1<b_1,0<x_2<b_2\}$.

For a continuous function $\varphi(x_1,x_2)$ on $\mathbb{R}^2$ we introduce the notation

$$(\Delta^{1,0}_{h_1}\varphi)(x_1,x_2)=\varphi(x_1+h_1,x_2)-\varphi(x_1,x_2),\quad (\Delta^{0,1}_{h_2}\varphi)(x_1,x_2)=\varphi(x_1,x_2+h_2)-\varphi(x_1,x_2),$$

$$(\Delta^{1,1}_{h_1,h_2}\varphi)(x_1,x_2)=\varphi(x_1+h_1,x_2+h_2)-\varphi(x_1,x_2+h_2)-\varphi(x_1+h_1,x_2)+\varphi(x_1,x_2),$$

so that

$$\varphi(x_1+h_1,x_2+h_2)=(\Delta^{1,1}_{h_1,h_2}\varphi)(x_1,x_2)+(\Delta^{1,0}_{h_1}\varphi)(x_1,x_2)+(\Delta^{0,1}_{h_2}\varphi)(x_1,x_2)+\varphi(x_1,x_2). \qquad (2)$$

Definition 1. *Let $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1]$. We say that $\varphi\in H^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$, if*

$$|\varphi(x_1,y_1)-\varphi(x_2,y_2)|\le C_1|x_1-x_2|^{\lambda_1}+C_2|y_1-y_2|^{\lambda_2} \qquad (3)$$

for all $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in Q$. Condition (3) is equivalent to the couple of the separate conditions

$$|(\Delta^{1,0}_{h_1}\varphi)(x_1,x_2)|\le C_1|h_1|^{\lambda_1},\quad |(\Delta^{0,1}_{h_2}\varphi)(x_1,x_2)|\le C_2|h_2|^{\lambda_2} \qquad (4)$$

Uniform with respect to another variable. By $H_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ we define a subspace of functions $f\in H_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ vanishing at the boundaries $x_i=0, i=1,2$ of Q.

Definition 2. *We say that $\varphi\in\widetilde{H}^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$, where $\lambda_i\in(0,1]$, $i=1,2$, if*

$$\varphi\in H^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)\quad \text{and}\quad |(\Delta^{1,1}_{h_1,h_2}\varphi)(x_1,x_2)|\le C_3|h_1|^{\lambda_1}|h_2|^{\lambda_2}.$$

We say that $\varphi(x_1,x_2)\in \widetilde{H}_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$*, if* $\varphi(x_1,x_2)\in \widetilde{H}^{\lambda,\lambda_2}(Q)$ *and* $\varphi(0,x_2)\equiv\varphi(x_1,0)\equiv 0$.

Lemma. *Let* $f(x_1,x_2)\in H^{\lambda_1,\lambda_2}(Q), \alpha_i<\lambda_i\le 1, i=1,2$*. Then for* (1) *the representation*

$$(D^{\alpha_1,\alpha_2}_{0+,0+}f)(x_1,x_2)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}(\frac{f(0,0)}{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}}+\frac{\psi_1(x_1)}{x_2^{\alpha_2}}+\frac{\psi_2(x_2)}{x_1^{\alpha_1}}+\psi(x_1,x_2))$$

holds, where

$$|\psi_1(x_1)|\le C_1x_1^{\alpha_1+\lambda_1},\quad |\psi_2(x_2)|\le C_2x_2^{\alpha_2+\lambda_2},\quad |\psi(x_1,x_2)|\le C_3x_1^{\theta\lambda_1-\alpha_1}x_2^{(1-\theta)\lambda_2-\alpha_2}$$

and

$$\psi_1(x_1)=x_1^{\alpha_1}[f(x_1,0)-f(0,0)]+\alpha_1\int_0^{x_1}[f(x_1,0)-f(t_1,0)](x_1-t_1)^{-\alpha_1-1}dt_1,$$

$$\psi_2(x_2)=x_2^{\alpha_2}[f(0,x_2)-f(0,0)]+\alpha_2\int_0^{x_2}[f(0,x_2)-f(0,t_2)](x_2-t_2)^{-\alpha_2-1}dt_2,$$

$$\psi(x_1,x_2)=x^{-\alpha}y^{-\beta}\frac{(\Delta^{1,1}_{x_1,x_2}f)(0,0)}{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}}+\alpha_1x_2^{-\alpha_2}\int\limits_0^{x_1}(\Delta^{1,1}_{x_1-t_1,x_2}f)(t_1,0)(x_1-t_1)^{-1-\alpha_1}dt_1+$$

$$+\alpha_2x_1^{-\alpha_1}\int\limits_0^{x_2}(\Delta_{x_1,x_2-t_1}f)(0,t_2)(x_2-t_2)^{-1-\alpha_2}dt_2+\alpha_1\alpha_2\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}\frac{(\Delta^{1,1}_{x_1-t_1,x_2-t_2}f)(t_1,t_2)}{(x_1-t_1)^{1+\alpha_1}(x_2-t_2)^{1+\alpha_2}}dt_1dt_2.$$

Theorem 1. *Let* $f(x_1,x_2)\in H_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q), \alpha_i<\lambda_i\le 1, i=1,2$*. The operator* $D^{\alpha,\beta}_{0+,0+}$ *is bounded from the space* $H_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *into* $H_0^{\lambda_1-\alpha_1,\lambda_2-\alpha_2}(Q)$.

Theorem 2. *Let* $f(x_1,x_2)\in \widetilde{H}_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q), \alpha_i<\lambda_i\le 1, i=1,2$*. The operator* $D^{\alpha,\beta}_{0+,0+}$ *is bounded from the space* $\widetilde{H}_0^{\lambda_1,\lambda_2}(Q)$ *into* $\widetilde{H}_0^{\lambda_1-\alpha_1,\lambda_2-\alpha_2}(Q)$.

References

1. *S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev.* Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. Gordon and Breach. Sci. Publ., N. York - London, 1993, 1012 pp.
2. *N.K. Karapetians, L.D. Shankishvili.* A short proof of Hardy-Littlewood-type theorem for fractional integrals in weighted Hölder spaces. Fract. Calc. Appl. Anal. 2, No 2 (1999), 177–192.
3. *N.K. Karapetians, L.D. Shankishvili.* Fractional integro-differentiation of the complex order in generalized Hölder spaces H0ω ([0, 1], ρ). Integral Transforms Spec. Funct. 13, No 3 (2003), 199–209
4. *S.G. Samko, Z. Mussalaeva.* Fractional type operators in weighted generalized Hölder spaces. Proc. Georgian Acad. Sci., Math. 1, No 5, (1993), 601–626
5. *T. Mamatov, S. Samko.* Mixed Fractional Integration Operators in Mixed Weighted Hölder Spaces. FCAA. Vol.13, Num 3. 2010, p. 245–259
6. *T. Mamatov.* Operators of Volterra convolution type in generalized Hölder spaces. Poincare Journal of Analysis and Applications, Vol. 7, No. 2 (2020), 275–288.

Invariant of nonlinear operators and their interpretation for quadratic stochastic operators

[1]**Masharipov S.**, [2]**Eshniyazov A.**
[1] *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.*
e-mail: sirojiddinmasharipov1995@gmail.com
[2] *Gulistan State University, Gulistan, Uzbekistan.*

This work about nonlinear operators and their some invariants. Especially, we want view when $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + c$ operator will be again such form which is $Q(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + C$. One of them, we multiply operator $Q(Q(x,y)) = Ax^2 + 2Bxy + C$ which a, b, c coefficients our operator will be again that form. All of our work depends on quadratic stochastic operators, we give some of the necessary concepts there.

Definition 1. The evaluation of the nonlinear stochastic operators as

$$(Vx)_k = \sum_{i=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j$$

where the $P_{ij,k}$ is the transaction matrix under the condition:

$$P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0, \sum_{k=1}^{m} P_{ij,k} = 1.$$

This $P_{ij,k}$ we may change with a,b,c and we interpret to quadratic stochastic operators. Thus, the appearance of our operator is as follows

$$(Vx)_k = \sum_{i=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j,$$

and we use it to the form above.

$$(Vx)_1 = \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij,1} x_i x_j = P_{11,1} {x_1}^2 + P_{12,1} x_1 x_2 + P_{22,1} {x_2}^2$$

$$(Vx)_2 = \sum_{i,j=1}^{2} P_{ij,2} x_i x_j = P_{11,2} {x_1}^2 + P_{12,2} x_1 x_2 + P_{22,2} {x_2}^2,$$

where $k = 2$. Consequently, we may research some problems and connection quadratic stochastic operator. In article, not only multiply operator also we will try to see other actions as well.

References

1. *F.Shahidi, R. Ganikhodzaev and R. Abdulghafor.* The dynamics of some extreme doubly stochastic quadratic operators. Middle east journal of scientific research.Malaysia. January 2013.
2. *N. P. Sokolov* Spartial matrices and their applications (Russian), Gosudarstv. Izdat. Fiz. -Mat. Lit., Moscow, 1960, pp,300.
3. *A.W. Marshall, I. Olkin, B. C. Arnold* Inequalities: Theory of majorization and its application, springer, New York, 2011.

On existence eigenvalues of the generalized Friedrichs model

[1]Muminov M., [2]Shadiev U.
[1] *Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan),*
e-mail: mmuminov@mail.ru
[2] *Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan),*
e-mail: usmon555@mail.ru

We denote by $\mathbb{T}^d$ the d-dimensional torus, the cube $(-\pi,\pi]^d$ with appropriately identified sides equipped with its Haar measure. Let $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ be the field of complex numbers, $\mathcal{H}_1 : L_2(\mathbb{T}^d)$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on $\mathbb{T}^d$

We consider a family of bounded selfadjoint operators (Friedrichs models)$h(k), k \in \mathbb{T}^d$, which acts in $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ as follows:

$$h(k) = \begin{pmatrix} h_{00}(k) & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11}(k) \end{pmatrix},$$

where

$$h_{00}(k)f_0 = (l_2\varepsilon(k)+1)f_0, \quad h_{01}f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{T^3} v_1(s)f_1(s)ds,$$

$h_{11}(k) = h_0(k) - \mathbf{v}$,

$$(h_0(k)f_1)(q) = E_k(q)f_1(q), \quad E_k(p) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(p-k),$$

$\mathbf{v}$ is the integral operator with the kernel $v(p-s)$.

Assumption. We assume that $\varepsilon_j(p), j = 1,2$, are continuous (periodic) real-valued functions on $T^d, d = 3,4$ with the single non-degenerate minimum point at the origin and

$$\liminf_{|p|\to 0} \frac{\varepsilon_j(p) - \varepsilon_j(0)}{|p|^2} > 0.$$

We also assume that $v(\cdot)$ is a continuous function on T^d such that

$$v(p) = \overline{v(-p)}, \quad p \in T^d, \quad d = 3,4.$$

We note that the Weyl theorem for the essential spectrum [1] implies that the essential spectrum $\sigma_{ess}(h(k))$ of the operator $h(k)$ remains unchanged under a compact perturbation v and coincides with the spectrum of the unperturbed operator $h_0(k)$. In this case, $\sigma_{ess}(h(k))$ coincides with the range of the function $E_k(\cdot)$, i.e.,

$$\sigma_{ess}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [E_{min}(k), E_{max}(k)],$$

where $\varepsilon_{min}(k) = min_p E_k(p)$ and $E_{max}(k) = max_p E_k(p)$. It follows from the above that $E_{min}(k) > E_{min}(0) = 0$ for $k \in T^d$.

Let $C(T^d)$ be the Banach space of continuous (periodic) functions on T^d and $G(\lambda), \lambda < E_0(0)$, be an integral operator with the (Birman - Schwinger) kernel

$$G(p,q;\lambda) = (2\pi)^{-d/2} v(p-q)(E_0(p)-\lambda)^{-1}, \quad p,q \in T^d.$$

The following possible cases for the eigenvalue of the operator $G(\lambda)$ for $\lambda = E_0(0)$ are discussed in detail in [2].

Case 1. The number -1 is a simple eigenvalue of the operator $G(E_0(0))$, and the corresponding eigenfunction ψsatisfies the condition

$$\frac{\psi(0)}{E_0(p) - E_0(0)} \notin L_2(T^d),$$

i.e.,

$$\dim Ker(h(0) - E_0(0)I) = 0, \quad \dim Ker(G(E_0(0)) + I) = 1.$$

Case 2. The number -1 is a multiple eigenvalue of the operator $G(E_0(0))$, and one of the corresponding eigenfunctions ψ satisfies the condition

$$\frac{\psi(0)}{E_0(p)-E_0(0)} \notin L_2(T^d),$$

i.e.,

$$\dim Ker(h(0)-E_0(0)I) \geq 2, \quad \dim Ker(h(0)-E_0(0)I) \geq \dim Ker(G(E_0(0))+I)+1.$$

Case 3. The number -1 is a multiple eigenvalue of the operator $G(E_0(0))$, and

$$\dim Ker(h(0)-E_0(0)I)+2 \leq \dim Ker(G(E_0(0))+I)$$

Definition. *Let $d=3,4$. If one of the Cases $1-3$ holds, then it is said that the operator $h(0)$ has a virtual level at zero (at the bottom of its essential spectrum).*

Theorem 1. *Let $d=3,4$ and the above assumption hold, and $\varepsilon_1(\cdot)$ and $\varepsilon_2(\cdot)$ be conditionally negativedefinite functions differentiable up to the second order. We assume that $h_{11}(\mathbf{0})$ has a virtual level (at the bottom of its essential spectrum). Then for each $k \in T^d \backslash \{\mathbf{0}\}$, the discrete spectrum of the operator $h_{11}(k)$ lying to the left of $E_{min}(k)$ is a nonempty set.*

Theorem 2. *Let $v(x)=\mu$ and $\varepsilon(k) \leq E_{min}(k)$. For any $\mu>0$ he operator $h(k)$ has an eigenvalue lying to the left $\varepsilon(k)$.*

References

1. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978.

2. *S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov.* One threshold effects for the two-particle Hamiltonians, Commun. Math. Phys., **262**, 2006, 91–115.

Description of the essential spectrum of operator matrix in bosonic Fock space. One dimensional case

[1]Muminov M., [2]Jurakulova F.

[1]*Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan*

e-mail: mmuminov@mail.ru

[2]*Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan*

e-mail: f_jurakulova@mail.ru

One special class of block operator matrices are Hamiltonians associated with systems of non-conserved number of quasi-particles on a lattice. Their number can be unbounded as in the case of spin-boson models or bounded as in the case of "truncated" spin-boson models. It is remarkable that lattice spin-boson model with at most two photons can be represented as a 6×6 operator matrix which is unitarily equivalent to a 2×2 block diagonal operator with the 3×3 operator matrices on the diagonal [1,2].

In the present paper we consider a 3×3 operator matrix $\mathcal{A}_\mu$, $\mu>0$. This operator matrix is associated with the lattice systems describing two identical bosons and one particle, another nature in interactions, without conservation of the number of particles. They act in the direct sum of zero-, one- and two-particle subspaces of the bosonic Fock space. In this note we investigate the location and structure of the essential spectrum of $\mathcal{A}_\mu$ with respect to $\mu>0$.

Let $\mathbb{T}$ be the one-dimensional torus, $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ be the field of complex numbers, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on $\mathbb{T}$ and $\mathcal{H}_2 := L_2^s(\mathbb{T}^2)$ be the Hilbert space of square-integrable symmetric (complex) functions defined on $\mathbb{T}^2$. We denote by $\mathcal{H}$ the direct sum of spaces $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ and $\mathcal{H}_2$, that is, $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

In the Hilbert space $\mathcal{H}$ we consider the operator matrix of the form:

$$\mathcal{A}_\mu := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{00} & \mathcal{A}_{01} & 0 \\ \mathcal{A}_{01}^* & \mathcal{A}_{11} & \mu\mathcal{A}_{12} \\ 0 & \mu\mathcal{A}_{12}^* & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mu > 0. \tag{1}$$

The matrix entries $\mathcal{A}_{ij} : \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i \le j$, $i, j = 0, 1, 2$ are given by:

$$\mathcal{A}_{00} f_0 = a f_0, \quad \mathcal{A}_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}} v(t) f_1(t) dt, \quad (\mathcal{A}_{11} f_1)(x) = f_1(x),$$

$$(\mathcal{A}_{12} f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}} f_2(x,t) dt, \quad (\mathcal{A}_{22} f_2)(x,y) = \omega(x,y) f_2(x,y),$$

$$\omega(x,y) := 3 - \cos x - \cos y - \cos(x+y), \quad f_i \in \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Here $a \in \mathbb{R}$; the function $v(\cdot)$ is a real-valued continuous function on $\mathbb{T}$. We remark that the operators $\mathcal{A}_{01}$ and $\mathcal{A}_{12}$, resp. $\mathcal{A}_{01}^*$ and $\mathcal{A}_{12}^*$ are called annihilation resp. creation operators, respectively. A trivial verification shows

$$\mathcal{A}_{01}^* : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1, \quad (\mathcal{A}_{01}^* f_0)(x) = v(x) f_0, \quad f_0 \in \mathcal{H}_0,$$

$$\mathcal{A}_{01}^* : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_1, \quad (\mathcal{A}_{12}^* f_1)(x,y) = \frac{f_1(x) + f_1(y)}{2}, \quad f_1 \in \mathcal{H}_1.$$

Under these assumptions, the operator $\mathcal{A}_\mu$ is bounded and self-adjoint. For any fixed $\mu > 0$ and $x \in \mathbb{T}$ let us consider the equations

$$1 - z - \frac{\pi\mu^2}{\sqrt{(3 - \cos x - z)^2 - 4\cos^2 \frac{x}{2}}} = 0, \quad z < 0, \tag{2}$$

$$1 - z + \frac{\pi\mu^2}{\sqrt{(3 - \cos x - z)^2 - 4\cos^2 \frac{x}{2}}} = 0, \quad z > \frac{9}{2}. \tag{3}$$

It is easy to check that for large values of $\mu > 0$ the equation (2) has an unique solution $E_\mu^{(1)}(x)$ in $(-\infty; 0)$ and the equation (3) has an unique solution $E_\mu^{(2)}(x)$ in $(\frac{9}{2}; \infty)$.

One can see that for any fixed $\mu > 0$ the functions $E_\mu^{(1)}(\cdot)$ and $E_\mu^{(2)}(\cdot)$ are continuous on its domain. Thus, the image of these functions are closed bounded intervals.

Main result of this note is the following theorem.

Theorem 1. *For the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ of $\mathcal{A}_\mu$ the equality $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \operatorname{Im} E_\mu^{(1)}(x) \cup [0; \frac{9}{2}] \cup \operatorname{Im} E_\mu^{(2)}(x)$ holds. Moreover,*

(i) for $\mu \in (0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}})$ we have

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = [\min E_\mu^{(1)}(x), \max E_\mu^{(2)}(x)]$$

(ii) For $\mu \in (\frac{2}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{\pi}}]$ the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ consists of two intervals

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \operatorname{Im} E_\mu^{(1)}(x) \cup [0, \max E_\mu^{(2)}(x)],$$

where $\max E_\mu^{(1)}(x) < 0$.

(iii) For $\mu > \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{\pi}}$ the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu)$ consists of three intervals

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_\mu) = \operatorname{Im} E_\mu^{(1)}(x) \cup [0; \frac{9}{2}] \cup \operatorname{Im} E_\mu^{(2)}(x)$$

with $\max E_\mu^{(1)}(x) < 0$ and $\frac{9}{2} < \min E_\mu^{(2)}(x)$.

Reference

1. *Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T.* On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case, Journal of Mathematical Physics, 2015, Vol. 56, 053507.
2. *Rasulov T.Kh.* Branches of the essential spectrum of the lattice spin-boson model with at most two photons, Theoretical and Mathematical Physics, 2016, Vol. 186, no. 2, pp. 251-267.

Asymptotics of the eigenvalue of a non-local discrete Schrödinger operator on two-dimensional lattice

[1]Muminov Z., [2]Ismoilov G.

[1] *Tashkent State University of Economics, Islam Karimov street 49, 100066, Tashkent, Uzbekistan,* e-mail:zimuminov@gmail.com

[2] *Samarkand State University, University Boulevard 15, 140104, Samarkand, Uzbekistan,* e-mail: golibjon.ismoilov.tdtu@gmail.com

Let $\mathbb{T}^2=(-\pi,\pi]^2$ be the two dimensional torus equipped with the Haar measure and $L^2(\mathbb{T}^2)$ be the Hilbert space of square-integrable functions on $\mathbb{T}^2$.

The momentum representation of the non-local discrete Schrödinger operator acts in the space $L^2(\mathbb{T}^2)$ as

$$\mathbf{h}_\mu := \mathbf{h}_0 - \mu\mathbf{V}, \mu \geq 0, \tag{1}$$

where $\mathbf{h}_0$ is a multiplication operator by the function $\mathfrak{e}(p)$:

$$(\mathbf{h}_0 f)(p) = \mathfrak{e}(p) f(p),\ f \in L^2(\mathbb{T}^2),$$

here

$$\mathfrak{e}(p) = \left(\sum_{i=1}^{2}(1-\cos p_i)\right)^3$$

and $\mathbf{V}$ is the rank-one integral operator

$$(\mathbf{V}f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2} f(q)\,dq.$$

Since $\mathbf{h}_\mu$ is selfadjoint and V is a rank one operator, according to the Weyl's theorem on stability of essential spectrum, the following relation holds

$$\sigma_{ess}(\mathbf{h}_0-\mu\mathbf{V}) = \sigma(\mathbf{h}_0), i.e., \sigma_{ess}(\mathbf{h}_\mu) = [\mathfrak{e}_{\min}, \mathfrak{e}_{\max}]$$

where $\mathfrak{e}_{\min}=0$ and $\mathfrak{e}_{\max}=64$.

We start with the following lemma in which we get an equation for eigenvalues of $\mathbf{h}_\mu$ and similar result were proved for in [2].

Lemma1. *A number $z \in [0,64]$ is an eigenvalue of h_μ if and only if $\Delta(\mu;z)=0$, where*

$$\Delta(\mu;z) := 1 - \frac{\mu}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2}\frac{dq}{\mathfrak{e}(q)-z}.$$

The main result of the work is the following.

Theorem. *For any $\mu>0$, the operator $\mathbf{h}_\mu$ has a unique eigenvalue $z(\mu)\in(-\infty,0)$ with the associated eigenfunction*

$$f_\mu(p) = \frac{1}{\mathfrak{e}(p)-z(\mu)}.$$

Moreover:

a) *the function* $\mu \in (0,\infty) \mapsto z(\mu)$ *is real-analytic, strictly decreasing with asymptotics*

$$\lim_{\mu\to+\infty} \frac{z(\mu)}{\mu} = 1 \quad \text{and} \quad \lim_{\mu\to 0+} \frac{z(\mu)}{\mu^{3/2}} = \frac{1}{108^{3/4}}.$$

b) *there exists* γ *such that*

$$\sqrt[3]{-z(\mu)} = \frac{1}{\sqrt[4]{108}}\mu^{1/2} + \sum_{n,m\geq 0, n+m>0} d_{nm}\mu^{\frac{n+1}{2}}(-\mu\ln\mu)^m$$

for any $\mu \in (0,\gamma)$, where $\{d_{nm}\}$ *are some real coeffcient.*

References

1. *Albeverio,S., Lakayev,S.,Muminov,Z.:* Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann.Inst.H.Poincare Phys. Theor. **5**,743—772 (2004)
2. *Lakayev,S.,Kholmatov,S.:* Asymptotics of the eigenvalues of a discrete Schrödinger operators with zero-range potential.Izv.Math.**76**, 946—966 (2012)
3. *Hiroshima,F., Lörinczi,J.:* The spectrum of non-local discrete Schrödinger operators with a $\delta-$ potential. Pacific J.Math.Industry **6**,1—6,(2014)

Three Dimensional One-Particle Shrödinger Operator with Point Interaction

[1]Muminov Z., [2]Kulzhanov U., [3]Ismoilov G.

[1] *Tashkent State University of Economics, Romanovsky Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan*

e-mail: zimuminov@gmail.com

[2] *Samarkand State University, Samarkand branch of Tashkent State University of Economics, Samarkand, Uzbekistan,*

e-mail: uquljonov@bk.ru

[3] *Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan*

e-mail: golibjon.ismoilov.tdtu@gmail.com

Introduction

The problems of the point interaction of two and three identical quantum particles interacting via point potentials (also called contact potentials which are occasionally singular potentials) have been studied in various physical works. In the works of [1,2,3] rigorous mathematical description of the point interaction were first proposed for two and three particles, respectively. The proposed extension is called the Skornyakov-Ter-Martirosyan expansion.

In this article, using the basic scheme used in [1-3], we establish the Skornyakov-Ter-Martirosyan extension h of the associated Hamiltonian of the system of two particles. It is proved that the essential spectrum of the expansion under consideration coincides with the set of the non-negative real numbers and the condition for the existence of the eigenvalue of the Schrödinger operator is studied. The main results of the work are based on the study of the spectrum of the expansion of the operator h. We describe the essential spectrum (Theorem 2) and explicitly derive (Theorem 3) the existence of eigenvalues of the operator and their dependance on the parameter $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

Preliminaries and Selection of Extension

The Hamiltonian (energy operator) of the one-particle system under consideration is defined as some extension $\hat{h}$ of the next symmetric operator $\hat{h}_0$, acting in the Hilbert space $L^2(\mathbb{R}^3) \equiv L^2$ by the operator

$$(\hat{h}_0\phi)(x) = -(\Delta\phi)(x),$$

defined on the manifold

$$D(\hat{h}_0) = \{\phi \in L^2, \phi(\pm x_0) = 0\},\ x_0 \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\theta\},$$

where Δ is the Laplace operator.

Operator h_0 is a Fourier transform of the operator $\hat{h}_0$ will go over to the operator

$$(h_0 f)(p) = p^2 f(p)$$

defined on the set $D(h_0) \subset L^2$ of functions $f(p)$, satisfying the following conditions:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} p^4 \mid f(p) \mid^2\ dp < \infty, \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{\pm i x_0 p} f(p)\, dp = 0. \tag{1}$$

According to [18] the defeciency subspace $\mathfrak{R}_z$ of the operator h_0, is determined by

$$\mathfrak{R}_z = \left\{\Phi \in L^2(\mathbb{R}^3) : ((h_0 - zI)f, \Phi) = 0, \quad f \in D(h_0)\right\}.$$

Lemma 1. *For any $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ the defeciency subspace $\mathfrak{R}_z \subset L^2(\mathbb{R}^3)$ of h_0 consists of functions of the form*

$$\Phi(p) = \frac{c_1 e^{i(x_0,p)} + c_2 e^{-i(x_0,p)}}{p^2 - \bar{z}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}^1.$$

It follows from Lemma 1 that for any $z \in \Pi_0$ the defeciency subspace $\mathfrak{R}_z$ is two-dimensional. Therefore, h_0 is a symmetric operator with defective indices (2,2). Since the operator h_0 is non-negative, as in [1,2,3], we use the theory of extensions of semibounded operators.

The extension of the operator h_0 to the domain $D(h)$ is denoted by h and it has the form

$$(hg)(p) = p^2 g(p) - c_1 e^{i(x_0,p)} - c_2 e^{-i(x_0,p)}.$$

By the definition of h, it is an extension of the operator h_0.

Theorem 1. *The extension h is a self-adjoint operator.*

The main results of the paper are the following theorems.

Theorem 2. *The essential spectrum of the operator h coincides with the semiaxis $[0, \infty)$.*

Since h is a self-adjoint operator and its eigenvalues of the operator h can lie in the interval $(-\infty; 0)$.

Theorem 3. *For any $y \in (0, \infty)$, the operator h has simple eigenvalues $z_1(y)$ and $z_2(y)$, and the eigenfunctions corresponding to these eigenvalues are of the form*

$$g_1(p) = \frac{\cos(x_0 p)}{p^2 - z_1(x_0)} \quad \text{and} \quad g(p) = \frac{\sin(x_0 p)}{p^2 - z_2(x_0)}.$$

References

1. *F.A. Berezin, L.D. Faddeev*, "Remark on the Schrödinger equation with singular potential,"Dokl. Akad. Nauk SSSR, **137** (5), 1011-1014 (1961).
2. *R.A. Minlos, L.D. Faddeev*, "Point interaction for a three-particle system in quantum mechanics,"Dokl. Akad. Nauk SSSR, **141** (6), 1335-1338 (1961).
3. *R.A. Minlos, L.D. Faddeev*, "Comment on the problem of three particles with point interactions,"Sov. Phys. JETP **14** (6), 1315-1316 (1962).

Ground States for p-SOS Model on the Cayley Tree

[1]Mustafoyeva Z., [2]Yarashova O‘.

[1] *Mathematical analysis, Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: mustafoyeva53@gmail.com

[2]*Bukhara State University, Bukhara, Bukhara, Uzbekistan,*
e-mail: ogiloyyarashova@gmail.com

One of fundamental problems is to describe the extreme Gibbs measures corresponding to a given Hamiltonian. Each Gibbs measure is associated with a single phase of a physical system. Existence of two or more Gibbs measures means that phase transitions exist.

As is known, the phase diagram of Gibbs measures for a Hamiltonian is close to the phase diagram of isolated (stable) ground states of this Hamiltonian. At low temperatures, a periodic ground state corresponds to a periodic Gibbs measure. Therefore, the problem of description of periodic ground states naturally arises.

One of the most studied model of statistical mechanics is the solid-on-solid (SOS) model. In particular, this model plays a very special role in statistical mechanics and can be treated as a natural genenralization of the Ising model [1].

In this paper we consider the p-SOS model with several spin values $0, 1, 2, ..., m, m \geq 2$ on a Cayley tree of order k. In the case $m = 2$ and any k, ground states for the p-SOS model are described.

Main definitions and the background. The Cayley tree (Bethe lattice) Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., a graph without cycles, such that exactly $k + 1$ edges originate from each vertex[2]. Let $\Gamma^k = (V, L)$ where V is the set of vertices and L the of edges. Two vertices x and y are called *nearest-neighbors* if there exists an edge $l \in L$ connecting them and we denote $l =< x, y >$. A collection of nearest neighbor pairs $< x, x_1 >, < x_1, x_2 >, ..., < x_{d-1}, y >$ is called a *path* from x to y. The distance $d(x, y)$ on the Cayley tree is the number of edges of the shortest path from x and y.

For a fixed $x^0 \in V$, called the root, we set

$$W_n = \{x \in V | d(x, x^0) = n\}, \quad V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m$$

be respectively the sphere and the ball of radius n centered at x^0.

It is well-known that there exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order $k \geq 1$ and the group G_k of the free products of $k + 1$ cyclic groups of second order with generators $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ [2].

Assume that spin takes its values in the set $\Phi = \{0, 1, 2, ..., m\}$. By a configuration σ on V we mean a function taking $\sigma : x \in V \longmapsto \sigma(x) \in \Phi$. The set of all configurations coincides with the set $\Omega = \Phi^V$.

p-SOS model is given by Hamiltonian:

$$H(\sigma) = -J \sum_{<x,y> \in L} |\sigma(x) - \sigma(y)|^p, \tag{1}$$

where $J \in R$, $p \in R$ and $\sigma \in \Omega$ [3].

The SOS model of this type can be considered as a generalization of the Ising model (which arises when $m = 1$). Here, $J < 0$ gives ferromagnetic (FM) and $J > 0$ an antiferromagnetic (AFM) model. In the FM case with zero external field the ground states are 'flat' configurations, with $\sigma(x) = j \in \Phi$ (there are $m+1$ of them), in the AFM two 'contrasting‘ checher-board configurations, where $|\sigma(x) - \sigma(y)| = m$, $\forall < x, y >$.

Comparing with the Potts model, the SOS model with zero external field has 'less symmetry' and therefore more diverse structure of phases. For example, in the FM case it is intuitively plansible that the ground states corresponding to 'middle-level' surfaces will be 'dominant'. This observation was made formal in Ref's for the model on a cubic lattice.

Let M be the set of all unit balls with vertices in V. By the restricted configuration σ_b, we mean the restriction of a configuration σ to a ball $b \in M$. The energy of a configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = U(\sigma_b, J) = -\frac{1}{2}J \sum_{<x,y>\in L} |\sigma(x) - \sigma(y)|^p.$$

Note that $U(\sigma_b)$ has finitely many values for arbitary configuration σ [4].

It is not difficult to prove the following Lemma.

Lemma 1. *Let $m = 2$ and $k \geq 2$. For each configuration σ_b, we have the following*

$$U(\sigma_b) \in \{U_1(\sigma_b), U_2(\sigma_b), ..., U_n(\sigma_b), ...\}$$

where

$$U_1(\sigma_b) = 0, \quad U_2(\sigma_b) = -\frac{J}{2}, \quad U_3(\sigma_b) = -\frac{J}{2} \cdot 2^p, \quad U_4(\sigma_b) = -\frac{J}{2} \cdot 3^p,$$

$$...$$

$$U_i(\sigma_b) = -\frac{J}{2} \cdot (i-1)^p,$$

$$...$$

For every $k \geq 2$, we get $i = 3 + 2k$, $|U_i| = 3 + 2k$.

Remark. *We note that all periodic ground states (in particular, translation invariant ones) for the SOS model with an external field are given in [1] in the case where $k = 2$ and $m = 2$.*

Definition 1. *A configuration φ is said to be the ground state of the relative Hamiltonian H if $U(\varphi_b) = \min\{U_1(\sigma_b), U_2(\sigma_b), ..., U_n(\sigma_b), ...\}$ for any $b \in M$. We set $C_i = \{\sigma_b : U(\sigma_b) = U_i\}$ and $U_i(J) = U(\sigma_b, J)$ if $\sigma_b \in C_i, i = 1, 2, ..., n, ...$*

If a ground state is a periodic configuration, then we call it a periodic ground state.

For any $i = 1, 2, ..., n, ...$, we set

$$A_i = \{(J, p) \in R^2 : U_i(\sigma_b) = \min\{U_1(\sigma_b), U_2(\sigma_b), ..., U_n(\sigma_b), ...\}\}.$$

Rather cumbersome but straightforward calculations show that

$$A_1 = \{(J, p) \in R^2 : J \leq 0, p \in R\},$$

$$A_2 = \{(J, p) \in R^2 : J \geq 0, p \leq 0\},$$

$$A_3 = A_4 = ... = \{(J, p) \in R^2 : J \geq 0, p = 0\},$$

$$...$$

$$A_n = \{(J, p) \in R^2 : J \geq 0, p \geq 0\},$$

$$...$$

and $\bigcup_n A_n = R^2$.

Theorem 1. *For any class $C_i, i = 1, 2, ..., n, ...$ and any bounded configuration $\sigma_b \in C_i$, there exists a periodic configuration φ (on the Cayley tree) such that $\varphi_{b'} \in C_i$ for any $b' \in M$ and $\varphi_b = \sigma_b$.*

References

1. *M.M.Rahmatullayev, M.R.Abdusalomova, M.A.Rasulova.* Ground states for the SOS model with an external field on the Cayley tree, Uzbek Math.Jour., No.2, 145-156, 2020.

2. *U.A.Rozikov* Gibbs measures on Cayley trees, World scientific, 2013.

3. *U.A.Rozikov, Y.M.Suhov.* Gibbs measures for SOS models on a Cayley tree, Infinite dimensional analysis, Quantum Probability and related topics, Vol. 9, No. 3(2006) 471-488.

4. *G.I.Botirov, U.U.Qayumov.* Ground states for the Potts model with competing interactions and a countable set of spin values on a Cayley tree, Theoretical and Mathematical Physics, 209(2): 1634-1643, 2021.

On the number of fixed points of a fourth degree operator

[1]**Nodirov Sh.**, [2] **Raximov F.**

[1] *Karshi State University, Karshi, Uzbekistan,*
e-mail: shoh0809@mail.ru

[2] *Karshi State University, Karshi, Uzbekistan,*
e-mail: Raximov766@gmail.com

A fourth degree operator under study arose in the study of translation-invariant Gibbs measures for models from [3] on the Cayley tree Γ^k in the case $k = 4$. Note that in the cases $k = 2$ and $k = 3$ were studied in [1-2]. In [3], sufficient conditions were found for the number of positive fixed points of a fourth degree operator (quartic) in the case $Q < 0$. In this paper, we study the number of positive fixed points of a fourth degree operator in the case $Q > 0$.

We put

$$\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, y \geq 0\}, \quad \mathbb{R}^2_> = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, y > 0\}.$$

We consider the following operator $\mathcal{Q}_4$ on the cone $\mathbb{R}^2_+$:

$$\mathcal{Q}_4(x, y) = \left(\sum_{i=0}^{4} C_4^i a_i x^{4-i} y^i, \ \sum_{i=0}^{4} C_4^i b_i x^{4-i} y^i \right),$$

where $C_4^i = \frac{4!}{(4-i)!i!}$ (binomial coefficient), $a_i > 0$ and $b_i > 0$ for all $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. This operator is composed of two polynomials of the fourth degree in two variables, therefore we call the operator $\mathcal{Q}_4$ a quartic. Clearly, an arbitrary nontrivial positive fixed point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$ of the quartic operator (QO) $\mathcal{Q}_4$ is a strictly positive, i.e. $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_>$. We denote a number of fixed points of the QO $\mathcal{Q}_4$ belong to $\mathbb{R}^2_>$ by $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_4)$.

Problem 1. *Find sufficient conditions for the number of fixed points of the operator Q_4 in $\mathbb{R}^2_>$.*

Lemma 1. *If $\omega = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_>$ is a fixed point of the QO $\mathcal{Q}_4$, then $\xi_0 = \frac{y_0}{x_0}$ is root of the algebraic equation*

$$a_4\xi^5 + (4a_3 - b_4)\,\xi^4 + (6a_2 - 4b_3)\,\xi^3 + (4a_1 - 6b_2)\xi^2 - (a_0 - 4b_1)\xi - b_0 = 0. \tag{1}$$

Lemma 2. *If ξ_0 is a positive root of the algebraic equation (1), then the point $\omega_0 = (x_0, \xi_0 x_0) \in \mathbb{R}^2_>$ and ξ_0 is a fixed point of the QO $\mathcal{Q}_4$, where*

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{\sum\limits_{i=0}^{4} C_4^i a_i \xi_0^i}}.$$

We put

$$\mu_0 = a_4, \ \ \mu_1 = 4a_3 - b_4, \ \ \mu_2 = 6a_2 - 4b_3, \ \ \mu_3 = 4a_1 - 6b_2, \ \ \mu_4 = a_0 - 4b_1, \ \ \mu_5 = b_0$$

and define the polynomial $P_5(\xi)$ of degree 5:

$$P_5(\xi) = \mu_0\xi^5 + \mu_1\xi^4 + \mu_2\xi^3 + \mu_3\xi^2 + \mu_4\xi - \mu_5.$$

By the Lemmas 1, 2 the following corollary is true.

Corollary 1. *A number of positive fixed points of QO $\mathcal{Q}_4$ equal to number of positive roots of the polynomial $P_5(\xi)$.*

Lemma 3. *The polynomial $P_5(\xi)$ has at least one strictly positive root.*

Proposition 1. *The polynomial $P_5(\xi)$ can have up to five strictly positive roots.*

We put

$$a = -\frac{p^2}{12} - r, \quad b = -\frac{p^3}{108} + \frac{pr}{3} - \frac{q^2}{8},$$

where

$$p = \frac{15\mu_0\mu_2 - 6\mu_1^2}{25\mu_0^2}, \quad q = \frac{50\mu_0^2\mu_3 + 8\mu_1^3 - 30\mu_0\mu_1\mu_2}{125\mu_0^3},$$

$$r = \frac{15\mu_0\mu_1^2\mu_2 - 50\mu_0^2\mu_1\mu_3 - 3\mu_1^4 - 125\mu_0^3\mu_4}{625\mu_0^4}.$$

Denote

$$Q = \left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Theorem 1. *Let $Q > 0$, then the QO $\mathcal{Q}$ can have up to three fixed points in $\mathbb{R}^2_>$, i.e. $1 \leq N^{fix}_>(\mathcal{Q}) \leq 3$.*

References

1. *Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D., Haydarov F.H.* Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures. Positivity, **20** No 4, (2016), 929-943.
2. *Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D.* Positive Fixed Points of Cubic Operators on $\mathbb{R}^2$ and Gibbs Measures, Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics, 12(6),(2019), 663-673.
3. *Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D.* On the positive fixed points of quartic operators, Journal of Siberian Federal University. Mathematics, Bulletin of the Institute of Mathematics 2020, 3, pp.27-36.

About one monotonic function related matrix

[1] **Qushaqov H.**, [2] **Yusupov I.**, [3]**Muhammadjonov A.**
[1] *Andijan State University, Andijan, Uzbekistan*
e-mail: xolmurodjonqoshaqov737@gmail.com
[2] *Andijan State University, Andijan, Uzbekistan*
e-mail: ikromyusupov@gmail.com
[3] *Andijan State University, Andijan, Uzbekistan*
e-mail: akbarshohmuhammadjonov6764@gmail.com

This work was intended as an attenpt to check funktions described by (1) funktion. Becouse, this kind of function plays vital role on theory of differential games. In this paper,we show that(1) funktion is decreasing funktion which is important factor for the next steps.

It can be shown that for the matrix

$$A_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, ...$$

we have

$$e^{A_i t} = e^{-\lambda_i t}\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2}t^2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, ...$$

where λ_i is a given non negative real numbers.

Let

$$\begin{aligned}
W_i(t) &= \int\limits_0^t e^{-A_i s}e^{-A_i^* s}ds = \int\limits_0^t \begin{bmatrix}e^{\lambda_i s} & -e^{\lambda_i s}s & \frac{1}{2}e^{\lambda_i s}s^2\\ 0 & e^{\lambda_i s} & -e^{\lambda_i s}s\\ 0 & 0 & e^{\lambda_i s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\lambda_i s} & 0 & 0\\ -e^{\lambda_i s}s & e^{\lambda_i s} & 0\\ \frac{1}{2}e^{\lambda_i s}s^2 & -e^{\lambda_i s}s & e^{\lambda_i s}\end{bmatrix}ds\\
&= \begin{bmatrix}\int\limits_0^t e^{2\lambda_i s}(1+s^2+\frac{1}{4}s^2)ds & \int\limits_0^t e^{2\lambda_i s}(-s-\frac{1}{3}s^3)ds & \int\limits_0^t \frac{1}{2}e^{2\lambda_i s}s^2 ds\\ \int\limits_0^t e^{2\lambda_i s}(-s-\frac{1}{3}s^3)ds & \int\limits_0^t e^{2\lambda_i s}(1+s^2)ds & \int\limits_0^t -e^{2\lambda_i s}sds\\ \int\limits_0^t \frac{1}{2}e^{2\lambda_i s}s^2 ds & \int\limits_0^t -e^{2\lambda_i s}sds & \int\limits_0^t e^{2\lambda_i s}ds\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \varphi_{13}(t)\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \varphi_{22}(t)\\ \varphi_{31}(t) & \varphi_{32}(t) & \varphi_{33}(t)\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
&\varphi_{11}(t) = \int\limits_0^t e^{2\lambda_i s}(1+s^2+\tfrac{1}{4}s^2)ds, \quad \varphi_{12}(t) = \int\limits_0^t e^{2\lambda_i s}(-s-\tfrac{1}{3}s^3)ds, \quad \varphi_{13}(t) = \int\limits_0^t \tfrac{1}{2}e^{2\lambda_i s}s^2 ds\\
&\varphi_{21}(t) = \int\limits_0^t e^{2\lambda_i s}(-s-\tfrac{1}{3}s^3)ds, \quad \varphi_{22}(t) = \int\limits_0^t e^{2\lambda_i s}(1+s^2)ds, \quad \varphi_{23}(t) = \int\limits_0^t -e^{2\lambda_i s}sds\\
&\varphi_{31}(t) = \int\limits_0^t \tfrac{1}{2}e^{2\lambda_i s}s^2 ds \quad \varphi_{32}(t) = \int\limits_0^t -e^{2\lambda_i s}sds \quad \varphi_{33}(t) = \int\limits_0^t e^{2\lambda_i s}ds.
\end{aligned}$$

We show that the function

$$f(t) = \eta_{i0}W_i^{-1}(t)\eta_{i0}^*, \quad i = 1, 2, ... \tag{1}$$

is a decreasing function of t on $(0, \infty)$.

Since, for $\eta_{i0} = (x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}) \neq 0$,

$$\eta_{i0}W_i(t)\eta_{i0}^* = \int\limits_0^t \left|e^{-A_i^* s}\eta_{i0}^*\right|^2 ds > 0, \tag{2}$$

therefore the matrix $W_i(t)$ is positive definite. This implies, in particular, that the determinant $|W_i(t)|$ of the matrix $W_i(t)$ is positive.

It's clear that any matrices multiplied by ....

$$W_i^{-1}(t)W_i(t) = I, \quad I = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{3}$$

By differentiably (3) equality, we obtain

$$\frac{d}{dt}(W_i^{-1}(t)W_i(t)) = \frac{d}{dt}I$$

$$\frac{d}{dt}(W_i^{-1}(t))W_i(t)) + W_i^{-1}(t)\frac{d}{dt}(W_i(t)) = 0$$

Hence, we have the derivation of $W_i^{-1}(t)$

$$\frac{d}{dt}(W_i^{-1}(t)) = -W_i^{-1}(t)\frac{d}{dt}(W_i(t))W_i^{-1}(t).$$

If wedifferentiate $W_i(t)$ funktion, we obtain that

$$\frac{d}{dt}(W_i(t)) = e^{-A_i t}e^{-tA_i^*}.$$

So, the derivation of $W_i^{-1}(t)$ is simplifeed a little

$$\frac{d}{dt}(W_i^{-1}(t)) = -W_i^{-1}(t)e^{-A_i t}e^{-tA_i^*}W_i^{-1}(t).$$

Then

$$\frac{d}{dt}(f(t)) = \eta_{i0}\frac{d}{dt}(W_i^{-1}(t)\eta_{i0}^*) = -\eta_{i0}W_i^{-1}(t)e^{-A_i t}e^{-tA_i^*}W_i^{-1}(t)\eta_{i0}^* \tag{4}$$

where $f(t) = \eta_{i0}W_i^{-1}(t)\eta_{i0}^*$.

From (4) we denote that $y = \eta_{i0}W_i^{-1}(t)$ and it is not difficult to see that $ye^{-A_i t} = e^{-A_i^* t}y^*$, where $y^* = W_i^{-1}(t)\eta_{i0}^*$.

Thus,

$$\frac{d}{dt}(f(t)) = -ye^{-A_i t}e^{-tA_i^*}y^* = -\left|ye^{-A_i t}\right|^2 = -\left|\eta_{i0}W_i^{-1}(t)e^{-A_i t}\right|^2 < 0.$$

Hence, $f(t)$ is decreasing function on $(0, \infty)$.

References

1. *Tao T.* Analysis 1, 2. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. *Р.В.Белман* ведение теории матриц.-М., Наука, 1976.
3. *Ibragimov G.I, Qushaqov H.Sh* Infinite system of 2-systems of differential equations in Hilbert space l_2. Uzbek Mathematic Journal, 98-106.

Periodic Ground States for the one modified SOS model

[1]Rahmatullaev M., [2]Askarov J.

[1] *V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, (Toshkent, Uzbekistan),*
e-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

[2] *Namangan State University (Namangan, Uzbekistan),*
e-mail: askarovjavokhir02@gmail.com

Let $\tau^k = (V, L)$ be a Cayley tree of order k, i.e, an infinite tree such that exactly $k+1$ edges are incident to each vertex. Here V is the set of vertices and L is the set of edges of τ^k (for more details see [1], [2] and references therein).

Let G_k denote the free product of $k+1$ cyclic groups $\{e, a_i\}$ of order 2 with generators $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$, i.e., let $a_i^2 = e$.

There exists a one-to-one correspondence between the set V of vertices of the Cayley tree of order k and the group G_k[1].

For each $x \in G_k$, let $S_1(x)$ denote the set of all neighbors of x, i.e., $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y\rangle\}$, where $\langle x, y\rangle$ means that the vertices x and y are nearest neighbors.

Assume that spin takes its values in the set $\Phi = \{-1, 0, 1\}$. By a configuration σ on V we mean a function taking $\sigma : x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. The set of all configurations coincides with the set $\Omega = \Phi^V$.

Consider the quotient group $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$, where G_k^* is a normal subgroup of index r with $r \geq 1$.

Definition 1. A configuration σ is called to be G_k^*-periodic if $\sigma(x) = \sigma_i$ for all $x \in G_k$ with $x \in H_i$. A G_k-periodic configuration is called to be translation-invariant.

By *period* of a periodic configuration we mean the index of the corresponding normal subgroup. The new modified SOS model is defined according to the following Hamiltonian:

$$H(\sigma) = J_1 \sum_{(x,y)\in L} |\sigma(x)-\sigma(y)| \cos[\pi(\sigma(x)-\sigma(y))] + J_2 \sum_{x,y\in V; d(x,y)=2} |\sigma(x)-\sigma(y)| \cos[\pi(\sigma(x)-\sigma(y))], \tag{1}$$

where $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$.

Let M be the set of all unit balls with vertices in V, i.e. $M = \{\{x\} \cup S_1(x) : \forall x \in V\}$. A restriction of a configuration σ to the ball $b \in M$ is a bounded configuration and it is denoted by σ_b.We let c_b denote the center of the unit ball b.

The energy of a configuration σ_b on b is defined by the formula

$$U(\sigma_b) = \frac{1}{2} J_1 \sum_{x\in S_1(c_b)} |\sigma(x) - \sigma(c_b)| \cos[\pi(\sigma(x) - \sigma(c_b))]$$

$$+J_2 \sum_{x,y\in V; d(x,y)=2} |\sigma(x) - \sigma(y)| \cos[\pi(\sigma(x) - \sigma(y))]$$

We consider the case $k = 2$.

Lemma 1. We have

$$U(\sigma_b) \in \{U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{10}, U_{11}\},$$

where

$$U_0 = 0,\ U_1 = -\frac{3J_1}{2},\ U_2 = -2J_2,\ U_3 = -J_1 - 2J_2,$$

$$U_4 = 3J_1,\ U_5 = \frac{3J_1}{2} - 2J_2\ U_6 = 2J_1 + 4J_2,\ U_7 = -\frac{J_1}{2} - 2J_2,$$

$$U_8 = J_1 + 4J_2,\ U_9 = \frac{J_1}{2},\ U_{10} = -J_1,\ U_{11} = -\frac{3J_1}{2} + 4J_2.$$

Definition 2. A configuration φ is called a ground state of the Hamiltonian (1), if

$$U(\varphi_b) = \min\{U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{10}, U_{11}\},$$

for all $b \in M$.

For a fixed $m = 0, 1, 2, ..., 11$, we set

$$A_m = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : U_m = \min\{U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8, U_9, U_{10}, U_{11}\}\}.$$

We have that

$$A_0 = A_9 = A_{10} = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : J_1 = 0, \quad J_2 = 0\},$$

$$A_1 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : J_1 \geq 0, \quad 0 \leq J_2 \leq \frac{J_1}{4}\},$$

$$A_2 = A_7 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : J_1 = 0, \quad J_2 \geq 0\},$$

$$A_3 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : J_1 \geq 0, \quad J_1 - 4J_2 \leq 0\},$$

$$A_4 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : J_1 \leq 0, \quad \frac{J_1}{4} \leq J_2 \leq -\frac{3J_1}{4}\},$$

$$A_5 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : J_1 \leq 0, \quad 3J_1 + 4J_2 \geq 0\},$$

$$A_6 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : J_1 \leq 0, \quad J_1 - 4J_2 \geq 0\},$$
$$A_8 = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : J_1 = 0, \quad J_2 \leq 0\},$$
$$A_{11} = \{(J_1, J_2) \in \mathbb{R}^2 : J_1 \geq 0, \quad J_2 \leq 0\},$$

and

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{m=0}^{11} A_m.$$

Let $H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{even}\}$, where $w_x(a_i)$ is the number of a_i in the word x.

Note, that H_A is a normal subgroup of index two. Let $G_k/H_A = \{H_A, G_k \setminus H_A\}$ be the quotient group. Denote $H_0 = H_A, H_1 = G_k \setminus H_A$.

We shall study H_0- periodic ground states. We note that each H_0-periodic configuration has the following form:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1, \text{ if } x \in H_0, \\ \sigma_2, \text{ if } x \in H_1, \end{cases} \tag{3}$$

where $\sigma_i \in \Phi = \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2$.

Theorem 1. The configuration (3) is H_0- periodic ground state iff one of the following conditions holds:

a) Let $|A| = 1$,
i) $|\sigma_1 - \sigma_2| = 1$, and $(J_1, J_2) \in A_7$.
ii) $|\sigma_1 - \sigma_2| = 2$, and $(J_1, J_2) \in A_8$.
b) Let $|A| = 2$,
i) $|\sigma_1 - \sigma_2| = 1$, and $(J_1, J_2) \in A_3$.
ii) $|\sigma_1 - \sigma_2| = 2$, and $(J_1, J_2) \in A_6$.
c) Let $|A| = 3$,
i) $|\sigma_1 - \sigma_2| = 1$, and $(J_1, J_2) \in A_1$.
ii) $|\sigma_1 - \sigma_2| = 2$, and $(J_1, J_2) \in A_4$.

Remark 1. Let $J_1 \neq 0$ and $J_2 \neq 0$.There is not any translation-invariant ground state for the new modified SOS model with competing interaction.

References

1. *Rozikov U.A.* Gibbs measures on Cayley trees, World scientific, 2013.
2. *Rahmatullaev M.M.,Abraev B.U.* On Ground States for the SOS Model with Competing Interactions, J.Sib.Fed. Univ.Math.Phys.,2022.

On p-adic quasi Gibbs measure for the Potts model on a Cayley tree of order two

[1]**Rahmatullaev M.**, [2]**Pulatov B.**

[1] *V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

[2] *Jizzakh branch of the National University of Uzbekistan, Jizzakh, Uzbekistan,*
e-mail: bpsbaxtiyor@gmail.com

In this paper, we study p-adic quasi Gibbs measure for the p-adic Potts model on the Cayley tree of order two. We show that if $p \equiv 1 (\bmod 8)$ or $p \neq 3, p \equiv 3 (\bmod 8)$ then there exist seven translation-invariant p-adic generalized Gibbs measures.

Let $\mathbb{Q}$ be the field of rational numbers. For a fixed prime number p, every rational number $x \neq 0$ can be represented in the form $x = p^r \frac{n}{m}$ where, $r, n \in Z$, m is a positive integer, and n and m are relatively prime with p. The p-adic norm of x is given by

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases} \tag{1}$$

This norm is non-Archimedean, i.e., it satisfies the strong triangle inequality $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ for all $x, y \in \mathbb{Q}$. The completion of $\mathbb{Q}$ with respect to the p-adic norm defines the p-adic field $\mathbb{Q}_p$ (see [1]).

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree i.e., a graph without cycles, such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex. Denote by V the set of vertices, and by L the set of edges of the Cayley tree Γ^k. Two vertices x and y are called *nearest neighbours* if there exist an edge $l \in L$ connecting them and denote by $l =< x, y >$. Fix $x_0 \in \Gamma^k$ and given vertex x, denote by $|x|$ the number of edges in the shortest path connecting x_0 and x. We call vertex x_0 the *root* of the Cayley tree $x, y \in \Gamma^k$.

We set
$W_n = \{x \in V : |x| = n\}, V_n = \{x \in V : |x| \leq n\}$, $L_n = \{l =< x, y > \in L : x, y \in V_n\}$,
$S(x) = \{y \in V : x \to y\}$, $\quad S_1(x) = \{y \in V : d(x, y) = 1\}$.
The set $S(x)$ is called the set of direct successors of the vertex x (see [2]).

Let G_k be a free product of $k+1$ cyclic groups of the second order with generators $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ respectively. There exists a one-to-one correspondence between the set of vertices V of the Cayley tree Γ^k and the group G_k (see [2]).

Let K be a subgroup of G_k, $k \geq 1$. We say that a function $z = \{z_x \in \mathbb{Q}_p : x \in G_k\}$ is K-*periodic* if $z_{yx} = z_x$ for all $x \in G_k$ and $y \in K$. A G_k- periodic function z is called *translation-invariant.*

Let $\mathbb{Q}_p$ be the field of p-adic numbers and $\Phi = \{1, 2, ..., q\}$ be a finite set. A configuration σ on V is defined as $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$; in a similar fashion one defines a configuration σ_n and σ^n on V_n and W_n, respectively. The set of all configurations on V (resp. V_n , W_n) coincides with $\Omega = \Phi^V$ (resp. $\Omega_{V_n} = \Phi_n^V, \Omega_{W_n} = \Phi_n^W$). Using this, for given configurations $\Omega_{V_n} = \Omega_{V_{n-1}} \times \Omega_{W_n}$. Using this, for given configurations $\sigma \in \Omega_{V_{n-1}}$ and $\omega \in \Omega_{W_n}$ we define their concatenations by

$$(\sigma_{n-1} \vee \omega)(x) = \begin{cases} \sigma_{n-1}(x), \; if \;\; x \in V_{n-1}, \\ \omega(x), \;\; if \;\; x \in W_n. \end{cases}$$

We consider *p-adic Potts model* on a Cayley tree, where the spin takes $\Phi := \{1, 2, ..., q\}$.

The (formal) Hamiltonian of p-adic Potts model is

$$H(\sigma) = J \sum_{<x,y> \in l} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} \tag{2}$$

where $J \in B(0, p^{-1/(p-1)})$ is a coupling constant, $\langle x,\, y\rangle$ stands for nearest neighbor vertices and δ_{ij} is the Kronecker's symbol, i.e.

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, \;\text{ if } \; i \neq j, \\ 1, \;\text{ if } \; i = j. \end{cases}$$

Assume that $\mathbf{h} : V \backslash \{x^{(0)}\} \to \mathbb{Q}_p^{\Phi}$ is a mapping, i.e $\mathbf{h}_x = (h_{1,x}, h_{2,x}, ..., h_{q,x})$, where $h_{i,x} \in \mathbb{Q}_p$ $(i \in \Phi)$ and $x \in V \backslash \{x^{(0)}\}$. Given $n \in \mathbb{N}$, we consider a p-adic probability measure $\mu_{h,\sigma}^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{Z_n^{(h)}} \exp\{H_n(\sigma)\} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}, \tag{3}$$

Here, $\sigma \in \Omega_{V_n}$, and $Z_n^{(\mathbf{h})}$ is the corresponding normalizing factor

$$Z_n^{(\mathbf{h})} = \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} \exp\{H_n(\sigma)\} \prod_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}.$$

We say that p-adic probability distributions (3) are compatible if all $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega \in \Omega_{W_n}} \mu_h^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \omega) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1}) \tag{4}$$

We note that a non-Archimedean analogue of the Kolmogorov's extension theorem was proved in [3]. According to this theorem there exists a unique p-adic measure μ_h on $\Omega = \Phi^V$ for all $n \geq 1$ and $\sigma \in \Phi^{V_{n-1}}$, i.e.,

$$\mu(\sigma \in \Omega : \sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n) = \mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma_n), \text{ for all } \sigma_n \in \Omega_{V_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

Such measure is called a *p-adic quasi Gibbs measure* corresponding to the Hamiltonian (2) and vector-valued function $\mathbf{h}_x$, $x \in V$. By $QG(H)$ we denote the set of all p-adic quasi Gibbs measure associated with function $\mathbf{h} = \{\mathbf{h}_x, x \in V\}$.

The following statement describes conditions $\mathbf{h}_x$ ensuring compatibility of $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma)$.

Theorem 1.[4] The measures $\mu_h^{(n)}(\sigma), n = 1, 2, ...$ defined by (3) associated with q-state Potts model (2) satisfy the compatibility condition (4) if and only if for any $n \in \mathbb{N}$ the following equation holds:

$$\widehat{\mathbf{h}_x} = \prod_{y \in S(x)} F(\widehat{\mathbf{h}_y}, \theta), \tag{5}$$

here and below a vector $\widehat{h} = \left(\widehat{h}_1, \widehat{h}_2, ..., \widehat{h}_{q-1}\right) \in \mathbb{Q}_p^{q-1}$. $\widehat{h}_i = \frac{h_i}{h_q},\ i = 1, 2, ..., q-1$, $F(x;\theta) = (F_1(x;\theta), ..., F_{q-1}(x;\theta))$ with

$$F_i(x;\theta) = \frac{(\theta - 1)x_i + \sum\limits_{j=1}^{q-1} x_j + 1}{\sum\limits_{j=1}^{q-1} x_j + \theta},\quad x = \{x_i\} \in \mathbb{Q}_p^{q-1},\ i = 1, 2, ..., q-1 \tag{6}$$

Theorem 2. *Let $k = 2$, $q = 3$, $p > 3$, N be the number of translation-invariant p-adic quasi Gibbs measures for p-adic Potts model. Then*

- $N = 7$, *if* $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$ *or* $p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 8)$;
- $N = 0$, *if* $p \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8)$ *or* $p \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 8)$.

Remark. *1) Only one of the translation-invariant p-adic quasi Gibbs measures given in Theorem 2 is p-adic Gibbs measure (see[6]);*
2) If $\boldsymbol{h} = (\underbrace{1, 1, ..., h}_{m}, 1, ..., 1), m = 1, 2, ..., q-1$ *and* $k = 2$, $q = 3$, $p > 3$ *then there exist three translation-invariant p-adic quasi Gibbs measures for this model (see [4-5]). For the case* $k = 2$, $q = 3$, $p > 3$, $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$, *we prove that there exist seven translation-invariant p-adic quasi Gibbs measures.*

References

1. *Koblitz N.* p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions, Berlin, Springer, 1977.
2. *Rozikov U.A.* Gibbs measures on Cayley trees, Singapore, World Sci. Publ., 2013.
3. *Ganikhodjayev N.N., Mukhamedov F.M. and Rozikov U.A.* Phase transitions in the Ising model on Z over the p-adic numbers, Uzbek Math. J. No 4, P. 23-29, 2013, 1998.
4. *Mukhamedov F.* On p-adic quasi Gibbs measures for $q+1$-state Potts model on the Cayley tree, p-adic numbers, ultrametric analysis and applications, 2010, Vol. 2, No. 3, pp. 241-251.
5. *Mukhamedov F., Khakimov O.* On periodic Gibbs measure of p-adic Potts model on a Cayley tree, p-adic numbers, ultrametric analysis and applications, 3, 225-235 (2016).
6. *Rozikov U. A. , Khakimov O. N.* Description of all translation-invariant p-adic Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree, Markov Process. Related Fields, No 1, 177-204, 2015.

On p-adic generalized Gibbs measure for the Ising model with external field on a Cayley tree

[1]Rahmatullaev M., [2]Tukhtabaev A., [3]Mamadjonov R.

[1] *V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

[2] *Namangan State University, 316 Uychi street, Namangan, Uzbekistan,*
e-mail: akbarxoja.toxtaboyev@mail.ru

[3] *Namangan State University, 316 Uychi street, Namangan, Uzbekistan,*
e-mail: rmamadjonov@umail.uz

In this paper, we study p-adic Ising model with external field on the Cayley tree of order two. If $p \equiv 1(\bmod 4)$ there exist three translation-invariant and two $G_2^{(2)}$-periodic non-translation-invariant p-adic generalized Gibbs measures, if $p \equiv 3(\bmod 4), p \neq 3$ there is one translation-invariant p-adic generalized Gibbs measure. Moreover, if $p \equiv 1(\bmod 4)$ there exists a phase transition occurrence.

Let $\mathbb{Q}$ be the field of rational numbers. For a fixed prime number p, every rational number $x \neq 0$ can be represented in the form $x = p^r \frac{n}{m}$ where, $r, n \in Z$, m is a positive integer, and n and m are relatively prime with p. The p-adic norm of x is given by

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-r}, & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

This norm is non-Archimedean, i.e., it satisfies the strong triangle inequality $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ for all $x, y \in \mathbb{Q}$. The completion of $\mathbb{Q}$ with respect to the p-adic norm defines the p-adic field $\mathbb{Q}_p$.

The completion of the field of rational numbers $\mathbb{Q}$ is either the field of real numbers $\mathbb{R}$ or one of the fields of p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$ (Ostrowski's theorem).

Any p-adic number $x \neq 0$ can be uniquely represented in the canonical form

$$x = p^{\gamma(x)}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + ...), \tag{1}$$

where $\gamma(x) \in \mathbb{Z}$ and the integers x_j satisfy: $x_0 \neq 0,\ x_j \in \{0, 1, ..., p-1\},\ j \in \mathbb{N}$. In this case $|x|_p = p^{-\gamma(x)}$ (see [1]).

The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree i.e., a graph without cycles, such that exactly $k+1$ edges originate from each vertex. Denote by V the set of vertices, and by L the set of edges of the Cayley tree Γ^k. Two vertices x and y are called *nearest neighbours* if there exist an edge $l \in L$ connecting them and denote by $l =< x, y >$. Fix $x_0 \in \Gamma^k$ and given vertex x, denote by $|x|$ the number of edges in the shortest path connecting x_0 and x. We call vertex x_0 the *root* of the Cayley tree $x, y \in \Gamma^k$.

We set
$W_n = \{x \in V : |x| = n\}, V_n = \{x \in V : |x| \leq n\}$, $L_n = \{l =< x, y >\in L : x, y \in V_n\}$,
$S(x) = \{y \in V : x \to y\}$, $\ S_1(x) = \{y \in V : d(x, y) = 1\}$.
The set $S(x)$ is called the set of direct successors of the vertex x (see [2]).

Let G_k be a free product of $k+1$ cyclic groups of the second order with generators $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ respectively. There exists a one-to-one correspondence between the set of vertices V of the Cayley tree Γ^k and the group G_k (see [2]).

Let K be a subgroup of G_k, $k \geq 1$. We say that a function $z = \{z_x \in \mathbb{Q}_p : x \in G_k\}$ is K*- periodic* if $z_{yx} = z_x$ for all $x \in G_k$ and $y \in K$. A G_k- periodic function z is called *translation-invariant.* Let $G_k^{(2)}$ is be subgroup in G_k consisting of all words of even length i.e., $G_k^{(2)} = \{x \in G_k : |x| - \text{even}\}$. In fact, $G_k^{(2)}$ is normal subgroup index two i.e., $G_k/G_k^{(2)} = \{G_k^{(2)},\ G_k \backslash G_k^{(2)}\}$. In [2] proved that any K-periodic Gibbs measure for Ising model with with external field is either translation-invariant or $G_k^{(2)}$-periodic on the Cayley tree of order two.

Let $\Phi = \{-1, 1\}$ and is assigned to the vertices of the tree $\Gamma^k = (V, L)$. A configuration σ on V is then defined as a function $x \in V \mapsto \sigma(x) \in \Phi$; in a similar manner one defines configurations σ_n and $\omega_{[n]}$ on V_n and W_n, respectively. The set of all configurations on V (resp. V_n, W_n) coincides with $\Omega = \Phi^V$ (resp. $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$, $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$). One can see that $\Omega_{V_n} = \Omega_{V_{n-1}} \times \Omega_{W_n}$. Using this, for given configurations $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$ and $\omega_{[n]} \in \Omega_{W_n}$ we define their concatenations by

$$(\sigma_{n-1} \vee \omega_{[n]})(x) = \begin{cases} \sigma_{n-1}(x), & \text{if } x \in V_{n-1}, \\ \omega_{[n]}(x), & \text{if } x \in W_n. \end{cases}$$

It is clear that $\sigma_{n-1} \vee \omega_{[n]} \in \Omega_{V_n}$.

The (formal) Hamiltonian of the p-adic Ising model with external field is given by

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y) + \alpha \sum_{x \in V} \sigma(x), \tag{2}$$

where $|J|_p = |\alpha|_p = 1$.

Let us construct p-adic generalized Gibbs measures for the model (2) on Γ^k.

Assume that $h : V \setminus \{x^{(0)}\} \to \mathbb{Q}_p$ is a function. Let us consider a p-adic probability measure $\mu_h^{(n)}$ on Ω_{V_n} defined by

$$\mu_h^{(n)}(\sigma) = \frac{1}{Z_n^{(h)}} exp\{H_n(\sigma)\} \prod_{x \in W_n} h_x^{\sigma(x)}. \tag{3}$$

Here $Z_n^{(h)}$ is the corresponding normalizing factor or *partition function* given by

$$Z_n^{(h)} = \sum_{\sigma \in \Omega_{V_n}} exp\{H_n(\sigma)\} \prod_{x \in W_n} h_x^{\sigma(x)}.$$

A p-adic probability distribution $\mu_h^{(n)}$ is said to be consistent if for all $n \geq 1$ and $\sigma_{n-1} \in \Omega_{V_{n-1}}$, we have

$$\sum_{\varphi \in \Omega_{W_n}} \mu_h^{(n)}(\sigma_{n-1} \vee \varphi) = \mu_h^{(n-1)}(\sigma_{n-1}). \tag{4}$$

In this case, by the p-adic analogue of Kolmogorov theorem [3], there exists a unique measure μ_h on the set Ω such that $\mu_h\left(\{\sigma|_{V_n} \equiv \sigma_n\}\right) = \mu_h^{(n)}(\sigma_n)$ for all n and $\sigma_n \in \Omega_{V_n}$.

A limiting p-adic measures generated by (3) is called p-adic generalized Gibbs measure. We notice that if $h_x \in \mathcal{E}_p$ for all $x \in V$ then corresponding measure is called p-adic Gibbs measure (see [4]).

For given Hamiltonian H by $GG(H)$ we denote the set of all p-adic generalized Gibbs measures associated with functions $h = \{h_x, \ x \in V\}$. If there are at least two distinct p-adic generalized Gibbs measures $\mu, \nu \in GG(H)$ such that μ is bounded and ν is unbounded, then we say that *a phase transition* occurs. Moreover, if there is a sequence of sets $\{A_n\}$ such that $A_n \in \Omega_{V_n}$ with $|\mu(A_n)|_p \to 0$ and $|\nu(A_n)|_p \to \infty$ as $n \to \infty$, then we say that there occurs a *strong phase transition.*

Let $\theta = \exp\{2J\}$, $\eta = \exp\left(\frac{2\alpha}{k+1}\right)$, $\widehat{h} = \eta \exp\{2h\}$.

Theorem 1. *The measures $\mu_h^{(n)}(\sigma_n), n = 1, 2, ...,$ defined by (3) satisfy the compatibility condition (4) if and only if for any $x \in V \setminus \{x_0\}$ the following equation holds:*

$$\widehat{h_x} = \eta^{k+1} \prod_{y \in S(x)} \frac{\theta \widehat{h_y} + 1}{\widehat{h_y} + \theta},$$

where $\theta, \eta \in \mathcal{E}_p$, $\theta \neq 1, \eta \neq 1$.

Theorem 2. *Let N is number of translation-invariant, M is $G_2^{(2)}$-periodic generalized Gibbs measures for p-adic Ising model with external field. Then for Cayley tree of order two the following statement holds true:*

- $N = 3,\ M = 2,$ *if* $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$;
- $N = 1,\ M = 0,\ p \neq 3, p \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$.

Theorem 3. *If $k = 2$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ then for Ising model with external field a phase transition occurs. Moreover, all translation-invariant generalized p-adic Gibbs measures are bounded, $G_2^{(2)}$-periodic non-translation-invariant generalized p-adic Gibbs measures are unbounded.*

References

1. *Koblitz N.* p-Adic Numbers, p-Adic Analysis, and Zeta-Functions,Berlin, Springer, 1977.
2. *Rozikov U.A.* Gibbs Measures on Cayley Trees,Singapore,World Sci. Publ.,2013.
3. *Ganikhodjayev N.N, Mukhamedov F.M. and Rozikov U.A.* Phase transitions in the Ising model on Z over the p-adic numbers, Uzbek Math. J. No 4, P. 23-29, 2013, 1998.
4. *Khakimov O.N.* On a Generalized p-adic Gibbs Measure for Ising Model on a Cayley tree, p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.No 6(3), pp. 207-217, 2014.

Description of the translation-invariant splitting Gibbs measures for the three-state SOS model on the binary tree

[1]**Rahmatullaev M.**, [2]**Karshiboev O.**

[1] *Institute of Mathematics, 9, University street, 100174, Tashkent, Uzbekistan.*
e-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

[2] *Chirchik state pedagogical university, 111702, Tashkent region, Uzbekistan.*
e-mail: okarshiboevsher@mail.ru

In the work, we exactly solve the three-state SOS model with an external field on the Cayley tree of order two. The Cayley tree Γ^k of order $k \geq 1$ is an infinite tree, i.e., such that from each vertex of which issues exactly $k + 1$ edges (for more details see [1], [2] and references therein). We will denote by V the set of the vertices of the tree and by L the set of edges of the tree. The distance on this tree is defined as the number of nearest neighbour pairs of the minimal path between the vertices x and y (where path is a collection of nearest neighbour pairs, two consecutive pairs sharing at least a given vertex) and denoted by $d(x, y)$. The SOS model with external field is defined by the formal Hamiltonian

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \subset V} \mid \sigma(x) - \sigma(y) \mid - \sum_{x \in V} \alpha_{\sigma(x),x}, \tag{1}$$

where the first sum runs over nearest neighbour vertices $\langle x, y\rangle$, the second sum runs over all the vertices of the tree, the spins $\sigma(x)$ take values in the set $\Phi = \{0, 1, \ldots, m\}, m \geq 2$, $J \in \mathbb{R}$ is the coupling constant and $\alpha_x = (\alpha_{0,x}, \alpha_{1,x}, ..., \alpha_{m,x}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ is the external field. As the root of the tree, we fix a vertex $x^0 \in V$. Let $V_n := \{x \in V : d(x, x^0) \leq n\}$, $\quad W_n := \{x \in V : d(x, x^0) = n\}$, be respectively the ball and the sphere of radius n with center at x^0. For $x \in W_n$ let $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(y, x) = 1\}$ be the set of direct successors of x.

For $x \in V\backslash\{x^0\} \mapsto h_x = (h_{0,x}, \ldots, h_{m,x}) \in \mathbb{R}^{m+1}$ we define the (finite-dimensional) Gibbs distributions by the formula

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\Big\{ -\beta\, H(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\Big\} \tag{2}$$

where Z_n is the corresponding partition function. The probability distributions (2) are compatible if for all $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$ one has $\sum\limits_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1}, \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1})$. Under the condition, there exists a unique measure μ on Φ^V such that $\forall n$ and $\sigma_n \in \Phi^{V_n} : \mu(\{\sigma \mid_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n)$. Such a measure is called a *splitting Gibbs measure* (SGM) corresponding to the Hamiltonian H and $x \mapsto h_x,\ x \neq x^0$. The compatibility condition is satisfied if and only if $\forall x \in V\backslash\{x^0\}$ the following vector identity holds

$$\tilde{h}_x = \tilde{\alpha}_x + \sum_{y \in S(x)} F(\tilde{h}_y; \theta), \tag{3}$$

here and below $\theta = \exp(\beta J)$ and

$$\tilde{h}_x = (\tilde{h}_{0,x}, ..., \tilde{h}_{m-1,x}),\ \tilde{\alpha}_x = (\tilde{\alpha}_{0,x}, ..., \tilde{\alpha}_{m-1,x}),$$
$$\tilde{h}_{i,x} = h_{i,x} - h_{m,x} + \beta\left(\alpha_{i,x} - \alpha_{m,x}\right),$$
$$\tilde{\alpha}_{i,x} = \beta\left(\alpha_{i,x} - \alpha_{m,x}\right), \quad i = 0, ..., m-1,$$

the map $F(u;\theta) = (F_0(u;\theta), \dots, F_{m-1}(u;\theta))$ is defined for $u = (u_0, ..., u_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ and $\theta > 0$ by the formulas

$$F_i(u;\theta) := \ln \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{|i-j|}\ \exp(u_j) + \theta^{m-i}}{\sum_{j=0}^{m-1} \theta^{m-j}\ \exp(u_j) + 1}, \quad i = 0, ..., m-1.$$

For any $\tilde{h} = \{\tilde{h}_x, x \in V\}$ satisfying (3) there exists a unique SGM μ and vice versa. This implies the fact that the problem of describing the Gibbs measures is reduced to the descriptions of the solutions of the functional equations (3).

For $m = 2$, from (3) it follows that

$$\begin{cases} \tilde{h}_{0,x} = \tilde{\alpha}_{0,x} + \sum\limits_{y \in S(x)} \ln \frac{\exp(\tilde{h}_{0,y}) + \theta \exp(\tilde{h}_{1,y}) + \theta^2}{\theta^2\ \exp(\tilde{h}_{0,y}) + \theta\ \exp(\tilde{h}_{1,y}) + 1}, \\ \tilde{h}_{1,x} = \tilde{\alpha}_{1,x} + \sum\limits_{y \in S(x)} \ln \frac{\theta\ \exp(\tilde{h}_{0,y}) + \exp(\tilde{h}_{1,y}) + \theta}{\theta^2 \exp(\tilde{h}_{0,y}) + \theta\ \exp(\tilde{h}_{1,y}) + 1}. \end{cases} \tag{4}$$

We study translation-invariant (TI) solutions of (4), i.e., we assume that $\tilde{h}_x = \tilde{h} \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in V$. We suppose that the external field $\tilde{\alpha}_x$ is also TI, i.e., $\tilde{\alpha}_x = \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in V$. Denote $z_0 = \exp(\tilde{h}_{0,x})$, $z_1 = \exp(\tilde{h}_{1,x})$, $\nu = \exp(\tilde{\alpha}_{0,x})$, $\lambda = \exp(\tilde{\alpha}_{1,x})$, $x \in V$. Then from (4) we have

$$\begin{cases} z_0 = \nu \left(\frac{z_0 + \theta\, z_1 + \theta^2}{\theta^2 z_0 + \theta\, z_1 + 1}\right)^k, \\ z_1 = \lambda \left(\frac{\theta\, z_0 + z_1 + \theta}{\theta^2\, z_0 + \theta\, z_1 + 1}\right)^k. \end{cases} \tag{5}$$

Let $k = 2$. For the sake of simplicity, we assume that $\nu = 1$. Introducing the notations $x = \sqrt{z_0}$, $y = \sqrt{z_1}$ and $\sqrt{\lambda} = \zeta$ from (5) we have

$$\begin{cases} x = \frac{x^2 + \theta\, y^2 + \theta^2}{\theta^2 x^2 + \theta\, y^2 + 1}, \\ y = \frac{\zeta\left(\theta\, x^2 + y^2 + \theta\right)}{\theta^2 x^2 + \theta\, y^2 + 1}. \end{cases} \tag{6}$$

Denote

$$\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{17}},\ \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{7}},\ \theta_4 = \frac{1}{\sqrt{19}},\ \theta_c' = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\lambda_1(\theta) = \frac{-71\,\theta^4 + 38\,\theta^2 + 1 - \sqrt{(1-\theta)\,(1+\theta)\,(1-17\,\theta^2)^3}}{16\,\theta},$$
$$\lambda_2(\theta) = \frac{-71\,\theta^4 + 38\,\theta^2 + 1 + \sqrt{(1-\theta)\,(1+\theta)\,(1-17\,\theta^2)^3}}{16\,\theta},$$
$$\lambda_3(\theta) = \frac{\theta^4 + 2\,\theta^2 + 1}{4\,\theta},\ \lambda_4(\theta) = 4\,\theta\,(1 - 3\,\theta^2).$$

Using the analysis of solutions of the system of equations (6), we have

Theorem 1. *For the three-state SOS model with external field on the Cayley tree of order two the following assertions hold:*

1. *There are exactly seven TISGMs if* $\theta \in (0, \theta_4)$ *and* $\lambda \in (\lambda_4(\theta), \lambda_2(\theta))$
2. *There are exactly six TISGMs if* $\theta \in (0, \theta_4)$ *and* $\lambda = \lambda_2(\theta)$

3. *There are exactly five TISGMs*
   (a) *if* $\theta \in (0, \theta_4]$ *and* $\lambda \in (\lambda_2(\theta), \lambda_3(\theta))$
   (b) *if* $\theta \in (\theta_4, \theta_3)$ *and* $\lambda \in (\lambda_4(\theta), \lambda_3(\theta))$
   (c) *if* $\theta \in (0, \theta_4)$ *and* $\lambda \in (\lambda_1(\theta), \lambda_4(\theta)]$
   (d) *if* $\theta \in [\theta_4, \theta_2)$ *and* $\lambda \in (\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta))$
4. *There are exactly four such measures if* $\theta \in (0, \theta_2)$ *and* $\lambda = \lambda_1(\theta)$ *or if* $\theta \in [\theta_4, \theta_2)$ *and* $\lambda = \lambda_2(\theta)$
5. *There are exactly three such measures*
   (a) *if* $\theta \in (0, \theta_2)$ *and* $\lambda \in (0, \lambda_1(\theta))$
   (b) *if* $\theta \in (0, \theta_3)$ *and* $\lambda = \lambda_3(\theta)$
   (c) *if* $\theta \in (\theta_4, \theta_2)$ *and* $\lambda \in (\lambda_2(\theta), \lambda_4(\theta)]$
   (d) *if* $\theta \in [\theta_2, \theta_c')$ *and* $\lambda \in (0, \lambda_4(\theta))$
   (e) *if* $\theta \in [\theta_2, \theta_3)$ *and* $\lambda = \lambda_4(\theta)$
6. *Otherwise there exists a unique such measure.*

References

1. *Rozikov, U. A.* Gibbs measures on Cayley trees, World Scientific, Singapore, 2013.
2. *Kuelske, C., Rozikov, U. A.* Extremality of translation-invariant phases for a three-state SOS-model on the binary tree, J. Stat. Phys., 160, 2015, 659-680.

Usual, quadratic and cubic numerical ranges corresponding to a 3×3 operator matrices

[1]Rasulov T., [2]Sharipova M.
[1] *Uzbekistan, Bukhara State University and Bukhara branch of the Institute of Mathematics*
e-mail: rth@mail.ru
[2] *Uzbekistan, Bukhara State University*
e-mail: sh.mubina.sh@gmail.com

Operator matrices are matrices the entries of which are linear operators between Banach or Hilbert spaces [1]. They arise in various areas of mathematics and its applications.

Let $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$ be the direct sum of the complex Hilbert spaces $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_3$. With respect to this decomposition, every bounded self-adjoint linear operator $\mathcal{A} \in L(\mathcal{H})$ has a 3×3 operator matrix representation

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12}^* & A_{22} & A_{23} \\ A_{13}^* & A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

with bounded linear entries $A_{ij} \in L(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i), i, j = 1, 2, 3$ such that $A_{ii} = A_{ii}^*, i = 1, 2, 3$.

For a Hilbert space X we denote by $\mathbb{S}_X$ the unite sphere in X :

$$\mathbb{S}_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}.$$

Definition 1. *The set*

$$W(\mathcal{A}) := \{(\mathcal{A}f, f) : f \in \mathbb{S}_{\mathcal{H}}\}$$

is called the numerical range of $\mathcal{A}$.

The numbers

$$m_{\mathcal{A}} := \inf_{f\in\mathbb{S}_{\mathcal{H}}} (\mathcal{A}f, f), \quad M_{\mathcal{A}} := \sup_{f\in\mathbb{S}_{\mathcal{H}}} (\mathcal{A}f, f)$$

are called lower and upper bounds of $\mathcal{A}$, respectively. Then $\overline{W(\mathcal{A})} = [m_{\mathcal{A}}, M_{\mathcal{A}}]$. In addition, if $m_{\mathcal{A}}, M_{\mathcal{A}} \in \sigma_{\rm pp}(\mathcal{A})$, then $W(\mathcal{A}) = [m_{\mathcal{A}}, M_{\mathcal{A}}]$.

Let $\widehat{\mathcal{H}}_1 := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ and $\widehat{\mathcal{H}}_2 := \mathcal{H}_3$. To define the quadratic numerical range we consider the operator matrix $\mathcal{A}$ with respect to the decomposition $\mathcal{H} = \widehat{\mathcal{H}}_1 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_2$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} \\ \widehat{A}_{12}^* & \widehat{A}_{22} \end{pmatrix} \tag{2}$$

with the entries $\widehat{A}_{ij} : \widehat{\mathcal{H}}_j \to \widehat{\mathcal{H}}_i$, $i \le j$, $i,j = 1,2$:

$$\widehat{A}_{11} := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_{12} := \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_{22} := A_{33}.$$

Definition 2. *For $\widehat{f} = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2) \in \mathbb{S}_{\widehat{\mathcal{H}}_1} \times \mathbb{S}_{\widehat{\mathcal{H}}_2}$ we define the 2×2 matrix*

$$\mathcal{A}_{\widehat{f}} := \begin{pmatrix} (\widehat{A}_{11}\widehat{f}_1, \widehat{f}_1) & (\widehat{A}_{12}\widehat{f}_2, \widehat{f}_1) \\ (\widehat{A}_{12}^*\widehat{f}_1, \widehat{f}_2) & (\widehat{A}_{22}\widehat{f}_2, \widehat{f}_2) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Then the set

$$W_{\widehat{\mathcal{H}}_1\oplus\widehat{\mathcal{H}}_2}(\mathcal{A}) := \bigcup_{\widehat{f}\in\mathbb{S}_{\widehat{\mathcal{H}}_1}\times\mathbb{S}_{\widehat{\mathcal{H}}_2}} \sigma_{\rm pp}(\mathcal{A}_{\widehat{f}})$$

is called the quadratic numerical range of $\mathcal{A}$ (with respect to the operator matrix representation (2)).

For $\widehat{f}_i \in \widehat{\mathcal{H}}_i$, $\widehat{f}_i \ne 0$, $i = 1,2$, we define

$$\lambda_{\pm}\begin{pmatrix} \widehat{f}_1 \\ \widehat{f}_2 \end{pmatrix} := \frac{1}{2}\left(\frac{(\widehat{A}_{11}\widehat{f}_1, \widehat{f}_1)}{\|\widehat{f}_1\|^2} + \frac{(\widehat{A}_{22}\widehat{f}_2, \widehat{f}_2)}{\|\widehat{f}_2\|^2} \pm \sqrt{\left(\frac{(\widehat{A}_{11}\widehat{f}_1, \widehat{f}_1)}{\|\widehat{f}_1\|^2} - \frac{(\widehat{A}_{22}\widehat{f}_2, \widehat{f}_2)}{\|\widehat{f}_2\|^2}\right)^2 + 4\frac{\left|(\widehat{A}_{12}\widehat{f}_2, \widehat{f}_1)\right|^2}{\|\widehat{f}_1\|\|\widehat{f}_2\|}}\right)$$

and we let

$$\Lambda_{\pm}(\mathcal{A}) := \left\{\lambda_{\pm}\begin{pmatrix} \widehat{f}_1 \\ \widehat{f}_2 \end{pmatrix} : \widehat{f}_i \in \widehat{\mathcal{H}}_i,\ \widehat{f}_i \ne 0,\ i = 1,2\right\}.$$

Then for the set $W_{\widehat{\mathcal{H}}_1\oplus\widehat{\mathcal{H}}_2}(\mathcal{A})$ we have the equality

$$W_{\widehat{\mathcal{H}}_1\oplus\widehat{\mathcal{H}}_2}(\mathcal{A}) = \Lambda_+(\mathcal{A}) \cup \Lambda_-(\mathcal{A}).$$

Definition 3. *The set of all eigenvalues of the 3×3 matrices*

$$\mathcal{A}_f := \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1) & (A_{12}f_2, f_1) & (A_{13}f_3, f_1) \\ (A_{12}^*f_1, f_2) & (A_{22}f_2, f_2) & (A_{23}f_3, f_2) \\ (A_{13}^*f_1, f_3) & (A_{23}^*f_2, f_3) & (A_{33}f_3, f_3) \end{pmatrix}, \quad f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{S}_{\mathcal{H}_1} \times \mathbb{S}_{\mathcal{H}_2} \times \mathbb{S}_{\mathcal{H}_3}$$

is called the cubic numerical range of $\mathcal{A}$ (with respect to the operator matrix representation (1)) and will be denoted by $W_{\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\mathcal{H}_3}(\mathcal{A})$. For a fixed decomposition of $\mathcal{H}$, we also write $W^3(\mathcal{A}) = W_{\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\mathcal{H}_3}(\mathcal{A})$.

Let $a_{ij}(f) := (A_{ij}f_j, f_i)$ for $i,j = 1,2,3$ and

$$E_k(f) := \frac{1}{3}(a_{11}(f) + a_{22}(f) + a_{33}(f)) + 2\sqrt{-\frac{P(f)}{3}}\cos\frac{\Phi(f) + 2\pi k}{3},\ k = 1,2,3,$$

where

$$
\begin{aligned}
P(f):&=-\frac{1}{6}(a_{11}(f)-a_{22}(f))^2+(a_{11}(f)-a_{33}(f))^2+(a_{22}(f)-a_{33}(f))^2\\
&-|a_{12}(f)|^2-|a_{23}(f)|^2-|a_{13}(f)|^2;\\
Q(f):&=-\frac{2}{27}\left(a_{11}(f)+a_{22}(f)+a_{33}(f)\right)^3+\frac{1}{3}\left(a_{11}(f)+a_{22}(f)+a_{33}(f)\right)\\
&\times\left(a_{11}(f)a_{22}(f)+a_{22}(f)a_{33}(f)+a_{11}(f)a_{33}(f)-|a_{12}(f)|^2-|a_{23}(f)|^2-|a_{13}(f)|^2\right)\\
&+a_{11}(f)a_{22}(f)a_{33}(f)+2\mathrm{Re}(a_{12}(f)a_{23}(f)\overline{a_{13}(f)})+|a_{12}(f)|^2a_{33}(f)\\
&+|a_{23}(f)|^2a_{11}(f)+|a_{13}(f)|^2a_{22}(f);\\
\Phi(f):&=\arccos\left(-\frac{3Q(f)}{2P(f)}\sqrt{-\frac{3}{P(f)}}\right).
\end{aligned}
$$

The main result of this note is the following theorem.

Theorem 1. *For the cubic numerical range of $\mathcal{A}$ we have*

$$W^3(\mathcal{A})=\bigcup_{k=1}^{3}\bigcup_{f\in\mathbb{S}_{\mathcal{H}_1}\times\mathbb{S}_{\mathcal{H}_2}\times\mathbb{S}_{\mathcal{H}_3}}\{E_k(f)\}.$$

This theorem plays a key role in the estimate of the bounds of $\mathcal{A}$ in terms of cubic numerical range.

If $A_{13}=0$, then for the lower bound of $\mathcal{A}$ we have [2]

$$\min\sigma(\mathcal{A})\ge\min\{\min\sigma(A_{11}),\min\sigma(A_{22}),\min\sigma(A_{33})\}-\left(\|A_{12}\|^2+\|A_{23}\|^2\right)^{1/2},\tag{3}$$

and strict inequality prevails if at least two of the lower bounds $\min\sigma(A_{ii})$, $i=1,2,3$, of diagonal elements are different. As an example we consider the case where $\mathcal{H}_1=\mathbb{C}$, $\mathcal{H}_2=L_2[\pi;\pi]$, $\mathcal{H}_3=L_2([\pi;\pi]^2)$ and

$$A_{11}f_1=\varepsilon f_1,\ (A_{22}f_2)(x)=(\varepsilon+1-\cos x)f_2(x),\ (A_{33}f_3)(x,y)=(\varepsilon+2-\cos x-\cos y)f_2(x,y),$$

$$A_{12}f_2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t f_2(t)dt,\ A_{13}=0,\ (A_{23}f_3)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin t f_3(x,t)dt$$

with $\varepsilon>0$. In the latter case $W(A_{22})=(\varepsilon;\varepsilon{+}2)$, $W(A_{33})=(\varepsilon;\varepsilon{+}4)$ and $W(A_{ii})\subset W^3(\mathcal{A})$, $i=2,3$. Then according to (3) the lower bound of $\mathcal{A}$ can be estimated as follows: $\min\sigma(\mathcal{A})\ge\varepsilon-\sqrt{2}\pi$. An obtained inequality is an important in determining the location of the first eigenvalue of $\mathcal{A}$.

References

1. *C.Tretter*. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.

1. *T.H.Rasulov, C.Tretter*. Spectral inclusion for unbounded diagonally dominant $n\times n$ operator matrices, Rocky Mountain Journal of Mathematics. **48**:1 (2018), pp. 279–324.

Analysis of the essential spectrum of a Hamiltonian related to a system of three particles on a 1D lattice

[1]Rasulov T., [2]Umirkulova G.

[1] *Uzbekistan, Bukhara State University and Bukhara branch of the Institute of Mathematics*
e-mail: rth@mail.ru

[2] *Uzbekistan, Bukhara State University*
e-mail: gumirkulova1@gmail.com

In the present note, we investigate the essential spectrum of the Hamiltonian $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$, $\mu, \lambda, \gamma > 0$, associated with the three particle discrete Schrödinger operator on the one-dimensional lattice, arising in Hubbard model. We admit a special form for the "kinetic" part of the Hamiltonian $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$, which contains a parameter $\gamma > 0$. Here the role of a two-particle discrete Schrödinger operator played by the Friedrichs model. It is remarkable that the Hubbard model is currently one of the most intensively studied many-electron models of metal, but very few exact results have been obtained for the spectrum and the wave functions of the crystal described by this model. Hence, it is very interesting to obtain exact results, at least in special cases.

Let $\mathbb{T}$ be the one-dimensional torus. The Hilbert space $L_2^{\rm sym}(\mathbb{T}^2)$ is defined as a space of square-integrable symmetric (complex) functions with domain $\mathbb{T}^2$.

We consider the model Hamiltonian $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$ defined by

$$H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)} := H_0^{(\gamma)} - \mu(V_1 + V_2) - \lambda V_3$$

in $L_2^{\rm sym}(\mathbb{T}^2)$, where $H_0^{(\gamma)}$ is a non perturbed operator, i.e. the multiplication operator by the function $E_\gamma(\cdot,\cdot)$:

$$(H_0^{(\gamma)} f)(x,y) = E_\gamma(x,y) f(x,y);$$

the operators V_α, $\alpha = 1,2,3$ have the form:

$$(V_1 f)(x,y) = v(y) \int_{\mathbb{T}} v(t) f(x,t)dt,\ (V_2 f)(x,y) =$$

$$= v(x) \int_{\mathbb{T}} v(t) f(t,y)dt,\ (V_3 f)(x,y) = \int_{\mathbb{T}} f(t, x+y-t)dt.$$

Here $f \in L_2^{\rm sym}(\mathbb{T}^2)$; μ, λ, γ are positive reals, the function $v(\cdot)$ is a real-valued analytic function on $\mathbb{T}$ and the function $E_\gamma(\cdot,\cdot)$ is defined as

$$E_\gamma(x,y) := \varepsilon(x) + \varepsilon(y) + \gamma\varepsilon(x+y), \quad \varepsilon(x) := 1 - \cos(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Under these assumptions the operator $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$ is bounded and self-adjoint in $L_2^{\rm sym}(\mathbb{T}^2)$.

Now, to give the representation for the essential spectrum of $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$, we introduce so-called the channel operators, acting on the Hilbert space $L_2(\mathbb{T}^2)$ as $H_\mu^{(\gamma,1)} := H_0^{(\gamma)} - \mu V_1$ and $H_\lambda^{(\gamma,2)} := H_0^{(\gamma)} - \lambda V_3$.

The decomposition of the space $L_2(\mathbb{T}^2)$ into the direct integral

$$L_2(\mathbb{T}^2) = \int_{\mathbb{T}} \oplus L_2(\mathbb{T}) dk$$

yields for the operators $H_\mu^{(\gamma,1)}$ and $H_\lambda^{(\gamma,2)}$ the decompositions into the direct integrals

$$H_\mu^{(\gamma,1)} = \int_{\mathbb{T}} \oplus (h_\mu^{(\gamma,1)}(k) + \varepsilon(k) I) dk, \quad H_\lambda^{(\gamma,2)} = \int_{\mathbb{T}} \oplus (h_\lambda^{(2)}(k) + \gamma\varepsilon(k) I) dk.$$

Here I is an identity operator on $L_2(\mathbb{T})$, the two families of bounded self-adjoint operators (the Friedrichs model), acting in $L_2(\mathbb{T})$ by $h_\mu^{(\gamma,1)}(k) := h_0^{(\gamma,1)}(k) - \mu v_1$, $k \in \mathbb{T}$ and $h_\lambda^{(2)}(k) := h_0^{(2)}(k) - \lambda v_2$, $k \in \mathbb{T}$ with

$$(h_0^{(\gamma,1)}(k) f)(x) = (\varepsilon(x) + \gamma\varepsilon(k+x)) f(x), \quad (v_1 f)(x) = v(x) \int_{\mathbb{T}} v(t) f(t) dt,$$

$$(h_0^{(2)}(k)f)(x) = (\varepsilon(x) + \varepsilon(k-x))f(x), \quad (v_2 f)(x) = \int_{\mathbb{T}} f(t)dt.$$

Next, we formulate the main results of the present note. In the following we describe the spectra of channel operators by the spectrum of the corresponding family of the Friedrichs models.

Theorem 1. *For the spectra of the operators* $H_\mu^{(\gamma,1)}$ *and* $H_\lambda^{(\gamma,2)}$ *the following equalities*

$$\sigma(H_\mu^{(\gamma,1)}) = \sigma_{\rm two}(H_\mu^{(\gamma,1)}) \cup [0; 3+3\gamma/2], \quad \sigma(H_\lambda^{(\gamma,2)}) = \sigma_{\rm two}(H_\lambda^{(\gamma,2)}) \cup [0; 3+3\gamma/2]$$

hold, where

$$\sigma_{\rm two}(H_\mu^{(\gamma,1)}) := \bigcup_{k\in\mathbb{T}} \left\{\sigma_{\rm disc}(h_\mu^{(\gamma,1)}(k)) + \varepsilon(k)\right\}, \quad \sigma_{\rm two}(H_\lambda^{(\gamma,2)}) := \bigcup_{k\in\mathbb{T}} \left\{\sigma_{\rm disc}(h_\lambda^{(2)}(k)) + \gamma\varepsilon(k)\right\}.$$

The following theorem describes the relation between the essential spectrum of $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$ and spectra of the channel operators $H_\mu^{(\gamma,1)}$, $H_\lambda^{(\gamma,2)}$.

Theorem 2. *For the essential spectrum of* $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$ *we have*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}) = \sigma(H_\mu^{(\gamma,1)}) \cup \sigma(H_\lambda^{(\gamma,2)}).$$

Moreover, the set $\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)})$ *consists the union of at most three bounded closed intervals.*

The set $\sigma_{\rm two}(H_\mu^{(\gamma,1)}) \cup \sigma_{\rm two}(H_\lambda^{(\gamma,2)})$ resp. $[0; 3+3\gamma/2]$ is called two-particle resp. three-particle branch of the essential spectrum $\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)})$ of the operator $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$.

Let Λ be a subset of $\mathbb{T}$ given by

$$\Lambda := \left\{0; \pm\frac{2}{n}\pi; \pm\frac{4}{n}\pi; \ldots; \pm\frac{n'}{n}\pi\right\} \cup \Pi_n,$$

where

$$n' := \begin{cases} n-2, & \text{if } n \text{ is even} \\ n-1, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases} \quad \text{and} \quad \Pi_n := \begin{cases} \{\pi\}, & \text{if } n \text{ is even} \\ \emptyset, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}.$$

Direct calculation shows that the cardinality of Λ is equal to n. It is easy to check that for any $\gamma > 0$ the function $E_\gamma(\cdot,\cdot)$ has the non-degenerate zero minimum at the points of $\Lambda \times \Lambda$.

Recall that [1] if $v(x') = 0$ for all $x' \in \Lambda$, then one can easily seen that the integral

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{v^2(t)dt}{\varepsilon(t)}$$

is positive and finite. For this case we define

$$\mu_0^{(\gamma)} := (1+\gamma)\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{v^2(t)dt}{\varepsilon(t)}\right)^{-1}, \quad \gamma > 0.$$

Set $E_{\mu,\lambda}^{(\gamma)} := \min\{\xi : \xi \in \sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)})\}$. Then $E_{\mu,\lambda}^{(\gamma)} \in \sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)})$ and it is called the lower bound of the essential spectrum of $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$.

Theorem 3. *Let* $\gamma > 0$ *be a fixed. For the lower bound* $E_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$ *the following assertions hold.*

(i) *If* $v(x') \neq 0$ *for some* $x' \in \Lambda$, *then for all* $\mu, \lambda, \gamma > 0$ *we have* $E_{\mu,\lambda}^{(\gamma)} = \min\{\min\sigma(H_\mu^{(\gamma,1)}), \min\sigma(H_\lambda^{(\gamma,2)})\} < 0$;

(ii) *Assume* $v(x') = 0$ *for all* $x' \in \Lambda$.

(ii1) *For any* $\mu > \mu_0$ *and* $\lambda > 0$ *we have* $E_{\mu,\lambda}^{(\gamma)} = \min\{\min\sigma(H_\mu^{(\gamma,1)}), \min\sigma(H_\lambda^{(\gamma,2)})\} < 0$;

(ii2) *For any* $\mu \leq \mu_0$ *and* $\lambda > 0$ *we have* $E_{\mu,\lambda}^{(\gamma)} = \min\sigma(H_\lambda^{(\gamma,2)}) < 0$.

Moreover, $\max\sigma(H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}) = 3+3\gamma/2$ *for any* $\mu, \lambda, \gamma > 0$.

The latter result plays a key role in the analysis of the discrete spectrum of $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$. In [1] the discrete spectrum of $H_{\mu,0}^{(\gamma)}$ was discussed. A similar model (non-symmetric version of $H_{\mu,\lambda}^{(\gamma)}$) on a 3D lattice was considered in [2] and its spectrum was investigated.

Reference

1. *T.H.Rasulov.* Number of eigenvalues of a three-particle lattice model Hamiltonian, Contemporary Analysis and Applied Mathematics. **2**:2 (2014), pp. 179–198.
2. *G.F.Dell'Antonio, Z.I.Muminov, Y.M.Shermatova.* On the number of eigenvalues of a model operator related to a system of three particles on lattices, J. Phys. A: Math. Theor., **44** (2011), 315302 (27 pp).

Dominance order of the diagonally dominant $n \times n$ operator matrices

Rasulov T.
Bukhara State University and Bukhara branch of the Institute of Mathematics, Uzbekistan
e-mail: rth@mail.ru

In the present note, we consider the class of diagonally dominant $n \times n$ operator matrices [1], which bores its name from the position of the dominating entries in each column.

Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, let $(\mathcal{H}_i, \|\cdot\|_i)$, $i = 1, \ldots, n$, be Banach spaces, and let $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ be the Euclidean product of $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$, that is,

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n, \quad \|f\| := \sqrt{\|f_1\|_1^2 + \cdots + \|f_n\|_n^2}, \quad f = (f_1, \ldots, f_n)^t \in \mathcal{H}.$$

In the Banach space $\mathcal{H}$ we consider linear operators $\mathcal{A}$ that admit an $n \times n$ operator matrix representation

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{1}$$

in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$, where the entries are densely defined closable linear operators

$$A_{ij} : \mathcal{H}_j \supset D(A_{ij}) \to \mathcal{H}_i, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

and for which the domain of $\mathcal{A}$, given by

$$D(\mathcal{A}) = \bigoplus_{j=1}^{n} \Big(\bigcap_{i=1}^{n} D(A_{ij}) \Big),$$

is again dense in $\mathcal{H}$.

It is known that every bounded linear operator acting in $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$ can be written as an operator matrix of the form (1). But unlike bounded operators, unbounded linear operators, in general, do not admit a matrix representation (1) with respect to a given decomposition $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$.

For convenience, we recall the notion of relative boundedness and some related characterizations [2].

Let $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, $(G, \|\cdot\|_G)$ be Banach spaces, and let

$$T : E \supset D(T) \to F, \quad S : E \supset D(S) \to G$$

be linear operators. Then, S is called T-bounded (or relatively bounded with respect to T) if $D(T) \subset D(S)$, and there exist constants a_S, $b_S \geq 0$ with

$$\|Sx\|_G \leq a_S \|x\|_E + b_S \|Tx\|_F, \quad x \in D(T); \tag{2}$$

the infimum δ_S of all b_S such that (2) holds for some $a_S \geq 0$ is called T-bound of S (or relative bound of S with respect to T).

Note that, if T is closed and S is closable with $D(T) \subset D(S)$, then S is T-bounded [2].

Definition 1. *For an operator matrix $\mathcal{A}$ as in* (1), *we define the* diagonal part $\mathcal{T}$ *and the* off-diagonal part $\mathcal{S}$ *by*

$$\mathcal{T} := \operatorname{diag}\big(A_{11}, \ldots, A_{nn}\big), \quad \mathcal{S} := \mathcal{A} - \mathcal{T},$$

and we call $\mathcal{A}$ diagonally dominant of order $\delta_{\mathcal{S}}$ *if* $\mathcal{S}$ *is* $\mathcal{T}$*-bounded with* $\mathcal{T}$*-bound* $\delta_{\mathcal{S}}$*.*

Note that, for a diagonally dominant operator matrix $\mathcal{A}$, the domain is always given by the domains of the diagonal entries

$$D(\mathcal{A}) = D(A_{11}) \oplus \cdots \oplus D(A_{nn}).$$

Remark 1. *If* $\mathcal{A}$ *is diagonally dominant of order* $\delta_{\mathcal{S}} < 1$*, then* $\mathcal{S}$ *is* $\mathcal{A}$*-bounded with* $\mathcal{A}$*-bound* $\le \delta_{\mathcal{S}}/(1-\delta_{\mathcal{S}})$*.*

Diagonal dominance may also be characterized by means of the entries of the operator matrix $\mathcal{A}$ as follows.

Theorem 1. *Let* $\mathcal{A}$ *be as in* (1)*. Then,*

$$\mathcal{A} \text{ is diagonally dominant} \iff A_{ij} \text{ is } A_{jj}\text{-bounded}$$

for all $i,j = 1,\ldots,n$, $i \ne j$*. In this case, if* $\delta_{\mathcal{S}}$ *is the dominance order of* $\mathcal{A}$ *and* δ_{ij} *are the* A_{jj}*-bounds of* A_{ij}*, then*

$$\delta_{ij} \le \delta_{\mathcal{S}} \le \delta := \left((n-1) \max_{l=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k\ne l}}^{n} \delta_{kl}^2 \right)^{1/2} \tag{2}$$

for all $i,j = 1,\ldots,n$, $i \ne j$*; in particular,*

$$\mathcal{A} \text{ is diagonally dominant of order } 0 \iff \delta_{ij} = 0, \quad i,j = 1,\ldots,n, \; i \ne j.$$

Remark 2. *If the operator matrix* $\mathcal{A}$ *has a fixed number of zero entries in each column, then the upper bound* δ *in Theorem* 1 *may be improved. For example, if* $\mathcal{A}$ *is tridiagonal,* $A_{ij} = 0$ *for* $|i-j| > 1$*, we can replace the estimate in the first line of* (2) *by the equality*

$$\|\mathcal{S}f\|^2 = \|A_{12}f_2\|_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \|A_{i,i-1}f_{i-1} + A_{i,i+1}f_{i+1}\|_i^2 + \|A_{n,n-1}f_{n-1}\|_n^2$$

to obtain that

$$\delta_{\mathcal{S}} \le \widehat{\delta} := \max\Big\{\sqrt{2}\delta_{21}, \sqrt{\delta_{12}^2 + 2\delta_{32}^2}, \sqrt{2} \max_{j=3}^{n-2} \big(\delta_{j-1,j}^2 + \delta_{j+1,j}^2\big), \sqrt{\delta_{n,n-1}^2 + 2\delta_{n-2,n-1}^2}, \sqrt{2}\delta_{n-1,n}\Big\}.$$

Corollary 1. *If the diagonal entries* A_{jj} *of* $\mathcal{A}$ *are closed, then*

$$\mathcal{A} \text{ is diagonally dominant} \iff D(A_{jj}) \subset D(A_{ij})$$

for all $i,j = 1,\ldots,n$, $i \ne j$*.*

The diagonal part $\mathcal{T}$ of $\mathcal{A}$ is always closable since it is the direct sum of the closable operators $A_{11},\ldots,A_{nn}$. For the off-diagonal part $\mathcal{S}$ this is only true in the 2×2 case.

The upper bounds δ and $\widehat{\delta}$ for the dominance order in Theorem 1 and Remark 2, respectively, may be strict, for the corresponding example see [1].

Note that the dominance order $\delta_{\mathcal{S}}$ depends upon the choice of the norm on $\mathcal{H}$ since so do the constants $a_{\mathcal{S}}$ and $b_{\mathcal{S}}$ in (2). For instance, instead of the Euclidean norm $\|\cdot\|$ on the Hilbert space product $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_n$, choose the equivalent norm

$$\|f\|' := \|f_1\|_1 + \cdots + \|f_n\|_n, \quad f = (f_1,\ldots,f_n)^t \in \mathcal{H},$$

and let $\delta'_{\mathcal{S}}$ be the corresponding dominance order, and δ_{ij} the A_{ii}-bound of A_{ij}, $i,j = 1,\ldots,n$, $|i-j| = 1$. Then, we obtain the upper bound

$$\delta'_{\mathcal{S}} \le \delta' := \max_{j=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i\ne j}}^{n} \delta_{ij}.$$

Note that, in the tridiagonal case, no further improvement may be obtained; here $\delta_{ij} = 0$ for $|i-j| > 1$, whence

$$\delta' = \widehat{\delta}' = \max\Big\{\delta_{21}, \max_{j=2}^{n-1}(\delta_{j-1,j} + \delta_{j+1,j}), \delta_{n-1,n}\Big\}.$$

We notice that, the case $n = 2$ was studied in [3] and diagonally dominant, off-diagonally dominant, upper dominant and lower dominant unbounded operator matrices were discussed. Here the lower dominant case does not extra consideration; it is equivalent to the upper dominant case if the two space components are exchanged.

Theorem 1 plays a crucial role in the deriving the criterion for the closability and closedness of $\mathcal{A}$ and in the proof of spectral inclusion property for $\mathcal{A}$.

Reference

1. *T.H. Rasulov, C. Tretter.* Spectral inclusion for unbounded diagonally dominant $n \times n$ operator matrices, Rocky Mountain Journal of Mathematics. **48**:1 (2018), pp. 279–324.
2. *T. Kato.* Perturbation theory for linear operators, Classics in mathematics, Springer, Berlin, 1995.
3. *C. Tretter.* Spectral theory of block operator matrices and applications, Imperial College Press, London, 2008.

Uniform estimates for oscillatory integrals with homogeneous polynomial phases of degree 4

[1]**Ruzhansky M.**, [2]**Safarov A.**, [3]**Khasanov G.**,

[1] *Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics, Ghent University, Krijgslaan 281, Ghent, Belgium,*
e-mail: michael.ruzhansky@ugent.be

[2] *Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan Olmazor district, University 46, Tashkent, Uzbekistan*
e-mail: safarov-akbar@mail.ru

[3] *Samarkand State University, Department Mathematics, 15 University Boulevard Samarkand, 140104, Uzbekistan*
e-mail: khasanov-g75@mail.ru

Definition 1. An oscillatory integral with phase f and amplitude a is an integral of the form

$$J(\lambda, f, a) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)e^{i\lambda f(x)}dx, \tag{1}$$

where $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ and $\lambda \in \mathbb{R}$.

If the support of a lies in a sufficiently small neighborhood of the origin and f is an analytic function at $x = 0$, then for $\lambda \to \infty$ the following asymptotic expansion holds ([1]):

$$J(\lambda, f, a) \approx e^{i\lambda f(0)} \sum_s \sum_{k=0}^{n-1} b_{s,k}(a)\lambda^s(\ln\lambda)^k, \tag{2}$$

where s belongs to a finite number of arithmetic progressions, independent of a, composed of negative rational numbers.

Definition 2. The oscillation exponent f at the point 0 is the number $\beta(f)$, maximum among all numbers s possessing the following property: for any neighborhood of the point 0 there exists a function a supported in this neighborhood for which in decomposition () there is k such that $b_{s,k}(a) \neq 0$.

Definition 3. The multiplicity $p(f)$ of the oscillation exponent $\beta(f)$ is the maximal p with the property: for any neighborhood of the point 0 there exists a with support in it, for which $b_{\beta(f),p(f)}(a) \neq 0$. The pair $(\beta(f), p(f))$ is denoted by $O(f)$.

Let $U \subset V \subset \mathbb{R}^2$ be bounded neighborhoods of the origin, $\overline{U}(\overline{V})$ the closure of $U(V)$, respectfully. Suppose that the function $f : \overline{V} \to \mathbb{R}$ (where $f \in C^N\left(\overline{V}\right)$, $(N \geq 8)$) has the form:

$$f\left(x_1, x_2\right) = f_\pi\left(x_1, x_2\right) + g\left(x_1, x_2\right), \tag{3}$$

where $f_\pi\left(x_1, x_2\right)$ is a homogeneous polynomial of degree 4 having the root $b(0,0)$ of multiplicity at most 2 (e.g. polynomial $f_\pi(x)$ of order 4 has at most two roots of multiplicity two on the unit circle in $\mathbb{R}^2$ centered at the origin), and $g \in C^N(V)$ is such that $D^\alpha g(0,0) = 0$ for all $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 4$, where D^α is $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}}$, $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ is a multi-index, $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$ are the non-negative integers.

Definition 4. Let $F \in C^N\left(\overline{V}\right)$ be a function such that $\|F\|_{C^N\left(\overline{V}\right)} < \varepsilon$, where N is a natural number and ε is a sufficiently small positive number, where $\|F\|_{C^N\left(\overline{V}\right)} = \max\limits_{\overline{V}} \sum\limits_{|\alpha| \leq N} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} F(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right|$. Then the function $f + F$ is called to be a deformation of f (see [2]).

Definition 5.([2]) Let $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ be a $C^N(\overline{V})$ function. We say that the oscillatory integral with phase f has the uniform estimate (β_u, p_u), where $\beta_u \leq 0$, $p_u \geq 0$, p_u is an integer, if there are $C_V > 0$, $\epsilon_V > 0$ and a neighborhood U of $0 \in \mathbb{R}^2$, such that $U \subset\subset V$ and for all $\lambda \geq 2$, $\|F\|_{C^N(U)} < \epsilon$, $a \in C_0^2(U)$, we have

$$|J(\lambda, f + F, a)| \leq C_V \lambda^{\beta_u} (\ln \lambda)^{p_u} \|a\|_{C^2}.$$

The main result of the work is the following.

Theorem 1. Let $f \in C^8(\bar{V})$ have the form (1). Then there exists a positive number ε and a neighborhood $U \subset V$ of the origin such that for any functions $a \in C_0^1(U)$ and $F \in C^8\left(\overline{V}\right)$, $\|F\|_{C^8\left(\overline{V}\right)} < \varepsilon$, the following estimate holds:

$$\left| \int_U e^{i\lambda(f+F)} a(x)\, dx \right| \leq \frac{C \|a\|_{C^1} \ln(2 + |\lambda|)}{|\lambda|^{\frac{1}{2}}}. \tag{4}$$

1) In paper V. N. Karpushkin [3] showed that, if f is analytic at the origin, $df|_0 = 0$ and $d^2 f|_0$ has corank 2, then the result of this theorem holds. Here, we show that an analog of V. N. Karpushkin's result [3] (and also see [4]) holds true for sufficiently smooth phase function.

2) Note that if $g \equiv 0$, $F \equiv 0$, and $a(0) \neq 0$, then we have [5]

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\ln \lambda} \int_{\mathbb{R}^2} e^{if(x)} a(x) dx = ca(0)$$

with $c \neq 0$.

References

1. *V. N. Karpushkin.* Uniform estimates of oscillating integrals in $\mathbb{R}^2$, Dokl. Academy of Sciences of the USSR, 254 (1980), no.1, 28–31.(Russian)

2. *V. N. Karpushkin.* Uniform estimates for oscillatory integrals with parabolic or hyperbolic phase, Proceedings of the I.G.Petrovsky Seminar, 9 (1983), 3–39.(Russian)

3. *V. N. Karpushkin.* Uniform estimates for oscillatory integrals with phase depends from two variables, Proceedings of the I.G.Petrovsky Seminar, 10 (1984), 150–169.(Russian)

4. *A. N. Varchenko.* Newton polyhedra and estimation of oscillating integrals, Functional Analysis and Its Applications 10 (1976), 175–196 .

5. *I. A. Ikromov and D. Muller.* Uniform estimates for the Fourier transform of surface carried measures in $\mathbb{R}^3$ and an application to Fourier restriction, Journal of Fourier Analysis and Applications 17 (2011), no. 6, 1292–1332.

On Weierstrass preparation theorem

Sadullaev A.
Professor of the National University of Uzbekistan
e-mail: sadullaev@mail.ru
Dedicated to the 70th anniversary of Professor Saidakhmad Lakaev

The well-known Weierstrass theorem states that if $f(z,w)$ is a holomorphic function at a point $(z_0,w_0) \in \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$ and $f(z_0,w_0) = 0$, $f(z_0,w) \not\equiv 0$ then in some neighborhood $U = V \times W$ of this point f is represented as

$$f(z,w) = [(w-w_0)^m + \\ + c_{m-1}(z)(w-w_0)^{m-1} + \cdots + c_0(z)]\varphi(z,w)$$

where $m \geq 1$ is the order of zero of $f(z_0,w)$ at $w = w_0, c_k(z), k = 0,1,...,m-1$, are holomorphic in V, $c_k(z_0) = 0$ and $\varphi(z,w)$ is holomorphic in $U, \varphi(z,w) \neq 0, (z,w) \in U.$

Pseudopolynomial

$$(w-w_0)^m + c_{m-1}(z)(w-w_0)^{m-1} + \cdots + c_0(z)$$

is called Weierstrass polynomial.

In recent years, the Weierstrass representation (1) has found a number of applications in the theory of oscillatory integrals:

$$J(\lambda,\sigma) := \int_{\mathbb{R}^n} a(x,\sigma)e^{i\lambda\Phi(x,\sigma)}dx,$$

where $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ is called to be an amplitude function and $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ is a smooth real-valued function co-called a phase function and λ is a real parameter.

We prove, that there is a global multidimensional (in w) option (3) for arbitrary $f(z,w) \in \mathcal{O}\left(D_z \times \mathbb{C}_w^k\right)$.

Theorem. *(For $w \in \mathbb{C}$). Let $f(z,w)$ be holomorphic in a domain $\Omega = D_z \times \mathbb{C}_w \subset \mathbb{C}^{n+1}$, where any second Cousin problem is solvable in a domain $D \subset \mathbb{C}^n$. Let us denote by $n_f(z_0)$ the number of zeros of the entire function $f(z_0,w)$ of variable $w \in \mathbb{C}$ taking into account multiplicity. We put $n_f(z_0) = -1$ if $f(z_0,w) \equiv 0$. If the set $\Im(f) := \{z \in D : n_f(z) < \infty\}$ is not pluripolar in D, then the function $f(z,w)$ is represented as (3), where $c_k(z) \in \mathcal{O}(D), k = 0,1,...,m, \varphi(z,w) \in \mathcal{O}(\Omega), \varphi(z,w) \neq 0$ for any $(z,w) \in \Omega$.*

References

1. Ikromov I.A. and Muranov Sh.A., Estimates of oscillatory integrals with a damping factor, Math. Notes, V.104(2018), no.2, 218-230.

2. Sadullaev A. On Weierstrass polynomials, AnnPolMat, V.123(2019), pp 473-479.

3. Sadullaev A., Ikromov I.A., Muranov Sh.A., Damped oscillatory integrals and Weierstrass polynomials, Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, Volume 3 Issue 2, Article 15, (2020), pp. 255-268.

4. Sadullaev A.and Ikromov I.A., Weierstrass polynomials in estimates of oscillatory integrals, Modern Mathematics. Fundamental Directions, T.67 no. 4(2021), pp. 668-692.

5. Sadullaev A. and Kytmanov A., Estimates for the volume of the zeros of a holomorphic function depending on a complex parameter, Matematicheskiy Sbornik, V. 212:11 (2021), 109-115.

Separat garmonik funksiyalar uchun o‘rta qiymat xossalari

Sotliqov G‘.R.
Urganch davlat universiteti, O‘zbekiston,
e-mail: gsatlikov81@gmail.com

Ma’lumki, garmonik funksiyalar uchun muhim xossalardan biri bu integral o‘rta qiymat xossasi hisoblanadi va bu xossa garmonik funksiyalar qiymatlari o‘rtasida o‘ziga xos bog‘liqlikni ifodalaydi(qarang [1,3,4]). Mazkur tadqiqot ishi separat garmonik va separat subgarmonik funksiyalar uchun integral o‘rta qiymat xossalarini o‘rganishga bag‘ishlanadi.

Ta’rif. *D $\left(D = U \times V \subset \mathbb{C}^2\right)$ sohada berilgan $u(z,w)$ funksiya:*
a) $\forall z^0 \in U$ lar uchun $u\left(z^0, w\right) - V$ da garmonik;
b) $\forall w^0 \in V$ lar uchun $u\left(z, w^0\right) - U$ da garmonik bo‘lsa,
u holda $u(z,w)$ funksiya $U \times V$ da separat garmonik deyiladi.

Lelon teoremasiga [2] ko‘ra sohada aniqlangan separat garmonik funksiya bu sohada garmonik bo‘ladi va bu funksiyalar uchun har bir sharda integral o‘rta qiymat xossasi o‘rinli. Biroq separat garmonik funksiyalar uchun bu xossa polidoirada ham bajariladi.

Teorema 1. *$U \times V \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w -$ birlik polidoirada berilgan separat garmonik $u(z,w)$ funksiya uchun $\forall \left(z^0, w^0\right) \in U \times V$ nuqtada va $\prod_{r_1,r_2}(z,w) = \left\{\left|z - z^0\right| < r_1\right\} \times \left\{\left|w - w^0\right| < r_2\right\} \subset U \times V$ shartni qanoatlantiruvchi yetarlicha kichik $\forall r_1, r_2 > 0$ uchun*

$$u\left(z^0,\, w^0\right) = \frac{1}{(2\pi)^2 r_1 r_2} \int\limits_{\Gamma} u(z,\, w)\, dz dw$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.
Bu yerda integral $\Gamma = \left\{\left|z - z^0\right| = r_1\right\} \times \left\{\left|w - w^0\right| = r_2\right\}$ ostov bo‘yicha olingan.

Ushbu tadqiqot ishining asosiy natijasi quyidagi.

Teorema 2 (teskari teorema). *Agar $U \times V -$ polidoirada aniqlangan $u(z,w)$ uzluksiz funksiya uchun har bir $\left(z^0, w^0\right) \in U \times V$ nuqtada shunday $r_1^0, r_2^0 > 0$ sonlar topilib, $\forall\, 0 < r_1 < r_1^0,\ \ 0 < r_2 < r_2^0$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha r_1, r_2 haqiqiy sonlar uchun*

$$u\left(z^0,\, w^0\right) = \frac{1}{(2\pi)^2 r_1 r_2} \int\limits_{\Gamma} u(z,\, w)\, dz dw$$

tenglik bajarilsa, u holda $u(z,w)$ funksiya $U \times V -$da separat garmonik bo‘ladi.
Bu yerda integral $\Gamma = \left\{\left|z - z^0\right| = r_1\right\} \times \left\{\left|w - w^0\right| = r_2\right\}$ ostov bo‘yicha olingan.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *David H. Armitage, Stephen J. Gardiner* Classical Potential Theory, Springer-Verlag London 2001.
2. *Lelong P.* Les fonctions plurisousharmoniques, Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. 62, P. 301-328, 1945.
3. *Privalov I.I.* Subharmonic functions, Moscow, 1937 (in Russian)
4. *Rudin W.* Function theory in the polydisc, Benjamin, 1969.

On the continuation of solution of the generalized Cauchy-Riemann system with quaternion parameter

[1]Sattorov E., [2]Rustamov S., [3]Boboxonova G‘.
[1] *Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: avtor1@mail.ru
[2] *Navoi State Pedagogical Institute, Navoi, Uzbekistan,*
e-mail: Rustamov-S@mail.ru
[3] *Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: boboxonova-g@mail.ru

In this paper, we present an explicit formula for the continuation of the solution of the Cauchy problem for a generalized Cauchy-Riemann system with quaternion parameter[1]

$$\alpha_0 f_0 - divf - < f, \overrightarrow{\alpha} >= 0, \;\; gradf_0 + rotf + [f \times \overrightarrow{\alpha}] + f_0 \overrightarrow{\alpha} + \alpha_0 f = 0, \tag{1}$$

. Ω is a bounded simply connected domain in R^3 with boundary $\partial\Omega$ composed of a compact connected part T of the plane $y_3 = 0$ and a smooth Lyapunov surface S lying in the half-space $y_3 > 0$, with $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial D$, $\partial\Omega = S \cup T$. As to S, we assume that each ray issuing from any point x of the domain Ω intersects this surface at most l points. The solution of the Cauchy problem will be constructed in the domain Ω for the case in which the Cauchy data are given on a part S of the boundary. The Cauchy problem for a generalized Cauchy-Riemann system with quaternion parameter is an ill-posed problem (see Hadamard's example in [2. p.39 (Russain transl.)]).

We assume that the solution of the problem exists (then it is unique [3, p.58]) and the exact Cauchy data are given. Under these conditions, we establish an explicit continuation formula which is an analog of the classical Riemann-Volterra-Hadamard formula for solving the Cauchy problem in the theory of hyperbolic equations. An explicit regularization formula is proposed for the conditions given above hold and, instead of the Cauchy data, their continuous approximations with prescribed deviation in a uniform metric are given under the condition that the solution is bounded by a positive number on a part T of the boundary.

The method of deriving of these results is based on the explicit construction of the fundamental solution matrix for a generalized Cauchy-Riemann system with quaternion parameter (depending on a positive parameter) vanishing as the parameter tends to infinity on T when the pole of the fundamental solution lies in the half-space $y_3 > 0$. Following Lavrent'ev and Yarmukhamedov, we call the fundamental matrix of solutions with this property the **Carleman matrix** for the half-space [4],[5]. After the construction of the Carleman matrix in explicit form, the continuation and regularization formulas for the solution of the Cauchy problem can be written out as a generalized spatial Cauchy integral formula.

Statement of the problem. Given are the Cauchy data for the solution of system (1) on the surface S:

$$F(y)|_S = g(y), \;\; y \in S \tag{2}$$

where S is a part of the boundary of the domain Ω, $g(y) = \sum\limits_{k=1}^{3} g_k(y) i_k$ is a given continuous quaternion-valued function.

For $\alpha-$ hyperholomorphic function the quaternionic left Cauchy integral formula is defined (see [6, Subsection 4.15]):

Teorema. *Let Ω is a bounded simply connected domain in R^3 with boundary $\partial\Omega$ composed of a compact connected part T of the plane $y_3 = 0$ and a smooth Lyapunov surface S lying in the half-space $y_3 > 0$, with $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = S \cup T$.. Let $f \in C^p(\Omega, H(C))$. Then*

$$K^{\sigma}_{\alpha}[f](x) := - \int\limits_{S} \widetilde{K}^{x}_{\alpha}[n_\tau f(\tau)] = f_\sigma(x), x \in \Omega. \tag{3}$$

where

(1) If $\alpha = \alpha_0 \in C$, then

$$\widetilde{K}_{\alpha}^{x}[f](\tau) := K_{\alpha_0}(x-\tau)f(\tau). \tag{4}$$

(2) If $\alpha \notin \overline{\Re}, \overrightarrow{\alpha}^2 \neq 0$, then

$$\widetilde{K}_{\alpha}^{x}[f](\tau) := \frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2}} K_{\xi_+}(x)f(\tau)\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2} + \overrightarrow{\alpha} + \frac{1}{2\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2}} K_{\xi_-}(x)f(\tau)\sqrt{\overrightarrow{\alpha}^2} - \overrightarrow{\alpha}. \tag{5}$$

(3) If $\alpha \notin \overline{\Re}, \overrightarrow{\alpha}^2 = 0$, then

$$\widetilde{K}_{\alpha}^{x}[f](\tau) := K_{\alpha_0}(x)f(\tau) + \frac{\partial}{\partial \alpha_0}[K_{\alpha_0}](x)f(\tau)\overrightarrow{\alpha}. \tag{6}$$

(4) If $\alpha \in \Re, \alpha_0 \neq 0$, then

$$\widetilde{K}_{\alpha}^{x}[f](\tau) := \frac{1}{2\alpha_0} K_{2\alpha_0}(x)f(\tau)\alpha + \frac{1}{2\alpha_0}[K_{\alpha_0}](x)f(\tau)\overrightarrow{\alpha}. \tag{7}$$

(5) If $\alpha \in \Re, \alpha_0 = 0$, then

$$\widetilde{K}_{\alpha}^{x}[f](\tau) := K_0(x)f(\tau) + \Phi_0(x)f(\tau)\alpha. \tag{8}$$

References

1. *V.V.Kravchenko and M.V.Shapiro.* On the generalized system of equation Cauchy-Riemann with quaternion parameter. Dokl. Akad. Nauk, 1993,vol. 329, no. 5, pp.547-549.

2. *J.S.Hadamard.* Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations (Yale University Press, New Haven, Conn., 1923; Dover Publications, New York, 1953; Nauka, Moskow, 1978.

3. *M.M.Lavrent'ev.* Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics (Izdat. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1962 [in Russian])- 92 pp.

4. *L.Bers, F.Jonn, and M.Schechter.* Partial Differential Equations in Lectures in Applied Mathematics (Boulder, Colorado, 1957; Mir, Moscow, 1966), vol.III. - 351 pp.

5. *Sh.Yarmukhamedov.* In the Cauchy problem for the Laplace equation"Dokl.Akad.Nauk SSSR. 235(2),281-283 (1977) [Soviet Math.Dokl. 18(2),939-942(1978)].

6. *Kravchenko V.V., Shapiro M.V.*Integral representations for s patial models of mathematical physics Addison Wesley Longman Ltd., Pitman Research Notes in Mathematics. Series, v.351, 1996.

Essential spectrum of a 3×3 operator matrix with non compact perturbation

Saylieva G.
Uzbekistan, Bukhara State University
e-mail: gulruxsayliyeva1306@gmail.com

Block operator matrices are matrices the entries of which are linear operators between Banach or Hilbert spaces [1]. They arise in various areas of mathematics and its applications: in systems theory as Hamiltonians, in the discretization of partial differential equations as large partitioned matrices due to sparsity patterns, in saddle point problems in non-linear analysis, in evolution problems as linearizations of second order Cauchy problems, and as linear operators describing coupled systems of partial differential equations. Such systems occur widely in mathematical physics, e.g. in fluid mechanics, magnetohydrodynamics, and quantum mechanics. In all these applications, the spectral properties of the corresponding block operator matrices are of vital importance as they govern for instance the time evolution and hence the stability of the underlying physical systems.

In the present note we investigate the essential spectrum of a 3×3 operator matrix with non-compact perturbation. This operator is associated with a lattice system describing two identical bosons and one particle, another nature in interactions, without conservation of the number of particles. We discuss the case where the lattice kinetic energy $\varepsilon(\cdot)$ of a particle has a special form with non-degenerate minimum at the several points of the one-dimensional torus.

Let $\mathbb{C}$ be the field of complex numbers, $L_2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on the one-dimensional torus $\mathbb{T}$ and $L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2)$ be the Hilbert space of square integrable (complex) symmetric functions defined on $\mathbb{T}^2$. Denote by $\mathcal{H}$ the direct sum of spaces $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T})$ and $\mathcal{H}_2 := L_2^{\mathrm{s}}(\mathbb{T}^2)$, that is, $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

In the present note we consider a 3×3 matrix operator in the Hilbert space $\mathcal{H}$ as

$$H_{\mu,\lambda} := \begin{pmatrix} H_{00} & \mu H_{01} & 0 \\ \mu H_{01}^* & H_{11} & \mu H_{12} \\ 0 & \mu H_{12}^* & H_{22}^0 - \lambda V \end{pmatrix}$$

with the entries

$$H_{00} f_0 = a f_0, \quad H_{01} f_1 = \int_{\mathbb{T}} \sin t f_1(t) dt;$$
$$(H_{11} f_1)(x) = (a + 1 - \cos(2x)) f_1(x), \quad (H_{12} f_2)(x) = \int_{\mathbb{T}} \sin t f_2(x,t) dt;$$
$$(H_{22}^0 f_2)(x,y) = (a + 2 - \cos(2x) - \cos(2y)) f_2(x,y), \quad V := V_1 + V_2,$$
$$(V_1 f_2)(x,y) = \cos y \int_{\mathbb{T}} \cos t f_2(x,t) dt, \quad (V_2 f_2)(x,y) = \cos x \int_{\mathbb{T}} \cos t f_2(t,y) dt.$$

Here $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0,1,2$; μ, λ are non-negative real numbers and a is a fixed real number.

Under these assumptions the operator $H_{\mu,\lambda}$ is bounded and self-adjoint in $\mathcal{H}$.

This model is a particular case of the operator matrix considered in [2] and can be considered as a non-compact perturbation of the operator matrix which is investigated in [3].

Let $\widehat{\mathcal{H}}_2 := L_2(\mathbb{T}^2)$. To formulate our main results we introduce the channel operators $H_\mu^{(1)}$ and $H_\lambda^{(2)}$ acting in $\mathcal{H}_1 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_2$ and $\widehat{\mathcal{H}}_2$, respectively, as

$$H_\mu^{(1)} := \begin{pmatrix} H_{11} & \frac{\mu}{\sqrt{2}} H_{12} \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} H_{12}^* & H_{22}^0 \end{pmatrix}, \quad H_\lambda^{(2)} := H_{22}^0 - \lambda V_1.$$

It is clear that the channel operators $H_\mu^{(1)}$ and $H_\lambda^{(2)}$ are bounded and self-adjoint in their domain.

The decomposition of the spaces $\mathcal{H}_1 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_2$ and $\widehat{\mathcal{H}}_2$ into the direct integrals

$$\mathcal{H}_1 \oplus \widehat{\mathcal{H}}_2 = \int_{\mathbb{T}} \oplus (\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1) dx, \quad \widehat{\mathcal{H}}_2 = \int_{\mathbb{T}} \oplus \mathcal{H}_1 dx,$$

respectively, yields for the operators $H_\mu^{(1)}$ and $H_\lambda^{(2)}$ the decompositions into the direct integrals

$$H_\mu^{(1)} = \int_{\mathbb{T}} \oplus (h_\mu^{(1)} + (1 - \cos(2x) I)) dx,$$
$$H_\lambda^{(2)} = \int_{\mathbb{T}} \oplus (h_\lambda^{(2)} + (1 - \cos(2x)) I_1) dx.$$

Here I resp. I_1 is an identity operator on $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ resp. $\mathcal{H}_1$, the two bounded self-adjoint operators acting in $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ resp. $\mathcal{H}_1$ by

$$h_\mu^{(1)} := \begin{pmatrix} H_{00} & \frac{\mu}{\sqrt{2}} H_{01} \\ \frac{\mu}{\sqrt{2}} H_{01}^* & H_{11} \end{pmatrix},$$

resp.

$$h_\lambda^{(2)} := H_{11} - \lambda v, \quad (v f)(x) = \cos x \int_{\mathbb{T}} \cos t f(t) dt.$$

According to the Weyl theorem, for the essential spectra of the operators $h_\mu^{(1)}$ and $h_\lambda^{(2)}$ the equalities

$$\sigma_{\rm ess}(h_\mu^{(1)}) = \sigma_{\rm ess}(h_\lambda^{(2)}) = [a; a+2]$$

hold.

The following lemma describes the existence, the number and the location of the eigenvalues of $h_\mu^{(1)}$ and $h_\lambda^{(2)}$.

Lemma 1. *(i) For any $\mu > 0$ there are two simple eigenvalues $E_\mu^{(1,1)}$ and $E_\mu^{(1,2)}$ of the operator $h_\mu^{(1)}$ such that $E_\mu^{(1,1)} < a$ and $E_\mu^{(1,2)} > a+2$.*

(ii) For any $\lambda > 0$ there is a simple eigenvalue $E_\lambda^{(2)}$ of the operator $h_\lambda^{(2)}$ such that $E_\lambda^{(2)} < a$ and it has not eigenvalues bigger than $a+2$.

Next, we formulate the main results of the present note. In the following we describe the spectra of channel operators by the spectrum of $h_\mu^{(1)}$ and $h_\lambda^{(2)}$.

Theorem 1. *For the spectra of the operators $H_\mu^{(1)}$ and $H_\lambda^{(2)}$ the following equalities*

$$\sigma(H_\mu^{(1)}) = [E_\mu^{(1,1)}; E_\mu^{(1,1)} + 2] \cup [a; a+4] \cup [E_\mu^{(1,2)}; E_\mu^{(1,2)} + 2];$$
$$\sigma(H_\lambda^{(2)}) = [E_\lambda^{(2)}; E_\lambda^{(2)} + 2] \cup [a; a+4]$$

hold, where the numbers $E_\mu^{(1,1)}$, $E_\mu^{(1,2)}$, $E_\lambda^{(2)}$ are defined in Lemma 1.

The following theorem describes the relation between the essential spectrum of $H_{\mu,\lambda}$ and spectra of the channel operators $H_\mu^{(1)}$, $H_\lambda^{(2)}$.

Theorem 2. *For the essential spectrum of $H_{\mu,\lambda}$ we have*

$$\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = \sigma(H_\mu^{(1)}) \cup \sigma(H_\lambda^{(2)}).$$

Moreover, the set $\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda})$ consists the union of at most four bounded closed intervals.

The set

$$[E_\mu^{(1,1)}; E_\mu^{(1,1)} + 2] \cup [E_\mu^{(1,2)}; E_\mu^{(1,2)} + 2] \cup [E_\lambda^{(2)}; E_\lambda^{(2)} + 2]$$

resp. $[a; a+4]$ is called two-particle resp. three-particle branch of the essential spectrum $\sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda})$ of the operator $H_{\mu,\lambda}$.

For the lower and upper bound of the essential spectrum of $H_{\mu,\lambda}$ we have the following estimates:

$$\min \sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = \min\{E_\mu^{(1,1)}, E_\lambda^{(2)}\} < a, \quad \max \sigma_{\rm ess}(H_{\mu,\lambda}) = E_\mu^{(1,2)} + 2 > a+4.$$

Reference

1. *C.Tretter.* Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.

2. *T.Rasulov.* Study of the essential spectrum of a matrix operator, Theor. Math. Phys. **164**:1 (2010), pp. 883–895.

3. *S. Albeverio, S. N. Lakaev and T. H. Rasulov.* On the Spectrum of an Hamiltonian in Fock Space. Discrete Spectrum Asymptotics, J. Stat. Phys. **127**:2 (2007), pp. 191–220.

Bound states of Schrödinger-type operators on one and two dimensional lattices

Shokhrukh Kholmatov
University of Vienna, Austria
e-mail: shokhrukh.kholmatov@univie.ac.at

In this talk I would like to discuss some spectral properties of the Schrödinger-type operator

$$\widehat{H}_\mu := \widehat{H}_0 + \mu \widehat{V}, \qquad \mu \geq 0,$$

associated to a one-particle system in d-dimensional lattice $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2$, where the non-perturbed operator $\hat{H}_0$ is a self-adjoint convolution-type operator generated by a Hopping matrix $\hat{E} : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ and the potential $\hat{V}$ is the multiplication operator by $\hat{v} : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$. Under certain regularity assumption on $\hat{E}$ and a decay assumption on $\hat{v}$, we establish the existence or non-existence and also the finiteness of eigenvalues of $\hat{H}_\mu$. Moreover, in the case of existence we study the asymptotics of eigenvalues of $\hat{H}_\mu$ as $\mu \searrow 0$.

This is a joint work with Acad. Saidakhmat Lakaev and Dr. Firdavs Almuratov.

Occurrence of the Neimark-Sacker bifurcation in the phytoplankton-zooplankton system

Shoyimardonov S.
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, 9 University str., Tashkent, Uzbekistan,
e-mail: shoyimardonov@inbox.ru

In the work [1], authors considered the following phytoplankton-zooplankton system in continuous time:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-u) - \frac{uv}{1+cu} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\beta uv}{1+cu} - rv - \theta uv, \end{cases} \tag{1}$$

where β, r, θ, c are positive parameters. For the following discrete-time version of the model (1), existence and local stability of the positive fixed points are studied ([2]):

$$\begin{cases} u^{(1)} = u(2-u) - \frac{uv}{1+cu} \\ v^{(1)} = \frac{\beta uv}{1+cu} + (1-r)v - \theta uv. \end{cases} \tag{2}$$

The study of the occurrence of bifurcations at fixed points is an important direction in the theory of dynamical systems.

Let'u consider the fixed point $E = (u^*, v^*)$ of the operator (2) (see [2]), where

$$u^* = \frac{\beta - rc - \theta - \sqrt{(\beta - rc - \theta)^2 - 4cr\theta}}{2c\theta}, \quad v^* = (1-u^*)(1+cu^*).$$

Lemma. *For the fixed point $E = (u^*, v^*)$ the followings hold true:*

$$E_2 = \begin{cases} \text{attractive}, \quad \text{if} \quad q(u^*) < 1 \\ \text{repelling}, \quad \text{if} \quad q(u^*) > 1 \\ \text{nonhyperbolic}, \quad \text{if} \quad p(u^*) < 2, \quad q(u^*) = 1, \end{cases}$$

where

$$p(u) = (1-u)\left(\frac{1+2cu}{1+cu}\right) + 1, \qquad q(u) = (1-u)\left(\frac{1+2cu}{1+cu}\right) + u(1-u)\left(\frac{\beta}{(1+cu)^2} - \theta\right)$$

In the third case of the Lemma, at the positive fixed point $E_2 = (u^*, v^*)$ the Jacobian has a pair of complex conjugate eigenvalues λ_1, λ_2 with modules 1. Assume that all parameters belong to the set:

$$S_{E_2} = \left\{ (r, c, \beta, \theta) \in (0, +\infty): \quad c < \frac{\beta + \theta - 2\sqrt{\beta\theta}}{r}, \quad \theta = \theta_0 \right\}$$

and $p(u^*) < 2, \quad q(u^*) = 1$ in S_{E_2}. We define the

$$L = -Re\left[\frac{(1-2\lambda_1)\lambda_2^2}{1-\lambda_1} L_{11} L_{20}\right] - \frac{1}{2}|L_{11}|^2 - |L_{02}|^2 + Re(\lambda_2 L_{21}), \tag{3}$$

where

$$\begin{aligned}
L_{20} &= \frac{1}{4}\left(\frac{D - (u^*)^2(4b_{20} + s(2a_{20} - 2b_{11} - a_{11}s))}{\sqrt{-D}(1+cu^*)}\right) - \\
&\quad - \frac{i}{2}\left(\frac{u^*(c(1-u^*) - (1+cu^*)^2 + \beta - s)}{(1+cu^*)^2}\right), \\
L_{11} &= \frac{1}{2}\left(\frac{(u^*)^2(4b_{20} + s(2a_{20} - 2b_{11} - a_{11}s))}{\sqrt{-D}(1+cu^*)}\right) + \\
&\quad + \frac{i}{2}\left(\frac{2u^*(c(1-u^*) - (1+cu^*)^2) - u^*s}{(1+cu^*)^2}\right), \\
L_{02} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{D + (u^*)^2(4b_{20} + s(2a_{20} - 2b_{11} - a_{11}s))}{\sqrt{-D}(1+cu^*)}\right) - \\
&\quad - \frac{i}{2}\left(\frac{u^*(c(1-u^*) - (1+cu^*)^2 - \beta)}{(1+cu^*)^2}\right), \\
L_{21} &= \frac{1}{4}\left(\frac{c(u^*)^2(3c - 3cu^* - 2s - 2\beta)}{(1+cu^*)^3}\right) - \\
&\quad - \frac{i}{4}\left(\frac{cDu^* - 3(u^*)^3(1+cu^*)(4b_{30} + s(2a_{30} - 2b_{21} - a_{21}s))}{\sqrt{-D}(1+cu^*)^2}\right).
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
D &= \left(1 + \frac{(1-u^*)(1+2cu^*)}{1+cu^*}\right)^2 - 4, \quad s = 1 - c + 2cu^*, \\
a_{10} &= \frac{(1-u^*)(1+2cu^*)}{1+cu^*}, \quad a_{01} = -\frac{u^*}{1+cu^*}, \quad a_{20} = \frac{c(1-u^*)}{(1+cu^*)^2} - 1, \\
a_{11} &= -\frac{1}{(1+cu^*)^2}, \quad a_{30} = -\frac{c^2(1-u^*)}{(1+cu^*)^3}, \quad a_{21} = \frac{c}{(1+cu^*)^3}, \\
b_{10} &= (1-u^*)(1+cu^*)\left(\frac{\beta}{(1+cu^*)^2} - \theta_0\right), \quad b_{01} = 1, \\
b_{02} &= b_{03} = b_{12} = 0, \quad b_{20} = \frac{\beta c(1-u^*)}{(1+cu^*)^2}, \quad b_{11} = \frac{\beta}{(1+cu^*)^2}, \\
b_{21} &= -\frac{\beta c}{(1+cu^*)^3}, \quad b_{30} = \frac{\beta c^2(1-u^*)}{(1+cu^*)^3}.
\end{aligned}$$

Theorem. *Assume the parameters r, c, β, θ in the set S_{E_2} and L be defined as (3). If $L \neq 0$ then the system (2) undergoes a Neimark-Sacker bifurcation at the fixed point $E_2(u^*, v^*)$ when the parameter θ_* varies in the small neighborhood of origin. Moreover, if $L < 0$ (resp., $L > 0$), then an attracting (resp., repelling) invariant closed curve bifurcates from the fixed point for $\theta_* > 0$ (resp., $\theta_* < 0$).*

References

1. *Shanshan Chen, Hong Yang, Junjie Wei.* Global dynamics of two phytoplankton-zooplankton models with toxic substances effect. Journal of Applied Analysis and Computation, Vol.9, no.3, 2019, 796-809.

2. *Shoyimardonov S.K.* Neimark-Sacker bifurcation and stability analysis in a discrete phytoplankton-zooplankton system with Holling type II functional response, arXiv:2207.01961 [math.DS]. P.1.16.

Threshold analysis for the family of generalized Friedrichs models

Tosheva N.

Uzbekistan, Bukhara State University
e-mail: nargiza_n@mail.ru

Operators known as generalized Friedrichs model [1] appear in a series of problems in analysis, mathematical physics and probability theory. In the present note we discuss the threshold analysis for the family of generalized Friedrichs models corresponding to a system of quasi-particles, where their number is finite, but not fixed.

Let $\mathbb{C}$ be the field of complex numbers and $L_2(\mathbb{T}^3)$ be the Hilbert space of square integrable (complex) functions defined on the three-dimensional torus $\mathbb{T}^3$. Denote by $\mathcal{H}$ the direct sum of spaces $\mathcal{H}_0 := \mathbb{C}$ and $\mathcal{H}_1 := L_2(\mathbb{T}^3)$, that is, $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$.

In the present note we consider a family of generalized Friedrichs models $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$, which acts in $\mathcal{H}$ as

$$h(k) := \begin{pmatrix} h_{00}(k) & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11}(k) \end{pmatrix},$$

where

$$h_{00}(k)f_0 = (l_2\varepsilon(k)+1)f_0, \quad h_{01}f_1 = \int_{\mathbb{T}^3} v(t)f_1(t)dt,$$

$$(h_{11}(k)f_1)(q) = E_k(q)f_1(q), \quad E_k(q) := l_1\varepsilon(q) + l_2\varepsilon(k-q)$$

with $l_1, l_2 > 0$ and the dispersion function $\varepsilon(\cdot)$ is defined by

$$\varepsilon(q) := \sum_{i=1}^{3}(1-\cos(nq^{(i)})), \quad q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}) \in \mathbb{T}^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Here $f_i \in \mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$; the function $v(\cdot)$ is either even or odd function on each variable and there exist all second order continuous partial derivatives of $v(\cdot)$ on $\mathbb{T}^3$. Then the family of operators $h(k)$, $k \in \mathbb{T}^3$ is bounded and self-adjoint in $\mathcal{H}$.

We remark that the operators h_{01} resp. h_{01}^* are called annihilation resp. creation operators, respectively.

Let Λ be a subset of $\mathbb{T}^3$ given by

$$\Lambda := \left\{(p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) : p^{(i)} \in \left\{0, \pm\frac{2}{n}\pi; \pm\frac{4}{n}\pi; \ldots; \pm\frac{n'}{n}\pi\right\} \cup \Pi_n,\ i = 1, 2, 3\right\},$$

where

$$n' := \begin{cases} n-2, & \text{if } n \text{ is even} \\ n-1, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases} \quad \text{and} \quad \Pi_n := \begin{cases} \{\pi\}, & \text{if } n \text{ is even} \\ \emptyset, & \text{if } n \text{ is odd} \end{cases}$$

Direct calculation shows that the cardinality of Λ is equal to n^3 and for any fixed $k \in \Lambda$ the function $E_k(\cdot)$ has the non-degenerate zero minimum at the points of Λ.

Using the Weyl theorem, for the essential spectrum of $h(k)$ we obtain the equality $\sigma_{\text{ess}}(h(k)) = [E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$, where the numbers $E_{\min}(k)$ and $E_{\max}(k)$ by the rule

$$E_{\min}(k) := \min_{q \in \mathbb{T}^3} E_k(q) \quad \text{and} \quad E_{\max}(k) := \max_{q \in \mathbb{T}^3} E_k(q).$$

For any $k \in \mathbb{T}^3$ we define an analytic function $\Delta(k\,; \cdot)$ (the Fredholm determinant associated with the operator $h(k)$) in $\mathbb{C} \setminus [E_{\min}(k); E_{\max}(k)]$ by

$$\Delta(k\,; z) := l_2\varepsilon(k) + 1 - z - \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v^2(t)dt}{E_k(t) - z}.$$

A simple consequence of the Birman-Schwinger principle and the Fredholm theorem imply that
$$\sigma_{\rm disc}(h(k)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [E_{\min}(k); E_{\max}(k)] :\ \Delta(k\,; z) = 0\}.$$

Since for any $k \in \Lambda$ the function $E_k(\cdot)$ has non-degenerate zero minimum at the points of Λ and the function $v(\cdot)$ is a continuous on $\mathbb{T}^3$, for any $k \in \mathbb{T}^3$ the integral
$$\int_{\mathbb{T}^3} \frac{v^2(t)dt}{E_k(t)}$$
is positive and finite. The Lebesgue dominated convergence theorem and the equality $\Delta(\mathbf{0}\,;0) = \Delta(k\,;0)$ for $k \in \Lambda$ yield
$$\Delta(\mathbf{0}\,;0) = \lim_{k\to k'} \Delta(k\,;0), \quad k' \in \Lambda,$$
where $\mathbf{0} := (0,0,0) \in \mathbb{T}^3$.

Since $\mathbf{0} \in \Lambda$ the definition of $h(k)$ imply the identity $h(\mathbf{0}) \equiv h(k)$ for all $k \in \Lambda$.

Moreover, $\sigma_{\rm ess}(h(\mathbf{0})) = [0; 6(l_1 + l_2)]$.

Let us denote by $C(\mathbb{T}^3)$ and $L_1(\mathbb{T}^3)$ the Banach spaces of continuous and integrable functions on $\mathbb{T}^3$, respectively.

Definition 1. *The operator $h(\mathbf{0})$ is said to have a zero energy resonance, if the number 1 is an eigenvalue of the integral operator given by*
$$(G\psi)(q) = \frac{v(q)}{l_1 + l_2} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{v(t)\psi(t)}{\varepsilon(t)}dt, \quad \psi \in C(\mathbb{T}^3)$$
and at least one (up to a normalization constant) of the associated eigenfunctions ψ satisfies the condition $\psi(p') \neq 0$ for some $p' \in \Lambda$.

We notice that in Definition 1 the requirement of the existence of the eigenvalue 1 of G corresponds to the existence of a solution of $h(\mathbf{0})f = 0$ and the condition $\psi(p') \neq 0$ for some $p' \in \Lambda$ implies that the solution f of this equation does not belong to $\mathcal{H}$.

The following result establishes in which cases the bottom of the essential spectrum is a threshold energy resonance or eigenvalue.

Theorem 1. *The following statements are hold.*

(i) *The operator $h(\mathbf{0})$ has a zero eigenvalue if and only if $\Delta(\mathbf{0}\,;0) = 0$ and $v(q') = 0$ for all $q' \in \Lambda$;*

(ii) *The operator $h(\mathbf{0})$ has a zero energy resonance if and only if $\Delta(\mathbf{0}\,;0) = 0$ and $v(q') \neq 0$ for some $q' \in \Lambda$.*

Let I be an identity operator on $\mathcal{H}$.

Theorem 2. *If the operator $h(\mathbf{0})$ has either a zero energy resonance or a zero eigenvalue, then for any $k \in \Lambda$ and $p \in \mathbb{T}^3$ the operator $h(k-p) + l_1\varepsilon(p)I$ is non-negative.*

Set
$$\Lambda_0 := \{q' \in \Lambda : v(q') \neq 0\}.$$

Now we formulate a result (zero energy expansion for the Fredholm determinant, leading to behaviors of the zero energy resonance).

Theorem 3. *Let the operator $h(\mathbf{0})$ have a zero energy resonance and $k, p' \in \Lambda$. Then the following decomposition*
$$\Delta(k-p\,; z - l_1\varepsilon(p)) = \frac{4\pi^2}{n^2(l_1+l_2)^{3/2}} \Big(\sum_{q'\in\Lambda_0} v^2(q')\Big) \sqrt{\frac{l_1^2 + 2l_1l_2}{l_1+l_2}|p-p'|^2 - \frac{2z}{n^2}}$$
$$+ O(|p-p'|^2) + O(|z|)$$

holds for $|p-p'| \to 0$ *and* $z \to -0$.

We remark that Theorems 1, 2 and 3 are play key role in the spectral analysis of the family of 3×3 operator matrices, associated with the lattice systems describing two identical bosons and one particle, another nature in interactions, without conservation of the number of particles.

Reference:

1. *S.N.Lakaev.* Some spectral properties of the generalized Friedrichs model, (Russian), Trudy Sem. Petrovsk. 11 (1986), pp. 210–238, Translation in J. Soviet Math. 45:6 (1989), pp. 1540–1565.

On invariant sets of a quadratic non-stochastic operator

[1]**Xudayarov S.**

[1] *Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan,*
Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky, Bukhara, Uzbekistan,
e-mail: xsanat83@mail.ru

Non-linear dynamical systems arise in many problems of biology, physics and other sciences. In particular, quadratic dynamical systems describe the behavior of populations of different species with population models [1, 2, 3]. Let $E = \{1, 2, \dots, m\}$. A distribution on the set E is a probability measure $x = (x_1, \dots, x_m)$, i.e., an element of the simplex:

$$S^{m-1} = \{x \in R : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}.$$

In general, a quadratic operator V, $V : x \in R^m \to x' = V(x) \in R^m$ is defined by:

$$V : x'_k = \sum_{i,j=1}^{m} P_{ij,k} x_i x_j, \quad k = 1, \dots, m \tag{1}$$

In this talk we are interested to a non-stochastic quadratic mapping of simplex to itself, i.e. $V : S^{m-1} \to S^{m-1}$.

Definition. [3] A quadratic operator (1), preserving a simplex, is called non-stochastic (QnSO) if at least one of its coefficients $P_{ij,k}$, $i \neq j$ is negative.

Consider the following example of QnSO on the two-dimensional simplex S^2.

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(z-y)^2 + \frac{3}{2}x(y+z) \\ y' = \frac{1}{2}(x-z)^2 + \frac{3}{2}y(x+z) \\ z' = \frac{1}{2}(y-x)^2 + \frac{3}{2}z(x+y). \end{cases} \tag{2}$$

Fixed points. The fixed points are solutions to the system (2)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(z-y)^2 + \frac{3}{2}x(y+z) \\ y = \frac{1}{2}(x-z)^2 + \frac{3}{2}y(x+z) \\ z = \frac{1}{2}(y-x)^2 + \frac{3}{2}z(x+y). \end{cases}$$

By full analysis this system one obtains the following family of fixed points:

$$a_1 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \ \ a_2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), \ \ a_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), \ \ a_4 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$$

Thus a_1, a_2 and a_3 are saddle, but a_4 is an attracting fixed point.

Invariant sets. Recall that a set M is called invariant with respect to an operator V if $V(M) \subseteq M$.

Introduce the following sets:

$$M_1 = \{(x, y, z) \in S^2 : x > y > z > 1/6\},$$

$$M_2 = \{(x, y, z) \in S^2 : x > z > y > 1/6\},$$

$$M_3 = \{(x, y, z) \in S^2 : y > x > z > 1/6\},$$

$$M_4 = \{(x, y, z) \in S^2 : y > z > x > 1/6\},$$

$$M_5 = \{(x, y, z) \in S^2 : z > x > y > 1/6\},$$

$$M_6 = \{(x, y, z) \in S^2 : z > y > x > 1/6\}.$$

$$l_1 := \begin{cases} x = y \\ x + y + z = 1, \end{cases} \quad l_2 := \begin{cases} x = z \\ x + y + z = 1, \end{cases} \quad l_3 := \begin{cases} y = z \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Theorem. The sets $M_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ are invariant with respect to the operator (2). Moreover, each median of the simplex S^2 is an invariant.

References

1. *Lyubich Yu.I.* Mathematical structures in population genetics, Springer-Verlag, 1992.
2. *Rozikov U.A.* Population dynamics: algebraic and probabilistic approach, *World Sci. Publ.* Singapore. 2020, 460 pp.
3. *Rozikov U.A., Xudayarov S.S.* Quadratic non-stochastic operators: examples of splitted chaos, Ann. Funct. Anal., **13**(1) (2022), Paper No. 17, 17 pp..

Comments on Chernoff and Trotter-Kato product formulæ

Zagrebnov Valentin

Institut de Mathématiques de Marseille - AMU

39 rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille, France

e-mail: Valentin.Zagrebnov@univ-amu.fr

The Chernoff $\sqrt{n}$-Lemma:

Lemma 1. *Let bounded operator C on a Banach space $\mathfrak{X}$ be a contraction, i.e., $\|C\| \leq 1$. Then one has the estimate*

$$\|(C^n - e^{n(C-I)}x\| \leq \sqrt{n}\, \|(C - I)x\|\ ,\ x \in \mathfrak{X},\ n \in \mathbb{N}.$$

The following propositions revise the Chernoff $\sqrt{n}$-Lemma:

Proposition 1. Let C be contraction on a Banach space $\mathfrak{X}$. Then $\{e^{t(C-I)}\}_{t\geq 0}$ is a norm-continuous contraction semigroup on $\mathfrak{X}$ and one has the estimate

$$\|(C^n - e^{n\,(C-I)})\, x\| \leq \frac{n}{\epsilon_n^2}\, 2\, \|x\| + \epsilon_n\, \|(I - C)\, x\,\|\,, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,,$$

for all $x \in \mathfrak{X}$ and $\epsilon_n > 0$. For optimal value of the *splitting* parameter ϵ_n one gets:

$$\|(C^n - e^{n\,(C-I)})\,\| \leq \frac{3}{2}\, \sqrt[3]{n}\, \|2\ (I - C)\,\|^{2/3}\,,$$

which is called the $\sqrt[3]{n}$ -Lemma.

Proposition 2. *Let $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ be contraction on a Banach space $\mathfrak{X}$. Then following estimate*

$$\|(C^n - e^{n(C-1)})\, x\| \leq\ \frac{n}{2}\ (\|(C - 1)^2\, x\| + \frac{e^2}{3}\, \|(C - 1)^3\, x\|)\ ,$$

holds for all $n \in \mathbb{N}$ *and* $x \in \mathfrak{X}$.

Proposition 3. Let $\Phi : t \mapsto \Phi(t)$ be a function from $\mathbb{R}_0^+$ to contractions on $\mathfrak{X}$ such that $\Phi(0) = I$. Let $\{U_C(t)\}_{t\geq 0}$ be a contraction C_0-semigroup, and let domain $D \subset \mathrm{dom}(C)$ be a core of related generator C.

If the function $\Phi(t)$ has a strong right-derivative $\Phi'(+0)$ at $t = 0$ *(*that is, $\Phi'(+0)x$ exists for any $x \in \mathrm{dom}(\Phi'(+0))$*)* and if

$$\Phi'(+0)\, x := \lim_{t\to+0} \frac{1}{t}(\Phi(t) - I)\, x = -\,C\, x\,,$$

for all $x \in D$, then

$$\lim_{n\to\infty} [\Phi(t/n)]^n\, x = U_C(t)\, x\ , \tag{1}$$

for all $t \in \mathbb{R}_0^+$ and $x \in \mathfrak{X}$, where $U_C(t) = e^{-tC}$ in (1).

Proposition 4. Let A, B and C be generators of contraction C_0-semigroups on $\mathfrak{X}$. Suppose that algebraic sum

$$Cx = Ax + Bx\ , \tag{2}$$

is valid for all $x \in D$, where domain $D = \mathrm{core}\,(C)$. Then the semigroup $\{U_C(t)\}_{t\geq 0}$ can be approximated on $\mathfrak{X}$ in the operator-norm topology by the Trotter-Kato product formula*:*

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Phi(t/n))^n - e^{-tC}\| = 0\ , \tag{3}$$

for all $t \in \mathbb{R}_0^+$, where $C := \overline{(A + B)}$ is closure of the operator sum in (2) and $\Phi(t) := e^{-tA}e^{-tB}$ in (3).

References

1. *Zagrebnov V.A.* Notes on the Chernoff estimate, ArXiv:2205.04794v1 [math.FA], 10 May 2022.

2. *Zagrebnov V.A.* Operator-norm Trotter product formula on Banach spaces, ArXiv:2205.04807v1 [math.FA], 10 May 2022.

The Poisson representation for the class of H_A^1 functions

[1]**Zhabborov N.**, [2]**Husenov B.**

[1] *Joint Belarusian-Uzbek Intersectoral Institute of Applied Technical Qualifications in Tashkent,*
e-mail: jabborov61@mail.ru

[2] *Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan,*
e-mail: husenovbehzod@mail.ru

Let $A(z)$ be an antianalytic function, i. e. $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$ in the domain $D \subset \mathbb{C}$; moreover, let $|A(z)| \leq C < 1$ for all $z \in D$. The function $f(z)$ is said to be $A(z)-$analytic in the domain D if for any $z \in D$, the following equality holds:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z)\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

We denote by $O_A(D)$ the class of all $A(z)-$analytic functions defined in the domain D.
According to, the function

$$\psi\,(z; a) = z - a + \overline{\int\limits_{\gamma(a;z)} \overline{A(\tau)} d\tau}$$

is an $A(z)-$analytic function.

The following set is an open subset of arbitrary convex domain D :

$$L\left(a;r\right)=\left\{\left|\psi\left(z;a\right)\right|=\left|z-a+\int\limits_{\gamma(a;z)}\overline{\overline{A(\tau)}d\tau}\right|<r\right\}.$$

For sufficiently small $r>0$, this set compactly lies in D (we denote this fact by $L(a;r)\subset\subset D$) and contains the point a. This set $L(a;r)$ is called the $A(z)-$lemniscate centered at the point a. The lemniscate $L(a;r)$ is a simply - connected set (see [2]).

Hardy classes H^p were introduced by F. Riesz's. The Hardy class $H^p_A, p>0$ for $A(z)$-analytic functions is given in [4]. Before we will introduce this class for $A(z)$-analytic functions in the case $p=1$.

Definition 1. *$f(z)\in O_A(L(a;r))$ is said to be in H^1_A, if*

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho}|f(z)||dz+A(z)d\bar{z}| \tag{2}$$

is bounded in lemniscate $L(a;r)$, where $\rho<r, z\in L(a;r)$.

Let $f=u+iv$.

Theorem 1. (see [3]). *The real part of the $A(z)-$analytic functions of $f(z)\in O_A(D)$ satisfies equation*

$$\Delta_A u=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left((1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}-2A\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left((1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z}-2\bar{A}\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\right)\right)=0 \tag{3}$$

in the domain of D.

In connection with Theorem 1, it is natural to define the $A(z)-$harmonic function as follows.

Definition 2 (see [3]). *A double differentiable function $u\in C^2(D),\quad u:D\to R^1$ is called $A(z)-$harmonic in the D domain if the D domain if it satisfies the differential equation (3).*

The class of $A(z)-$harmonic functions in the domain of D is denoted as $h_A(D)$. Thus, the real part and hence the imaginary part, of the $A(z)-$harmonic function in the domain of D. The inverse theorem is also true for simply connected domains.

Theorem 2. (see [3]). *If the function is $u(z)\in h_A(D)$, where D is a simply connected domain, then $f\in O_A(D): u=Re\, f$.*

For $A(z)-$analytic and $A(z)-$harmonic functions, the following Dirichlet problem is naturally considered:

Dirichlet problem. *A bounded domain of $G\subset D$ is given and a continuous function of $\omega(\zeta)$ is set at the boundary of ∂G. It is required to find $A(z)-$harmonic in the domain of G, continuous on the closure of $\bar{G}$ the function of $u(z)\in h_A(G)\cap C(\bar{G}): u|_{\partial G}=\omega$.*

Theorem 3. (see [3]) (an analogue of the Poisson formula for $A(z)-$harmonic functions). *If the $\omega(\zeta)$ function is continuous on the boundary of the lemniscate of $L(a;r)\subset D$, then the function*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|\psi(\zeta;a)|=r}\omega(\zeta)\frac{r^2-|\psi(z;a)|^2}{|\psi(\zeta;z)|^2}|d\zeta+A(\zeta)d\bar{\zeta}| \tag{4}$$

is the solution of the Dirichlet problem in $L(a;r)$.

The $f(\zeta;z)=\frac{\psi(a;\zeta)+\psi(a;z)}{\psi(z;\zeta)}$ function is an $A(z)-$analytic function for $z\in L(a;r)$, where $\zeta\in\partial L(a;r)$. Then

$$P(\zeta;z)=\frac{1}{2\pi r}(f(\zeta;z)+\bar{f}(z;\zeta))=\frac{1}{2\pi r}\left(\frac{\psi(a;\zeta)+\psi(a;z)}{\psi(a;\zeta)-\psi(a;z)}+\frac{\bar{\psi}(a;\zeta)+\bar{\psi}(a;z)}{\bar{\psi}(a;\zeta)-\bar{\psi}(a;z)}\right)=$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\left(\frac{|\psi(a;\zeta)|^2 - |\psi(a;z)|^2}{|\psi(z;\zeta)|^2}\right) = \frac{1}{2\pi r}\left(\frac{r^2 - |\psi(a;z)|^2}{|\psi(z;\zeta)|^2}\right).$$

Formula (4) is called an analogue of the Poisson formula for $A(z)-$harmonic functions. Initially we will introduce Hardy class for also $A(z)$-harmonic functions in the case $p = 1$.

Statement 1. *$u(z) \in h_A(L(a;r))$ is said to be in H_A^1, if the average integral*

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(z;a)|=\rho} |u(z)||dz + A(z)d\bar{z}| \tag{5}$$

is bounded in lemniscate $L(a;r)$.

Now we give the Poisson representation for the class of functions H_A^1.

Theorem 4. *Let $u(z) \in H_A^1(L(a;R))$. If $u(z)$ is a $A(z)-$harmonic function in the lemniscate $L(a;r)$, then*

$$u(z) = \int\limits_{|\psi(\zeta;a)|=r} P(\zeta;z)u(\zeta)(d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}), \tag{6}$$

where $z \in L(a;r)$.

References

1. *P.Koosis.* Introduction to H^p spaces, United Kingdom. Cambridge University Press, 1998.
2. *A.Sadullayev, N.M.Zhabborov.* On a class of A-analytic functions, J. Siberian Fed. Univ., no. 3(9), 2016, 374-383 p.
3. *N.M.Zhabborov, T.U.Otaboyev and Sh.Ya.Khursanov.* Schwarz inequality and Schwarz formula for A-analytic functions, J. Modern math. Fundamental directions., no. 4(64), 2018, 637-649 p. (Russian)
4. *B.E.Husenov.* Generalization of the Hardy class for $A(z)-$analytic functions, J. Scientific Reports of Bukhara State Univ., no. 4(86), 2021, 29-46 p.

$\overrightarrow{\alpha}$ - сепаратно субгармонические функции

[1]Абдикадиров С.М.

[1] *Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Узбекистан.*
Институт математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
e-mail: abdikadirov1983@inbox.ru

Пусть $\alpha-$произвольная замкнутая, строго положительная дифференциальная форма бистепени $(n-1,\, n-1)$ в области $D \subset \mathbb{C}^n$:

$$\alpha = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z) dz\,[j] \wedge d\bar{z}\,[k],\ \ \alpha_{jk}(z) \in C^1\,(D)\,,\ \ d\alpha = 0,$$

здесь $dz\,[j] = dz_1 \wedge ... \wedge dz_{j-1} \wedge dz_{j+1} \wedge ... \wedge dz_n$, $d\bar{z}\,[k] = d\bar{z}_1 \wedge ... \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_n$.

Строго положительность α означает, что для любой компактной области $\Omega \Subset D$ существует число $\varepsilon > 0$ такое что дифференциальная форма $\alpha - \varepsilon\beta^{n-1} \geq 0$, где $\beta = dd^c|z|^2-$ форма объема в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Определение 1 (см. [1]). *Функция $u\,(z) \in L^1_{loc}\,(D)$ называется α-субгармонической в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если*
1) она полунепрерывна сверху в D, т. е. $u(z^0) \geq \varlimsup\limits_{z \to z^0} u(z),\ \forall z^0 \in D$;

2) оператор $dd^c u \wedge \alpha$ положителен в обобщенном смысле, то есть для обобщенной функции $dd^c u(z) \wedge \alpha(z)\,(\omega)$ выполняется

$$dd^c u(z) \wedge \alpha(z)\,(\omega) = \int\limits_D u(z)\alpha(z) \wedge dd^c\omega(z) \geq 0, \ \forall \omega \in F(D), \ \omega \geq 0.$$

Класс α-субгармонических функций в D обозначается через $\alpha - Sh(D)$, причем для удобства включаем в этот класс и функцию $u(z) \equiv -\infty$.

Определение 2 (см. [2]). *Функция $u(z)$ называется α-субгармонической в области D, если выполняется следующие условия*
1) $u(z)$ полунепрерывна сверху в области D;
2) для любого шара $B \Subset D$ справедливо неравенство

$$u(z) \leq \int\limits_{\partial B(z^0,r)} P_\alpha(z,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi), \ \forall z \in B.$$

Здесь $P_\alpha(z,\xi)-$ядро Пуассона для шара B.

Следующее определение α-субгармонических функций является более простым и удобным в употреблении.

Определение 3 (см. [2]). *Функция $u(z)$ определенная в области D называется α-субгармонической, если обладает следующими условиями:*
1) $u(z)$ полунепрерывна сверху в области D;
2) для любых $z^0 \in D$ и достаточно малых $r > 0$: $B(z^0, r) \Subset D$, имеет место неравенство

$$u(z^0) \leq \int\limits_{\partial B(z^0,r)} P_\alpha(z^0,\xi)u(\xi)d\sigma(\xi).$$

Эти определения эквивалентны друг другу.

Пусть $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha', \alpha'')$, где $\alpha'-$произвольная замкнутая, строго положительная дифференциальная форма бистепени $(n-1, n-1)$ в области $D \subset \mathbb{C}^n$ и $\alpha''-$произвольная замкнутая, строго положительная дифференциальная форма бистепени $(m-1, m-1)$ в области $G \subset \mathbb{C}^m$. Мы считаем, что все коэффициенты дифференциальных форм α' и α'' принадлежит классу C^1, если не требуется дополнительные условия для гладкости.

Теперь дадим определение $\overrightarrow{\alpha}$ - сепаратно субгармонической функций.

Определение 4. *Функция $u\,(z, w)$, $(z, w) \in D \times G \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ называется $\overrightarrow{\alpha}$ - сепаратно субгармонической в области $D \times G$, где $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha', \ \alpha'')$, если удовлетворяет следующие условия:*
1) $u(z, w^0) \in \alpha' - Sh(D)$, для любого фиксированного $w^0 \in G$;
2) $u(z^0, w) \in \alpha'' - Sh(G)$, для любого фиксированного $z^0 \in D$.

Класс $\overrightarrow{\alpha}$ - сепаратно субгармонических функций в области $D \times G$ обозначается через $\overrightarrow{\alpha} - SSh(D \times G)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если $u\,(z, w) \in \overrightarrow{\alpha} - SSh(D \times G) \bigcap L^1_{loc}\,(D \times G)$, то $u\,(z, w) \in \phi - Sh(D \times G)$, где $\phi = \alpha'(z) \wedge \alpha''(w) \wedge \beta$ и $\beta = dd^c\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.*

Литература

1. *Ваисова М.Д.* Теория потенциала в классе α - субгармонических функций, Узбекский математический журнал, No 3, 2016, стр. 46-52.

2. *Абдуллаев Б.И., Имомкулов С.А., Шарипов Р.А.* α - субгармонические функции, Современная математика. Фундаментальные направления. РУДН, том 67, No 4, 2021, стр. 620-633.

С-свойство α - субгармонических функций

Гадаев С.А.

Ургенчский государственный университет, ул. Х.Алимжана, 14, г.Ургенч, Узбекистан,

e-mail: gadayev.sokhib@gmail.com

А. Картаном (см. [1]) доказан ҷмкостний аналог С-свойства Лузина (см.[2]) для субгармонических функций: пусть $u(x)$-субгармоническая функция в области $G \subset \mathbb{R}^m$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $\mathcal{O}_\varepsilon \subset G$ с нютоновской (логарфимической при $m = 2$) емкостью $Cap_{m-2}(\mathcal{O}_\varepsilon) < \varepsilon$ такое, что $u(x)$ непрерывна в дополнении $G \backslash \mathcal{O}_\varepsilon$.

Пусть $\alpha-$произвольная замкнутая, строго положительная дифференциальная форма бистепени $(n-1, n-1)$ в области $D \subset J^n$:

$$\alpha = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z) dz[j] \wedge d\bar{z}[k], \ \alpha_{jk}(z) \in C^1(D), \ d\alpha = 0,$$

где

$$dz[j] = dz_1 \wedge ... \wedge dz_{j-1} \wedge dz_{j+1} \wedge ... \wedge dz_n, \ d\bar{z}[k] = d\bar{z}_1 \wedge ... \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge ... \wedge d\bar{z}_n.$$

Определение. (см.[3]) *Функция $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ называется $\alpha-$ субгармонической в области $D \subset J^n$, если*

1) она полунепрерывна сверху в D, т. е. $u(z^0) \geq \overline{\lim_{z \to z^0}} u(z), \ \forall z^0 \in D$;

2) оператор $dd^c u \wedge \alpha$ положителен в обобщенном смысле, то есть для обобщенной функции $dd^c u(z) \wedge \alpha(z)(\varphi)$ выполняется

$$dd^c u(z) \wedge \alpha(z)(\varphi) = \int_D u(z)\alpha(z) \wedge dd^c\varphi(z) \geq 0, \ \forall \varphi \in F(D), \ \varphi \geq 0.$$

Класс $\alpha-$субгармонических функций обозначается через $\alpha-sh(D)$, причем для удобства, включаем в этот класс и функцию $u(z) \equiv -\infty$. Для $\alpha = \beta^{n-1} = \left(dd^c|z|^2\right)^{n-1}$ мы будем иметь классические субгармонические функции. Заметим, что $dd^c u \wedge \beta^{n-1} = (n-1)!\Delta u dV$. При $n = 1$ на комплексной плоскости $\alpha-$субгармоничность функции эквивалентна обычной субгармоничности.

Здесь мы получили следующий результат для класса $\alpha-$субгармонических функций.

Теорема. Пусть $u(z)$ $\alpha-$субгармоническая функция в области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $\mathcal{O}_\varepsilon \subset D$ с нютоновской емкостью $Cap_{2n-2}(\mathcal{O}_\varepsilon) < \varepsilon$ такое, что $u(z)$ является непрерывной в дополнении $D \backslash \mathcal{O}_\varepsilon$.

Литература

1. *Ландкоф Н.С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, –515с, (1966).
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.Б.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М: Наука, – 543 с, (1981).
3. *Абдуллаев Б.И., Имомкулов С.А., Шарипов Р.А.* α-Субгармонические функции. Современная математика. Фундаментальные направления. РУДН, том 67, No4, с. 620-633, (2021).

Свойства непрерывности обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

[1]Даужанов А.Ш.

[1] *Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Узбекистан.*
e-mail: aynazard@mail.ru

Пусть

$$P\left(D\right) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$$

эллиптический дифференциальный оператор порядка m с постоянными коэффициентами a_α, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ ..., \alpha_n)$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, действующий в пространстве обобщенных функций $D(G)$ и $u(x)-$ обобщенная функция, удовлетворяющая в $G \subset R^n$ уравнению

$$P(D)u(x) = f(x). \tag{1}$$

Если $f(x) \in L^2_{loc}(G)$, то $u(x)$ является функцией, у которой суммируемы с квадратом производные до порядка m, точнее $u(x)$ принадлежит классу Соболева $W^{m,2}_{loc}(G)$. Если $f(x) \in W^{k,2}_{loc}(G)$, то $u(x)$ имеет производные до порядка $m+k$, также принадлежащее L^2_{loc}, $u(x) \in W^{m+k,2}_{loc}(G)$.Если $f(x)$бесконечно дифференцируема, то $u(x) \in C^\infty(G)$(см. [1]).

Мы исследуем гладкости слабого решения уравнения общего вида

$$P(D)u(x) = f(x),$$

где $f-$ обобщенная функция.

Отметим, что обобщенная функция u называется слабым решением уравнения $P(D)u(x) = f(x)$, если для каждой основной функции $\phi \in D(G)$

$$(u, P(-D)\phi) = (f, \phi),$$

где $P(-D) = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha$.

Наш метод изучения гладкости основан на представлении решений уравнения (1) в виде сумм потенциалов борелевских мер и бесконечно гладкой функции. При этом, используя известное свойство об особенности фундаментального решения уравнения (1) в качестве ядра потенциала берется ядро Рисса $K_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$.

Отметим, что в последнее время пространства, именуемые пространствами обобщенной гладкости, вызывают немалый интерес.

Приведем определение класса $C^p\left(E\right)$. Будем говорить, что функция $u(x)$, определенная на произвольном замкнутом множестве $E \subset R^n$, принадлежит классу $C^p\left(E\right)$, $p \geq 0$, если существуют определенные на E функции $u^{(\alpha)}, |\alpha| \leq p$, такие, что $u^{(0)} = u$,

$$\left| u^{(\alpha)}\left(x+h\right) - \sum_{|\alpha+\beta|\leq p} \frac{u^{(\alpha+\beta)}\left(x\right)}{\beta!} h^\beta \right| \leq \ell\left(h\right) |h|^{p-|\alpha|}, \tag{2}$$

$x, x+h \in E, \ell\left(h\right) \to 0$ при $h \to 0$.

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $l = (l_1, l_2, ..., l_n)-$ мультииндексы,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n, \quad \beta! = \beta_1!\beta_2!...\beta_n!, \ \ h^\beta = h_1^{\beta_1} h_2^{\beta_2} ... h_n^{\beta_n}.$$

Заметим, что в случае $E = R^n$ пространство $C^p\left(R^n\right)$ имеет простое дифференциальное свойство: оно состоит из функций $u(x)$, имеющих частные производные до $k-$ го порядка включительно, причем производные до $k-$ го порядка являются функциями класса $C^{p-k}\left(R^n\right)$(см. [2],[3]).

Пространством основных функций$D = D(G) = C_0^\infty(G)$ называется векторное пространство функций неограниченное число раз дифференцируемых и обладающих компактными носителями. Обобщенная функция f определяется как непрерывный линейный функционал над D.

Будем говорить, что обобщенная функция f имеет порядок сингулярности не более чем k, если она непрерывно продолжается в пространство $C_0^k(G)$, k раз непрерывно дифференцируемых функций. Если, кроме того, f не продолжается в $C_0^{k-1}(G)$, то говорят, что порядок сингулярности обобщенной функции f равен точно k.

Теперь сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $f \in D'(G)-$ обобщенная функция порядка сингулярности $k : 0 \le k \le m$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U_ε с мерой Лебега $m\left(U_\varepsilon\right) < \varepsilon$ такое, что решение $u(x)$ уравнения $P\left(D\right) u = f$ принадлежит классу C^{m-k} на компактных подмножествах разности $G \backslash U_\varepsilon$.*

Теорема 2. *Пусть $f \in D'(G)-$ обобщенная функция порядка сингулярности $k : 0 \le n - m + k + \alpha < n$, $\alpha > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U_ε с ёмкостью $cap_{n-m+k+\alpha}\left(U_\varepsilon\right) < \varepsilon$ такое, что решение $u(x)$ уравнения $P\left(D\right) u = f$ принадлежит классу C^α на компактных подмножествах разности $G \backslash U_\varepsilon$.*

В этих теоремах рассматривается только слабое решение, связанные с потенциалами Рисса. Оно определено однозначно и единственно.

Литература

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.-351 с.
2. *Whitney H.* Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36 P. 63-89.
3. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир. 1973. 342 с.

Нигде не дифференцируемые квазианалитические функции Гончара

[1]Имомкулов С.А., [2]Ибрагимов З.Ш.

[1] *Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ургенч, Узбекистан*
e-mail: sevdiyor_i@mail.ru

[2] *Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,*
e-mail: z.ibragim@gmail.com

В классе непрерывных функций $C[a, b]$ С.Н. Бернштейн [1] определил класс квазианалитических функций в терминах быстрой полиномиальной аппроксимации.

Пусть f – функция, определенная и непрерывная на отрезке $\Delta = [a, b]$ действительной прямой $\mathbb{R}$, $e_m(f)$ – наименьшее отклонение функции f на отрезке Δ от полиномов степени не выше m:

$$e_m(f) = \inf_{\{p_m\}} \|f - p_m\|_\Delta ,$$

где $\|\cdot\|_\Delta$ – максимальная норма и нижняя грань берется в классе всех полиномов степени не выше m.

Функция $f \in C(\Delta)$ голоморфно продолжается в некоторую комплексную окрестность $U \subset \mathbb{C}$ отрезка Δ тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{e_m(f)} < 1. \tag{1}$$

Если мы условие (1) заменим условием

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{e_m(f)} < 1, \tag{2}$$

то из этого условия не следует аналитичность функции f на отрезке Δ. Но, как показал Бернштейн [1], если функция f удовлетворяет условию (2) и $f(x)=0$ на некотором интервале $(\alpha,\beta)\subset\Delta$, то $f(x)=0$, $x\in\Delta$, т.е. класс функций

$$B(\Delta)=\{f\in C(\Delta):\ \varliminf_{m\to\infty}\sqrt[m]{e_m(f)}<1\}$$

обладает условиями единственности как класс аналитических функций. Поэтому класс функций $B(\Delta)$ называется классом квазианалитических функций в смысле Бернштейна (см. также [4], [5]).

Независимо друг от друга Шмушковичовна (Szmuszkowiczowna) [6] и Лелон [5] показали, что если $f\in B(\Delta)$ и $f\neq 0$, то множество нулей функции f:

$$E=\{x\in\Delta:\ f(x)=0\}\,,$$

имеет нулевую логарифмическую емкость.

В работе А. А. Гончара [3] введен следующий более общий класс квазианалитических функций

$$R(\Delta)=\{f\in C(\Delta):\ \varliminf_{m\to\infty}\sqrt[m]{\rho_m(f)}<1\},$$

где $\rho_m(f)$– наименьшее отклонение функции f на отрезке Δ от рациональных функций степени не выше m:

$$\rho_m(f)=\inf_{\{r_m\}}\|f-r_m\|_{\Delta}\,.$$

Также в этих работах А. А. Гончара доказано, что если $f\in R(\Delta)$ и $f(x)=0$ на множестве $E\subset\Delta$ положительной логарифмической емкости, то $f(x)\equiv 0$, $x\in\Delta$.

По аналогии с классом квазианалитических функций Бернштейна класс $R(\Delta)$ мы назовем классом квазианалитических функций Гончара.

Класс аналитических на отрезке Δ функций $A(\Delta)$ является подклассом классов $B(\Delta)$, $R(\Delta)$, т. е. $A(\Delta)\subset B(\Delta)\subset R(\Delta)$.

Ясно, что $A(\Delta)\neq B(\Delta)$, т.е. существует функция $f(x)\in B(\Delta)$, но $f(x)\notin A(\Delta)$.

В работе [2] показано, что существуют функции, для которых скорость приближений полиномами $e_m(f)$ стремится к нулю сколь угодно медленно, в то время как $\rho_m(f)$ стремятся к нулю сколь угодно быстро. Отсюда, в частности следует, что $B(\Delta)\neq R(\Delta)$.

В случае, когда $\varliminf_{m\to\infty}\rho_m(f)^{\frac{1}{m}}=0$ и $\varlimsup_{m\to\infty}\rho_m(f)^{\frac{1}{m}}=0$ эти классы соответственно обозначаются через $R_0(\Delta)$ и $R^0(\Delta)$. Ясно, что $R^0(\Delta)\subset R_0(\Delta)\subset R(\Delta)$.

Гончаром установлено, что класс функций, наилучшие приближения которых стремятся к нулю достаточно быстро, обладает важнейшим свойством класса аналитических функций – свойством единственности.

Теорема 2 (Гончар, [3]). *Если $f\in R(\Delta)$ и $f(x)=0$ на множестве $E\subset[a,b]$ положительной логарифмической емкости, то $f(x)\equiv 0$ на отрезке $[a,b]$.*

В многомерном случае теорема единственности для класса $\mathbb{R}(\Omega)$ доказана в работе С.Имомкулова и З. Ибрагимова [7].

Теорема 3 (Имомкулов С, Ибрагимов З, [7]). *Пусть $f\in\mathbb{R}(\Omega)$, где $\Omega=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ – параллелеопипед из $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{C}^n$. Если $f(x)=0$ на некоторой неплюриполярной множестве $E\subset\Omega$, то $f(x)\equiv 0$ на Ω.*

Нигде не дифференцируемые квазианалитические функции Гончара

Пусть X полное метрическое пространство. Если множество $A\subset X$ можно представить в виде конечного или счетного объединение нигде не плотных множеств, то оно называется множеством **первой категории**. Множество $A\subset X$, которое нельзя представить в таком виде, называется множеством **второй категории**. (см. [8]).

Пусть $X=C(\Delta)$, с метрикой $\rho\,(f,g)=\max\limits_{x\in\triangle}|f\,(x)-g(x)|$. Введцм следующих обозначений:

1. $\mathcal{ND}(\Delta)$ - множество нигде не дифференцируемые функции из класса $C(\Delta)$;
2. $\mathcal{D}(\Delta)$- множество непрерывных функций, которые дифференцируемая хотя бы в одной точке отрезки Δ.

Теорема 4. *В смысле категории почти все квазианалитические функции Гончара нигде не дифференцируемы, т.е. множество $C(\Delta)\backslash(\mathcal{ND}(\Delta)\bigcap R(\Delta))$ является множеством первой категории.*

Аналогичная теорема для класса квазианалитических функций Бернштейна доказана в работе Мазуркеевича [9].

Литература

1. *Bernstein S. N.* Analytic functions of real variable, their origin and means of generalisation. Sochineniya, Volume 1, 285-320.
2. *Гончар А. А.* О наилучших приближениях рациональными функциями// ДАН СССР. 1955, т. 100. No.2, с. 205-208.
3. *Гончар А. А.* Квазианалитические классы функций, связанные с наилучшими приближениями рациональными функциями// Изв. АН. Арм. ССР. 1971.- VI, No. 2-3, с. 148-159.
4. *Lelong P.* Sur une propriete simple des polynomes // R.Acad. Sci. Paris. – 1947, Volume 224, pp. 883-885.
5. *Szmuszkowiczowna H.* Un theoreme sur les polynomes et son application a la theorie des fonctions quasianalytiques// C.R.Acad. Sci. Paris. – 1934. Volume 198, pp. 1119- 1120.
6. *Садуллаев А.С.* Плюрисубгармонические меры и чмкости на комплексных многообразиях// УМН. - 1981. - Т. 36(4). - С. 53 - 105.
7. *Imomkulov S.A., Ibragimov Z.Sh.* Uniqueness property for Gonchar quasianalytic functions of several variables// Contemporary Mathematics Volume 662, 2016, pp. 121-129.
8. *Oxtoby J.C.* Measure and Category. Sringer-Verlag. Berlin. 1971
9. *Mazurkiewicz S.* Les fonctions quasianalytiques dans l'espace fonctionnel, Mathematica (Cluj) 13, 1937, pp. 16-21

2-локальные автоморфизмы алгебры τ-компактных операторов присоединенных к алгебре фон Неймана типа I

Каландаров Т.С.

Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, г.Нукус, Узбекистан

turaboy-kts@mail.ru

В настоящее время широко изучаются понятия 2-локального дифференцирование и 2-локального автоморфизма, впервые введенные Шемрлем [1]. Шемрлем было доказано, что каждый 2-локальный автоморфизм алгебры всех ограниченных линейных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве, является автоморфизмом.

В работе [2] были изучены 2-локальные дифференцирования на AW^*-алгебрах. При этом для унитальной полупростой банаховой алгебры $\mathcal{A}$ со свойством внутреннего дифференцирования было доказано, что всякое 2-локальное дифференцирование алгебры $M_{2^n}(\mathcal{A}), n \geq 2$ является дифференцированием. Применяя этот результат к AW^* -алгебрам было показано, что любое 2-локальное дифференцирование на произвольной AW^*-алгебре является дифференцированием.

В работе [3] был доказан аналог результата, полученный в [2] для 2-локальных дифференцирований на AW^*-алгебрах на случай 2-локальных автоморфизмов на AW^*-алгебрах. А именно, была доказана, что всякий 2-локальный автоморфизм на произвольной AW^*-алгебра без конечной прямой слагаемой типа I, является автоморфизмом.

Одним из важных классов неограниченных операторных алгебр являются алгебры τ-компактных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана.

В работе [4] были рассмотрены инволютивные автоморфизмы алгебры τ-компактных операторов присоединенных к алгебре фон Неймана типа I, и доказано, что всякий Z-линейный *-автоморфизм алгебры τ-компактных операторов присоединенных к алгебре фон Неймана типа I с центром Z является внутренним.

Настоящая заметка посвящена изучению 2-локальных автоморфизмов алгебры τ-компактных операторов присоединенных к алгебре фон Неймана.

Пусть $\mathcal{A}$ – некоторая $*$-алгебра. Биективный линейный оператор $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ алгебры $\mathcal{A}$ называется $*$-автоморфизмом, если $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ и $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ при всех $x, y \in \mathcal{A}$.

Отображение Φ из алгебры $\mathcal{A}$ в себя называется 2-локальным $*$-автоморфизмом, если для каждого $x, y \in \mathcal{A}$ существует $*$-автоморфизм $\phi_{x,y} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ такой, что $\phi_{x,y}(x) = \phi(x)$ и $\phi_{x,y}(y) = \phi(y)$.

Пусть M – алгебра фон Неймана типа I, $S(M,\tau)$ – алгебра всех τ-измеримых операторов присоединенных к алгебре фон Неймана M. Оператор $x \in S(M,\tau)$ называется τ-компактным, если для всех $\varepsilon > 0$ существует проектор $p \in P(M)$ такой, что $\tau\left(p^{\perp}\right) < \infty$, $xp \in M$ и $\|xp\| < \varepsilon$.

Обозначим через $S_0(M,\tau)$ множество всех τ-компактных операторов. Известно [5], что $S_0(M,\tau)$ является *-подалгеброй в $S(M,\tau)$ и M-бимодулем, т.е. $ax, xa \in S_0(M,\tau)$ для любого $x \in S_0(M,\tau)$ и $a \in M$.

Теорема. *Пусть M – алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом τ. Тогда всякий 2-локалный Z-однородный *-автоморфизм Φ алгебры $S_0(M,\tau)$ является пространственным автоморфизмом, при этом, существует унитарный элемент из $S(M,\tau)$ такой, что $\Phi(x) = axa^*$ при всех $x \in S_0(M,\tau)$.*

Литература

1. *P. Šemrl,* Local automorphisms and derivations on $B(H)$, Proc. Amer. Math. Soc. 125, 2677-2680 (1997).
2. *Sh.A. Ayupov and K.K. Kudaybergenov*, 2-Local derivations on matrix algebras over semi-prime Banach algebras and on AW^*-algebras, Journal of Physics: Conference Series, 697 (2016) 1-10.
3. *Sh.A.Ayupov, K.K.Kudaybergenov, T.S.Kalandarov*, 2-Local Automorphisms on AW^*-algebras, in book Positivity and Noncommutative Analysis, Springer Nature Switzerland AG, 1-13 (2019)
4. *K.K. Kudaybergenov, T.S. Kalandarov* , The involutive automorphisms of τ-compact operators affiliated with a type I von Neumann algebra. Methods of Functional Analysis and Topology. Vol. 14 (2008), no. 1, pp. 54-59.
5. *M.A. Muratov, V. I. Chilin*, *-algebras of unbounded operators affiliated with a von Neumann algebra, Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI, 326 (2005), 183-197.

Полиномы на параболических поверхностях

Камолов Х.К.

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,

e-mail: xkamolov@mail.ru

Пусть $X \subset \mathbb{C}^N-$ аналитическая поверхность, вложенное в $\mathbb{C}^N$, т.е. $X-$ неприводимое аналитическое множество в $\mathbb{C}^N$, для которого пересечение $B(0,r) \cap X \subset\subset X, \forall\ r > 0$. Обозначим через $X^0 \subset X-$совокупность обыкновенных точек множества X. Понятие параболичности поверхности X вводится аналогично параболичности многообразий(см. [1–4]).

Определение 1. *Аналитическая поверхность X называется параболическим, если в ней не существует ограниченная плюрисубгармоническая функция, отличной от константы.*

Аналитическая поверхность X называется $S-$ параболической, если в ней существует специальная функция исчерпания $\rho(z)$, удовлетворяющая условиям

a) $\rho(z) \in psh(X), \{\rho \leq c\} \subset\subset X\ \forall c \in \mathbb{R}$;

б) вне некоторого компакта $K \subset\subset X$, функция ρ^* является максимальной функцией на $X\backslash K$. Это эквивалентно тому, что $(dd^c\rho^*)^n = 0$ на $X^0\backslash K$. Здесь $\rho^*(z) = \overline{\lim\limits_{\substack{w\to z\\ w\in X^0}}}\rho(w)$, $z \in X\backslash X^0$.

Аналитическая поверхность X называется S^*- параболической, если существует непрерывная специальная функция исчерпания $\rho(z) \in C\left(X^0\right)$.

Определение 2. *Если функция $f \in \mathcal{O}(X)$ удовлетворяет неравенству*

$$\ln|f(z)| \le d\rho^+(z) + c_f \;\; \forall z \in X, \tag{1}$$

где c_f и d положительные действительные числа (константы), то f называется $\rho-$полиномом. Наименьшее значение d удовлетворяющее условию (1), мы будем называть степенью полинома f.

Обозначим через $\mathcal{P}_\rho^d(X)$множество всех $\rho-$полиномов степени меньше или равной d и через $\mathcal{P}_\rho(X)-$ объединение $\mathcal{P}_\rho(X) = \bigcup\limits_{d\ge1}\mathcal{P}_\rho^d(X)$. Тогда нетрудно доказать (см. [2]), что $\mathcal{P}_\rho^d(X)$ является линейным пространством конечной размерности, $\dim\mathcal{P}_\rho^d(X) \le C\,(d+1)^n$.

Определение 3. *Если пространство всех $\rho-$ полиномов $\mathcal{P}_\rho(X) = \bigcup\limits_{d\ge1}\mathcal{P}_\rho^d(X)$ плотно в пространстве $\mathcal{O}(X)$, то $S-$параболическая поверхность X называется регулярной.*

Пример 1. Дополнение $X = \mathbb{C}^n\backslash A$ произвольного алгебраического чисто $(n-1)-$мерного множества $A = \{p(z) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$, где $p(z)-$полином, является S^*-параболическим многообразием. Если $p(0) \ne 0$, то функция

$$\rho(z) = -\frac{1}{\deg p}\ln|p| + 2\ln|z|$$

будет специальной функцией исчерпания поверхности X.

В работе ([1], см.также [3]) доказано, что дополнение $X = \mathbb{C}^n\backslash A$ нулей полинома Вейерштрасса $A = \left\{z_n^m + f_1('z)z_n^{m-1} + ... + f_m('z) = 0\right\}$, где $f_1('z), ..., f_m('z)-$ целые функции, является S^*-параболическим многообразием со специальной функцией исчерпания

$$\rho(z) = \frac{1}{2}\ln\left(\left|'z\right|^2 + \left|F(z) + \frac{1}{F(z)}\right|^2\right),$$

где $F('z, z_n) = z_n^m + f_{m-1}('z)z_n^{m-1} + ... + f_0('z)$. Однако, как показал А.Атамуратов (см. [3]), $X = \mathbb{C}^n\backslash A$ не всегда будет регулярным.
Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Дополнение $X = \mathbb{C}^n\backslash A$ произвольного чисто $(n-1)-$мерного алгебраического множества $A \subset \mathbb{C}^n$, является регулярным S^*-параболическим многообразием.*

Литература

1. *Aytuna A., Sadullaev A.,* Parabolic Stein Manifolds, Mathematica Scandinavica Vol. 114, № 1, 2014, P. 86–109.

2. *Aytuna A., Sadullaev A.,* Polynomials on Parabolic Manifolds, Contemporary mathematics № 662, 2016, P. 1–22.

3. *Atamuratov A. A.,* Polynomials on regular parabolic manifolds, CMFD, 2022, Vol. 68, Issue 1, P. 41–58,
doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-1-41-58

4. *Stoll W.,* The characterization of strictly parabolic manifolds, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. IV VII № 1, 1980, P. 87–154.

О числе собственных значений двухчастичного гамильтониана на решетке

[1]Муминов М.Э., [2]Хуррамов А.М.

[1] *Samarkand State University, University Boulevard No. 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan.*
e-mail: mmuminov@mail.ru

[2] *Samarkand State University, University Boulevard No. 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan.*
e-mail: xurramov@mail.ru

Рассматривается система двух произвольных квантовых частиц на трехмерной решетке с некоторыми дисперсионными функциями (описывающими перенос частицы с узла на соседний узел); частицы взаимодействуют с помощью потенциала притяжения только на ближайших соседних узлах. Изучена зависимость числа собственных значений семейства операторов $h(k)$ от энергии взаимодействия частиц и полного квазиимпульса $k \in T^3$ (T^3- 3-мерный тор). Введен вспомогательной оператор и полностью опесан его спектр. С помощью спектральных свойств этого оператора найдены условия сущесвования собственных значений рассматриваемого оператора.

Введение

В непрерывном случае изучение спектральных свойств полного гамильтониана системы двух частиц сводится к изучению двухчастичного оператора Шредингера с помощью выделения энергии движения центра масс, при этом одночастичные связанные состояния суть собственные векторы оператора энергии с отделенным полным импульсом [1] (такой оператор фактически не зависит от значений полного импульса). На решетке выделению центра масс системы отвечает реализация гамильтониана как "расслоенного"оператора, т. е. прямого интеграла семейства операторов $h(k)$ энергии двух частиц, зависящих от значений полного квазиимпульса $k \in T^d$ (T^d- d-мерный тор) [2,3]. Является ли число дискретных собственных значений многочастичной системы конечным или бесконечным, зависит от числа виртуальных уровней подсистем.

Постановка задачи и формулировка основных результатов

Пусть $T = (-\pi, \pi]$, $L_2(T^3)-$ гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на T^3.

Рассмотрим $h(k)-$ самосопряженный оператор, действующий в $L_2(T^3)$ по формуле

$$h(k) = h_0(k) - \mathbf{v},\ k = (k_1, k_2, k_3) \in T^3,$$

$h_0(k)-$ оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(p) = \frac{1}{m_1}\varepsilon(p) + \frac{1}{m_2}\varepsilon(p-k), \quad \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{3}(1-\cos p_i),$$

$\mathbf{v}-$ интегральный оператор с ядром $v(p-s) = \mu_0 + \sum\limits_{\alpha=1}^{3} \mu_\alpha \cos(p_\alpha - s_\alpha)$.

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [4] следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mathbf{v}$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{ess}(h(k))$ сопадает с областью значений функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$:

$$\sigma_{ess}(h(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)], \quad m(k) = \min_p \mathcal{E}_k(p), \quad M(k) = \max_p \mathcal{E}_k(p).$$

Поскольку $\mathbf{v} \geq 0$, мы имеем

$$\sup(h(k)f, f) \leq \sup(h_0(k)f, f) = M(k)(f, f), \qquad f \in L_2(T^3).$$

Поэтому оператор $h(k)$ не имеет собственного значения, лежащего правее существенного спектра, т.е.

$$\sigma(h(k)) \cap (M(k), \infty) = \emptyset.$$

Положим

$$\mu_i^{\pm}(k;z) = \frac{c_i(k;z) + s_i(k;z) \pm \sqrt{(c_i(k;z) - s_i(k;z))^2 + 4\xi_i^2(k;z)}}{2[c_i(k;z)s_i(k;z) - \xi_i^2(k;z)]},$$

где

$$c_i(k;z) = \int\limits_{T^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}, \ s_i(k;z) = \int\limits_{T^3} \frac{\sin^2 s_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z},$$

$$\xi_i(k;z) = \int\limits_{T^3} \frac{\sin s_i \cos s_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}, \ z \leq \tilde{m}(k),$$

здесь

$$\tilde{\mathcal{E}}_k(p) = \frac{1}{m_1}\tilde{\varepsilon}(p) + \frac{1}{m_2}\tilde{\varepsilon}(p-k), \quad \tilde{\varepsilon}(p) = \sum_{i=1}^{3}(1 + |\cos p_i|),$$

$$\tilde{m}(k) = \min_p \tilde{\mathcal{E}}_k(p), \quad \tilde{M}(k) = \max_p \tilde{\mathcal{E}}_k(p).$$

Отметим, что $c_i(k;z)s_i(k;z) - \xi_i^2(k;z) > 0$ (см.[5]). Функции $b(k;z), c_i(k;z), s_i(k;z)$ и $\xi_i^2(k;z)$ неприревный в $(-\infty), \tilde{m}(k)]$. Заметим, что $m(k) < \tilde{m}(k)$. Поэтому

$$b(k;m(k)), \quad c_i(k;m(k)), \quad s_i(k;m(k)), \quad \xi_i^2(k;m(k))$$

существуют, где

$b(k;z) = \int\limits_{T^3} \frac{ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s)-z}$.

Положим

$$\mu^0(k) = \frac{1}{b(k;m(k))} \quad , \mu_i^c(k) = \frac{1}{c_i(k;m(k))}, \quad \mu_i^s(k) = \frac{1}{s_i(k;m(k))}.$$

$$\mu_i^{\pm}(k) = \mu_i^{\pm}(k;m(k)), \quad i = 1,2,3.$$

При этом

$$\mu_i^{-}(k) \leq \mu_i^{+}(k) \quad \text{при} \quad k \in T^3, \quad i = 1,2,3.$$

Определим функции

$$\alpha(\mu;k) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu_0 \in (0; \mu^0(k)], \\ 1 & \text{при} \quad \mu_0 \in (\mu^0(k); \infty), \end{cases} \quad \beta_i(\mu;k) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu_i \in (0, \mu_i^-(k)], \\ 1 & \text{при} \quad \mu_i \in (\mu_i^-(k), \mu_i^+(k)], \\ 2 & \text{при} \quad \mu_i \in (\mu_i^+(k), \infty) \end{cases}$$

для всех $i = 1,2,3$.

Теорема 1. *Пусть $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in R_+^4$. Тогда оператор $h(k)$ имеет не менее чем с учетом кратности ровно*

$$\alpha(\mu;k) + \sum_{i=1}^{3} \beta_i(\mu;k)$$

собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

Частности $\mu_0 > \mu^0(k)$ и $\mu_i > \mu_i^+(k)$, $i = 1,2,3$. Тогда оператор $h(k)$ имеет с учетом кратности ровно 7 собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

Заметим, что в случае $k = 0$ теорема 1 формулеруется более компактно.

Теорема 2. *Для любого $\mu \in R^4_+$, $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ оператор $h(\mathbf{0})$ имеет не менее чем с учетом кратности ровно*

$$\alpha(\mu, \mathbf{0}) + \sum_{i=1}^{3} \theta(i)$$

собственных значений, лежащих левее существенного спектра, где

$$\alpha(\mu, \mathbf{0}) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad \mu_0 \in (0, \mu^0(\mathbf{0})], \\ 1 & \textit{при} \quad \mu_0 \in (\mu^0(\mathbf{0}), \infty), \end{cases}$$

$$\theta(i) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad \mu_i \in (0, \mu_i^c(\mathbf{0})], \\ 1 & \textit{при} \quad \mu_i \in (\mu_i^c(\mathbf{0}), \mu_i^s(\mathbf{0})], \\ 2 & \textit{при} \quad \mu_i \in (\mu_i^s(\mathbf{0}), \infty). \end{cases}$$

Литература

1. *Л. Д. Фаддеев,* Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, Труды матем. инс-та им. В. А. Стеклова, LXIX (1963).
2. *Mattis, D. C.:* The few-body problem on lattice. Rew. mod. Phys. **58**, 361-379 (1986).
3. *S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov,* The threshold effects for the two-particle Hamiltonians.Commun. Math. Phys. **262**, 91-115 (2006).
4. *Рид М., Саймон Б.,* Методы современной математической физики. М.: Мир.1982, **4**, Анализ операторов.
5. *М.Э.Муминов, А. М. Хуррамов,* Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на решетке. Теор. Мат. Физика, 2013, Т. 177, No.3, стр. 480-493.

О единственности неподвижных точек некоторых стохастических операторов на одномерном симплексе

[1]Нодиров Ш.Д.,[2]Ербобоев А.К., [3]Усмонова Д.С.

[1] *Каршинский государственный Univertитет, Карши, Узбекистан,*
e-mail: shoh0809@mail.ru

[2] *Каршинский государственный Универтитет, Карши, Узбекистан,*
e-mail: yorboboyevalisher@gmail.com

[3] *Каршинский государственный Универтитет, Карши, Узбекистан,*
e-mail: dilbarusmonova9556@gmail.com

Нелинейные операторы появляются во многих задачах современной математической биологии, генетики и техники. При этом особую роль занимает теория неподвижных точек нелинейных операторов. Известно, что количество неподвижных точек играет важную роль в качественном поведении динамической системы. В настоящей работе, исследованы неподвижные точки строго положительного стохастического оператора четвертого порядка на одномерном симплексе. Найдены достаточные условия для единственности неподвижных точек. Отметим, что интерес к теории нелинейных стохастических операторов на симплексе обусловлен ее востребованностью в задачах популяционной генетики [1].

Пусть $E = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Множество

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i \in E, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

называется $(n-1)$-мерным симплексом.

Каждый элемент $x \in S^{n-1}$ является вероятностной мерой на E и его можно интерпретировать как состояние биологической (физической и т.п.) системы, состоящей из n элементов.

Определение 1.[2] *Произвольный непрерывный оператор V, определенный на симплексе S^{m-1}, будем называть стохастическим, если*

$$(Vx)_k = x'_k = \sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=1}^{m} p_{i_1 i_2 \dots i_n,k} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}, \quad \forall k = \overline{1,m}, \tag{1}$$

где

$$p_{i_1,i_2,\dots,i_n,k} \geq 0, \quad \forall i_j = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m};$$
$$p_{i_1,i_2,\dots,i_n,k} = p_{i_{\pi(1)},i_{\pi(2)},\dots,i_{\pi(n)},k}, \quad k = \overline{1,m},$$

для любой перестановки π и

$$\sum_{k=1}^{m} p_{i_1,i_2,\dots,i_n,k} = 1, \quad \forall i_j = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Число n называется порядком этого оператора. При $n = 1$ оператор – линейный стохастический оператор, при $n = 2$ – квадратичный стохастический оператор, при $n = 3$ – кубический стохастический оператор [3], и т.д.

Стохастический оператор (1) назовем строго положительным, если

$$p_{i_1,i_2,\dots,i_n,k} > 0, \quad \forall i_j = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Задача. *Найти достаточные условия для единственности неподвижных точек строго положительного стохастического оператора (1), в случае $n = 4$ на одномерном симплексе S^1 т.е. $m = 1$.*

Отметим, что количество неподвижных точек строго положительного стохастического оператора (1) в случае $n = 3$ полностью изучено в работе [3].

В случае $n = 4$, строго положительный стохастический оператор $(Vx)_k$ на S^1 имеет следующий вид:

$$(Vx)_k = x'_k = p_{1111,k}x_1^4 + 4p_{1112,k}x_1^4 x_2 + 6p_{1122,k}x_1^2 x_2^2 + 4p_{1222,k}x_1 x_2^3 + p_{2222,k}x_2^4, \quad k = \overline{1,2}, \tag{2}$$

где

$$p_{i_1,i_2,i_3,i_4,k} > 0, \quad p_{i_1,i_2,i_3,i_4,1} + p_{i_1,i_2,i_3,i_4,2} = 1, \quad i_j = \overline{1,2}, \quad j = \overline{1,4}.$$

Можно заметить, что оператор (2) имеет четвертый порядок.

Положим

$$\mu_0 = p_{1111,1} - 4p_{1112,1} + 6p_{1122,1} - 4p_{1222,1} + p_{2222,1}, \quad \mu_1 = 4p_{1112,1} - 12p_{1122,1} + 12p_{1222,1} - 4p_{2222,1},$$

$$\mu_2 = 6p_{1122,1} - 12p_{1222,1} + 6p_{2222,1}, \quad \mu_3 = 6p_{1222,1} - 4p_{2222,1}, \quad \mu_4 = p_{2222,1}$$

и составим многочлен четвертой степени

$$P_4(x) = \mu_0 x_1^4 + \mu_1 x_1^3 + \mu_2 x_1^2 + \mu_3 x_1 + \mu_4.$$

Лемма 1. *Количество неподвижных точек строго положительного стохастического оператора четвертого порядка (2) на S^1 совпадает с количеством корней многочлена $P_5(x)$ на (0,1).*

Лемма 2. *Многочлен $P_5(x)$ имеет как минимум один корень на интервале (0,1).*

Определим число

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

где

$$p = -\frac{3\mu_1^2}{16\mu_0^2} + \frac{3\mu_2}{2\mu_0}, \quad q = \frac{\mu_1^3}{32\mu_0^3} - \frac{3\mu_1\mu_2}{8\mu_0^2} + \frac{\mu_3}{4\mu_0}.$$

Теорема 1. *Пусть $Q \geq 0$. Тогда строго положительный стохастический оператор четвертого порядка (2) имеет единственную неподвижную точку на S^1.*

При $Q \leq 0$ определим

$$\theta_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi(k-2)}{3}\right), k = \overline{1,2,3},$$

где

$$\cos\alpha = -\frac{q}{2}\left(-\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

Введем обозначения:

$$\gamma_1 = \theta_3 - \frac{\mu_1}{4\mu_0}, \quad \gamma_2 = \theta_1 - \frac{\mu_1}{4\mu_0} \quad \gamma_3 = \theta_2 - \frac{\mu_1}{4\mu_0}.$$

Теорема 2. *Пусть $Q < 0, \gamma_>0$ и $\gamma_3 < 1$. Если выполняется одно из следующих условий*
(a) $\gamma_1 \leq 0$,
(b) $\gamma_1 > 0, P_4(\gamma_1) > 0$,
(c) $\gamma_1 > 0, P_4(\gamma_2) < 0$,
то строго положительный стохастический четвертого порядка (2) имеет единственную неподвижную точку на S^1.

Литература

1. *Любич Ю.И.* Математические структуры в популяционной генетике, Киев: Наук. Думка, 1983.
2. *Шахиди Ф.А.* О биостохастических операторах, определенных в конечномерном симплексе, Сибирский математический журнал, Март-апрель, 2009. Том. 50, No 2. С. 463-468.
3. *Нодиров Ш.Д.* О неподвижных точках строго положительных кубических стохастических операторов на одномерном симплексе, Илм сарчашмалари УрГУ. Научно-методический журнал, 2019, No 12, С.10-16.

Асимптотики собственных значений возмущенного билапласиана на решетке

[1]Пардабаев М.А., [2]Каршибоев Х.К., [1]Алимов С.

[1]*Самаркандский государственный университет, Узбекистан*

e-mail: p_mardon75@mail.ru

[2]*Самаркандский институт экономики и сервиса.*

Пусть $\mathbb{Z}^d$ - d мерная решетка, а $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ - гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций на $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$. Рассмотрим семейство самосопряженных ограниченных дискретных операторов

$$\widehat{\boldsymbol{h}}_\mu{:=}\widehat{\boldsymbol{h}}_0 - \mu\widehat{\mathbf{v}}, \qquad \mu > 0,$$

в $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Здесь $\widehat{\boldsymbol{h}}_0{:=}\widehat{\varDelta}\widehat{\varDelta}$ - дискретный билапласиан, где

$$\widehat{\varDelta} f(x) = \frac{1}{2}\sum_{|s|=1}[f(x) - f(x+s)], \qquad f \in \ell^2(\mathbb{Z}^d),$$

- дискретный лапласиан, а $\widehat{\mathbf{v}}$ - оператор ранга один, который задачтся как

$$\widehat{\mathbf{v}}\hat{f}(x) = \hat{v}(x)\sum_{y\in\mathbb{Z}^d}\hat{v}(y)\hat{f}(y),$$

где $\hat{v} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)\backslash\{0\}$ - заданная вещественнозначная функция.

Пусть $\mathbb{T}^d$ - d мерный тор, а $L^2(\mathbb{T}^d)$ - гильбертово пространство функций, квадратично-интегрируемых на $\mathbb{T}^d$. Далее мы всегда предполагаем, преобразование Фурье

$$v(p) := \mathcal{F}\hat{v}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \hat{v}(x)e^{ix\cdot p}$$

функция $\hat{v}$ удовлетворяют следующим предположениям:

Предположение 1

a) Функция $v(p)$ вещественно-аналитическая на $\mathbb{T}^d$

b) Существуют неотрицательные целые числа $n_o \geq 0$ такие, что

$$D^{2n_0}|v(\mathbf{0})|^2 \neq 0\ ,\quad D^{2j}|v(\mathbf{0})|^2 = 0 \quad ,\quad j = 0,\ldots,n_0-1$$

где $D^j f(p)$- дифференциал j -го порядка для f в точке p.

Напомним, что $\sigma(\widehat{\Delta}) = \sigma_{ess}(\widehat{\Delta}) = [0,2d]$. Следовательно, $\sigma(\widehat{\boldsymbol{h}}_0) = \sigma_{ess}(\widehat{\boldsymbol{h}}_0) = [0,4d^2]$, а в силу компактности оператора $\widehat{\mathbf{v}}$ и теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях.

$$\sigma_{ess}(\widehat{\boldsymbol{h}}_\mu) = \sigma_{ess}(\widehat{\boldsymbol{h}}_0) = [0,4d^2]$$

для любого $\mu > 0$.

Прежде чем изложить основные результаты, введем следующие обозначения

$$\hat{c}_v := \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|v(q)|^2 \mathrm{d}q}{\varepsilon(q)^2}, \qquad c_v := \frac{2^{2n_o+d}}{(2n_o)!} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} D^{2n_o}|v(0)|^2[w,\ldots,w]\ \mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}(w),$$

где $\mathbb{S}^{d-1}$ - единичная сфера в $\mathbb{R}^d$ и

$$\varepsilon(q) := \left(\sum_{i=1}^d (1-\cos q_i)\right)^2.$$

Теорема 1. *Пусть $\mu_o := \left(\int_{\mathbb{T}^d} \frac{|v(q)|^2 \mathrm{d}q}{\varepsilon(q)}\right)^{-1} \geq 0$. Тогда $\sigma_{disc}(\widehat{\boldsymbol{h}}_\mu) = \emptyset$ для любых $\mu \in (0,\mu_o]$ и $\sigma_{disc}(\widehat{\boldsymbol{h}}_\mu)$ является одноэлементным $\{e(\mu)\}$ для любого $\mu \in (\mu_o,+\infty)$. Более того, функция $\mu \in (\mu_o,+\infty) \mapsto e(\mu)$ вещественно-аналитическая, строго убывающая, вогнутая в $(\mu_o,+\infty)$, и удовлетворяет равенств*

$$\lim_{\mu\searrow\mu_o} e(\mu) = 0, \qquad\qquad \lim_{\mu\to+\infty} \frac{e(\mu)}{\mu} = -\int_{\mathbb{T}^d} |v(q)|^2 \mathrm{d}q.$$

Если $\mu > \mu_o$, тогда оператор $\widehat{\boldsymbol{h}}_\mu$ имеет единственное собственное значение $e(\mu) < 0$.

(a) Предположим, что d нечетное:

(a1) если $2n_o + d = 1,3$, то $\mu_o = 0$ и для достаточно малых и положительных μ, имеет место равенство

$$(-e(\mu))^{1/4} = \begin{cases} \left(\frac{\pi c_v}{4}\right)^{1/3} \mu^{1/3} + \sum\limits_{n\geq 1} c_{1,n}\mu^{\frac{n+1}{3}}, & 2n_o + d = 1, \\ \frac{\pi c_v}{8}\mu + \sum\limits_{n\geq 1} c_{3,n}\mu^{n+1}, & 2n_o + d = 3, \end{cases}$$

где $\{c_{1,n}\}$ и $\{c_{3,n}\}$ - некоторые действительные коэффициенты;

(a2) если $2n_o + d = 5,7$, то $\mu_o > 0$ и для достаточно малых и положительных $\mu - \mu_o$, верно

$$(-e(\mu))^{1/4} = \begin{cases} \frac{8}{\pi c_v \mu_o^2}(\mu-\mu_o) + \sum\limits_{n\geq 1} c_{5,n}(\mu-\mu_o)^{n+1}, & 2n_o + d = 5, \\ \left(\frac{8}{\pi c_v \mu_o^2}\right)^{1/3} (\mu-\mu_o)^{1/3} + \sum\limits_{n\geq 1} c_{7,n}(\mu-\mu_o)^{\frac{n+1}{3}}, & 2n_o + d = 7, \end{cases}$$

где $\{c_{5,n}\}$ и $\{c_{7,n}\}$ - некоторые действительные коэффициенты;

(a3) если $2n_o + d \geq 9$, то $\mu_o > 0$ и для достаточно малых и положительных $\mu - \mu_o$, имеет место разложение

$$(-e(\mu))^{1/4} = (\mu_o^2 \hat{c}_v)^{-1/4} (\mu - \mu_o)^{1/4} + \sum_{n\geq 2} c_{9,n} (\mu - \mu_o)^{n/4},$$

где $\{c_{9,n}\}$ - некоторые действительные коэффициенты.

(b) Предположим, что d четно:

(b1) если $2n_o + d = 2, 4$, то $\mu_o = 0$ и для достаточно малых и положительных μ, имеет место

$$(-e(\mu))^{1/2} = \begin{cases} \frac{\pi c_v}{8}\,\mu + \sum\limits_{n+m\geq 1, n,m\geq 0} c_{2,nm} \mu^{n+1} (-\mu \ln \mu)^m, & 2n_o + d = 2, \\ c e^{-\frac{8}{c_v \mu}} + \sum\limits_{n+m\geq 1, n,m\geq 0} c_{4,nm} \mu^{n+1} \big(\frac{1}{\mu}\, e^{-\frac{8}{c_v \mu}}\big)^{m+1}, & 2n_o + d = 4, \end{cases}$$

где $\{c_{2,nm}\}$ и $\{c_{4,nm}\}$ - некоторые действительные коэффициенты, а $c > 0$;

(b2) если $2n_o + d = 6, 8$, то $\mu_o > 0$ и для достаточно малых и положительных $\mu - \mu_o$, имеет место

$$(-e(\mu))^{1/2} = \begin{cases} \frac{8}{\pi c_v \mu_o^2}\, \tau^2 + \sum\limits_{n+m\geq 1, n,m\geq 0} c_{6,nm} \tau^{2n+2} \theta^m, & 2n_o + d = 6, \\ \Big(\frac{8}{c_v \mu_o^2}\Big)^{1/2} \tau\sigma + \sum\limits_{n+m+k\geq 1, n,m,k\geq 0} c_{8,nmk} \tau^{n+1} \sigma^{m+1} \eta^k, & 2n_o + d = 8, \end{cases}$$

где $\{c_{4,nm}\}$ и $\{c_{8,nmk}\}$ - некоторые действительные коэффициенты и

$$\tau := (\mu - \mu_o)^{1/2},\ \theta := -\tau^2 \ln \tau,\ \sigma := \Big(-\frac{1}{\ln \tau}\Big)^{1/2},\ \eta := -\frac{\ln \ln \tau^{-1}}{\ln \tau},$$

(b3) если $2n_o + d \geq 10$, то $\mu_o > 0$ и для достаточно малых и положительных $\mu - \mu_o$,

$$(-e(\mu))^{1/2} = (\mu_o^2 \hat{c}_v)^{-1/2}\, \tau + \sum_{n+m\geq 1, n,m\geq 0} c_{10,nm} \tau^{n+1} \theta^m,$$

где $\{c_{10,nm}\}$ - некоторые действительные коэффициенты.

Литература

1. *S.Albeverio, S.Lakaev, Z.Muminov.* Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theor. **5** (2004), 743–772.
2. *M.Klaus, B.Simon.* Coupling constant thresholds in nonrelativistic Quantum Mechanics. I. Short-range two-body case. Ann. Phys. **130** (1980), 251–281.
3. *S.Lakaev.* The Efimov effect of a system of three identical quantum lattice particles. Funkcional. Anal. Prilozhen. **27** (1993), 15–28.
4. *S.N.Lakaev, A.M.Khalkhuzhaev, Sh.S.Lakaev.* Asymptotic behavior of an eigenvalue of the two-particle discrete Schrödinger operator. Theoret. and Math. Phys. **171** (2012), 800–811.
5. *S.N.Lakaev, Sh.Yu.Kholmatov.* Asymptotics of the eigenvalues of a discrete Schrödinger operator with zero-range potential. Izvestiya Math. **76** (2012), 946–966.
6. *S.N.Lakaev, Sh.Yu.Kholmatov.* Asymptotics of eigenvalues of two-particle Schrödinger operators on lattices with zero-range interaction. J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011).
7. *A.Khalkhuzhaev, Sh.Kholmatov, M.Pardabaev.* Expansion of eigenvalues of the perturbed discrete bilaplacian. Journals Monatshefte fur Mathematik, (2022)
8. *Sh.Kholmatov, M.Pardabaev.* On Spectrum of the Discrete Bilaplacian with Zero-Range Perturbation. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 6, pp. 1286-1293.

О новых конструктивных гиббсовских мерах модели Поттса

[1]Рахматуллаев М.М, [2]Дехконов Ж.Д.

[1] *Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

[2] *Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан,*
e-mail: dehqonov.jasur@bk.ru

Дерево Кэли T^k порядка $k \geq 1-$ бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер. Пусть $T^k = (V, L, i)$, где $V-$ есть множество вершин T^k, $L-$ его множество ребер, и $i-$ функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если $i(l) = \{x, y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершин* и обозначается $l = \langle x, y\rangle$.

Расстояние $d(x, y), x, y \in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$d(x, y) = \min\{d | \exists x = x_0, x_1, \dots, x_{d-1}, x_d = y \in V$ такой, что $\langle x_0, x_1\rangle, \dots, \langle x_{d-1}, x_d\rangle\}$.

Для фиксированного $x^0 \in V$ обозначим $W_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) = n\}$,

$$V_n = \{x \in V \mid d(x, x^0) \leq n\}, \quad L_n = \{l = \langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\}.$$

Для $x \in W_n$ положим $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$.

Известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \geq 1$ и группой G_k, являющейся свободным произведением $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$, соответственно (см.[1]).

Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geq 2$ и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется как

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}, \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{R}$, $x, y-$ ближайшие соседи и $\delta_{ij}-$ символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \ i \neq j, \\ 1, & \text{если } \ i = j. \end{cases}$$

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ_n в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} h_{\sigma(x),x}\right\}, \tag{2}$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0-$температура, $Z_n^{-1}-$ нормирующий множитель, $\{h_x = (h_{1,x}, ..., h_{q,x}) \in R^q, x \in V\}$ совокупность векторов и

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)}.$$

Говорят, что вероятностное распределение (2) согласованное, если для всех $n \geq 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \tag{3}$$

Здесь $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ есть объединение конфигураций. В этом случае, существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется расщепленной гиббсовской мерой, соответствующей гамильтониану (1) и векторнозначной функции $h_x, x \in V$.

Следующее утверждение описывает условие на h_x, обеспечивающее согласованность $\mu_n(\sigma_n)$.

Теорема 1. (см.[1]) Вероятностное распределение $\mu_n(\sigma_n), n = 1, 2, ...$ в (2) является согласованным тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее

$$\tilde{h}_x = \sum_{y \in S(x)} F(\tilde{h}_y, \theta), \tag{4}$$

где функция $F : h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \to F(h, \theta) = (F_1, \dots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ определяется как:

$$F_i = \ln \left((\theta - 1) \exp^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} \exp^{h_j} + \frac{1}{\theta} + \sum_{j=1}^{q-1} \exp^{h_j} \right),$$

$\theta = \exp(J\beta), S(x)$–множество прямых потомков точки x и $\tilde{h}_x = (\tilde{h}_{1,x}, ..., \tilde{h}_{q-1,x})$ с условием

$$\tilde{h}_{i,x} = h_{i,x} - h_{q,x}, i = 1, ..., q-1.$$

Каждому решению $\tilde{h}_x$ функционального уравнения (4) соответствует одна мера Гиббса и наоборот.

В этой работе мы рассматриваем полубесконечное дерево. А именно, корень x^0 имеет k ближайших соседей.

В этом работе мы находим новые решения функционального уравнения (4) при $q = 3$. Рассмотрим следующую матрицу

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

где a, b, c, d целые неотрицательные числа и

$$a + b = k, c + d = k.$$

Эта матрица определяет, сколько раз присутствуют векторные значения $\bar{h} = (h_1, 0)$ и $\bar{l} = (l_1, 0)$ в множестве $S(x)$ для каждого $h_x \in \{\bar{h}, \bar{l}\}$. Граничные условия (т.е совокупность векторов) $h = \{h_x, x \in V\}$, определяются следующими образом:

(i) если в вершине x имеем $h_x = \bar{h}$, то функция h_y принимающая векторные значения каждой вершине $y \in S(x)$ определим по следующему правилу:

$$\begin{cases} \bar{h}, \text{ на } a \text{ вершинах } S(x); \\ \bar{l}, \text{ на } b \text{ вершинах } S(x). \end{cases}$$

(ii) если в вершине x имеем $h_x = \bar{l}$, то функция имеет значения:

$$\begin{cases} \bar{h} \text{ на } c \text{ вершинах } S(x); \\ \bar{l} \text{ на } d \text{ вершинах } S(x). \end{cases}$$

Легко видеть, что граничные условия h_x (т.е. совокупность векторов) приведенное выше конструкции удовлетворяют функциональному уравнению (4), если векторы $(h_1, 0)$ и $(l_1, 0)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} h_1 = af_\theta(h_1) + bf_\theta(l_1), \\ l_1 = df_\theta(l_1) + cf_\theta(h_1), \end{cases} \tag{5}$$

где $f_\theta(x) = \ln \frac{\theta \exp(x) + 2}{\theta + \exp(x) + 1}$.

Теорема 2. Независимо от параметров система уравнений (5) имеет решение (0,0), и если $\mid (bc - ad)\left(\frac{\theta-1}{\theta+2}\right)^2 + (a + d)\frac{\theta-1}{\theta+2} \mid > 1$ то существует не менее трех различных решений $(0, 0)$, $(h_1^{(1)}, l_1^{(1)}), (h_1^{(2)}, l_1^{(2)})$, где $h_1^{(1)}, l_1^{(1)} > 0, h_1^{(2)}, l_1^{(2)} < 0$.

Литература

1. *U. A. Rozikov.* Gibbs measures on Cayley trees, World scientific, 2013.

2. *U. A. Rozikov, M. M. Rahmatullaev.* Ising model on Cayley trees: a new class of Gibbs measures and their comparison with known ones, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, 093205, 2017.

H_A-периодические основные состояния для модели Поттса с внешним полем и счетным множеством значений спина

[1]Рахматуллаев М.М., [2]Расулова М.А.

[1] *Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

[2] *Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан,*
e-mail: m_rasulova_a@rambler.ru

Пусть $\tau^k = (V, L), k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины, которого выходит ровно $k+1$ ребер, где $V-$ множество вершин, $L-$ множество ребер τ^k.

Пусть G_k- свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка с образующими $a_1, a_2, ...\ a_{k+1}$, соответственно, т.е. $a_i^2 = e$. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k(см. [2]).

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi \equiv Z$, где $Z-$ множество целых чисел. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega = \Phi^V$.

Пусть $G_k/G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}-$ фактор группа, где G_k^*- нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определение 1. *Конфигурация σ называется G_k^*-периодической, если $\sigma(x) = \sigma_i$ при $x \in H_i, \forall x \in G_k$, т.е. значение конфигурации в вершине x зависит не от x, а от номера класса принадлежности x. G_k-периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.*

Для данной периодической конфигурации индекс нормального делителя называется периодом конфигурации.

Гамильтониан модели Поттса с внешним полем имеет вид (см. [1])

$$H(\sigma) = J \sum_{\langle x,y\rangle, x,y \in V} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} + \alpha \sum_{x \in V} \delta_{0\sigma(x)},$$

где $J, \alpha \in R, \alpha-$ внешнее поле и $\delta_{uv}-$ символ Кронекера, т.е.

$$\delta_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad u = v, \\ 0, & \text{если} \quad u \neq v. \end{cases}$$

Пусть M – множество единичных шаров с вершинами в V. Мы назовем сужение конфигурации σ на шаре $b \in M$ *ограниченной конфигурацией* σ_b. Через c_b обозначим центр единичного шара b. Определим энергию конфигурации σ_b на b следующим образом:

$$U(\sigma_b) \equiv U(J, \alpha) = \frac{1}{2} J \sum_{x \in S_1(c_b)} \delta_{\sigma(c_b)\sigma(x)} + \alpha \delta_{0\sigma(c_b)},$$

где $J = (J, \alpha) \in R^2$.

Лемма. *Для каждой конфигурации φ_b верно следующее:*

$$U(\varphi_b) \in \left\{U_n : n = \overline{1, 2k+4}\right\},$$

где

$$U_n = \frac{n-1}{2} \cdot J + \left(\alpha - \frac{k+2}{2} \cdot J\right) \cdot \left[\frac{n-1}{k+2}\right]$$

и $\left[\frac{n-1}{k+2}\right]$ *– целая часть* $\frac{n-1}{k+2}$.

Определение 2. *Конфигурация* φ *называется основным состоянием для гамильтониана* H*, если*

$$U(\varphi_b) = \min\{U_n : n = 1, 2, 3, ..., 2k+4\}$$

для любого $b \in M$.

Периодическая (трансляционно-инвариантная) конфигурация являющаяся основным состоянием далее назовем *периодическим (трансляционно-инвариантным) основным состоянием.*

Опишем все $\overline{G}_k$-периодические основные состояния, где $\overline{G}_k-$ нормальный делитель индекса 2 в G_k. Заметим, что любой нормальный делитель индекса 2 группы G_k имеет вид

$$H_A = \{x \in G_k : \sum_{i \in A} w_x(a_i) - \text{четно}\},$$

где $\emptyset \neq A \subseteq N_k = \{1, 2, ..., k+1\}$, и $w_x(a_i)-$ число букв a_i в слове $x \in G_k$ [2]. Заметим, что в случае $|A| = k+1$ (где через $|A|$ обозначено число элементов множества A), т.е. $A = N_k$ нормальный делитель H_A имеет следующий вид: $G_k^{(2)} := H_A = \{x \in G_k : |x|-\text{ четно}\}$, где $|x|-$ длина слова x.

H_A-периодические конфигурации имеют следующий вид:

$$\varphi(x) = \begin{cases} z_0, & \text{если } x \in H_A, \\ z_1, & \text{если } x \in G_k \setminus H_A, \end{cases}$$

где $z_i \in \Phi$, $i \in \{0, 1\}$.

Следующая теорема описывает множество всех H_A-периодических основных состояний.

Теорема. *Пусть* $k \geq 2$, $A \subseteq \{1, 2, ..., k+1\}$ *и* $J \neq 0$. *Тогда всякие* H_A*-периодические основные состояния являются трансляционно-инвариантными или* $G_k^{(2)}$*-периодическими.*

Литература

1. *Rozikov U.A., Ganikhodjaev N.N.* The Potts Model with Countable Set of Spin Values on a Cayley Tree, Letters in Mathematical Physics, T.75, 2006, Стр. 99–109.
2. *Rozikov U.A.* Gibbs measures on Cayley trees, World scientific, 2013.

Об инвариантных подпространствах оператора $h_\mu(\mathbf{k})$

[1]Халхужаев А.М., [2]Махмудов Х.Ш.

[1] *Самаркандское отделение Института Математики им. В. И. Романовского АН РУз, Самарканд, Узбекистан.*

[1] *Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.*

Пусть $\mathbb{Z}^d$- $d-$ мерная целочисленная решетка, $l_2((\mathbb{Z}^d)^2)-$ гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, а $l_2^{as}((\mathbb{Z}^d)^2) \subset l_2((\mathbb{Z}^d)^2)$-подпространство антисимметричных функций.

В координатном представлении гамильтониан системы двух фермионов с массой $m = 1$, взаимодействующих на ближайших соседних узлах решетки $\mathbb{Z}^d$, действует в гильбертовом пространстве $l_2^{as}((\mathbb{Z}^d)^2)$ по формуле

$$\hat{h}_\mu = \hat{h}^0 - \mu\hat{v},$$

$$(\hat{h}^0\hat{\psi})(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{2}\sum_{|\mathbf{s}|=1}[2\hat{\psi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \hat{\psi}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{s}, \mathbf{x}_2) - \hat{\psi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + \mathbf{s})], \quad \hat{\psi} \in l_2^{as}((\mathbb{Z}^d)^2),$$

где

$$\hat{v}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{при} \quad |\mathbf{x}| = 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $|\mathbf{x}| = |x^{(1)}| + |x^{(2)}| + ... + |x^{(d)}|$, $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(d)}) \in \mathbb{Z}^d$ и $\mu > 0-$ энергия взаимодействия двух частиц на ближайших соседних узлах решетки $\mathbb{Z}^d$.

Отметим, что двухчастичный гамильтониан $\hat{h}_\mu$ является ограниченным самосопряженным оператором в $l_2^{as}((\mathbb{Z}^d)^2)$.

Пусть $\mathbb{T}^d$ -d-мерный тор, т.е. куб $(-\pi, \pi]^d$ с соответствующим отождествлением противоположных граней. Он рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как в $\mathbb{R}^d$ по модулю $(2\pi\mathbb{Z})^d$. Обозначим через $L_2(\mathbb{T}^d)$-гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}^d$ и $L_2^o(\mathbb{T}^d) \subset L_2(\mathbb{T}^d)-$ подпространство нечетных функций. После преобразования Фурье и выделения полного квазиимпульса $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^d$ системы, изучение спектральных свойств оператора $\hat{h}_\mu$ сводится к изучению семейства двухчастичных дискретных операторов Шредингера $h_\mu(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^d$, действующих в $L_2^o(\mathbb{T}^d)$ по формуле

$$h_\mu(\mathbf{k}) = h^0(\mathbf{k}) - \mu v.$$

Здесь невозмущенный оператор $h^0(\mathbf{k})$ есть оператор умножения на функцию

$$(h^0(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}) = \mathcal{E}_k(\mathbf{q})f(\mathbf{q}), \quad f \in L_2^o(\mathbb{T}^d),$$

где

$$\mathcal{E}_k(\mathbf{q}) = 2\sum_{j=1}^{d}(1 - \cos\frac{k^{(j)}}{2} cos q^{(j)}).$$

Оператор взаимодействия (возмущения) v является оператором ранга $d \geq 1$ и действует в гильбертовом пространстве $L_2^o(\mathbb{T}^d)$ по формуле (см. [1,2])

$$(vf)(\mathbf{q}) = (2\pi)^{-d}\sum_{i=1}^{d}\sin q^{(i)}\int_{\mathbb{T}^d}\sin t^{(i)} f(\mathbf{t})d\mathbf{t}.$$

Возмущение v оператора $h^0(\mathbf{k})$ является оператором ранга d, и следовательно, из теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактном возмущении существенный спектр $\sigma_{ess}(h_\mu(\mathbf{k}))$ оператора $h_\mu(\mathbf{k})$ совпадает со спектром оператора $h^0(\mathbf{k})$. Так как $h^0(\mathbf{k})$ есть оператор умножения на функцию $\mathcal{E}_k(\mathbf{q})$, то

$$\sigma_{ess}(h_\mu(\mathbf{k})) = [\mathcal{E}_{min}(\mathbf{k}), \mathcal{E}_{max}(\mathbf{k})],$$

где

$$\mathcal{E}_{min}(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_k(\mathbf{q}) = 2\sum_{j=1}^{d}(1 - \cos\frac{k^{(j)}}{2}) \geq 0,$$

$$\mathcal{E}_{max}(\mathbf{k}) = \max_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_k(\mathbf{q}) = 2\sum_{j=1}^{d}(1 + \cos\frac{k^{(j)}}{2}) \leq 4d.$$

Пусть $d \geq 1$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^d$ и

$$\mu^{(i)}(\mathbf{k}) = \left(\int_{\mathbb{T}^d}\frac{\sin^2 q^{(i)} d\mathbf{q}}{\mathcal{E}_k(\mathbf{q}) - \mathcal{E}_{\min}(\mathbf{k})}\right)^{-1} > 0.$$

В дальнейшем предположим, что $k \in (-\pi, \pi)^d$, откуда следует $\mu^{(i)}(\mathbf{k}) > 0, i = \overline{1, d}$.

Обозначим через $L_2^e(\mathbb{T})$ подпространство четных функций, определенных на $\mathbb{T}$. Построим подпространства $L_i^o, i=1,...,d$ в виде тензорных произведений

$$L_i^o=\underbrace{L_2^e(\mathbb{T})\otimes L_2^e(\mathbb{T})\otimes...\otimes L_2^e(\mathbb{T})}_{i-1}\otimes L_2^o(\mathbb{T})\otimes\underbrace{L_2^e(\mathbb{T})\otimes L_2^e(\mathbb{T})\otimes...\otimes L_2^e(\mathbb{T})}_{d-i}.$$

Теорема 1. *Подпространства* $L_i^o\subset L_2^o(\mathbb{T}^d)$ *инвариантны относительно оператора* $h_\mu(\mathbf{k})$.

Теорема 2. *Оператор* $h_\mu^{(i)}(k_1,...,k_i,...,k_j,...,k_d)$, $\mathbf{k}\in\mathbb{T}^d$, *унитарно-эквивалентен оператору*
$h_\mu^{(j)}(k_1,...,k_j,...,k_i,...,k_d)$.

Теорема 3. *Пусть* $\mu>\mu^{(i)}(\mathbf{k}), i=\overline{1,d}$. *Для спектра* $\sigma(h_\mu(\mathbf{k}))$ *оператора* $h_\mu(k)$ *верны равенства*

$$\sigma(h_\mu(\mathbf{k}))=\bigcup_{i=1}^{d}\sigma(h_\mu^{(i)}(\mathbf{k}))=\bigcup_{i=1}^{d}\{z_\mu^{(i)}(\mathbf{k})\}\bigcup[\mathcal{E}_{min}(\mathbf{k}),\mathcal{E}_{max}(\mathbf{k})],$$

где $z_\mu^{(i)}(\mathbf{k})-$ *собственное значение оператора* $h_\mu^{(i)}(\mathbf{k})$.

Литературы

1. *С. Н. Лакаев, Ш. Ю. Холматов.* "Асимптотика собственных значений дискретного оператора Шрёдингера с контактным потенциалом". *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 5, страницы 99-118.

2. *С. Н. Лакаев, А. М. Халхужаев, Ш. С. Лакаев,* "Асимптотики собственного значения двухчастичного дискретного оператора Шредингера *ТМФ*, 171:3 (2012), 438-451.

О числе собственных значений модельного оператора на решетке

[1]Хуррамов А.М., Турсунов Э.М., Аралов С.Г.

[1] *Самаркандский государственный университет, Университетский бульвар 15, г. Самарканд, 140104, г. Узбекистан.*

e-mail: xurramov@mail.ru

Пусть $T=(-\pi,\pi]$, $L_2(T^3)-$ гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на T^3.

Рассмотрим $h(k)-$ самосопряженный оператор, действующий в $L_2(T^3)$ по формуле

$$h(k)=h_0(k)-\mathbf{v},\ k=(k_1,k_2,k_3)\in T^3,$$

$h_0(k)-$ оператор умножения на функцию

$$\mathcal{E}_k(p)=\frac{1}{m_1}\varepsilon(p)+\frac{1}{m_2}\varepsilon(p-k),\quad \varepsilon(p)=\sum_{i=1}^{3}(1+|\cos p_i|),$$

$\mathbf{v}-$ интегральный оператор с ядром $v(p-s)=\mu_0+\sum\limits_{\alpha=1}^{3}\mu_\alpha\cos(p_\alpha-s_\alpha)$.

Отметим, что из теоремы Вейля о существенном спектре [1] следует, что существенный спектр $\sigma_{ess}(h(k))$ оператора $h(k)$ не меняется при компактном возмущении $\mathbf{v}$ и совпадает со спектром невозмущенного оператора $h_0(k)$. При этом $\sigma_{ess}(h(k))$ сопадает с областью значений функции $\mathcal{E}_k(\cdot)$:

$$\sigma_{ess}(h(k))=\sigma(h_0(k))=[m(k),M(k)],\quad m(k)=\min_p\mathcal{E}_k(p),\quad M(k)=\max_p\mathcal{E}_k(p).$$

Поскольку $\mathbf{v} \geq 0$, мы имеем

$$\sup(h(k)f, f) \leq \sup(h_0(k)f, f) = M(k)(f, f), \qquad f \in L_2(T^3).$$

Поэтому оператор $h(k)$ не имеет собственного значения, лежащего правее существенного спектра, т.е.

$$\sigma(h(k)) \cap (M(k), \infty) = \emptyset.$$

Положим

$$\mu_i^{\pm}(k; z) = \frac{c_i(k; z) + s_i(k; z) \pm \sqrt{(c_i(k; z) - s_i(k; z))^2 + 4\xi_i^2(k; z)}}{2[c_i(k; z)s_i(k; z) - \xi_i^2(k; z)]},$$

где

$$c_i(k; z) = \int\limits_{T^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\tilde{\mathcal{E}}_k(s) - z}, \;\; s_i(k; z) = \int\limits_{T^3} \frac{\sin^2 s_i ds}{\mathcal{E}_k(s) - z},$$

$$\xi_i(k; z) = \int\limits_{T^3} \frac{\sin s_i \cos s_i ds}{\mathcal{E}_k(s) - z}, \;\; z \leq m(k).$$

Отметим, что $c_i(k; z)s_i(k; z) - \xi_i^2(k; z) > 0$ (см.[2]).

Функции $b(k; z), c_i(k; z), s_i(k; z)$ и $\xi_i^2(k; z)$ неприревный в $(-\infty), m(k)]$. Положим

$$\mu^0(k) = \frac{1}{b(k; m(k))} \quad , \mu_i^c(k) = \frac{1}{c_i(k; m(k))}, \quad \mu_i^s(k) = \frac{1}{s_i(k; m(k))},$$

где

$$b(k; z) = \int\limits_{T^3} \frac{ds}{\mathcal{E}_k(s) - z}, \;\; c_i(k; z) = \int\limits_{T^3} \frac{\cos^2 s_i ds}{\mathcal{E}_k(s) - z}, \;\; s_i(k; z) = \int\limits_{T^3} \frac{\sin^2 s_i ds}{\mathcal{E}_k(s) - z},$$

$$\xi_i(k; z) = \int\limits_{T^3} \frac{\sin s_i \cos s_i ds}{\mathcal{E}_k(s) - z}, \;\; z \leq m(k),$$

При этом

$$\mu_i^-(k) \leq \mu_i^+(k) \quad \text{при} \quad k \in T^3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Определим функции

$$\alpha(\mu; k) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu_0 \in (0; \mu^0(k)], \\ 1 & \text{при} \quad \mu_0 \in (\mu^0(k); \infty), \end{cases}$$

$$\beta_i(\mu; k) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mu_i \in (0, \mu_i^-(k)], \\ 1 & \text{при} \quad \mu_i \in (\mu_i^-(k), \mu_i^+(k)], \\ 2 & \text{при} \quad \mu_i \in (\mu_i^+(k), \infty) \end{cases}$$

для всех $i = 1, 2, 3$.

Теорема 1. *Пусть $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \in R_+^4$. Тогда оператор $h(k)$ имеет с учетом кратности ровно*

$$\alpha(\mu; k) + \sum_{i=1}^{3} \beta_i(\mu; k)$$

собственных значений, лежащих левее существенного спектра.

Заметим, что в случае $k = 0$ теорема 1 формулеруется более компактно.

Теорема 2. *Для любого $\mu \in R_+^4$, $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ оператор $h(\mathbf{0})$ имеет с учетом кратности ровно*

$$\alpha(\mu, \mathbf{0}) + \sum_{i=1}^{3} \theta(i)$$

собственных значений, лежащих левее существенного спектра, где

$$\alpha(\mu,\mathbf{0})=\begin{cases}0 & \text{при} \quad \mu_0\in(0,\mu^0(\mathbf{0})],\\ 1 & \text{при} \quad \mu_0\in(\mu^0(\mathbf{0}),\infty),\end{cases}$$

$$\theta(i)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad \mu_i\in(0,\mu_i^c(\mathbf{0})],\\ 1 & \text{при} \quad \mu_i\in(\mu_i^c(\mathbf{0}),\mu_i^s(\mathbf{0})],\\ 2 & \text{при} \quad \mu_i\in(\mu_i^s(\mathbf{0}),\infty).\end{cases}$$

Литература

1. *Рид М., Саймон Б.,* Методы современной математической физики. М.: Мир.1982, **4**, Анализ операторов.

2. *М.Э.Муминов, А. М. Хуррамов,* Спектральные свойства двухчастичного гамильтониана на решетке. Теор. Мат. Физика, 2013, Т. 177, No.3, стр. 480-493.

Описание смешанных дробных интегралов Адамара и типа Адамара от функций в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой

[1] **Яхшибоев М.У.,** [2] **Уралов Ш.**

[1] *Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: m.yakhshiboev@gmail.com

[2] *Самаркандский филиал Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразмий, Самарканд, Узбекистан,*

Известно, что дробное интегродифференцирование Римана(1847)-Лиувилля(1832) формально является дробной степенью $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}$, $-\infty<\alpha<\infty$ и инвариантно относительно сдвига [1]. Ж.Адамар [2] предложил конструкцию дробного интегродифференцирования, являющуюся дробной степенью $\left(x\frac{d}{dx}\right)^{\alpha}$, $-\infty<\alpha<\infty$ (1892) приспособленную к полуоси и инвариантную относительно растяжения. Одномерное дробное интегродифференцирование Адамара и типа Адамара изучены многими авторами ([3]-[6]). Ряд свойств дробного интегрирования по Адамару можно найти в книге [1].

Рассмотрение ведется в рамках пространств со смешанной нормой

$$\mathfrak{L}_{\overline{p},\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}_+^n,\frac{dx}{x}\right)=\left\{f:\|f;\ \mathfrak{L}_{\overline{p},\overline{\gamma}}\|=\Big\{\int\limits_0^\infty[\ldots(\int\limits_0^\infty|f\left(x\right)|^{p_1}x_1^{-\gamma_1}\frac{dx_1}{x_1})^{\frac{p_2}{p_1}}\ldots]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}}x_n^{-\gamma_n}\frac{dx_n}{x_n}\Big\}^{\frac{1}{p_n}}<\infty\right\},$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dx_1}{x_1}\cdots\frac{dx_n}{x_n},$$

$$C_{\overline{\gamma}}\left(\mathbb{R}_+^n\right)=\left\{f:\|f;\ C_{\overline{\gamma}}\|=\max_{x\in\mathbb{R}_+^n}\left|x^{-\overline{\gamma}}f\left(x\right)\right|<\infty,\ \lim_{|x|\to0}x^{-\overline{\gamma}}f\left(x\right)=\lim_{|x|\to\infty}x^{-\overline{\gamma}}f\left(x\right)\right\},$$

$\gamma_i\geq0$, $i=\overline{1,n}$.

Введем смешанная конечную разность функции f векторного порядка $l=(l_1,l_2\ldots,l_n)$, $l_k\in\mathbb{N}$, с мультипликативным векторным шагом $t\in\mathbb{R}_+^n$:

$$(\tilde{\Delta}_t^l f)\left(x\right)=\tilde{\Delta}_{t_1}^{l_1}[\tilde{\Delta}_{t_2}^{l_2}\ldots(\tilde{\Delta}_{t_n}^{l_n}f)]\left(x\right)=\sum_{0\leq|k|\leq l}(-1)^{|k|}\binom{l}{k}f\left(x\circ t^k\right),$$

здесь $x\circ t^k=\left(x_i\cdot t_1^{k_1},\ldots,x_n\cdot t_n^{k_n}\right)$, $\binom{l}{k}=\prod\limits_{i=1}^n\binom{l_i}{k_i}$, $\binom{l_i}{k_i}$ – биномиальные коэффициенты, $k-$ мультииндекс.

Мы рассматриваем дробное интегродифференцирование Адамара и типа Адамара функций многих переменных пространствах Лебега со смешанной нормой. В данной работе посвящена интегральным представлениям усеченных смешанных дробных производных Маршо-Адамара и типа Маршо-Адамара в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой. Доказанные теоремы обращения и описания смешанных дробных интегралов Адамара и типа Адамара от функций в весовых пространствах Лебега со смешанной нормой.

Для функции $\varphi(x)$, заданной во всем октанте $\mathbb{R}^n_+$, интегралы

$$(J^{\alpha}_{+\ldots+,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_0^{x_1} \cdots \int\limits_0^{x_n} \varphi(t) \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \left(\frac{t_i}{x_i}\right)^{\mu_i} \left(\ln \frac{x_i}{t_i}\right)^{\alpha_i - 1} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n},$$

$$(J^{\alpha}_{-\ldots-,\mu}\varphi)(x) = \int\limits_{x_1}^{\infty} \cdots \int\limits_{x_n}^{\infty} \varphi(t) \prod_{i=1}^n \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \left(\frac{x_i}{t_i}\right)^{\mu_i} \left(\ln \frac{t_i}{x_i}\right)^{\alpha_i - 1} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n}$$

назовем смешанными интегралами дробного порядка α $(\alpha_i > 0,\ i = \overline{1,n})$ типа Адамара (соответственно левосторонними и правосторонними).

Для функции $f(x)$, заданной в октанте $\mathbb{R}^n_+$, выражение

$$\left(D^{\alpha}_{\pm\ldots\pm,1-\rho} f\right)(x) =$$

$$= \frac{1}{\prod_{k=1}^n ae(\alpha_k, l_k)} \int\limits_0^{\rho_1} \cdots \int\limits_0^{\rho_n} \prod_{k=1}^n \left(\ln \frac{1}{t_k}\right)^{-1-\alpha_k} \left(\tilde{\Delta}^l_{t^{\pm 1}} f\right)(x) \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_n}{t_n}$$

назовем усеченной смешанной дробной приозводной Маршо-Адамара порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i > 0,\ i = \overline{1,n}$.

Теорема 1. Пусть компоненты $\gamma_i,\ \alpha_i,\ p_i$ векторов $\overline{\gamma},\ \alpha,\ \overline{p}$ удовлетворяют одному из условий:

1) $\gamma_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $1 \le p_i < \infty$, $i = 1, ...n$;

2) $\gamma_i = 0$, $0 < \alpha_i < 1$, $1 < p_i < \frac{1}{\alpha_i}$, $i = 1, ...n$.

Для того, чтобы $f(x)$ была представима смешанным дробным интегралом Адамара $f(x) = \left(J^{\alpha}_{+\cdots+}\varphi\right)(x)$, где $\varphi \in \mathfrak{L}_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, необходимо и достаточно, чтобы $f \in \mathfrak{L}_{\overline{r},\overline{\lambda}}$, где

$$r_i = \frac{p_i}{\frac{p_i}{1-\alpha_i p_i}}$$

в необходимой части и $1 \le r_i < \infty$, $i = 1, ...n$ в достаточной части и чтобы по норме пространства $\mathfrak{L}_{\overline{p},\overline{\gamma}}$ существовал предел $\varphi = \lim\limits_{\delta \to 0} D^{\alpha}_{+\cdots+,\delta} f$.

Теорема 2. *Для того, чтобы* $\left(\tilde{\Delta}^l_{\tau} f\right)(x)$ *была представима смешанным дробным интегралом Адамара* $\left(\tilde{\Delta}^l_{\tau} f\right)(x) = J^{\alpha,l}_{+\cdots+,\tau}\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{L}_{\overline{p},\overline{\gamma}}$, *где* $\gamma_i \ge 0,\ l > \alpha_i > 0,\ 1 \le p_i \le \infty,\ 0 < \tau_i < 1,\ i = 1, ..., n$ *необходимо и достаточно, чтобы* , $\left(\tilde{\Delta}^l_{\tau} f\right)(x) \in \mathfrak{L}_{\overline{r},\overline{\lambda}}$ $\lambda_i \ge 0$, $1 \le r_i \le \infty,\ 0 < \tau_i < 1,\ i = 1, ..., n$ *и чтобы существовал предел*

$$\varphi = \lim_{\delta \to 0} D^{\alpha}_{+\cdots+,\delta} f,$$

где предел вычисляется по норме пространства $\mathfrak{L}_{\overline{p},\overline{\gamma}}$.

Литература

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск.: Наука и техника, 1987. — 688 с.

2. *Hadamard J.* Essai sur l'etude des functions données par leur développment de Taylor// J. Math. Pures et Appl. — *8*, No 4. — 1892. — P. 101–186

3. *Butzer P. L.,Kilbas A. A.and Trujillo J. J.,* Fractional calculus in the Mellin setting and Hadamard-type fractional integrals. J. Math. Anal. Appl.., 269, no. 1. 2002. P. 1–27.

4. *Butzer P. L.,Kilbas A. A.and Trujillo J. J.,* Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property. J. Math. Anal. Appl.. 269, no. 2. 2002. P. 387–400.

5. *Butzer P. L.,Kilbas A. A.and Trujillo J. J.,* Mellin transform analysis and integration by parts for Hadamard-type fractional integrals. J. Math. Anal. Appl.. 270, no. 1. 2002. P. 1–15.

6. *Yakhshiboev M.U.,* Hadamard-type Fractional Integrals and Marchaud-Hadamard-type Fractional Derivatives in the Spaces With Power Weight // Uzbek Mathematical Journal. 2019. No. 3. pp. 155-174.

SECTION II. DIFFERENTIAL EQUATIONS AND MATHEMATICAL PHYSICS

On solvability of a nonlocal boundary value problem by the parametrization method

Abdikalikova G. A.

K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan,

e-mail: agalliya@mail.ru

The nonlocal boundary value problem for the system of partial differential equations

$$D[\frac{\partial}{\partial x}u] = A(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + P(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + S(x,t)u + f(x,t), \quad u \in R^n, \tag{1}$$

$$B(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,0) + C(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x+T,T) = d(x), x \in [0,\omega], \tag{2}$$

$$u(t,t) = \Psi(t), t \in [0,T] \tag{3}$$

is considered in $\overline{\Omega} = \{(x,t) : t \le x \le t+\omega, 0 \le t \le T\}, T > 0, \omega > 0$.

Here $u(x,t) = col(u_1(x,t), u_2(x,t), ..., u_n(x,t))$ is unknown function; $D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum\limits_{k=1}^{n} \Lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k}$, constant $(n \times n)$ matrix Λ_k; $(n \times n)$ are matrices $A(x,t), P(x,t), S(x,t), n$ is vector-function $f(x,t), (n \times n)$ are matrices $B(x), C(x), n$ is vector-function $d(x)$ and is function $\Psi(t)$ continuous on $\overline{\Omega}, [0,\omega], [0,T]$ accordingly.

Let $C(\overline{\Omega}, R^n)$ be a space of functions $u : \overline{\Omega} \to R^n$, are continuous on $\overline{\Omega}$ with norm $\|u\|_0 = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \|u(x,t)\|$; $\|A\| = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \|A(x,t)\| = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(x,t)|$, $\|d\|_1 = \max\limits_{x\in[0,\omega]} \|d(x)\|$, $\|\Psi\|_2 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|\Psi(t)\|$.

In the present work are investigated a questions of well-posed solvability to wide extent of the nonlocal boundary value problem $(1) - (3)$.

One of the constructive methods for investigating problems for the differential equations is the parameterization method [1]. Parameterization method developed for solving boundary value problems of ordinary differential equations. Boundary value problems for systems of hyperbolic equations with mixed derivative are investigated and solved by the method introduction of functional parameters [2].

Used the work's idea [1]-[3] introduce new unknown functions $v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t), w(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ and investigation problem is reduced to the equivalent problem for the system of hyperbolic first-order equations with identical main part on Courant.

We reduce the nonlocal problem for a system of partial differential equations of the first order with identical main part to a family of ordinary differential equations on the $\overline{H} = \{(\xi,\tau) : 0 \le \xi \le \omega, 0 \le \tau \le T\}, T > 0, \omega > 0$:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = \tilde{A}(\xi,\tau)\tilde{v} + \tilde{P}(\xi,\tau)\tilde{w}(\xi,\tau) + \tilde{S}(\xi,\tau)\tilde{u}(\xi,\tau) + \tilde{f}(\xi,\tau), \quad \tau \in [0,T], \tag{4}$$

$$\tilde{B}(\xi)\tilde{v}(\xi,0) + \tilde{C}(\xi)\tilde{v}(\xi,T) = \tilde{d}(\xi), \quad \xi \in [0,\omega], \tag{5}$$

$$\tilde{u}(\xi,\tau) = \Psi(\tau) + \int_{\tau}^{\xi+\tau} \tilde{v}(\zeta,\tau)d\zeta, \quad \tau \in [0,T], \tag{6}$$

$$\tilde{w}(\xi,\tau) = \dot{\Psi}(\tau) + \int_{\tau}^{\xi+\tau} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau}(\zeta,\tau)d\zeta, \quad \tau \in [0,T]. \tag{7}$$

By fixed $\tilde{u}(\xi,\tau)$ and $\tilde{w}(\xi,\tau), \xi \in [0,\omega]$ the problem $(4) - (5)$ will be family of two points problem for ordinary differential equations

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau} = \tilde{A}(\xi,\tau)\tilde{v} + \tilde{G}(\xi,\tau), \quad \tau \in [0,T] \tag{8}$$

with condition (5).

Sufficient conditions are obtained for the unique and well-posed solvability of the problem in the terms of invertibility of the matrix, and boundary condition.

In the work an algorithm is offered for finding a solution to the problem considered.

The existence of a solution in the wide sense according to Friedrichs is established.

Theorem. *Let be boundary value problem* $(8),(5)$ *for the differential equations of the well-posed solvability. Then following approximate* $(\tilde{v}^{(k)}(\xi,\tau),\tilde{u}^{(k)}(\xi,\tau),\tilde{w}^{(k)}(\xi,\tau))$ *converges to the unique solution of the problem* $(4)-(7)$ *and nonlocal boundary value problem* $(1)-(3)$ *there is well-posed solvability in the wide extent.*

References

1. *Dzhumabaev D.S.* Criteria for the unique solvability of a linear boundary value problem for an ordinary differential equation, U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 29, No 1, 1989, pp. 34-46.
2. *Asanova A.T. and Dzhumabaev D.S.* Well-posed solvability of nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations, Differential Equations, Vol. 41, No 3, 2005, pp.352-363.
3. *Abdikalikova G.A.* On solvability of one the nonlocal boundary value problem, Mathematical journal, Vol.5, No 3(17), 2005, pp.5-10.

Bound states of the 2+1 Fermionic Trimer with strong Contact Interactions

[1,2]**Abdullaev J.I.**, [1]**Toshturdiev A.M.**

[1]*Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: jabdullaev@mail.ru

[2]*V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Samarkand Branch, Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: atoshturdiyev@mail.ru

The existence of the bound states of the three particle systems has been studied in many works [1-2]. Three particle quantum system in dimension three composed of two identical fermions (of mass one and another particle of mass m) with two-body point interaction potentials was considered in [1]. The existence of at least one eigenvalues of the three particle discrete Schrödinger operator $H_\mu(\mathbf{K})$, (μ is arbitrary) for dimensions $d=1,2$ is shown in [3].

In this work, we consider three quantum particles, two fermions with mass 1 and another particle with mass $m=1/\gamma>0$ with zero range pair potential $\mu>0$ on one dimensional lattice $\mathbb{Z}$. The energy operator $\hat{H}_\mu$ corresponding to the three-particle system is defined as a self-adjoint operator in the Hilbert space $\ell_2^{as}(\mathbb{Z}^3)$. It assume that the fermions interact with a particle of a different nature. It is known that [4] the fermions do not have contact interaction.

In the momentum representation the total three-body Hamiltonian appears to be decomposable [3],

$$H_\mu=\int_{\mathbb{T}}\oplus H_\mu(K)dK.$$

The fiber Hamiltonian $H_\mu(K)=H_0(K)-\mu V$ depends parametrically on the *total quasimomentum* $K\in\mathbb{T}\equiv\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. It is the sum of a free part $H_0(K)$ and an interaction term $-\mu V$, both bounded and the dependence on K of the free part is continuous. Eigenfunctions of $H_\mu(K)$ are interpreted as the bound states of the Hamiltonian H_μ and the corresponding eigenvalues, as the bound state energy. The main results of this paper are given for sufficiently large values $\mu>0$ the energy of the interaction of two particles (fermion and another particle), that is, for the case when two-particle subsystems have bound states with negative energy.

Let $\mathbb{T}$ be a one dimensional torus, $L_2^{as}(\mathbb{T}^3)\subset L_2(\mathbb{T}^3)$ be the Hilbert space of square-integrable functions, defined on $\mathbb{T}$ and antisymmetric with respect to the first two coordinates. In the momentum representation, the two-and three-particle Hamiltonians act accordingly in the Hilbert spaces $L_2(\mathbb{T}^2)$ and $L_2^{as}(\mathbb{T}^3)$. The study of spectra of the operators H_μ and h_μ is reduced to the study of the spectra of families of the operators $H_\mu(K), K \in \mathbb{T}$, and $h_\mu(k), k \in \mathbb{T}$ respectively [4].

The corresponding three-particle Schrödinger operator

$$H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2)$$

acts in $L_2^{as}(\mathbb{T}^2)$, where

$$(H_0(K)f)(p,q) = E_K(p,q)f(p,q), \quad E_K(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \gamma\varepsilon(K-p-q), \quad \varepsilon(p) = 1 - \cos p$$

and

$$(V_1 f)(p,q) = \int_{\mathbb{T}} f(p,s)ds, \quad (V_2 f)(p,q) = \int_{\mathbb{T}} f(s,q)ds.$$

Two-particle discrete Schrödinger operator

$$(h_\mu(k)f)(p) = \mathcal{E}_k(p)f(p) - \mu \int_{\mathbb{T}} f(s)ds,$$

acts in $L_2(\mathbb{T})$, where $\mathcal{E}_k(p) = \varepsilon(p) + \gamma\varepsilon(k-p)$.

Theorem 1. *For any $\gamma > 0$, $k \in \mathbb{T}$ and $\mu > 0$ the operator $h_\mu(k)$ has unique simple eigenvalue*

$$z_\mu(k) = 1 + \gamma - \sqrt{1 + 2\gamma\cos k + \gamma^2 + \mu^2}$$

below the essential spectrum.

The eigenvalue $z_\mu(k)$ is defined as the zero of the Fredholm determinant

$$\Delta(k,z) = 1 - \mu \int_{\mathbb{T}} \frac{dq}{\mathcal{E}_k(q) - z} = 1 - \frac{\mu}{\sqrt{(1+\gamma-z)^2 - (1+\gamma^2+2\gamma\cos k)}}$$

The essential spectrum of the operator $H_\mu(K)$ coincides [4] with the union of the range of the functions $\Lambda_{\mu,K}(p) := z_\mu(K-p) + \varepsilon(p)$ and $E_K(p,q)$. The intervals $Im\Lambda_{\mu,K} = [\Lambda_{min}(\mu,K), \Lambda_{max}(\mu,K)]$ and $ImE_K = [E_{min}(K), E_{max}(K)]$ are called "two particle branch" and "three particle branch" of the essential spectrum of the operator $H_\mu(K)$, respectively. The two-particle branch of the essential spectrum $H_\mu(K)$ tends to move $-\infty$ as the parameter μ increases, while the three-particle branch does not depend on μ.

Now we find an equivalent equation for the eigenfunctions of the three-particle operator $H_\mu(K)$.

Let $z < \Lambda_{min}(\mu,K)$ and define a self-adjoint operator $A_\mu(K,z)$ as

$$(A_\mu(K,z)\psi)(p) = \frac{-\mu}{\sqrt{\Delta(K-p, z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{\psi(s)ds}{(E_K(p,s)-z)\sqrt{\Delta(K-s, z-\varepsilon(s))}},$$

which is given in the subspace

$$D(A_\mu(K,z)) = \left\{ \psi \in L_2(\mathbb{T}) : \quad \int_{\mathbb{T}} \frac{\psi(s)ds}{\sqrt{\Delta(K-s, z-\varepsilon(s))}} = 0 \right\}.$$

Note, that for $z < \Lambda_{min}(\mu,K)$ the function $\Delta(K-s, z-\varepsilon(s))$ is positive for all $K, s \in \mathbb{T}$.

Lemma 1. *A number $z < \Lambda_{min}(\mu,K)$ is an eigenvalue of the operator $H_\mu(K)$ iff 1 is eigenvalue of $A_\mu(K,z)$.*

For a strong interaction μ, we obtain the heading part of the operator $A_\mu(K,z)$ by expanding the function $\dfrac{1}{E_K(p,s)-z}$ into a series.

$$(A_\mu^h(K,z)f)(p) = \frac{-\mu\,(2+\gamma-z)^{-2}}{\sqrt{\Delta(K-p, z-\varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \frac{[2+\gamma-z+\cos p+\cos q+\gamma\cos(K-p-q)]\,f(s)ds}{\sqrt{\Delta(K-s, z-\varepsilon(s))}}.$$

The residual part of the operator $A_\mu(K,z)$ for the norm of the operator $A^r_\mu(K,z)$ the following approximation is appropriate.

$$\|A^r_\mu(K,z)\| \le \frac{C_\gamma}{\mu}. \tag{1}$$

Here C_γ is a positive number that depends only on the parameter γ. The (1) inequality holds for all $K \in \mathbb{T}$ and $z \le \Lambda_{min}(\mu,K)$.

Lemma 2. *The number of eigenvalues of the operator $H_\mu(K)$ less than z is equal to the number of eigenvalues of the operator $A_\mu(K,z)$ greater than 1.*

According to Lemma 2, the study of eigenvalues of the operator $H_\mu(K)$ is reduced to the problem of studying the eigenvalues of the operator $A_\mu(K,z)$ greater than 1. Therefore, we introduce the projection operator Q onto the space $L_2(\mathbb{T})$ in $D(A_\mu(K,z))$. This operator is defined as follows

$$(Q\varphi)(p) = \varphi(p) - (\varphi,\varphi_0)\varphi_0(p).$$

Let us introduce the following notation: $A^{h,Q}_\mu(K,z) := QA^h_\mu(K,z)Q$. Hence, we present next results for eigenvalues the operator $A^{h,Q}_\mu(K,z)$.

Lemma 3. *Let $\gamma > 1$ and $z < \Lambda_{min}(\mu,K)$. Then there exists $\mu_0 > 0$ such that for any $\mu > \mu_0$ and $K \in \mathbb{T}$ the operator $A^{h,Q}_\mu(K,z)$ has two different eigenvalues. One of them is always greater than 1 and other is negative.*

According to Lemma 3, we can prove the following assertion for the operator $H_\mu(K)$.

Theorem 2. *Let $\gamma > 1$. Then there exsist $\mu_0 > 0$ such that, for any $\mu > \mu_0$ and $K \in \mathbb{T}$ the operator $H_\mu(K)$ has a unique simle eigenvalue lying below the essential spectrum.*

References

1. *Becker S, Michelangeli A and Ottolini A.* Spectral Analysis of the 2+1 Fermionic Trimer with Contact Interactions. Math.Phys.Anal.Geom. 2018. 21–35.
2. *Lakaev S. N., Abdullaev J. I.* Spectral properties of the three-particle difference schrodinger operator, Functional Analysis and Its Applications. Vol 33, 1999. p 151–153.
3. *Lakaev S.N., Dell'Antonio G.F. and Khalkhuzhaev A. M.* Existence of an isolated band of a system of three particles in an optical lattice J. Phys. A: Math. Theor. Vol 49. 2016. 1693–1703.
4. *Abdullaev J.I., Khalkhuzhaev A.M.* The existence of eigenvalues of Schrödinger operator on a lattice in the gap of the essential spectrum, Journal of Physics.: Conf. Ser. Vol 2070(1). 2021. 012017. 12 p.

Faddaev type operator for a system of three fermions

[1]**Abdullaev J.I.**, [2]**Ergashova Sh.H.**
[1]*Samarkand state univercity, Samarkand, Uzbekistan*
e-mail: jabdullaev@mail.ru
[2]*Navoi state pedagogical institute, Navoi, Uzbekistan,*
e-mail: sh.ergashova@mail.ru

In this work we consider Hamiltonian H_μ for a system of three quantum particles, three fermions with mass 1, with interacting neighboring knotes potentials $\mu > 0$ on a lattice $\mathbb{Z}$. In the momentum representation the total three-body Hamiltonian appears to be decomposable (see, e.g. [1], [2])

$$H_\mu = \int_{\mathbb{T}} \oplus H_\mu(K)dK.$$

The fiber Hamiltonian $H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$ depends parametrically on the total quasimomentum $K \in \mathbb{T}$. The corresponding three-particle Schrödinger operator

$$H_\mu(K) = H_0(K) - \mu(V_1 + V_2 + V_3)$$

acts in Hilbert space

$$L_2^{as}(\mathbb{T}^2) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^2): \; f(p,q) = -f(q,p) = -f(p, K-p-q) = -f(K-p-q, q)\},$$

where

$$(H_0(K)f)(p,q) = E_K(p,q)f(p,q), \quad E_K(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \varepsilon(K-p-q), \; \varepsilon(p) = 1 - \cos p,$$

$$(V_1 f)(p,q) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \cos(q-s) f(p,s)ds,$$

$$(V_2 f)(p,q) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \cos(p-s) f(s,q)ds,$$

$$(V_3 f)(p,q) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \cos(p-s) f(s,p+q-s)ds.$$

Two-particle Schrödinger operator $h_\mu(k) = h_0(k) - \mu v$ corresponding two fermions acts in

$$L_2^o(\mathbb{T}) := \{f \in L_2(\mathbb{T}): \; f(-p) = -f(p)\}$$

as follows [3]:

$$(h_\mu(k)f)(q) = \varepsilon_k(q)f(q) - \frac{\mu}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \sin q \sin s f(s)ds,$$

where $\varepsilon_k(q) = \varepsilon(\frac{k}{2}+q) + \varepsilon(\frac{k}{2}-q) = 2 - 2\cos\frac{k}{2}\cos q$.

Theorem 1. Let $\mu > 1$. Then for all $k \in \mathbb{T}$ the operator $h_\mu(k)$ has a unique simple eigenvalue

$$z_\mu(k) = 2 - \mu - \frac{\cos^2\frac{k}{2}}{\mu}$$

lying to the left of essential spectrum.

Here $z_\mu(k)$ is zero of Fredholm determinant

$$\Delta_\mu(k,z) = 1 - \frac{\mu}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\sin^2 s ds}{2 - z - 2\cos\frac{k}{2}\cos s}$$

corresponding to the operator $h_\mu(k)$.

The essential spectrum of the operator $H_\mu(K)$ [1] coincides with the union range of functions $z_\mu(K-p) + \varepsilon(p)$ and $E_K(p,q)$.

The problem of studying the eigenvalues of the operator $H_\mu(K)$ is reduced to the problem of finding the fixed points of the compact self-adjoint operator $A(K,z)$.

The operator $A(K,z)$ is compact, acts in the Hilbert space $L_2(\mathbb{T})$ as follows:

$$(A(K,z)\psi)(p) = \frac{-2\mu}{\pi\sqrt{\Delta_\mu(K-p, z-\varepsilon(p))}}\int_{\mathbb{T}} \frac{\sin(\frac{K-p}{2} - s)\sin(\frac{K-s}{2} - p)\psi(s)ds}{(E_K(p,s) - z)\sqrt{\Delta_\mu(K-s, z-\varepsilon(s))}}.$$

Lemma 1. A number $z < \tau(\mu, K) = \min_{p\in\mathbb{T}}\{z_\mu(K-p) + \varepsilon(p)\}$ is an eigenvalue of the operator $H_\mu(K)$ if and only if 1 is eigenvalue of $A(K,z)$.

Lemma 2. The number of eigenvalues of the operator $H_\mu(K)$ less than z is equal to the number of eigenvalues of the operator $A(K,z)$ greater than 1.

When the total quasi-momentum K of the three-particle system takes on the value $K = \pi$, there are some invariant subspaces and symmetries with respect to the operator $A_\mu(K,z)$. We will study some of them.

It is known that the Hilbert space $L_2(\mathbb{T})$ can be represented as a direct sum

$$L_2(\mathbb{T}) = L_2^e(\mathbb{T}) \oplus L_2^o(\mathbb{T}),$$

where

$$L_2^e(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-p) = f(p)\}.$$

Lemma 3. The subspaces $L_2^o(\mathbb{T})$ and $L_2^e(\mathbb{T})$ are invariant under the operator $A(\pi, z)$.

We denote the restriction $A(\pi, z)$ in the subspace $L_2^o(\mathbb{T})$ by $A^o(\pi, z)$, and the restriction in the subspace $L_2^e(\mathbb{T})$ by $A^e(\pi, z)$.

We study the restriction $A^o(\pi, z)$ of the operator $A(\pi, z)$ in the space $L_2^o(\mathbb{T})$. The operator $A^o(\pi, z)$ acts in the Hilbert space $L_2^o(\mathbb{T})$ as follows:

$$(A^o(\pi, z)\psi)(p) = \frac{-\mu}{\pi\sqrt{\Delta_\mu(\pi - p, z - \varepsilon(p))}}$$

$$\int_{\mathbb{T}} \left[\frac{(3 - z - \cos p - \cos s + \cos p \cos s)[\sin \frac{p}{2} \sin \frac{s}{2} - \sin \frac{3p}{2} \sin \frac{3s}{2}]}{(E_\pi(p, s) - z)(E_\pi(-p, s) - z)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin p \sin s(\cos \frac{3p}{2} \cos \frac{3s}{2} + \cos \frac{p}{2} \cos \frac{s}{2})}{(E_\pi(p, s) - z)(E_\pi(-p, s) - z)} \right] \frac{\psi(s)ds}{\sqrt{\Delta_\mu(\pi - s, z - \varepsilon(s))}},$$

For sufficiently large $\mu > 0$, we can write the operator $A^o(\pi, z)$ as the sum of two operators. One of them has three-range, and its eigenvalues can be found exactly. We call it the leading part of the operator $A^o(\pi, z)$, and denote by $A^{(o,l)}(\pi, z)$. The norm of the second operator is estimated by $C\mu^{-1}$. We call this operator residual part of the operator $A^o(\pi, z)$ and denote by $A^{(o,r)}(\pi, z) = A^o(\pi, z) - A^{(o,l)}(\pi, z)$.

The leading part $A^{(o,l)}(\pi, z)$ of the operator $A^o(\pi, z)$ acts in the Hilbert space $L_2^o(\mathbb{T})$ as follows:

$$(A^{(o,l)}(\pi, z)\psi)(p) = \frac{\mu}{\pi(3 - z)^2\sqrt{\Delta_\mu(\pi - p, z - \varepsilon(p))}} \int_{\mathbb{T}} \left[\sin \frac{s}{2} \left[\left(z - \frac{5}{2} \right) \sin \frac{p}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{3p}{2} \right] + \right.$$

$$\left. + \sin \frac{3s}{2} \left[(3 - z) \sin \frac{3p}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{p}{2} + \sin \frac{5p}{2} \right] + \sin \frac{5s}{2} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{3p}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{5p}{2} \right) \right] \frac{\psi(s)ds}{\sqrt{\Delta_\mu(\pi - p, z - \varepsilon(p))}}.$$

Lemma 4. There exists μ_0 such that for any $\mu > \mu_0$ the operator $A^{(o,l)}(\pi, \tau(\mu, \pi))$ has three eigenvalues, two of them is negative and third eigenvalue is positive and greater than 1.

Theorem 2. There exists μ_0 such that for any $\mu > \mu_0$ the operator $H_\mu(\pi)$ has at least one eigenvalue below the essential spectrum.

References

1. *Khalkhuzhaev A.M.* The essential spectrum of the three-particle discrete operator corresponding to a system of three fermions on a lattice, Russian mathematics, 9, 2017, 76-88.
2. *Abdullaev J.I., Khalkhuzhaev A.M.* The existence of eigenvalues of Schrodinger operator on a lattice in the gap of the essential spectrum, Journal of Physics.: Conf. Ser. 2070 012017. 2021. 12 p.
3. *Abdullaev J.I., Toshturdiev A.M.* Invariant subspaces of the Schrödinger operator with a finite support potential, 43, 2021, 728-737.

Ikki fermionli sistemaga mos diskret Schrödinger operatori xos qiymatlari

[1]Abduxakimov S.X., [2]Allayorov J.K., [3]Umirzokov L.A.

[1]*Samarqand davlat universiteti (Samarqand, O'zbekiston),*
e-mail: abduxakimov93@mail.ru

[2]*Samarqand davlat universiteti (Samarqand, O'zbekiston),*
e-mail: allayorovjahongir4@gmail.com

[3]*Samarqand davlat universiteti (Samarqand, O'zbekiston),*
e-mail: umirzokovlaziz@gmail.com

Biz kubik panjara $Z^d, d \geq 1$ da qisqa masofada o'zaro tortishuvchi potentsial yordamida ta'sirlashuvchi ikkita bir xil fermionlar sistemasini qaraymiz.

Bu tezisning asosiy maqsadi panjaradagi ikkita bir xil fermionlar sistemasiga mos diskret Schrödinger operatorlari oilasi $H_\mu(k)$, $k \in T^d$ ning $\hat{\varepsilon}$ dispersion munosabat aynimagan minimumga ega bo'lgan holda xos qiymatlari mavjudligini ko'rsatishdan iborat.

Z^d panjaradagi ikki zarrachali sistemalar hamiltonianlarining spektral xossalari keyingi vaqtlarda intensiv o'rganilyapti([1-3]larga qarang).

Faraz qilaylik, Z^d bilan d-o'lchamli panjara va $T^d = (R/2\pi Z)^d = (-\pi, \pi]^d$ esa d-o'lchamli tor bo'lib, $\ell^{2,o}(Z^d)$ va $L^{2,o}(T^d)$ lar orqali kvadrati bilan jamlanuvchi va integrallanuvchi toq funksiyalarning Hilbert fazolari belgilangan bo'lsin.

Panjarada qisqa masofada o'zaro ta'sirlashuvchi ikkita bir xil fermionli sistemaga mos ikki zarrachali diskret Schrödinger operatorlari oilasi $H_\mu(k), k \in T^d$ koordinata tasvirda quyidagi

$$H_\mu(k) = H_0(k) + \mu V, k \in T^d, \mu < 0$$

formula bilan aniqlanadi.

Har bir $k \in T^d$ uchun qo'zg'almagan operator $H_0(k)$ quyidagicha aniqlanadi:

$$[H_0(k)\varphi](x) = \sum_{y \in Z^d} \mathcal{E}_k(x-y)\varphi(y), \varphi \in \ell^{2,o}(Z^d).$$

Bunda

$$\mathcal{E}_k(x) = [e^{\mathrm{i}(\frac{k}{2},x)} + e^{-\mathrm{i}(\frac{k}{2},x)}]\varepsilon(x),\ (k,x) := \sum_{n=1}^{d} k_n x_n,\ k \in T^d,\ x \in Z^d$$

va $\varepsilon \in \ell^1(Z^d)$ juft funksiya , bu yerda $\ell^1(Z^d)$- Z^d panjarada aniqlangan absolut qiymati bilan jamlanuvchi kompleks qiymatli funksiyalar Hilbert fazosi.

Ta'sir operatori $V-$ ko'paytirish operatori bo'lib, u

$$[V\varphi](x) = v(x)\varphi(x), \varphi \in \ell^{2,o}(Z^d)$$

kabi aniqlanadi. Bunda $v(\cdot)$ funksiya Z^d panjarada aniqlangan juft nomanfiy va cheksizlikda nolga intiladi.

Impuls tasvirda qaralayotgan operatorlar oilasi $\hat{H}(k), k \in T^d$ quyidagi ko'rinishga ega:

$$\hat{H}_\mu(k) = \hat{H}_0(k) + \mu\hat{V}, k \in T^d,\ \mu < 0.$$

Bunda $\hat{H}_0(k) = \mathcal{F}H_0(k)\mathcal{F}^*$, $k \in T^d$ bo'lib, u chegaralangan $\hat{\mathcal{E}}_k$ funksiyaga ko'paytirish operatori, ya'ni

$$[\hat{H}_0(k)\hat{\varphi}](q) = \hat{\mathcal{E}}_k(q)\hat{\varphi}(q), \hat{\varphi} \in L^{2,o}(T^d),$$

bunda

$$\hat{\mathcal{E}}_k(q) = \hat{\varepsilon}\left(\frac{k}{2} - q\right) + \hat{\varepsilon}\left(\frac{k}{2} + q\right)$$

va $\hat{\varepsilon}$ funksiya T^d da aniqlangan ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi haqiqiy qiymatli funksiya bo'lib, $0 \in T^d$ nuqtada aynimagan minimumga ega.

Qo'zg'alish, ya'ni ta'sir operatori $\hat{V}$ o'rama tipidagi integral operator bo'lib quyidagi formula

$$[\hat{V}\hat{\varphi}](p) = [\mathcal{F}^* V \mathcal{F}\varphi](p) = \int\limits_{T^d} \hat{v}(p-q)\hat{\varphi}(q)\eta(dq), \hat{\varphi} \in L^{2,o}(T^d),$$

orqali aniqlanadi,

$$\hat{v}(p) = \sum_{x \in Z^d} e^{\mathrm{i}(p,x)} v(x),\ p = (p_1, ..., p_d) \in T^d.$$

Bu holda Z^d panjarada aniqlangan $v(\cdot)$ funktsiya juft va nomanfiy bo'lib cheksizlikda nolga intilganligi uchun qo'zg'alish operatori V kompakt bo'ladi va shuning uchun Weyl teoremasiga ko'ra $H_\mu(k)$, $k \in T^d$ operatorning $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$ muhim spektri $H_0(k)$ operatorning $\sigma(H_0(k))$, $k \in T^d$ spektri bilan ustma-ust tushadi. Ravshanki,

$$\sigma_{ess}(H_\mu(k)) = \sigma_{ess}(\hat{H}_\mu(k)) = [\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k), \hat{\mathcal{E}}_{\max}(k)]$$

bunda,

$$\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k) := \min_{q \in T^d} \hat{\mathcal{E}}_k(q), \quad \hat{\mathcal{E}}_{\max}(k) := \max_{q \in T^d} \hat{\mathcal{E}}_k(q).$$

Min-max prinsipi va V operatorning musbatligidan $H_\mu(k), k \in T^d$ operatorning faqat muhim spektr $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$ ning chapida va faqat chekli karrali xos qiymatlarga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Bog'liqlik o'zgarmasi ishorasi o'zgarganda, ya'ni $\mu > 0$ bo'lganda R^d dagi uzliksiz Schrödinger operatorlari kabi diskret Schrödinger operatorlari muhim spektrdan o'ngda yotuvchi xos qiymatlarga ega bo'ladi

Eslatib o'tamizki, itarishuvchi zarrachalar sistemasi bo'lgan $\mu > 0$ bo'lganda natijalar biz qarayotgan holdagi kabi o'rganiladi.

Theorem. *Faraz qilaylik $d \geq 1$ va ε dispersion funksiya shartli manfiy aniqlangan hamda $z = \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)$, $H_\mu(0)$ operator muhim spektrining singulyar nuqtasi, ya'ni $H_\mu(0) \geq \hat{\mathcal{E}}_{\min}(0)I$ tengsizlik bajarilsin. U holda ixtiyoriy $k \in T^d \backslash 0$ uchun $H_\mu(k), k \in T^d$ operator $\hat{\mathcal{E}}_{\min}(k)$ dan quyida xos qiymatga ega.*

References

1. *S. Albeverio, S. N. Lakaev, K. A. Makarov, Z. I. Muminov.* The Threshold Effects for the Two-particle Hamiltonians on Lattices, Comm.Math.Phys., **262**, 2006, 91–115.

2. *S.N. Lakaev, S.Kh. Abdukhakimov.* Threshold effects in a two-fermion system on an optical lattice, Theoret. and Math. Phys., **203**, 2020, 251–268.

3. *S. Lakaev, Sh. Kholmatov, Sh. Khamidov.* Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: Exactly solvable case, J. Phys. A: Math. Theor. **54**, 2021, 245201.

The number of Eigenvalues of the Three-Particle Schrödinger operator on a Two-Dimensional Lattice

[1]Aliev N., [1,2]Muminov Z.

[1]*Tashkent State University of Economics, Islam Karimov street, 49, 100066, Tashkent, Uzbekistan*
e-mail: nialiyev@mail.ru

[2]*Romanovskiy Institute of Mathematics, 100174, University street 4, Tashkent, Uzbekistan*
e-mail: zimuminov@gmail.com

In [1,2] a system of three arbitrary particles on a one-dimensional lattice is considered and it is showed that the discrete spectrum of the Schrödinger operator is infinite, if the masses of two particles in a three-particle system are infinite.

We consider Schrödinger operator corresponding to the Hamiltonian of a system of three arbitrary particles on the two-dimensional lattice, where the particles interact pairwise via zero-range indefinite-sign potential. We prove that the discrete spectrum of the Schrödinger operator is infinite if the masses of two particles in a three-particle system are infinite.

The operator $H(K)$, $K \in \mathbb{T}^2$ has form

$$H(K) = H_0(K) - V_1 - V_2 - V_3.$$

Here, the operators $H_0(K)$ and V_α are defined on the Hilbert space $L_2((\mathbb{T}^2)^2)$ by

$$(H_0(K)f)(p,q) = E(K;p,q)f(p,q), \quad f \in L_2((\mathbb{T}^2)^2),$$

with

$$E(K;p,q) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_2(q) + \varepsilon_3(K-p-q).$$

and

$$(V_1 f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2} f(p,s)ds, \quad (V_2 f)(q) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2} f(s,q)ds,$$

$$(V_3 f)(p,q) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2} f(s, x+y-s)ds, \quad f \in L_2((\mathbb{T}^2)^2).$$

The real-valued continuous function

$$\varepsilon_\alpha(p) = \frac{1}{m_\alpha}\varepsilon(p), \quad \varepsilon(p) = 2 - \cos p^{(1)} - \cos p^{(2)}, \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}) \in \mathbb{T}^2,$$

is called the *dispersion relation of the α-th normal mode* associated with the free particle $\alpha\,(\alpha = 1,2,3)$.

Under these conditions the operator $H(K)$ is a bounded self-adjoint operator in its domain.

If we assume $m_1 = \infty$, $m_2 = \infty$, $m_3 < \infty$, then

$$E(K;p,q) = \varepsilon_3(K-p-q), \quad E_{\min}(K) = \min_{p,q\in\mathbb{T}^2} \varepsilon_3(K-p-q) = 0$$

and

$$E_{\max}(K) = \max_{p,q\in\mathbb{T}^2} \varepsilon_3(K-p-q) = \frac{4}{m_3}.$$

Set

$$\Delta_\alpha(z) = 1 - \frac{\mu_\alpha}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{T}^2} \frac{ds}{\varepsilon_3(s) - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \left[0, \frac{4}{m_3}\right], \quad \alpha = 1,2.$$

The following assertion is proven by elementary methods.

Lemma 1. *a) For all $\mu_\alpha > 0$, $\alpha = 1,2$ there exists a unique simple zero $z = z_\alpha(\mu_\alpha)$ of $\Delta_\alpha(z)$ in the interval $(-\infty, 0)$, i.e. $\Delta_\alpha(z_\alpha(\mu_\alpha)) = 0$.*

b) For all $\mu_\alpha < 0$, $\alpha = 1,2$ there exists a unique simple zero $z = z_\alpha(\mu_\alpha)$ of $\Delta_\alpha(z)$ in the interval $(\frac{4}{m_3}, +\infty)$, i.e. $\Delta_\alpha(z_\alpha(\mu_\alpha)) = 0$.

The following lemma describes the structure of the essential spectrum of the operator $H(K)$.

Lemma 2. *Assume $m_1 = \infty$, $m_2 = \infty$, $m_3 < \infty$.*

For the essential spectrum of the main operator $H(K)$

$$\sigma_{ess}(H(K)) = \left[0, \frac{4}{m_3}\right] \cup \left(\{z_1(\mu_1)\} \cup \{z_2(\mu_2)\} \cup \left[-\mu_3, \frac{4}{m_3} - \mu_3\right]\right),$$

Using the method of integral equations, we show that there exist an infinite set of distinct eigenvalues and find the corresponding eigenfunctions.

Theorem 1. *Let $z_{\min} = \inf\{z_1, z_2\}$ and let $z_{\max} = \sup\{z_1, z_2\}$.*

(a) Let $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$.

Then, there exist infinite sets of eigenvalues $z_n \in (-\infty, z_{\min})$ *and* $\xi_n \in (z_{\max}, 0)$, $n \in \mathbb{Z}^2$, *of* $H(K)$ *such that*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_{\min} \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty} \xi_n = z_{\max}.$$

(b) Let $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$. *Then, there exist infinite sets of eigenvalues* $z_n \in (-\infty, z_{\min})$ *and* $\xi_n \in (z_{\max}, \infty)$, $n \in \mathbb{Z}^2$, *of* $H(K)$ *such that*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_{\min} \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty} \xi_n = z_{\max}.$$

(c) Let $\mu_1 < 0, \mu_2 < 0$. *Then, there exist infinite sets of eigenvalues* $z_n \in (\frac{4}{m_3}, z_{\min})$ *and* $\xi_n \in (z_{\max}, \infty)$, $n \in \mathbb{Z}^2$, *of* $H(K)$ *such that*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_{\min} \quad \textit{and} \quad \lim_{n\to\infty} \xi_n = z_{\max}.$$

References

1. *Muminov M.I., Aliev N.M.* O spektre trexchastichnogo operatora Shredingera na odnomernoy reshetke. *Theoret. and Math. Phys.* **2012**, *171:3* , 754–768.

2. *Aliev N.M., Muminov M.E.* Spektre gamil'toniana trex chastis na odnomernoy reshetke. *Siberian Adv. Math.* **2015**, *17 (3)*, 3–22.

Solve Integro-differential equations using Scilab

Alikhodjaev B.

National University of Uzbekistan, 100174, University street 4, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail: baxil7@gmail.com

How to solve following differential equation

$$U_{tt} - U_{ttxx} - U_{ttyy} + \vartheta^2 U_{xx} + \vartheta^2 U_{yy} = 0, \tag{1}$$

where ϑ is positive parameter. Equation (1) is defined in

$$U(t,x,y) \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega) \cap C^{2+2+0}_{t,x,y}(\Omega) \cap C^{2+0+2}_{t,x,y}(\Omega) \tag{2}$$

with following boundarian conditions

$$U\left(0,x,y\right) = U\left(\beta,x,y\right), \quad 0 \le x,y \le l, \tag{3}$$

$$\int_0^\beta U\left(t,x,y\right)dt = \varphi\left(x,y\right), \quad 0 \le x,y \le l, \tag{4}$$

$$U\left(t,0,y\right) = U\left(t,l,y\right) = U\left(t,x,0\right) = U\left(t,x,l\right) = 0 \tag{5}$$

where $\varphi\left(x,y\right)$ - given a fairly smooth function and
$\varphi\left(0,y\right) = \varphi\left(l,y\right) = \varphi\left(x,0\right) = \varphi\left(x,l\right)$ =0, in $\Omega = \{(t,x,y) \mid \ 0 \le t \le \beta, \quad 0 \le x,y \le l\}$
Citation for equation (1) boundarian conditions (3), (4) and (5) used in reference as [1]. For developing of solution of equation (1) is used reference as [2].

References

1. *Yuldashev Tursun Kamaldinovich.* Direct and inverse problems for differential and integro-differential equations, Dissertation abstract of Doctoral Dissertation (DSc) on physical and mathematical sciences, 2021, 68pages.

2. *Authors name.* http://books.altlinux.ru/scilab , 2008, 269 pages.

Inverse problem of determining an order of the Riemann-Liouville time-fractional derivative

[1]**Alimov Sh.O.**, [2]**Ashurov R.R.**

[1,2]*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek and Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science,*

e-mail: sh_ alimov@mail.ru

e-mail: ashurovr@gmail.com

In this work, we are concerned with inversion for order in the subdiffusion equation with the Riemann-Liouville time-fractional derivative.

Let H be a separable Hilbert space with the scalar product $(\cdot,\cdot)$ and the norm $||\cdot||$ and $A : H \to H$ be an arbitrary positive selfadjoint operator in H. Suppose that A has a complete in H system of orthonormal eigenfunctions $\{v_k\}$ and a countable set of nonnegative eigenvalues λ_k. It is convenient to assume that the eigenvalues do not decrease as their number increases, i.e. $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots$.

Using the definitions of a strong integral and a strong derivative, fractional analogues of integrals and derivatives can be determined for vector-valued functions (or simply functions) $h : \mathbb{R}_+ \to H$, while the well-known formulae and properties are preserved (see, for example, [1]). Recall that the fractional integration of order $\rho < 0$ of the function $h(t)$ defined on $[0,\infty)$ has the form

$$\partial_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(-\rho)} \int\limits_0^t \frac{h(\xi)}{(t-\xi)^{\rho+1}} d\xi, \quad t > 0,$$

provided the right-hand side exists. Here $\Gamma(\rho)$ is Euler's gamma function. Using this definition one can define the Riemann - Liouville fractional derivative of order ρ, $0 < \rho < 1$, as

$$\partial_t^\rho h(t) = \frac{d}{dt} \partial_t^{\rho-1} h(t).$$

Problem: *Let $\rho \in (0,1]$ be a fixed number and let $C((a,b);H)$ stand for a set of continuous functions $u(t)$ of $t \in (a,b)$ with values in H. Consider the Cauchy type problem:*

$$\begin{cases} \partial_t^\rho u(t) + Au(t) = 0, \quad 0 < t \leq T; \\ \lim\limits_{t\to 0} \partial_t^{\rho-1} u(t) = \varphi, \end{cases} \tag{1}$$

where φ is a given vector in H. If $\rho = 1$, then the initial condition has the form $u(0) = \varphi$. This problem is called *the forward problem*.

Definition.1. *A function $u(t)$ with the properties $\partial_t^\rho u(t), Au(t) \in C((0,T];H)$ and satisfying conditions (1) is called* ***the solution*** *of the forward problem (1).*

Let us denote by $E_{\rho,\mu}(t)$ the Mittag-Leffler function of the form

$$E_{\rho,\mu}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\rho k + \mu)}.$$

We first prove the existence and uniqueness of a solution of problem (1).

Theorem.1. *For any $\varphi \in H$ problem (1) has a unique solution and this solution has the form*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\lambda_k t^\rho)(\varphi, v_k) v_k. \tag{2}$$

Obviously solution (2) depends on $\rho \in (0,1]$. Now let us consider the order of fractional derivative ρ as an unknown parameter and consider an inverse problem: can we identify uniquely this parameter ρ, if we have as an additional information the norm

$$W(t_0,\rho) = ||u(t_0)||^2 = d_0 \tag{3}$$

at a fixed time instant $t_0 > 0$?

Problem (1) together with extra condition (3) is called *the inverse problem.*

To solve this inverse problem we fix a number $\rho_0 \in (0,1)$ and consider the problem for $\rho \in [\rho_0, 1]$.

Definition.2. *A pair $\{u(t), \rho\}$ of the solution $u(t)$ to the forward problem and a parameter $\rho \in [\rho_0, 1]$, satisfying the additional condition (3) is called the solution of the inverse problem.*

Lemma *Given ρ_0 from interval $0 < \rho_0 < 1$, there exists a number $T_0 = T_0(\rho_0, \lambda_1)$, such that for all $t_0 \geq T_0$ and for arbitrary $\varphi \in H$ function $W(t_0, \rho)$ decreases monotonically with respect to $\rho \in [\rho_0, 1]$.*

The main result of the paper is the following:

Theorem.2. *Let $\varphi \in H$ and $t_0 \geq T_0$. Then the inverse problem has a unique solution $\{u(t), \rho\}$ if and only if*

$$W(t_0, 1) \leq d_0 \leq W(t_0, \rho_0).$$

References

1. *C. Lizama* Abstract linear fractional evolution equations, Handbook of fractional calculus with applications. V.2. J.A.T. Machado Ed. DeGruyter, 465- 497, 2019.

On a new general solution of integro-differential equations and its applications

[1]**Assanova A.**, [2]**Imanchiyev A.**

[1] *Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan,*

e-mail: assanova@math.kz

[2] *K.Zhubanov Aktobe regional university, Aktobe, Kazakhstan*

e-mail: imanchievae@gmail.com

On the interval $[0, T]$ consider system of linear integro-differential equations

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

where $x(t) = \text{colon}(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ is unknown vector function; the $(n \times n)$ matrix $A(t)$ and n vector function $f(t)$ are continuous on $[0, T]$; the $(n \times n)$ matrix $K(t,s)$ is continuous on $[0, T] \times [0, T]$; the B, C are constant $(n \times n)$ matrices.

Integro-differential equations often arise in applications being the mathematical models of processes in physics, biology, chemistry, economy, etc. In the monograph [1], their role in the study of hereditary processes is discussed, and a survey of the earlier works on the initial and boundary value problems for the Volterra and Fredholm integro-differential equations is presented.

The solution of problem (1), (2) is defined as a function $x(t) \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$ continuously differentiable on $(0, T)$ and satisfying the integro-differential equation (1) and the boundary condition (2).

In the present communication we discuss the results of prof. D.S. Dzhumabaev with respect to new approach for solving problem (1), (2).

In [2], a method for solving problem (1), (2) was proposed that is based on a partition of the interval $[0, T]$ and the introduction of parameters – is the parametrization method [3]. Necessary and sufficient conditions for solvability, including the unique solvability of problem (1), (2) were obtained in terms of a matrix $Q_{*,*}(h)$ constructed from the fundamental matrix of the differential part of system (1), the matrices in boundary conditions (2), and the resolvent of an auxiliary Fredholm integral equation of the second kind.

General solution is one of the basic tools to investigate and solve problems for differential and integro-differential equations. It allows to derive and analyze properties of solutions to the equations considered.

Denote by Δ_N the partition of $[0, T]$ into N parts: $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_N = T$.

In the paper [4] was introduced a new concept of general solution and created on its basis the constructive methods for solving the boundary value problems for equation (1). This new general solution is called the Δ_N general solution to linear Fredholm integro-differential equations.

A definition of Δ_N general solution to integro-differential equation (1) is introduced based on the solution to special Cauchy problem with parameters. The property of Δ_N general solution allows him to reduce the solvability of linear Fredholm integro-differential equations and boundary value problems for them to the solvability of corresponding system of algebraic equations.

The conditions for existence of classical general solution and solvability criteria for the equation are provided. Necessary and sufficient conditions for solvability of linear boundary value problems are established. Algorithms for construction of the Δ_N general solutions are obtained. This paper also was proposed approximate and numerical methods to solve the boundary value problems.

References

1. *Ya. V. Bykov.* On Some Problems in the Theory of Integro-Differential Equations, Kirgiz. Gos. Univ, Frunze, 1957 (in Russian).
2. *D.S. Dzhumabaev.* A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation, Computational Mathematics and Mathematical Physics,50(7),2010, 1150–1161.
3. *D.S. Dzhumabayev.* Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 29(1), 1989, 34-46.
4. *D.S. Dzhumabaev.* New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the BVPs, Journal of Computational and Applied Mathematics, 327(1), 2018, 79-108.

New solitary and periodic wave solutions of the loaded nonlinear three dimensional modified Zakharov-Kuznetsov equation

[1]**Babajanov B.**, [2]**Abdikarimov F.**

[1]*Doctor of Science in Mathematical Sciences, Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Urgench State University, Urgench, Uzbekistan,*
e-mail: a.murod@mail.ru

[2]*Phd student, Khorezm Mamun Academy, Khiva, Uzbekistan,*
e-mail: goodluck_0714@mail.ru

Nonlinear evolution equations(NLEE) appear in various fields of science and technology, such as fluid mechanics, plasma physics, optical fibers, biophysics, electricity, wave propagation in shallow water, high energy physics, biology, solid state physics, etc. One of the most important NPDE is the Zakharov-Kuznetsov(ZK) equation.

The ZK equation is a very attractive model equation for the study of vortices in geophysical flows. This equation appears in many areas of physics, applied mathematics and engineering. In particular, it shows up in the area of plasma physics [1, 2, 3]. The ZK equation governs the behavior of weakly nonlinear ion-acoustic waves in a plasma comprised of cold [4, 5, 6]. In 1974, Zakharov and Kuznetsov formulated model equation for model the propagation of weakly nonlinear ion-acoustic waves in plasma, which includes cold ions and hot-isothermal electrons in a medium with a uniform magnetic field amplitude [7, 8].

The nonlinear modified ZK equation,

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0,$$

represents an anisotropic two-dimensional generalization of the Korteweg–de Vries equation and can be derived in a magnetized plasma for small amplitude Alfven waves at a critical angle to the undisturbed magnetic field, and has been studied by many authors because of its importance.

It should be noted that many methods have been developed to find solitary waves and periodic waves solutions of modified nonlinear ZK equation by several authors [9, 10, 11].

In recent years, in connection with intensive research of problems optimal management of the agroecosystem, for example, the problem of long-term forecasting and regulation of the level of groundwater and soil moisture, there has been a significant increase in interest in loaded equations. Among the works devoted to loaded equations, one should especially note the works of A. Kneser [12], L. Lichtenstein [13], A. M. Nakhushev [14], and others. A complete explanation of solutions of the nonlinear loaded PDEs and their uses can be found in papers [15, 16, 17].

In this paper, we consider the following the loaded nonlinear three dimensional modified ZK equation with variable coefficients

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} + u_{xyy} + u_{xzz} + \gamma(t)u(0,0,t)u_x = 0,$$

where $u(x, y, z, t)$ is an unknown function, $x \in R$, $y \in R$, $z \in R$, $t \geq 0$, $\gamma(t)$ - is the given real continuous function.

We construct exact travelling wave solutions of the loaded nonlinear three dimensional modified ZK equation, that is the exact solutions of these equations including solitary and periodic wave solutions are obtained by (G'/G) expansion method when these equations contains variable coefficients. All solutions of this equation has been examined and three dimensional graphics of the obtained solutions have been drawn by using the Matlab software. The main advantage of the proposed functional variable method over other methods is that it provides more new exact traveling wave solutions along with additional free parameters.

After visualizing the graphs of the soliton and the periodic wave solutions by using distinct values of random parameter are demonstrated to better understand their physical features. The amplitude and velocities are controlled by parameters of various kind. These characteristics of the solutions are favorable for investigating certain nonlinear phenomena arising in physics, applied mathematics, and engineering. In particular, the soliton is a self-reinforcing wave packet maintaining its shape while propagating at a constant velocity. In the concept of mathematical physics, a soliton wave is defined as a set of self-reinforcing waves that retain their shape. It propagates at a constant amplitude and speed. The existence of periodic travelling waves usually depends on the parameter values in a mathematical equation. If there is a periodic travelling wave solution, then there is typically a family of such solutions, with different wave speeds. We conclude that the exact solutions of the loaded nonlinear three dimensional modified ZK equation have its great importance to reveal the internal mechanism of the physical phenomena.

References

1. *J. Das, Bandyopadhyay A., Das K.P.* Existence and stability of alternatives ion-acoustic solitary wave solution of the combined MKdV-KdV-ZK equation in a magnetized non thermal plasma consisting of warm adiabatic ions, Physics of Plasmas, 14(9), 2007, 1-10, https://doi.org/10.1063/1.2772615.
2. *Lin C., Zhang X.* The formally variable separation approach for the modified Zakharov-Kuznetsov equation, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 12(5), 2007, 636-642, https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2005.06.004.
3. *Mushtaq A., Shah H.A.* Nonlinear Zakharov-Kuznetsov equation for obliquely propagating two- dimensional ion-acoustic waves in a relativistic, rotating magnetized electron-positron-ion plasma, Physics of Plasmas, 12(7), 2005, 1-8, https://doi.org/10.1063/1.1946729.
4. *Lu X., Tian B., Xu T., Cai K.J., Liu W.L.* Analytical study of the nonlinear Schrodinger equation with an arbitrary linear time-dependent potential in quasi-one-dimensional Bose-Einstein condensates, Annals of Physics, 323(10), 2008, 2554-2565, https://doi.org/10.1016/j.aop.2008.04.008.

5. *Lu X., Zhu h.W., Yao Z.Z., Meng X.H., Zhang C., Zhang C.Y., Tian B.* Multisoliton solutions in terms of double Wronskian determinant for a generalized variable coefficient nonlinear Schrodinger equation from plasma physics, arterial mechanics, fluid dynamics and optical communications, Annals of Physics, 323(8), 2008, 1947-1955, https: //doi.org/10.1016/j.aop.2007.10.007.

6. *Biswas A., Zerrad E.* Solitary Wave Solution of the Zakharov-Kuznetsov Equation in Plasmas with Power Law Onolinearity, Nonlinear Analysis B, 11, 2010, 3272-3274, https: //doi.org/10.1016 /j.nonrwa. 2009.08.007.

7. *Zakharov V.E., Kuznetsov E.A.* Three-dimensional solitons, Journal of Experimental and Theoretical Physics, 29(66), 1974, 594-597.

8. *Monro S., Parkes E.J.* The derivation of a modified Zakharov-Kuznetsov equation and the stability of its solutions, Journal of Plasma Physics, 62(3), 1999, 305-317.

9. *Wazwaz A.M.* The Extended Tanh Method for the Zakharov-Kuznetsov Equation, the Modified ZK Equation and its Generalized Forms, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13, 2008, 1039-1047, https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.10.007.

10. *Tascan F., Bekir A., Koparan M.* Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations by Using the First Integral Method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14, 2009, 1810-1815, https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2008.07.009.

11. *Ali K.K., Yilmazer R., Yokus A., Bulut H.* Analytical solutions for the (3+1)-dimensional nonlinear extended quantum Zakharov–Kuznetsov equation in plasma physics, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 548, 2020, 124-327, https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124327.

12. *Kneser A.* Belastete integralgleichungen. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 37(1), 1914, 169-197. https://doi.org/10.1007/BF03014816.

13. *Lichtenstein L.* Vorlesungen uber einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro - Differential - Gleichungen nebst Anwendungen, Springer-Verlag, 1931.

14. *Nakhushev A.M.* Loaded equations and their applications, Differential Equations, 19(1), 1983, 86-94.

15. *Nakhushev A.M.* Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of ground moisture, Differential Equations, 15(1), 1979, 96-105.

16. *Baltaeva U.I.* On some boundary value problems for a third order loaded integro-differential equation with real parameters, The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science, 3(3), 2012, 3-12, https://doi.org/10.20537/vm120301.

17. *Khasanov A.B., Hoitmetov U.A.* On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions, The bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 38, 2021.

Integration of the loaded simplified modified camassa – holm equation via functional variable method

[1]Babajanov B.A., [2]Atajonov D.O., [3]Mahmudova N.O.

[1]*Doctor of Science in Mathematical Sciences, Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Urgench State University, Urgench, Uzbekistan,*
e-mail: a.murod@mail.ru

[2]*Phd student,Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Urgench State University, Urgench, Uzbekistan*
e-mail: diwa_4848@mail.ru

[3]*Master student,Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Urgench State University, Urgench, Uzbekistan*

In 1993, the Camassa-Holm (CH) equation was derived by Camassa and Holm in [1], which is for shallow water waves due to the integrable bi-Hamiltonian structure. Also, various forms of the CH equation have already been discussed in references [2],[3],[4]. Irshad et al. [5] in 2012, have firstly studied the simplified modified Camassa-Holm (SMCH) equation

$$u_t + 2\alpha u_x - u_{xxt} + \beta u^2 u_x = 0, \tag{1}$$

where $\beta > 0$, $\alpha \in R$ and $u(x,t)$ represents the fluid velocity in the x - direction. Irshad et al. [5] explored the exact travelling wave solutions of the SMCH equation using exp-function method. Najafi et al. [6] investigated the exact solutions of the SMCH equation by using He's semi-inverse method. Recently, the soliton solutions of the SMCH equation have explored with the help of using the generalized G'/G - expansion method by Alam and Akbar [7]. Ali et al. [8] have discovered the soliton solutions of the SMCH equation using the $exp(-\varphi(\xi))$ - expansion method. More recently, Lu et al. [9] have constructed solitary wave solutions of the SMCH equation by using the modified extended auxiliary equation method.

In this paper, we consider the following loaded SMCH equation

$$u_t + 2\alpha u_x - u_{xxt} + \beta u^2 u_x + \gamma(t)\, u(0,t)\, u_x = 0, \tag{2}$$

where $u(x,t)$ is an unknown function, $x \in R, t \geq 0, \alpha \in R$ and $\beta > 0$ are any constants, $\gamma(t)$ - is the given real continuous function.

We construct exact travelling wave solutions of (2), that is the exact solutions of these equations including solitary wave solutions and periodic wave solutions are obtained by the functional variable method when these equations contains variable coefficients. All solutions of the loaded SMCH equation have been examined and three dimensional graphics of the obtained solutions have been drawn by using the Matlab software. The main advantage of the proposed functional variable method over other methods is that it provides more new exact traveling wave solutions along with additional free parameters when the equation contains variable coefficients.

We have shown that this method can provide a useful way to efficiently find the exact structures of solutions to a variety of non-linear wave equations. After visualizing the graphs of the soliton solutions and the periodic wave solutions, the use of distinct values of random parameters is demonstrated to better understand their physical features. It is known that the parameters included in the solutions have a deep connection with the amplitudes and velocities. When revealing the internal mechanism of physical phenomena, it will be necessary to find an exact solution to the problem. With this in mind, we have found some exact solutions, which is important in studying the physical phenomena of the problems under consideration.

References

1. *Camassa R., Holm D.* An integrable shallow water equation with peaked solitons. Phys. Rev. Lett. 1993. Vol.71, 1661-1664.
2. *Qian T., Tang M.* Peakons and periodic cusp waves in a generalized Camassa–Holm equation., Chaos, Solitons and Fractals. 2001.
3. *Abdul-Majid W.* New compact and noncompact solutions for two variants of a modified Camassa–Holm equation., Applied Mathematics and Computation. 2005.
4. *Jianwei Sh., Wei X.* Bifurcations of smooth and non-smooth travelling wave solutions in the generalized Camassa–Holm equation., Chaos, Solitons and Fractals. 2005. vol.26. p. 1149-1162.
5. *Irshad A., Usman M., Mohyud-Din.* Exp - function method for simplified modified Camassa–Holm equation., Int. J. Mod. Math. Sci. 2022.
6. *Najafi M., Arbabi S., Najafi M.* He's semi-inverse method for Camassa–Holm equation and simplified modified Camassa–Holm equation., International Journal of Physical Research, 2013.
7. *Islam R., Arafat Y., Wang H.* Abundant closed-form wave solutions to the simplified modified Camassa-Holm equation., Journal of Ocean Engineering and Science, 2022.
8. *Nur A., Ali A.* Some new exact traveling wave solutions to the simplified MCH equation and the (1 + 1)-dimensional combined KdV–mKdV equations., Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences., 2015.
9. *Ayyaz A., Syed T.* Traveling wave solutions of generalized Zakharov–Kuznetsov–Benjamin– Bona–Mahony and simplified modified form of Camassa–Holm equation $exp(-\varphi(\xi))$ – Expansion method., Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences 2016.

Integration of the loaded Kaup–Boussinesq type system via inverse scattering method

[1]Babajanov B. , [2]Azamatov A.
[1]*Doctor of Science in Mathematical Sciences, Department of Applied Mathematics and Mathematical Physics, Urgench State University, Urgench, Uzbekistan;),*
e-mail: a.murod@mail.ru
[2]*PhD student, Urgench State University, Urgench, Uzbekistan;),*
e-mail: azizbek.shavkatovich@gmail.com

Nonlinear evolution equations are widely used as models to describe complex physical phenomena in various fields of sciences, especially in fluid mechanics, solid-state physics, plasma physics and biology. In [1], D.J. Kaup proved that the nonlinear system of equations

$$\begin{cases} \eta_\tau = \Phi_{xx} + \beta^2\Phi_{xxxx} - \varepsilon \cdot (\Phi_x\eta)_x \\ \eta = \Phi_\tau + \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \Phi_x^2, \end{cases} \tag{1}$$

is completely integrable. This system was first derived by Boussinesq in the theory of wave propagation in shallow water [2] and therefore it is called the Kaup-Boussinesq system. One of the basic physical problems for this model is to obtain their soliton solutions. In [3], multisoliton solutions were found, and the asymptotic behavior of these solutions was investigated. In papers [4, 5], real finite-zone regular solutions of the Kaup-Boussinesq system are studied. In [6], the Kaup system with self-consistent sources is studied by means of the inverse problem for the quadratic pencil of Sturm-Liouville equations.

In recent years, in connection with intensive research of problems optimal management of the agroecosystem, for example, the problem of long-term forecasting and regulation of the level of groundwater and soil moisture, there has been a significant increase in interest in loaded equations. Among the works devoted to loaded equations, one should especially note the works of A. Kneser [7], L. Lichtenstein [8], A. M. Nakhushev [9], and others. It is known that the loaded differential equations contain some of the traces of an unknown function.

In this work, we consider the following loaded Kaup-Boussinesq type system

$$\begin{cases} v_t - v_{xxx} - 6uu_{xxx} - 18u_xu_{xx} + 6vv_x + 24vuu_x + 6v_xu^2 = \mu(t)v(0,t)u(0,t)v_x, \\ u_t - u_{xxx} + 6vu_x + 6v_xu + 30u_xu^2 = \mu(t)v(0,t)u(0,t)u_x, \end{cases} \tag{2}$$

under initial condition

$$v(x,t)|_{t=0} = v_0(x), \;\; u(x,t)|_{t=0} = u_0(x), \;\; x \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

where $\mu(t)$ are given arbitrary continuous function and the functions $v_0(x)$, $u_0(x)$ satisfy the following conditions:

(i) $u_0(x)$ is absolutely continuous on each finite segment $[\alpha, \beta] \subset (-\infty, \infty)$ and the inequalities hold
$$\int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)[|v_0(x)| + |u_0'(x)|]dx < \infty$$

(ii) the operator generated by the differential expression
$$T(0,\, k) := -\frac{d^2}{dx^2} + v_0(x) + 2ku_0(x) - k^2$$
has exactly $2N$ simple eigenvalues $k_1(0), k_2(0), , ..., k_{2N}(0)$.

The main aim of this work is to derive representations for the solutions $v(x,t)$ and $u(x,t)$ of the Cauchy problem (2)–(3) within the inverse scattering method for the quadratic pencil of Sturm-Liouville operators:

$$T(t,k)y \equiv -y'' + v(x,t)y + 2ku(x,t)y - k^2y = 0, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

References

1. *Kaup D. J.* A Higher-Order Water-Wave Equation and the Method for Solving It// Progress of Theoretical Physics, 1975, vol. 54, issue 2, pp. 396-408.
2. *Boussinesq J.* Theorie de litumescence liquide appelee onde solitarie ou de translation, sepropageant dans un canal rectangulaire// Comptes Rendus Hebdomadaires des Seance de l'Academie des Sciences, 1871, 72, pp.755-759.
3. *Matveev V.B., Yavor M. I.* Solutions Presque Periodiques et a N-solitons de l'Equation Hydrodynamique Nonlineaire de Kaup// Ann.Inst. Henri Poincare, Sect., 1979, A. 31, no. 1, pp. 25-41.
4. *Smirnov A.O.* Real Finite-Gap Regular Solutions of the Kaup-Boussinesq Equation// Theor. Math. Phys. 1986, vol.66, no.1, pp.19-31.
5. *Mitropolsky Yu., Bogolyubov N. Jr., Prykarpatsky A., Samoilenko V.* Integrable dynamical system: spectral and differential-geometric aspects// Naukova Dunka, Kiev, 1987.
6. *Jaulent M., Miodek I.* Nonlinear Evolution Equation Associated with Energy-Dependent Schrodinger Potentials// Lett. Math.Phys., 1976, vol. 1, no. 3, pp. 243-250.
7. *Kneser A.* Rendicon ti del Circolo Matematico di Palermo, 1914, t. 37, p. 169?197.
8. *Lichtenstein L.* Vorlesungen uber einege Klassen nichtlinear Integral gleichungen und Integral differential gleihungen nebst, Anwendungen, Berlin: Springer, 1931.
9. *Nakhushev A.M.* Equations of Mathematical Biology, Vishaya shkola, Moscow, 1995, 302 p.

On the finite complex Toda chain with a self-consistent source

[1]**Babajanov B.**, [2]**Ruzmetov M.**

[1]*Urgench State University, Urgench, Uzbekistan*

e-mail: a.murod@mail.ru

[2]*Urgench State University, Urgench, Uzbekistan*

e-mail: rmurod2002@gmail.com

The finite Toda lattice is a nonlinear Hamiltonian system which describes the motion of N particles moving in a straight line, with "exponential interactions"[1]. A huge number of papers has been devoted to the investigation of the Toda lattices and their various generalizations, from which we indicate here only [2, 3]. With regard to their applications we refer to works [4, 5].

We consider the following system of equations

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}) + a_n \sum\limits_{i=1}^{N} \left((g_n^i)^2 - (g_{n+1}^i)^2 \right), \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) - 2 \sum\limits_{i=1}^{N} g_n^i (a_n g_{n+1}^i - a_{n-1} g_{n-1}^i), \\ a_{n-1} g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k, \;\; k = 1, ..., N, \;\; n = 0, 1, ..., N-1 \end{cases} \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$a_{-1} = a_{N-1} = 0 \ . \tag{2}$$

The system (1), (2) is considered subject to the initial conditions

$$a_n(0) = a_n^0, \;\; b_n(0) = b_n^0, \, n = 0, 1, ..., N-1 \ , \tag{3}$$

where a_n^0, b_n^0 are given complex numbers such that $a_n^0 \neq 0$ $(n = 0, 1, ..., N-2)$, $a_{N-1}^0 = 0$.

The main aim of this work is to derive representations for the solutions of the finite complex Toda lattice (1) with a self-consistent source by means of the inverse spectral problem for the complex Jacobi matrices (However, if the matrix Jacobi is complex, then its eigenvalues may be nonreal and multiple). We show that the finite Toda lattice with a self-consistent source with complex-valued initial data can be integrated by the method of inverse spectral problem.

For this goal spectral data of the complex Jacobi matrices are introduced and the inverse spectral problem with the help of the spectral data is solved. The time evolution of the spectral data for the Jacobi matrix associated with the solution of the Toda lattice is computed. Using the solution of the inverse spectral problem with respect to the time-dependent spectral data, we reconstruct the time-dependent Jacobi matrix and hence we obtain the desired solution of the finite complex Toda lattice with self-consistent source.

References

1. *Huseynov A., Guseinov G.Sh.* Solution of the finite complex Toda lattice by the method of inverse spectral problem, App. Math. and Comp. 2010, v. 219, pp. 5550-5563.
2. *Toda M.* Theory of Nonlinear Lattices. New York: Springer, 1981.
3. *Flaschka H.* The Toda lattice, I,Phys. Rev., 1974, B 9, pp. 1924-1925.
4. *Moser J.* Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, Adv. Math., 1975, vol. 16, pp. 197-220.
5. *Muto V., Scott A.C., Christiansen P. L.* Thermally generated solitons in a Toda lattice model of DNA, Physics Letters A, 1989, vol. 136, pp. 33-36.

Conditions on existence of resonances in Hamiltonian system

[1]Batkhin A.B., [2]Khaydarov Z.Kh.
[1]*Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia,*
e-mail: batkhin@gmail.ru
[2]*Samarkand State University named after Sh. Rashidov, Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: zafarxx@gmail.com

Resonances play an essential role in vibrational systems. Their presence, on the one hand, leads to complex dynamics, when the energy of vibrations is "pumped" between several degrees of freedom, whose corresponding frequencies are in resonance. On the other hand, the presence of nontrivial solutions of the resonance equation allows writing additional formal first integrals and, as a consequence, allows analyzing the stability of the equilibrium position or to integrate asymptotically the system of equations of motion reduced to the normal form.

Consider an analytic Hamiltonian system with n degrees of freedom, near its equilibrium at the origin $\mathbf{x} = \mathbf{y} = 0$. The Hamilton function $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ expands into a convergent power series

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum H_{\mathbf{pq}} \mathbf{x}^{\mathbf{p}} \mathbf{y}^{\mathbf{q}} \tag{1}$$

with constant coefficients $H_{\mathbf{pq}}$, where $\mathbf{p}, \mathbf{q} \geq 0$, $|\mathbf{p}| + |\mathbf{q}| \geq 2$, and $|\mathbf{p}| = |p_1| + \cdots + |p_n|$.

Linear approximation of the Hamiltonian phase flow is provided by system $\dot{\mathbf{z}} = B\mathbf{z}$ with matrix $B = J\,\mathrm{Hess}\,H|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}=0}$, where $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ and $\mathrm{Hess}\,H$ is the Hessian of function (1).

The eigenvalues of matrix B can be reordered is a such way that $\lambda_{j+n} = -\lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$. Denote by vector $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ the set of *basic eigenvalues* of the linear system with Hamiltonian H_2. In the Hamiltonian case the characteristic polynomial is written in the form

$$f(\mu) = \mu^n + a_1 \mu^{n-1} + a_2 \mu^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \mu + a_n. \tag{2}$$

where $\mu = \lambda^2$.

According to Theorem 12 in [1] in the case of semi-simple eigenvalues of quadratic form H_2 there exists a canonical formal transformation that reduces the Hamiltonian system to its *normal form* $\dot{\mathbf{u}} = \partial h / \partial \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{v}} = -\partial h / \partial \mathbf{u}$, given by the normalized Hamiltonian $h(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j v_j + \sum h_{\mathbf{pq}} \mathbf{u}^{\mathbf{p}} \mathbf{v}^{\mathbf{q}} \tag{3}$$

containing only the resonant terms $h_{\mathbf{pq}}\mathbf{u}^{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{q}}$ satisfying the *resonant equation*

$$\langle \mathbf{p}-\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{4}$$

Here $\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \lambda_j$ is the scalar product.

The resonant equation (4) has two kinds of solutions, which correspond to two kinds of resonant terms in the normal form (3):

1. *Secular terms* of the form $h_{\mathbf{pp}}\mathbf{u}^{\mathbf{p}}\mathbf{v}^{\mathbf{p}}$, which are always present in the Hamiltonian normal form because of the special structure of the matrix B of the linearized system.

2. *Strictly resonant terms*, which correspond to nontrivial integer solutions of the equation

$$\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0. \tag{5}$$

Following [2, Ch. I, § 3] we define *resonance multiplicity* $\mathfrak{k}$ as the number of linearly independent solutions $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ to the equation (5), and the *resonance order* $\mathfrak{q} = \min |\mathbf{p}|$ by $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{p} \neq 0, \langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle = 0$. If the solution to the equation (5) contains only two eigenvalues, then such resonance is called a *two-frequency resonance*, if more than two, then it is called a *multifrequency resonance*.

Problem. *Obtain conditions on the coefficients a_j, $j = 1, \ldots, n$, of the polynomial (3) of degrees $n = 3$ and $n = 4$, under which the multifrequency resonance of multiplicity 1 of order 3 or order 4 takes place.*

General description of procedure for getting condition on existence of multifrequency resonance is the following:

1. For certain vector $\mathbf{p}^* \in \mathbb{Z}^n$, satisfying the resonant equation (5), polynomial ideal

$$\mathcal{J} = \{\langle \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda} \rangle, \lambda_j^2 - \mu_j, j = 1, \ldots, n\}$$

is considered.

2. A Gröbner basic $\mathcal{G}$ with elimination order of variables λ_j, μ_j, $j = 1, \ldots, n$, is computed. The first polynomial of $\mathcal{G}$ is a quasi homogeneous polynomial in roots μ_j, $j = 1, \ldots, n$ of (2). It defines the condition on existence of the certain resonance.

3. To obtain the corresponding resonant condition in coefficients a_j, $j = 1, \cdots, n$, of f a Gröbner basis $\mathcal{F}$ with with elimination order of variables μ_j and a_j, $j = 1, \ldots, n$, should be computed.

The conditions on the coefficients of (2) for two-frequency resonances are effectively formulated in terms of q-discriminants [3].

Results

1. For Hamiltonian system with 3 DOF the resonance of multiplicity 1 and order 3 for $\mathbf{p}^* = (1, 1, 1)$ takes place iff

$$a_1^2 - 4a_2 = 0,$$

the resonance of multiplicity 1 and order 4 $\mathbf{p}^* = (2, 1, 1)$ takes place iff

$$16\,a_1^6 - 264\,a_1^4 a_2 + 36\,a_1^3 a_3 + 1425\,a_1^2 a_2^2 - 630\,a_1 a_2 a_3 - 2500\,a_2^3 + 9261\,a_3^2 = 0.$$

This variety allows polynomial parametrization as follows:

$$a_1 = 2v\,(37t-35)\,, a_2 = \left(456337t^2 - 7666t + 721\right) v^2, a_3 = 36\,(71t+2)\,(5-249t)^2\,v^3.$$

2. For Hamiltonian system with 4 DOF the resonance of multiplicity 1 and order 3 for $\mathbf{p}^* = (1,1,1,0)$ takes place iff

$$-4\,a_1^5a_3 + a_1^4a_2^2 + 4\,a_1^4a_4 + 34\,a_1^3a_2a_3 - 8\,a_1^2a_2^3 - 30\,a_1^2a_2a_4 - 27\,a_1^2a_3^2 - 72\,a_1a_2^2a_3 + \\ +16\,a_2^4 - 54\,a_1a_3a_4 + 72\,a_2^2a_4 + 108\,a_2a_3^2 + 81\,a_4^2 = 0.$$

The resonance of multiplicity 1 and order 4 for $\mathbf{p}^* = (1,1,1,1)$ takes place iff

$$a_1^4 - 8\,a_1^2a_2 + 16\,a_2^2 - 64\,a_4 = 0.$$

Condition on existence of resonance of multiplicity 1 and order 4 for $\mathbf{p}^* = (2,1,1,0)$ is also obtained, but the resulting polynomial turns out to be very cumbersome (it contains 153 monomials) and is not given here.

References

1. *A.D. Bruno.* Analytical form of differential equations (II).Trans. Moscow Math. Soc. 26:199–239, 1972.
2. *A.D. Bruno.* The Restricted 3–body Problem: Plane Periodic Orbits. Walter de Gruyter, Berlin, 1994.
3. *A.B. Batkhin.* Parameterization of a set determined by the generalized discriminant of a polynomial.Programming and Computer Software

Function reconstruction from integral data on broken lines with a fixed angle of opening

Begmatov A.H.

Siberian State University of Geosystems and Technologies, Novosibirsk, Russia

e-mail: akbar_begmatov@mail.ru

Problem of function recovering from its integrals over plane broken lines from given family is considered. This is a new statement of integral geometry problem on the plane [1]. The broken line of the family is based on OX axis and forms fixed angles with this axis, the interior of the broken line forms a triangle. Such a problem in integral geometry is the problem of solving a special integral equation of the first kind [2].

Uniqueness and existence of the solution of the problem are proved, and analytic representation of the solution in the class of smooth finite functions is obtained. Stability estimates for the solution in Sobolev spaces are obtained. It is shown that these estimates are not uniform across angles. The uniqueness theorem and stability estimates for the problem with perturbation are also obtained. Similar problems were considered in the papers of the author (see, for example, [3,4]).

References

1. *Begmatov Akbar Kh.* The uniqueness of a solution to a Volterra-type integral problem in the plane, Doklady Mathematics, Vol. 80, No. 1, 2009, 528-530.
2. *Begmatov A.H.* Inversion of X-ray transforms with incomplete data in n-dimensional space, 11th International Forum on Strategic Technology, IFOST 2016, Conference proceedings, Vol. 3, 99-101.
3. *Begmatov A.H., Pirimbetov A.O., Seidullaev A.K.* Reconstruction stability in some problems of X-ray and seismic tomography, 7th International Forum on Strategic Technology, IFOST 2012, Conference proceedings, Vol. II, 261-266.
4. *Begmatov A.H., Djaikov G.M.* Numerical recovery of function in a strip from given integral data on linear manifolds, 11th International Forum on Strategic Technology, IFOST 2016, Conference proceedings, Vol. 2, 478-482.

The number of eigenvalues of the model operator associated to a system of two particles on a lattice

[1]Bozorov I.N., [2]Qalandarova G.U., [3]Jalilova Z.Y.
[1]*Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan),*
e-mail: islomnb@mail.ru
[2]*Jizzakh State Pedagogical University (Jizzakh, Uzbekistan)*
e-mail: qandarovagulnoza994@gmail.com
[3]*Bukhara State University (Bukhara, Uzbekistan)*
e-mail: jalilovazarina91@gmail.com

Let $\mathbb{T}^2 \equiv (-\pi, \pi]^2$ and $L_2(\mathbb{T}^2)$ be the Hilbert space of square integrable functions on $\mathbb{T}^2$.

We consider the model operator $h_\mu(k)$, $k \in \mathbb{T}^2$, $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3_+$ associated to the Hamiltonian of a system of two arbitrary quantum particles on a two-dimensional lattice $\mathbb{Z}^2$ interacting with the pair short-range attraction potential, acting in $L_2(\mathbb{T}^2)$ as

$$h_\mu(k) = h_0(k) - \mathbf{v}_\mu,$$

where $h_0(k)$ is the multiplication operator by the function

$$\mathcal{E}_k(p) = \sum_{i=1}^{2} \Big(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} - a(k_i)\cos 2p_i\Big), \quad a(k_i) = \sqrt{\frac{1}{m_1^2} + \frac{2}{m_1 m_2}\cos 2k_i + \frac{1}{m_2^2}},$$

$m_i > 0$ is the mass of the i-th particle, $i = 1, 2$ and $\mathbf{v}_\mu$ is the integral operator

$$(\mathbf{v}_\mu f)(p) = \int\limits_{\mathbb{T}^2} \Big(\mu_0 + \mu_1 \sum_{\alpha=1}^{d} \cos(p_\alpha - s_\alpha) + \mu_2 \cos(p_1 - s_1)\cos(p_2 - s_2)\Big) f(s)ds, \quad f \in L_2(\mathbb{T}^2).$$

According to the Weyl's theorem on the stability of the essential spectrum [1] the essential spectrum $\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k))$ of the operator $h_\mu(k)$ remains unchanged under a compact perturbation $\mathbf{v}_\mu$ and coincides with the spectrum of the unperturbed operator $h_0(k)$:

$$\sigma_{\text{ess}}(h_\mu(k)) = \sigma(h_0(k)) = [m(k), M(k)],$$

where $m(k) = \min\limits_{p\in\mathbb{T}^2} \mathcal{E}_k(p)$, $M(k) = \max\limits_{p\in\mathbb{T}^2} \mathcal{E}_k(p)$.

If $\mathbf{v}_\mu \geq 0$, then

$$(h_\mu(k)f, f) \leq (h_0(k)f, f) \leq M(k)(f, f), \qquad f \in L_2(\mathbb{T}^2).$$

Therefore, the operator $h_\mu(k)$ has no eigenvalues lying to the right of the essential spectrum. Hence

$$\sigma(h_\mu(k)) \cap (M(k), \infty) = \varnothing.$$

Let the functions φ_l be defined as

$$\varphi_l(p) = \varphi_l(p_1)\cdot\varphi_l(p_2) \quad \{\varphi_l(p_1), \varphi_l(p_2)\} \in \{1, \cos p_1, \cos p_2, \sin p_1, \sin p_2\}. \tag{1}$$

These functions consist of 9 orthogonal system $\{\varphi_l\}$. The operator $\mathbf{v}_\mu$ can be expressed via the functions $\{\varphi_l(\cdot)\}$, defined in (1), in the form

$$(\mathbf{v}_\mu f)(p) = \mu_0(\tilde{\mathbf{v}}_1 f)(p) + \mu_1 \sum_{l=2}^{5} (\tilde{\mathbf{v}}_l f)(p) + \mu_2 \sum_{l=6}^{9} (\tilde{\mathbf{v}}_l f)(p), \quad (\tilde{\mathbf{v}}_l f)(p) = (\varphi_l, f)\varphi_l(p), \quad l = \overline{1,9}.$$

Below, we describe the conditions for the existence of eigenvalues of $h_\mu(k)$.

We introduce the following subspaces $\mathcal{H}_l$, $l = \overline{1,9}$, of $L_2(\mathbb{T}^2)$ as

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}^{ee}_{00},\ \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}^{ee}_{\pi 0},\ \mathcal{H}_3 = \mathcal{H}^{oe}_{\pi 0},\ \mathcal{H}_4 = \mathcal{H}^{ee}_{0\pi},$$

$$\mathcal{H}_5=\mathcal{H}^{eo}_{0\pi},\ \mathcal{H}_6=\mathcal{H}^{ee}_{\pi\pi},\ \mathcal{H}_7=\mathcal{H}^{eo}_{\pi\pi},\ \mathcal{H}_8=\mathcal{H}^{oe}_{\pi\pi},\ \mathcal{H}_9=\mathcal{H}^{oo}_{\pi\pi},$$

where o, e, 0 and π denote even, odd, π-even and π-odd notions of variable, respectively. For example $\mathcal{H}^{eo}_{0\pi}$ denotes a space of functions $f(p)$ which is even with respect to each variable p_1, odd with respect to p_2, and π-even with respect to p_1, and π-odd with respect to each variable p_2.

Remark that the space $\mathcal{H}_l$, $l=\overline{1,9}$ is invariant under the operator $h_\mu(k)$. We denote by $h_{\mu_i,l}(k)$, $i=0,1,2$ the restriction of $h_\mu(k)\big|_{\mathcal{H}_l}$ of $h_\mu(k)$ to $\mathcal{H}_l$.

Note that $\varphi_l\in\mathcal{H}_l$, $l=\overline{1,9}$. Therefore, the operator $h_{\mu_i,l}(k)$, $i\in\{0,1,2\}$, $l=\overline{1,9}$ acts in $\mathcal{H}_l$ as

$$h_{\mu_i,l}(k)=h_0(k)-\mu_i(\tilde{\mathbf{v}}_l f)(p).$$

Then we have

$$\sigma(h_\mu(k))=\bigcup\sigma\big(h_{\mu_i,l}(k)\big).$$

Next, we study the operator $h_{\mu_i,l}(k)$, $i\in\{0,1,2\}$, $l=\overline{1,9}$ at $k=\mathbf{0}$.

There exist (finite or infinite) limits:

$$\lim_{z\nearrow 0}\xi_l(z),\quad l=\overline{1,9},$$

where

$$\xi_l(z)=\int\limits_{\mathbb{T}^2}\frac{\varphi_l^2(s)ds}{\mathcal{E}_{\mathbf{0}}(s)-z},\quad \varphi_l\in\mathcal{H}_l,\quad l=\overline{1,9},\quad z\in\mathbb{C}\backslash[0,4\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}]. \tag{2}$$

Remark that the integral (2) converges as $z=0$ at $l=3,5,7,8,9$.

We set

$$\mu_1^{(l)}=\lim_{z\nearrow 0}\frac{1}{\xi_l(z)},\quad l=3,5,\quad\text{and}\quad \mu_2^{(r)}=\lim_{z\nearrow 0}\frac{1}{\xi_l(z)},\quad r=7,8,9.$$

It is easy to show that the following relations

$$\mu_1^{(3)}=\mu_1^{(5)},\quad \mu_2^{(7)}=\mu_2^{(8)}>\mu_2^{(9)}$$

hold.

We define the functions

$$\alpha_l(\mu_i)=\begin{cases}0, & \text{if}\quad \mu_i\in(0,\mu_i^{(l)}), & \varphi_l(\mathbf{0})=0,\\ 1, & \text{if}\quad \mu_i=\mu_i^{(l)}, & \varphi_l(\mathbf{0})=0,\\ 1, & \text{if}\quad \mu_i\in(\mu_i^{(l)},\infty), & \varphi_l(\mathbf{0})=0,\\ 1, & \text{if}\quad \mu_i\in(0,\infty), & \varphi_l(\mathbf{0})\neq 0,\end{cases}$$

for all $l=1,2,\ldots,3^d$.

Theorem 1. *The following statements are true:*

1. For all $\mu_i\in\mathbb{R}_+$ the operator $h_{\mu_i,l}(\mathbf{0})$, $l=\overline{1,9}$ has $\alpha_l(\mu_i)$ an eigenvalue lying to the left of the essential spectrum.

2. Let $\mu_i=\mu_i^{(l)}$ and $\varphi_l(\mathbf{0})=0$, $l\in\{1,2,\ldots,9\}$, then the number $z=0$ is an eigenvalue of the operator $h_{\mu_i,l}(\mathbf{0})$.

Theorem 2. *For all $\mu\in\mathbb{R}^3_+$ the operator $h_\mu(\mathbf{0})$ has*

$$4\leqslant\sum_{l=1}^{9}\alpha_l(\mu_i)\leqslant 9$$

eigenvalues (counting multiplicities) lying to the left of the essential spectrum.

References

1. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978.

2. *Muminov M.I., Khurramov A.M.* Spectral properties of a two-particle Hamiltonian on a lattice, Theor. Math. Phys., **177** (3), 2013, 482–496.
3. *Lakaev S.N., Bozorov I.N.* The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice, Theoret. and Math. Phys., **158** (3), 2009, 360–376.
4. *Bozorov I.N., Khurramov A.M.* On the number of eigenvalues of the lattice model operator in one-dimensional case, Lobachevskii J. Math., **43** (2), 2022, 353–365.
5. *Muminov M.I., Khurramov A.M., Bozorov I.N.* Conditions for the existence of bound states of a two-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice, Nanosystems: Phys. Chem. Math., **13** (3), 2022, 237–244.

Bifurcation Study of 3rd Predator Prey Model with Saturation Affect in the Predator Population

Buriev T. E.
Samarkand State University, Uzbekistan,
e-mail: tolibjonb@yahoo.com

The presented work is prolongation of a series of researches dedicated qualitatively numerical research of models of dynamics of three populations interacting by a principle predator prey. One of the first models of dynamics of a system the predator prey is the classic model of a Lotka-Volterra, which is the described by means of bilinear system of ordinary differential equations of a type:

$$\dot{x}_i = a_i x_i + x_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \qquad (i = 1,\ n)\,, \tag{1}$$

subsequently offered and studied the numerous models being modification j model (1). The analysis of existing models and research of a series of models being modification of a system (1) taking into account different inter population and intra population effects was observed in the book A. D. Bazikin [1]. The purpose of the present work is to study model of dynamics of three populations interacting by a principle a predator prey with the additional count of effects of an intraspecific competition and saturation in predator populations System two predators one prey taking into account above indicated effects in model leads to (1) a system:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1 - \frac{a_{12} x_1 x_2}{1 + b_1 x_1} - \frac{a_{13} x_1 x_3}{1 + b_2 x_1} - c_1 x^2, \\ \dot{x}_2 &= -a_2 x_2 + \frac{a_{21} x_1 x_2}{1 + b_1 x_1} - c_2 x_2^2, \\ \dot{x}_3 &= -a_3 x_3 + \frac{a_{31} x_1 x_3}{1 + b_2 x_1} - c_3 x_3^2, \end{aligned} \tag{2}$$

where x_1, x_2, x_3- number (density) of populations of prey and predator accordingly, a_1 coefficient of natural growth of prey populations, a_2 and a_3 coefficients of natural death rate of predator population, a_1, a_2 and a_3 coefficients taking into account an intraspecific competition in populations, a_{ij} coefficients of interpopulation interaction, b_1, b_2- coefficients, taking into account effect of a saturation of predators, at abundance of prey populations. Passing to dimensionless variables we shall receive a system of a type:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y_1 x - \frac{xy}{1 + \alpha_1 x} - \frac{xz}{1 + \alpha_2 x} - \varepsilon x^2, \\ \dot{y} &= -\gamma_2 y + \frac{xy}{1 + \alpha_1 x} - \mu y^2, \\ \dot{z} &= -\gamma_3 z + \frac{xz}{1 + \alpha_2 x} - \delta z^2. \end{aligned} \tag{3}$$

The system depends on seven parameters. For simplification of presentation let‘s assume at first $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$, $\varepsilon = 0$ and $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ also we shall carry out. Now we will observe qualitative research of a system (3). The equilibrium points of a system (3) are determined from a system of non-linear algebraic equations of a type

$$\begin{aligned} x\,(1+\alpha x-y-z)&=0,\\ y\,(-1-\alpha x+x-\mu y\,(1+\alpha x))&=0,\\ z\,(-1-\alpha x+x-\delta z\ (1+\alpha x))&=0. \end{aligned} \tag{4}$$

The system has a trivial solution $x=y=z=0$ find therefore a beginning of coordinates $O\,(0,\ 0,\ 0)$ equilibrium point. The origin, apparently is three-dimensional saddle-node type with a leaving direction conterminous to an abscissa axis, and with incoming directions conterminous to remaining coordinate axis. Further we study the second part of an algebraic system (4):

$$\begin{aligned} 1+\alpha x-y-z&=0,\\ (-1+(1-\alpha)\,x-\mu y\,(1+\alpha x))&=0,\\ (-1+(1-\alpha)\,x-\delta z\ (1+\alpha x))&=0. \end{aligned}$$

Now we consider model (1) under periodic environmental fluctuations. The environmental fluctuations can be determined by various factors, e.g. by seasonal or diurnal environmental variations of the medium, seasonal multiplications of populations, catching, harvesting from species, etc. Assumed that the systems is operative in a time stationary environment, which is possible if the characteristic times of exogenous fluctuations are much longer than the natural characteristic times of the system itself. It is generally conceded that environmental fluctuations can be neglected if their amplitude is small compared with some natural amplitude of the system itself. However, even very small fluctuations may lead to important effects if the system is in the vicinity of the boundary of critical regimes of dynamical behavior. Thus in model all parameters can be periodic functions of time, but in our case such parameter are only y_1 while the remaining parameters are constant. So $y_1\,(t)$ is periodic function with respect to t with a period $2\pi/\omega$ in form $\alpha=\alpha+\beta\cos(\omega t)$. Numerical investigation has been made for the system we have obtained estimates of the region on the plane of parameters $(\alpha,\ \mu)$ of the system (2) in the neighborhood of the curves P corresponding to the loop of the saddle separatrixes of the system which correspond to the existence of stochastic regimes of behaviors.

The numeral calculations and analysis of characteristic equation of a system and research of behavior of a bifurcation line S are conducted through the program MATHEMATICA. Study of bifurcations of equilibrium points of a system and three dimensional limit cycles were conducted with the help of the program LOCBIF. A numerical integration of a system and drawing of trajectories are conducted with the help of the program TRAX.

References

1. *Bazikin A.D., Buriyev T.E.* Dinamika sistemi xishnik-jertva s uchetom nasisheniya xishnika, konkuransii xishnika za jertvu I konkurensii jertv.- Studia biofizica, 1981,vol.2,pp. 123-130. (in Russian)

2. *Buriyev T.E., Mukhtarov Ya.* Chaos and self-oscillatory regimes in Ecological system of two competing Preys and one Predator Abstract Proceding: International conference on mathematics and natural sciences. Samarkand , 2013. 47-47 pp.

Investigation the direct problem for integro -differential fractional diffusion equation

[1]**Durdiev D.**, [2]**Jumaev J.**

[1]*Bukhara branch of the institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan*,

e-mail: durdiev65@mail.ru

[2] *Bukhara branch of the institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy at the Academy of sciences of the Republic of Uzbekistan*

e-mail: jonibekjj@mail.ru

Consider the problem of determining of function $u(x,t)$, from the following equations with fractional derivative in time t :

$$\partial_t^\alpha u - u_{xx} + a(x)u = \int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)d\tau, \quad (x,t) \in D_T, \alpha \in (0,1), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u|_{x=l} = \mu_2(t), \ \varphi(0) = \mu_1(0), \quad \varphi(l) = \mu_2(0), \ t \in [0,T], \tag{3}$$

with the Caputo time fractional derivative ∂_t^α of order $0 < \alpha < 1$, defined by

$$\partial_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} u'(\tau)d\tau,$$

where Γ is the Euler's Gamma function, $D_\tau = \{(x,t)|x \in (0,l), \ 0 < t \le \tau, \tau \in (0,T]\}$, $T > 0$ are arbitrary fixed number, $a(x), k(t), \varphi(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ are given functions of $x \in [0,l]$ and $t \in [0,T]$.

Lemma. *If* $(\varphi(x), a(x)) \in C[0,l]$,$(\mu_1(t), \mu_2(t)) \in C^1([0,T])$, $k(t) \in C([0,T])$, *then there is the unique classical solution* $u(x,t)$ *to the problem (1)-(3) of the class* $C^{2,\alpha}([0,l] \times [0,T])$ *(*$C^{2,\alpha}(D_T) = \{u(x,t) \in C^2[0,l]; t \in (0,T]; u(x,t) \in AC[0,T]; x \in [0,l]\}$ *).*

In what follows we also use the usual class $C(D_T)$ of continuous in D_T functions.

References

1. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II, Geophys. J. Royal Astronom. Soc, 13, (1967) 529-539.
2. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.

Spectral properties of a family of the Generalized Friedrichs models with the perturbation of rank one

Dustov S.

Navoi State Pedagogical Institute, Navoi, Uzbekistan

e-mail: saiddustov@mail.ru

Let $\mathbb{Z}^3$ be the three-dimensional hypercubes lattice and $\mathbb{T}^3 = (-\pi,\pi]^3$ be the three-dimensional torus (Billion zone), the dual group of $\mathbb{Z}^3$. The operators of addition and multiplication by number of the elements of torus $\mathbb{T}^3 \equiv (-\pi,\pi]^3 \subset \mathbb{R}^3$ was defined as operations in $\mathbb{R}^3$ modulo $(2\pi\mathbb{Z}^3)$.

Let $L^2(\mathbb{T}^3)$ be the Hilbert space of square-integrable functions defined on the torus $\mathbb{T}^3$ and $\mathbb{C}^1$ be the one-dimensional complex Hilbert space.

We consider a family of the Generalized Friedrichs models acting in $L^2(\mathbb{T}^3)$ as follows:

$$H_\mu(p) = H_0(p) + \mu\Phi^*\Phi, \ \mu > 0.$$

Here

$$\Phi : L^2(\mathbb{T}^3) \to \mathbb{C}^1, \quad \Phi f = (f, \varphi)_{L^2(\mathbb{T}^3)},$$

$$\Phi^* : \mathbb{C}^1 \to L^2(\mathbb{T}^3), \quad \Phi^* f_0 = \varphi(q) f_0,$$

where $(\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{T}^3)}$ – is the scalar product in $L^2(\mathbb{T}^3)$ and $H_0(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$ is a multiplication operator by a function $w_p(\cdot) := w(p, \cdot)$, that is,

$$(H_0(p)f)(q) = w_p(q) f(q), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3).$$

We observe that for each $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$ and $g_0 \in \mathbb{C}^1$ the identity

$$(\Phi f, g_0)_{\mathbb{C}^1} = (f, \Phi^* g_0)_{L^2(\mathbb{T}^3)}$$

holds.

Assumption 1. The following conditions are satisfied:

(i) the function φ is nontrivial and real-analytic and has no singularities on the torus $\mathbb{T}^3$.

(ii) the function $w(\cdot,\cdot)$ is real-analytic function on $(\mathbb{T}^3)^2 = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3$ and has a unique non-degenerated maximum at $(p_0, q_0) \in (\mathbb{T}^3)^2$.

The perturbation $v = \Phi^*\Phi$ is positive operator of rank one. Hence, by the well-known Weyl theorem [1], the essential spectrum fills the following segment on the real axis:

$$\sigma_{ess}(H_\mu(p)) = \sigma_{ess}(H_0(p)) = [m(p),\, M(p)],$$

where

$$m(p) = \min_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q).$$

By Assumption, there exist an δ-neighborhood $U_\delta(p_0) \subset \mathbb{T}^3$ of the point $p = p_0 \in \mathbb{T}^3$ and an analytic vector function $\mathbf{q}_0 : U_\delta(p_0) \to \mathbb{T}^3$ such that for each $p \in U_\delta(p_0)$ the point $\mathbf{q}_0(p) = (q_0^{(1)}(p), q_0^{(2)}(p), q_0^{(3)}(p)) \in \mathbb{T}^3$ is a unique non-degenerated maximum of the function $w_p(\cdot)$ Moreover, the following integral

$$\frac{1}{\mu(p)} = \int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi^2(s)ds}{M(p) - w_p(s)} > 0$$

is well-defined.

The positive number $\mu(p) > 0$ is called coupling constant threshold.

Theorem 1. Let Assumption 1 hold and $p \in U_\delta(p_0)$. Then the following statements are true:

The operator $H_\mu(p)$ has a unique eigenvalue $E(\mu, p)$ above the threshold $M(p)$ of the essential spectrum if and only if $\mu > \mu(p)$.

Theorem 2. *Assume Assumption 1. Then for any fixed $p \in U_\delta(p_0)$, μ tends to $\mu(p)$ iff $E(\mu, p)$ approaches to the threshold $M(p)$. Moreover, for sufficiently small and positive $\mu - \mu(p)$ the eigenvalue $E(\mu, p)$ has the following absolutely convergent expansions:*

(i) If $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) \neq 0$, then $E(\mu, p)$ represents as the following convergent Taylor series expansion

$$E(\mu, p) = M(p) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(p)[\mu - \mu(p)]^n \right)^2,$$

where $a_n(p)$, $n = 1, 2, ...$ is real numbers with $a_1(p) \neq 0$.

(ii) If $\varphi(\mathbf{q}_0(p)) \neq 0$ then $E(\mu, p)$ represents as the following Puiseux series at $\mu = \mu(p)$

$$E(\mu, p) = M(p) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(p)[\mu - \mu(p)]^{n/2} \right)^2,$$

where $a_n(p)$, $n = 1, 2, ...$ real numbers with $a_1(p) \neq 0$ and $[\mu - \mu(p)]^{1/2} > 0$ for $\mu - \mu(p) > 0$.

A family $H_\mu(p)$, $\mu > 0$, $p \in \mathbb{T}^d$ of the generalized Friedrichs models with the local perturbation of rank one, associated to a system of two particles, moving on the d- dimensional lattice $\mathbb{Z}^d$, was considered in [2,3].

References

1. *M. Reed and B. Simon.* Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators. Academic Press, N.Y., 1978.
2. *S.N.Lakaev, M.Darus, Sh.H.Kurbanov.* Puiseux series expansion for an eigenvalue of the generalized Generalized Friedrichs model with perturbation of rank 1. J. Phys. A: Math. Theor. 46:20, 205304, 2013 (15pp).
3. *S.N.Lakaev, M.Darus, S.T.Dustov.* Threshold phenomenon for a family of the Generalized Friedrichs models with the perturbation of rank one. Ufa Mathematical Journal. Vol.11. No. 4 (2019) P.1-11.

Asymmetry of non-local discrete Schrödinger operators on a lattice

[1]**Hiroshima Fumio**

[1] *Faculty of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka, Japan,*
e-mail: hiroshima.fumio.965@m.kyishu-u.ac.jp

The behaviour of the spectral edges is discussed at the two ends of the continuous spectrum of non-local discrete Schrödinger operators with a δ-potential. These operators arise by replacing the discrete Laplacian by a strictly increasing C^1-function of the discrete Laplacian. The dependence of the results on this function and the lattice dimension are explicitly derived.

Let $L(\theta)$ be the Laplacian on the d-dimensional torus. For a given $\Psi \in C^1((0,\infty))$ such that $d\Psi(x)/dx > 0$, $x \in (0,\infty)$, we define the non-local discrete Laplacian $\Psi(L)$ on $\mathbb{Z}^d$ by $\Psi(L) = F^{-1}\Psi(L(\theta))F$. We call

$$h = \Psi(L) + v\delta_x$$

with $v \in \mathbb{R}$ non-local discrete Schrödinger operator with δ-potential at $x \in \mathbb{Z}^d$. We discuss the behaviours of eigenvalues of h by varying v. It is found that while in the case of the discrete Schrödinger operator (see Ref.1) these behaviours are the same no matter which end of the continuous spectrum is considered, *an asymmetry* occurs for the non-local cases. A classification with respect to the spectral edge behaviour is also offered.

References

1. *Hiroshima, Fumio, Muminov, Zahriddin and Kuljanov, Utkir*, Threshold of discrete Schrödinger operators with delta potentials on n-dimensional lattice, Linear Multilinear Algebra, 70, 2022, 919-954.

Differential game with geometric constraints on controls in the Hilbert space l_2

[1]**Ibragimov G.**, [2]**Kuchkarova S.**

[1] *Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,*
e-mail: ibragimov@upm.edu.my

[2] *National University of Uzbekistan,*
e-mail: kuchkarova11@yandex.ru

We study a differential game described by the following infinite system of differential equations

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_i x_i - \beta_i y_i + u_{i1} - v_{i1}, \quad x_i(0) = x_{i0}, \\ \dot{y} &= \beta_i x_i + \alpha_i y_i + u_{i2} - v_{i2}, \quad y_i(0) = y_{i0}, \end{aligned} \tag{1}$$

in Hilbert space l_2, where α_i, β_i are real numbers, $0 \le \alpha_i \le a$, $(x_{10}, x_{20}, \dots), (y_{10}, y_{20}, \dots) \in l_2$, $u = (u_1, u_2, ...)$, $u_i = (u_{i1}, u_{i2})$ and $v_i = (v_1, v_2, ...)$, $v_i = (v_{i1}, v_{i2})$, $i = 1, 2, ...$, are the control parameters of pursuer and evader, respectively. It is assumed that $0 \le t \le T$, where T is a sufficiently large number.

Definition 1. A vector function $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots)$ $(v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots))$, $0 \le t \le T$, with measurable coordinates $u_i(t)$ $(v_i(t))$ such that

$$\sum_{i=1}^{\infty}(u_{i1}^2(t) + u_{i2}^2(t)) \le \rho^2 \quad (\sum_{i=1}^{\infty}(v_{i1}^2(t) + v_{i2}^2(t)) \le \sigma^2), \tag{2}$$

is called admissible control of pursuer (evader), where ρ (σ) is a given positive number.

Each equation of the system (1) has the unique solution $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots)$ defined by

$$z_i(t) = A_i(t)z_{i0} + \int_0^t A_i(t-s)(u_i(s) - v_i(s))ds, \quad i = 1, 2, ...$$

Definition 2. A number T_0, $T_0 \le T$, is called a guaranteed pursuit time if there exists a strategy of pursuer U such that for any control of the evader, the solution of the initial value problem (1), $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots)$ equals zero, at some τ, $0 \le \tau \le T_0$, i.e. $z_i(\tau) = 0$ for all $i = 1, 2, \dots$.

Problem is to find a guaranteed pursuit time θ and construct a strategy for the pursuer that guarantees the time θ.

Theorem The number θ that satisfy the equation

$$\sum_{\alpha_i > 0} \frac{\alpha_i^2 |z_{i0}|^2}{\sinh^2(\alpha_i \theta)} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{\alpha_i = 0} |z_{i0}|^2 = (\rho - \sigma)^2$$

is a guaranteed pursuit time in the game (1).

References

1. *Ibragimov G., Risman M.H.* Pursuit and Evasion Differential game in Hilbert space. Int. Game Theory Rev., 12. 2010, 239-251.

2. *Tukhtasinov M., Ibragimov G., Kuchkarova S., Mat Hasim R.* Differential Game for an Infinite 2-Systems of Differential Equations. Mathematics, 9, 1467, 2021. https://doi.org/10.3390/math9131467

Multiple pursuer one evader pursuit differential game with Grönwall-type constraints on controls

[1]**Ibragimov G.I.**, [2]**Egamberganova O.Y.**

[1]*Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*

e-mail: ibragimov@upm.edu.my

[2] *Universiti Putra Malaysia, Serdang, Selangor, Malaysia & Department of Higher Mathematics, Tashkent Finance Institute, Tashkent, Uzbekistan,*

e-mail: intelegentniy21@gmail.com

In $\mathbb{R}^n$, we study a differential game of many pursuers and one evader. The dynamic capabilities of players are equal. The control functions of the players are subjected to Grönwall type constraints.

Let the dynamics of pursuers x_i and evader y be described by the following equations

$$\dot{x}_i = u_i, \quad x_i(0) = x_{i0}, \; i = 1, ..., m, \tag{1}$$

$$\dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

where $x_i, y, x_{i0}, y_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{i0} \ne y_0$, $i = 1, ..., m$, u_i is the control parameter of pursuer x_i, and v is the control parameter of evader.

Definition *Borel measurable functions $u_i(t)$, $i = 1, 2, ..., m$, $t \geq 0$, and $v(t)$, $t \geq 0$, that satisfy the constraints*

$$|u_i(t)|^2 \leq \rho_i^2 - 2k \int_0^t |u_i(s)|^2 ds, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 - 2k \int_0^t |v(s)|^2 ds, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

respectively, where ρ_i, σ are given positive numbers and k is a given non-negative number, are called admissible controls of the pursuer x_i, $i \in \{1, \dots, m\}$, and evader y, respectively.

It is assumed that $\rho_i = \sigma$ for all $i = 1, 2, ...m$. Constraints (3) and (4) are called Grönwall type constraints. It is not difficult to verify that inequalities (3) and (4) imply, respectively, that $|u_i(t)| \leq \rho_i e^{-kt}$ and $|v(t)| \leq \sigma e^{-kt}$. Also, note that if $|u_i(t)| = \rho_i e^{-kt}$ and $|v(t)| = \sigma e^{-kt}$, then constraints (3) and (4) are satisfied, respectively.

We say that pursuit can be completed in the game if there exist strategies of pursuers such that, for any control of the evader, $x_i(\tau) = y(\tau)$ for some $i \in \{1, 2, ..., m\}$ and $\tau > 0$.

If there exists a strategy of the evader such that, for any controls of pursuers, $x_i(t) \neq y(t)$ for all $i = 1, 2, ..., m$ and $t > 0$, then we say that evasion is possible in the game.

We consider the following function

$$f(\bar{v}) = \sum_{i=1}^{m} (\sqrt{\sigma^2 - |\bar{v}|^2 + (\bar{v}, e_i)^2} - (\bar{v}, e_i)), \quad |\bar{v}| \leq \sigma,$$

where $e_i = (y_0 - x_{i0})/|y_0 - x_{i0}|$. Let $\min\limits_{|\bar{v}| \leq \sigma} f(\bar{v}) = f(\bar{v}_0) = \alpha$.

Theorem 1. If $y_0 \in intconv\{x_{10}, ..., x_{m0}\}$ and $k \sum_{i=1}^{m} |y_0 - x_{i0}| < \alpha$, then pursuit can be completed in game (1)-(4).

Theorem 2. If $y_0 \notin \text{intconv}\{x_{10}, ..., x_{m0}\}$, then evasion is possible in game (1)-(4).

References

1. *Garcia E., Casbeer D.W., Von Moll A., Pachter M.* Multiple Pursuer Multiple Evader Differential Games. IEEE Transactions on Automatic Control, May 2021, 66(5): 2345–2350.
2. *Ibragimov G.I., Ferrara M., Kuchkarov A.Sh., Pansera B.A.* Simple motion evasion differential game of many pursuers and evaders with integral constraints. Dynamic Games and Applications, 2018, 8: 352–378.
3. *Ibragimov G.I., Ferrara M., Ruziboev M., Pansera B.A.* Linear evasion differential game of one evader and several pursuers with integral constraints. International Journal of Game Theory. 50: 729–750, 2021, doi.org/10.1007/s00182-021-00760-6.
4. *Makkapati V.R., Tsiotras P.* Optimal Evading Strategies and Task Allocation in Multi-player Pursuit B Evasion Problems. Dyn Games, 2019, Appl 9, 1168–1187.
5. *Samatov B.T., Ibragimov G.I., Khodjibayeva I.V.* Pursuit-evasion differential games with Grönwall type constraints on controls. Ural Mathematical Journal, 2020, 6(2): 95–107.
6. *Von Moll A., Casbeer D., Garcia E., Milutinovic D.* Pursuit-evasion of an evader by multiple pursuers. Proc. Int. Conf. Unmanned Aircr. Syst., 2018, 133–142.

Besselning klassik va singulyar tenglamalari orasidagi bog′lanish

[1]Karimov K.T., [2]Murodova M.R.

[1] *Farg′ona davlat universiteti, Farg′ona sh., Murabbiylar k-si, 19. O′zbekiston,*
karimovk80@mail.ru

[2] *Farg′ona davlat universiteti, Farg′ona sh., Murabbiylar k-si, 19. O′zbekiston,*
mxalimova2112@mail.ru

Ma'lumki, Bessel funksiyasi quyidagi ko′rinishga ega [1]:

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+\left(x^2-p^2\right)u=0,\quad u=u\left(x\right). \tag{1}$$

Bu tenglama ikkinchi tartibli buziladigan chiziqli differensial tenglamalar sinfiga tegishli hisoblanadi. Odatda buzilish deb, yechimning mavjud bo′lish sohasida nolga aylanadigan koeffitsientga aytiladi.

(1) tenglama bilan parallel ravishda Besselning singulyar tenglamasi deb ataluvchi quyidagi

$$B_\gamma u+u=0,\quad B_\gamma=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\gamma}{x}\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^\gamma}\frac{d}{dx}x^\gamma\frac{d}{dx} \tag{2}$$

tenglamani qaraymiz. Bu yerdagi $B_\gamma-$ Besselning singulyar differensial operatori deyiladi, uning

$$\frac{1}{x^\gamma}\frac{d}{dx}x^\gamma\frac{d}{dx}$$

ko′rinishdagi yozuvi esa, Bessel operatorining divergent formasi deyiladi.

Quyidagi lemmalarni ko′rib chiqamiz.

1-lemma. *Agar $u\left(x\right)$ funksiya (2) tenglamaning yechimi bo′lsa, u holda $u\left(\lambda x\right)$ funksiya*

$$B_\gamma u+\lambda^2u=0 \tag{3}$$

tenglamaning yechimi bo′ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, $\lambda\neq0$ va $x=\lambda t$ bo′lsin. U holda quyidagi yozuv o′rinli:

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}.$$

Bessel operatorining divergent formasidan foydalanamiz. Yuqoridagi tenglikdan foydalanadigan bo′lsak,
$x=\lambda t$ almashtirish natijasida quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\left(B_\gamma\right)_x=\frac{1}{x^\gamma}\frac{d}{dx}x^\gamma\frac{d}{dx}=\frac{1}{\left(\lambda t\right)^\gamma}\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}\left(\lambda t\right)^\gamma\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}=\frac{1}{\lambda^2}\left(B_\gamma\right)_t.$$

Demak, agar $u\left(x\right)-$ (2) tenglamaning yechimi bo′lsa, u holda

$$0=\left(\left(B_\gamma\right)_x u\left(x\right)+u\left(x\right)\right)\Big|_{x=\lambda t}=\frac{1}{\lambda^2}\left(B_\gamma\right)_t u\left(\lambda t\right)+u\left(\lambda t\right)$$

tenglikdan, (3) tenglama hosil bo′ladi. 1-lemma isbotlandi.

2-lemma. *Aytaylik $\gamma=2p+1$ bo′lsin. U holda (1) va (2) tenglamalarning yechimlari $u\left(x\right)=x^pv\left(x\right)$ tenglik bilan bog′langan bo′ladi.*

Isbot. Faraz qilaylik $v\left(x\right)$ funksiya (2) tenglamaning yechimi va $u=x^pv\left(x\right)$ tenglik o′rinli bo′lsin. u', u'' hosilalarni hisoblaymiz:

$$u'=v'x^p+vpx^{p-1};$$

$$u''=v''x^p+2v'px^{p-1}+vp\left(p-1\right)x^{p-2}.$$

Bularni olib borib (1) ga qo′yamiz va quyidagiga ega bo′lamiz:

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+\left(x^2-p^2\right)u=v''x^{p+2}+2pv'x^{p+1}+\left(p^2-p\right)x^p+$$

$$+v'x^{p+1}+vpx^p+\left(x^2-p^2\right)vx^p=x^{p+2}\left[v''+(2p+1)\,v'+v\right]=x^{p+2}\left[B_\gamma v+v\right]=0.$$

Bundan ko′rish mumkinki, $v\,(x)$ funksiya Besselning singulyar tenglamasini qanoatlantiradi. Shunday qilib $u=x^pv\,(x)$ funksiya (1) Bessel tenglamasini qanoatlantiradi.

Xuddi shunday usul bilan teskari tasdiqni ham isbotlash mumkin: agar $u\,(x)$ funksiya (1) tenglamaning $(0,+\infty)$ oraliqdagi yechimi bo′lsa, u holda $v=u/x^p-$ (2) tenglamaning yechimi bo′ladi. 2-lemma isbotlandi.

Besselning singulyar tenglamasi tatbiqlarini, misol uchun [1], [2], [3], [4] va h.k. ishlarda uchratish mumkin.

Adabiyotlar

1. *Watson G. N.* Theory of Bessel functions. M.: T.1. Ed. IL., 1949.
2. *Gray A., Mathews, G. B.* A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics, 2nd ed. New York: Dover, 1966.
3. *Love A. E.* A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Vol 2, Dover Publications Incorporated, 1944.
4. *Lav A.* Mathematical theory of elasticity. -M.Izd. IL., 1935.

Synthesis of boundary controls in the problem of optimization of thermal processes

Kerimbekov A. K.

Kyrgyz-Russian Slavic University, 6 Chuy Ave, Bishkek , 720022 Kyrgyz Republic,

e-mail: akl7@rambler.ru

The paper studies the solvability of the problem of synthesis of boundary controls in the optimization of thermal processes in the case when the functions of boundary sources are nonlinear in control parameters. An algorithm for constructing the desired controls as a function (or functional) of the state of the controlled process has been developed.

This paper considers the problem of minimizing the quadratic integral functional

$$Y(u_1(t),u_2(t))=\int_0^T\int_0^1[V(t,x)-\xi(t,x)]^2dxdt+\beta\int_0^T[t,u_1(t),u_2(t)]dt,\ \beta>0$$

on the set of generalized solutions of the boundary value problem of the controlled process

$$V_t=V_x+\lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau,\ 0<x<1,0<t<T$$

$$V(0,x)=\psi(x),\ 0<x<1$$

$$V(t,0)=f_1[u_1(t),u_2(t)],\ V(t,1)=f_2[u_1(t),u_2(t)],\ 0<t<T$$

where $\xi(t,x)\in H(Q),Q=(0,1)x(0,T);\Psi(x)\in H(0,1),K(t,\tau)\in H[(0,1)x(0,T)],p[t,u_1(t),u_2(t)]\in H(0,T),f_1[u_1(t),u_2(t)]\in H(0,T),f_2[u_1(t),u_2(t)]\in H(0,T)$ - given function,$u_1(t)\in H(0,T)$ and $u_2(t)\in H(0,T)$-control function, λ-parameter, T-fixed time point, $H(y)$-Hilbert space of square summable functions defined on the set X.

In synthesis problems, the optimal control that minimizes the functional should be found depending on the state function of the controlled process.

The study was carried out according to the Bellman-Egorov scheme and an algorithm for constructing the desired controls was developed.

References

1. *Egorov A. I.* Optimal control of thermal and diffusion processes,M.: Nauka, , 1978, P. 464.

A generalized (G'/G) - expansion method for the loaded Burgers equation

[1]Khasanov M.M., [2]Omonov Sh.Sh., [2]Yakubov H.E.

[1] *Urgench State University, Urgench, Uzbekistan,*
e-mail: hmuzaffar@mail.ru

[2] *Urgench State University, Urgench, Uzbekistan,*
e-mail: yakubov0404@mail.ru

This paper is dedicated to find theexact solutions of the equation of the loaded Burgers equation. It is shown to find the exactsolutions via generalized (G'/G) - expansion method, that is one of the most effective way of finding exact solutions.

Consider the following loaded Burgers equation

$$u_t + uu_x - u_{xx} + \gamma(t)\, u(0,t)\, u_x = 0, \tag{1}$$

where $u(x,t)$ is an unknown function, $x \in R,\ t \geq 0,\ \gamma(t)$ - is the given real continuous function.

Description of the generalized (G'/G) - expansion method

Let us be given a nonlinear partial differential equation in the form below

$$F(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xx}, u_{xt}, ...) = 0, \tag{2}$$

with two independent variables x and t. $u(x,t)$ is a unknown function, F is a polynomial in and its partial derivatives in which the highest order derivatives and nonlinear terms are involved. Now we give the main steps of thegeneralized (G'/G) -expansion method [3]:

Step 1. We look for the in the travelling form:

$$u(x,t) = u(\xi), \quad \xi = kx - \Omega(t), \tag{3}$$

where k is parameterand $\Omega(t)$ is a continuous function dependent on t We reduce equation (2) to the following nonlinear ordinary differential equation:

$$P(u, u', u'', ...) = 0, \tag{4}$$

where P is a polynomial of $q(\xi)$ and itsall derivatives $u' = du(\xi)/d\xi,\ u'' = d^2u(\xi)/d\xi^2$.

Step 2. We assume that the solution of equation (4) has the form:

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^{m} a_j \left(\frac{G'}{G}\right)^j, \tag{5}$$

where $G = G(\xi)$ satisfies the following second order ordinary differential equation

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \tag{6}$$

where $G' = dG(\xi)/d\xi,\ G'' = d^2G(\xi)/d\xi^2$ and $\lambda,\ \mu,\ a_j\ \ (j = 1, 2, ..., m)$ are constants that can be determined later, provided $a_m \neq 0$.

Step 3. We determine the integer number m by balancing the nonlinear terms of the highest order and the partial product of the highest order of (4).

Step 4. Substitute (5) along with (6) into (4) andcollect all terms with the same order of $(G'(\xi)/G(\xi))$, the left-hand side of (4) is converted into a polynomialin $(G'(\xi)/G(\xi))$. Then, set each coefficient of this polynomial to zero to derive a set of over-determinef partiel differential equations for $a_j (j = 1, 2, ..., m)$ and ξ.

Step 5. Substituting the values $a_j (j = 1, 2, ..., m)$ and ξ as well as the solutions of equation (6) into (5) we have the exact solutions of equation (2).

References

1. *Bekir A.* Application of the (G'/G) -expansion method for nonlinear evolution equations , Phys. Lett. A, 2008.
2. *Zhang S., Tong J., Wang W.* A generalized (G'/G) -expansion methodfor the mKdV equation with variable coefficients , Phys. Lett. A., 2008.
3. *Wang M., Li X., Zhang J.* The (G'/G) -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics,Phys. Lett. A., 2006.
4. *Kheirim H., Moghaddam R., Vafaeri V.* Application of the (G'/G) -expansion method for the Burgers, BurgersвЂYHuxley and modified BurgersвЂYKdV equations , Pramana - Journal of Physics, 2011.

Exponential Decay in Quantum Mechanics and Continuous Monitoring

Konstantin A. Makarov

Department of Mathematics, University of Missouri, USA

In this talk I will recall the concept of continuous monitoring of a quantum system, and then discuss the related Quantum Zeno and Exponential Decay scenarios in quantum measurements. I will show that for a typical initial state of the system continuous monitoring of massive particles yields complementarity of the quan- tum Zeno and anti-Zeno effects, while for systems of massless parti- cles, the quantum Zeno and exponential decay scenarios are instead complementary. Also, I will provide an example of an unstable pure state of the quantum oscillator that decays exponentially under con- tinuous monitoring which eventually confirms the conclusions of the phenomenological Weisskopf-Wigner theory of decay. Our approach is based on the observation that the exponential decay scenario under continuous monitoring can be recognized as a variant of the Gnedenko-Kolmogorov 1-stable limit theorem.

On the boundary control problem for the fast heating process of a rod

[1] **Kuchkorov E.I.**, [2]**Dekhkonov F.N.**

[1] *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

e-mail: e_kuchkorov@mail.ru,

[2] *Namangan State University, Namangan, Uzbekistan*

e-mail: f.n.dehqonov@mail.ru

Consider the following mathematical model of the heat conduction process along the domain $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < l, \ \ 0 < t < T\}$:

$$1\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

with boundary conditions

$$u(0,t) = \ \mu(t), \quad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

and initial condition

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{3}$$

where $k(x) \in C^1\big([0,l]\big)$ given positive function.

Let $M > 0$ be some given constant. We say that the function $\mu(t)$ is an *admissible control* if this function is differentiable on the half-line $t \ge 0$ and satisfies the following constraints

$$\mu(0) = 0, \quad |\mu(t)| \ \le \ M.$$

Problem. *For the given function $\theta(t)$ find $\mu(t)$ from the following condition*

$$\frac{1}{l}\int\limits_0^l u(x,t)dx = \theta(t). \tag{4}$$

We consider a rod whose length is l, cross-section has the same area and density depends on only one variable. We assume that the temperature supplied from the left side of the rod is controlled, and that the temperature does not exchange with the external environment from the right side and from the surface. Let's consider the problem of finding the average temperature of this cylindrical rod, the control temperature given by its left side to keep it in the given position.

We recall that the time-optimal control problem for partial differential equations of parabolic type was first investigated in [4]. More recent results concerned with this problem were established in [1]-[3], [5]-[6].

By the solution of the problem (1) - (3) we understand the function $u(x,t)$ represented in the form

$$u(x,t) = \frac{l-x}{l}\mu(t) - v(x,t),$$

where the function $v(x,t) \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$, $v_x \in C(\bar{\Omega}_T)$ is the solution to the problem:

$$v_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{k'(x)}{l}\mu(t) + \frac{l-x}{l}\mu'(t),$$

with boundary conditions

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0,$$

and initial condition

$$v(x,0) = 0.$$

From condition (4) and the solution of the problem (1)-(3), we get the main integral equation

$$\int\limits_0^t B(t-s)\,\mu(s)ds = \theta(t), \quad t > 0, \tag{5}$$

where

$$B(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\, e^{-\lambda_k t}, \quad t > 0.$$

Denote by $W(M_0)$ the set of function $\theta \in W_2^2(-\infty,+\infty)$, $\theta(t) = 0$ for $t \le 0$ which satisfies the condition

$$\|\theta\|_{W_2^2(R_+)} \le M_0.$$

Theorem 1. *There exists $M_0 > 0$ such that for any function $\theta \in W(M_0)$ the solution $\mu(t)$ of the equation (5) exists and satisfies condition*

$$|\mu(t)| \le M.$$

References

1. *Albeverio S., Alimov Sh.A.* On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process. Applied Mathematics and Optimization, 47, no. 1, pp. 58-68, 2008.

2. *Alimov Sh.A., Dekhkonov F.N.* On the time-optimal control of the heat exchange process. Uzbek Mathematical Journal, no. 2, pp. 4-17, 2019.

3. *Fattorini H.O.* Time-Optimal control of solutions of operational differential equations, SIAM J. Control, 2 pp. 49-65, 1964.

4. *Lions J.L.* Contróle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1968.

5. *Fursikov A.V.* Optimal Control of Distributed Systems, Theory and Applications, Translations of Math. Monographs, 187 (2000), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

6. *Fayazova Z.K.* Boundary control for a Psevdo-Parabolic equation, Mathematical notes of NEFU.

Puiseux Series Expansion For Eigenvalue of the Generalized Friedrichs Model under Rank One Perturbation

[1]**Kurbanov Sh.Kh,** [2]**Dustov S.T.**

[1]*Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: kurbanov-shaxzod@mail.ru

[2]*Navoi State Pedagogical Institute, Navoi, Uzbekistan,*
e-mail: saiddustov@mail.ru

Let $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ be the three-dimensional torus and $L^2(\mathbb{T}^3)$ is the Hilbert space of square-integrable functions defined on the torus $\mathbb{T}^3$.

We consider the generalized Friedrichs model $H_\mu(p)$, $\mu > 0$ depending on the parameter $p \in \mathbb{T}^3$, with the rank-one perturbation associated to a system of two arbitrary or identical quantum mechanical particles moving on the three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^3$ and interacting via zero-range repulsive potential. Important aspect of studying the generalized Friedrichs models is that, they describe the Hamiltonians for systems of both bosons and fermions.

The generalized Friedrichs model $H_\mu(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$ acting in $L^2(\mathbb{T}^3)$ defined as

$$H_\mu(p) = H_0(p) - \mu V, \ \mu > 0,$$

where $H_0(p)$, $p \in \mathbb{T}^3$ is a multiplication operator by the function $w_p(\cdot) := w(p, \cdot)$:

$$(H_0(p)f)(q) = w_p(q)f(q), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3)$$

and $V : L^2(\mathbb{T}^3) \to L^2(\mathbb{T}^3)$ is the perturbation operator of the form

$$(Vf)(q) = \varphi(q)(f, \varphi),$$

where $(\cdot, \cdot)$ stands for the inner product in $L^2(\mathbb{T}^3)$. The perturbation V of $H_0(p)$ is positive operator of rank one. Consequently, by the well-known Weyl theorem [1] on compact perturbations, the essential spectrum of $H_\mu(p)$ satisfies the equalities

$$\sigma_{ess}(H_\mu(p)) = \sigma_{ess}(H_0(p)) = \sigma(H_0(p))$$

and fills the segment $[m(p), M(p)]$ on the real axis, where

$$m(p) = \min_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathbb{T}^3} w_p(q).$$

Hypothesis 1. *The functions $\varphi(\cdot)$ and $w(\cdot, \cdot)$, used in the definition of the defined operator $H_\mu(p)$ satisfy the following conditions:*
(i) the function $\varphi(\cdot)$ is nontrivial and real-analytic on $\mathbb{T}^3$;
(ii) the function $w(\cdot, \cdot)$ is real-analytic on $(\mathbb{T}^3)^2 = \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3$ and has a unique non degenerated minimum at $(0, 0) \in (\mathbb{T}^3)^2$.

Definition. *For $p \in U_\delta(0)$, we define the number $\mu(p) > 0$ as*

$$\mu(p) = \left(\int\limits_{\mathbb{T}^3} \frac{\varphi^2(q)dq}{w_p(q) - m(p)} \right)^{-1} > 0.$$

Theorem 1. *Assume Hypothesis 1. Then for any fixed $p \in U_\delta(0)$, the operator $H_\mu(p)$ has a unique eigenvalue $E(\mu, p)$ below $m(p)$ if and only if $\mu > \mu(p)$. Moreover, if $\mu = \mu(p)$, $\varphi(q_0(p)) \neq 0$ (resp. $\varphi(q_0(p)) = 0$), then the threshold $m(p)$ is a virtual level (resp. an eigenvalue) of the operator $H_\mu(p)$.*

Theorem 2. *Assume Hypothesis 1. Then for any fixed $p \in U_\delta(0)$, μ tends to $\mu(p)$ iff $E(\mu, p)$ approaches to the threshold $m(p)$. Moreover, for sufficiently small and positive $\mu - \mu(p)$ the eigenvalue $E(\mu, p)$ has the following absolutely convergent expansions:*

(i) If $\varphi(q_0(p)) \neq 0$, then $E(\mu,p)$ represents as the following convergent Taylor series expansion

$$E(\mu,p) = m(p) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(p)[\mu-\mu(p)]^n\right)^2,$$

where $a_n(p)$, $n = 1, 2, ...$ is real numbers with $a_1(p) < 0$.

(ii) If $\varphi(q_0(p)) = 0$ then $E(\mu,p)$ represents as the following Puiseux series at $\mu = \mu(p)$

$$E(\mu,p) = m(p) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(p)[\mu-\mu(p)]^{n/2}\right)^2,$$

where $a_n(p)$, $n = 1, 2, ...$ real numbers with $a_1(p) > 0$ and $[\mu-\mu(p)]^{1/2} > 0$ for $\mu-\mu(p) > 0$.

Friedrichs model also has been considered in [2,3].

References

1. *M. Reed and B. Simon.* Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators. Academic Press, N.Y., 1978.
2. *S.N.Lakaev, M.Darus, Sh.H.Kurbanov.* Puiseux series expansion for an eigenvalue of the generalized Generalized Friedrichs model with perturbation of rank 1. J. Phys. A: Math. Theor. 46:20, 205304, 2013 (15pp).
3. *S.N.Lakaev, M.Darus, S.T.Dustov.* Threshold phenomenon for a family of the Generalized Friedrichs models with the perturbation of rank one. Ufa Mathematical Journal. Vol.11. No. 4 (2019) P.1-11.

Number of eigenvalue of the Generalized Friedrichs Model under Rank One Perturbation

[1]Kurbanov Sh.Kh, [2]Juraev.I.R

[1]*Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan,*

e-mail: kurbanov-shaxzod@mail.ru

Let $\mathbb{T}^1 = (-\pi,\pi]^1$ be the one-dimensional torus and $L^2(\mathbb{T}^1)$ is the Hilbert space of square-integrable functions defined on the torus $\mathbb{T}^1$.

We consider the generalized Friedrichs model $H_\mu(p)$, $\mu > 0$ depending on the parameter $p \in \mathbb{T}^1$, with the rank-one perturbation associated to a system of two arbitrary or identical quantum mechanical particles moving on the three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^1$ and interacting via zero-range repulsive potential. Important aspect of studying the generalized Friedrichs models is that, they describe the Hamiltonians for systems of both bosons and fermions.

The generalized Friedrichs model $H_\mu(p)$, $p \in \mathbb{T}^1$ acting in $L^2(\mathbb{T}^1)$ defined as

$$H_\mu(p) = H_0(p) + \mu V,\ \mu > 0,$$

where $H_0(p)$, $p \in \mathbb{T}^1$ is a multiplication operator by the function $w_p(\cdot) := w(p,\cdot)$:

$$(H_0(p)f)(q) = w_p(q)f(q), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^1)$$

and $V : L^2(\mathbb{T}^1) \to L^2(\mathbb{T}^1)$ is the perturbation operator of the form

$$(Vf)(q) = \varphi(q)(f,\varphi),$$

where $(\cdot,\cdot)$ stands for the inner product in $L^2(\mathbb{T}^1)$. The perturbation V of $H_0(p)$ is positive operator of rank one. Consequently, by the well-known Weyl theorem [1] on compact perturbations, the essential spectrum of $H_\mu(p)$ satisfies the equalities

$$\sigma_{ess}(H_\mu(p)) = \sigma_{ess}(H_0(p)) = \sigma(H_0(p))$$

and fills the segment $[m(p),\, M(p)]$ on the real axis, where

$$m(p) = \min_{q\in\mathbb{T}^1} w_p(q), \quad M(p) = \max_{q\in\mathbb{T}^1} w_p(q).$$

Hypothesis 1. *The functions $\varphi(\cdot)$ and $w(\cdot,\cdot)$, used in the definition of the defined operator $H_\mu(p)$ satisfy the following conditions:*
(i) the function $\varphi(\cdot)$ is nontrivial and real-analytic on $\mathbb{T}^1$;
(ii) the function $w(\cdot,\cdot)$ is real-analytic on $(\mathbb{T}^1)^2 = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ and has a unique non degenerated maxsimum at $(0,0) \in (\mathbb{T}^1)^2$.

By Hypothesis 1 there exist such a δ-neighborhood $U_\delta(0) \subset \mathbb{T}^1$ of the point $p = 0 \in \mathbb{T}^1$ and analytic function $q_0 : U_\delta(0) \to \mathbb{T}^1$ that for any $p \in U_\delta(0)$ the point $q_0(p) \in \mathbb{T}^1$ is a unique non degenerated maximum of the function $w_p(\cdot)$.

If $\varphi(q_0(p)) = 0$, then we introduce a parameter $\mu(p) > 0$ as

$$\frac{1}{\mu(p)} = \int\limits_{\mathbb{T}^1} \frac{\varphi^2(s)ds}{M(p) - w_p(s)} > 0,$$

and $\mu(p) = 0$, if $\varphi(q_0(p)) \neq 0$, $p \in U_\delta(0)$.

Theorem. Let Hypothesis 1 holds and $p \in U_\delta(0)$. Then the following assertions are true.

(i) If $\mu > \mu(p)$, then the operator $H_\mu(p)$ has a unique eigenvalue $E(\mu, p)$, lying upper the essential spectrum. The function $E(\cdot, p)$ is monotonously increasung real-analytic function in the interval $(\mu(p), +\infty)$ and the function $E(\mu, \cdot)$ is real-analytic in $U_\delta(0)$. The corresponding eigenfunction

$$\Psi(\mu; p, q, E(\mu, p)) = \frac{C\mu\varphi(q)}{E(\mu, p) - w_p(q)}$$

is analytic on $\mathbb{T}^1$, where $C \neq 0$ is normalization factor. Moreover, the mappings

$$\Psi : U_\delta(0) \to L_2(\mathbb{T}^1), \quad p \mapsto \Psi(\mu; p, q, E(\mu, p)) \in L_2(\mathbb{T}^1)$$

and

$$\Psi : (\mu(p), +\infty) \to L_2(\mathbb{T}^1), \quad \mu \mapsto \Psi(\mu; p, q, E(\mu, p)) \in L_2(\mathbb{T}^1)$$

are vector-valued analytic functions in $U_\delta(0)$ and $(\mu(p), +\infty)$, respectively.

(ii) If $\varphi(q_0(p)) = 0$ and $0 < \mu < \mu(p)$, then the operator $H_\mu(p)$ has none eigenvalue in $(-\infty, m(p)]$.

Friedrichs model also has been considered in [2,3].

References

1. *M. Reed and B. Simon.* Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators. Academic Press, N.Y., 1978.

2. *S.N.Lakaev, M.Darus, Sh.H.Kurbanov.* Puiseux series expansion for an eigenvalue of the generalized Generalized Friedrichs model with perturbation of rank 1. J. Phys. A: Math. Theor. 46:20, 205304, 2013 (15pp).

3. *S.N.Lakaev, M.Darus, S.T.Dustov.* Threshold phenomenon for a family of the Generalized Friedrichs models with the perturbation of rank one. Ufa Mathematical Journal. Vol.11. No. 4 (2019) P.1-11.

Eigenvalues of the discrete Schrödinger operator with non-local potential in d=3

Kurbonov O., Akhralov Kh.
V. I. Romanovskii Institute of mathematics of Academy of Sciences of Uzbekistan, 100174, University street 4-B, Tashkent, Uzbekistan,
e-mail: oybekqurbonov1994@gmail.com

Eigenvalue behaviour of a family of discrete Schrödinger operators $H_{\lambda\mu}$ depending on parameters $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ is studied on the three-dimensional lattice $\mathbb{Z}^3$. The non-local potential is described by the Kronecker delta function and the shift operator. The existence of eigenvalues below the essential spectrum and their dependence on the parameters are explicitely proven. We also show that the essential spectrum absorbes the threshold eigenvalue and there exists a particular parabola, on whose left intercept the threshold becomes an embedded eigenvalue and the threshold resonance at its other points.

In this paper we aim to investigate the spectrum of a discrete Schrödinger operator with a non-local potential given at the points $x_0, -x_0 \in \mathbb{Z}^3$ on the lattice $(-\pi, \pi]^3$. We explicitly show (Theorem 1) the existence of eigenvalues and resonances of the operator and their dependance on the interaction parameters μ, λ, $x_0 \in \mathbb{Z}^3$. We show the existence of eigenvalues outside the essential spectrum, threshold eigenvalues and resonances depending on the parameters λ and μ, and the sum of coordinates of the point $x_0 \in \mathbb{Z}^3$, which creates the non-local potential.

In the momentum representation, the one-particle Hamiltonian $H_{\lambda\mu}$ can be expressed as

$$H_{\lambda\mu} = H_0 - V_{x_0}, \tag{1}$$

where H_0 and V_{x_0} are respectively defined as

$$H_0 = \mathcal{F}^*(-\Delta)\mathcal{F} \quad \text{and} \quad V_{x_0} = \mathcal{F}^*(\widehat{V}_{x_0})\mathcal{F},$$

with $\mathcal{F}$ being the standard Fourier transform $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}^3) \to \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ and $\mathcal{F}^* : \ell^2(\mathbb{Z}^3) \to L^2(\mathbb{T}^3)$ is its inverse. Explicitly, the non-perturbed operator H_0 acts on $L^2(\mathbb{T}^3)$ as a multiplication operator by the function $\mathfrak{e}(\cdot)$:

$$(H_0 f)(p) = \mathfrak{e}(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3), \tag{2}$$

where $\mathfrak{e}(p) = \sum_{j=1}^{3}(1 - \cos p_j), \quad p \in \mathbb{T}^3$. The function $\mathfrak{e}(\cdot)$, being a real valued-function on $\mathbb{T}^3$, is referred as the *dispersion relation* of the Laplace operator in the physical literature.

The perturbation V_{x_0} acts on $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$ as the two-dimensional integral operator:

$$(V_{x_0} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} \left(\lambda + \mu \left(e^{\mathrm{i}(x_0,p)} + e^{\mathrm{i}(-x_0,p)} + e^{-\mathrm{i}(x_0,s)} + e^{\mathrm{i}(x_0,s)}\right)\right) f(s) ds,$$

which can be rewritten in a more convenient way as

$$(V_{x_0} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{T}^3} (\lambda + 2\mu(\cos(x_0, p) + \cos(x_0, s))) f(s) ds, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^3). \tag{3}$$

We can study the parabola (as a function of $\mu \in \mathbb{R}$)

$$P_z(\lambda, \mu) := \frac{1}{a_0} - \frac{2b_0}{a_0}\mu - \frac{d_0}{a_0}\mu^2 - \lambda = 0. \tag{4}$$

where

$$a_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{1}{\mathfrak{e}(t) - \mathfrak{e}_{\min}}, \; b_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{cos(x_0, t)}{\mathfrak{e}(t) - \mathfrak{e}_{\min}}, \; c_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{cos^2(x_0, t)}{\mathfrak{e}(t) - \mathfrak{e}_{\min}} \; d_0 = a_0 c_0 - b_0^2$$

We enter the following conditions:

$$\mu_1^0 := \frac{1}{b_0 - \sqrt{a_0 c_0}} < 0, \quad \mu_2^0 := \frac{1}{b_0 + \sqrt{a_0 c_0}}.$$

Denote $\Gamma_l = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 | P_{\mathfrak{e}_{\min}}(\lambda, \mu) = 0\}$ in the $\lambda - \mu$ plane. This line (parabola) divides the plane into two disjoint parts, the lower part $G_0 = \{(\lambda, \mu) : P_{\mathfrak{e}_{\min}}(\lambda, \mu) < 0\}$ and the upper one $G_1 = \{(\lambda, \mu) : P_{\mathfrak{e}_{\min}}(\lambda, \mu) > 0\}$.

With these definitions and notations we are now ready to formulate the main result of the paper.

Theorem 1. *(a) For $(\lambda, \mu) \in G_0 \cup \Gamma_l$, the operator $H_{\lambda\mu}$ has no eigenvalues in $(-\infty, 0]$.*

(b) For $(\lambda, \mu) \in G_1$, the operator $H_{\lambda\mu}$ has a simple eigenvalue in $(-\infty, 0)$.

Definition. In the equation $H_{\lambda\mu} f = \mathfrak{e}_{\min} f$, $\mathfrak{e}_{\min}$ is called

(1) a lower threshold eigenvalue if $f \in L^2(\mathbb{T}^3)$,

(2) a lower threshold resonance if $f \in L^1(\mathbb{T}^3) \setminus L^2(\mathbb{T}^3)$,

(3) a lower super-threshold resonance if $f \in L^\epsilon(\mathbb{T}^3) \setminus L^1(\mathbb{T}^3)$ for any $0 < \epsilon < 1$.

If $H_{\lambda\mu} f = \mathfrak{e}_{\min} f$ has no solutions in $L^1(\mathbb{T}^3)$, then $\mathfrak{e}_{\min}$ is a regular point of the essential spectrum.

Theorem 2. *(a) For any $(\lambda, \mu) \in G_1$ or $(\lambda, \mu) \in G_0$, the threshold $\mathfrak{e}_{\min}$ is a regular point.*

(b) The equation $H_{\lambda\mu} f = \mathfrak{e}_{\min} f$ has a solution $f \in L^1(\mathbb{T}^3)$ if and only if $(\lambda, \mu) \in \Gamma_l$. Also, $\mathfrak{e}_{\min}$ is

(b1) an eigenvalue if $\mu = \mu_1^0$;

(b2) a threshold resonance if $\mu \neq \mu_1^0$.

References

1. *Z. E. Muminov, S. U. Alladustov, S. S. Lakaev.* Threshold Analysis of the Three Dimensional Lattice Schrödinger Operator with Non-Local Potential, Lobachevskii J Math, 41, 2020, 1094-1102.

2. *Z. E. Muminov, S. U. Alladustov, S. S. Lakaev.* Spectral and threshold analysis of a small rank perturbation of the discrete Laplacian, J. Math. Anal. Apl., 496(2), 2021, 124827.

3. *F. Chung.* Spectral Graph Theory, BMS Regional Conf. Series Math., Washington DC. 1997.

The Threshold Effects for the Two Particle Discrete Schrödinger Operator on a Lattice

[1]Lakaev S.N., [2]Bozorov I.N., [3]Khamidov Sh.I.

[1] *Uzbekistan, Samarkand State University and Samarkand branch of the Institute of Mathematics*
e-mail: slakaev@mail.ru

[2] *Uzbekistan, Samarkand State University*
e-mail: islomnb@mail.ru

[3] *Uzbekistan, Samarkand State University and Samarkand branch of the Institute of Mathematics*
e-mail: shoh.hamidov1990@mail.ru

Let $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi)^d$ be the d-dimensional torus. Let $L^2(\mathbb{T}^d)$ be the Hilbert space of square-integrable functions on $\mathbb{T}^d$ and $L^{2,e}(\mathbb{T}^d) \subset L^2(\mathbb{T}^d)$ be the subspace of even functions on $\mathbb{T}^d$. For any $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{T}^d$ the bounded and self-adjoint Schrödinger operator $H_{\gamma\lambda}(k)$ associated to a system of two identical particles (bosons) moving on the d-dimensional lattice $\mathbb{Z}^d$ acts in $L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$(see,e.g.[1,2,3,4]) as

$$H_{\gamma\lambda}(k) = H_0(k) + V_{\gamma\lambda}.$$

Here the non-perturbed operator $H_0(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ is the multiplication operator by the function

$$\mathcal{E}_k(p) := 2\sum_{i=1}^{d}\Big(1-\cos\tfrac{k_i}{2}\,\cos p_i\Big).$$

The perturbation operator $V_{\gamma\lambda}$ is defined as

$$V_{\gamma\lambda}f(p) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\Big(\gamma+\lambda\sum_{i=1}^{d}\cos p_i\cos q_i\Big)f(q)\mathrm{d}q.$$

The operator $H_0(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ is the multiplication operator by the continuous real function $\mathcal{E}_k(p)$ defined on $\mathbb{T}^d$, therefore its spectrum consist only of the essential spectrum, i.e.

$$\sigma(H_0(k)) = \sigma_{\text{ess}}(H_0(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k),\, \mathcal{E}_{\max}(k)],$$

with

$$\mathcal{E}_{\min}(k) := \min_{p\in\mathbb{T}^d}\,\mathcal{E}_k(p) = 2\sum_{i=1}^{d}\Big(1-\cos\tfrac{k_i}{2}\Big) \geq 0 = \mathcal{E}_{\min}(0),$$

$$\mathcal{E}_{\max}(k) := \max_{p\in\mathbb{T}^d}\,\mathcal{E}_k(p) = 2\sum_{i=1}^{d}\Big(1+\cos\tfrac{k_i}{2}\Big) \leq 4d = \mathcal{E}_{\max}(0).$$

Let $k=0$. The spaces

$$L^{2,e,s}(\mathbb{T}^d) := \Big\{f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^d):\ f(p_1,...,p_d) = \Pi_2 f(p_1,...,p_d),\ p_1,...,p_d \in \mathbb{T}\Big\},$$

and

$$L^{2,e,a}(\mathbb{T}^d) := \Big\{f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^d):\ f(p_1,...,p_d) = -\Pi_2 f(p_1,...,p_d),\ p_1,...,p_d \in \mathbb{T}\Big\}$$

of symmetric and antisymmetric even functions are invariant with respect to $H_{\gamma\lambda}(0)$, where Π_2 is the permutation of any two variables p_i and p_j, $i,\, j=1,...,d$.

The operators $H^s_{\gamma\lambda}$ and H^a_{λ} act on $L^{2,e,s}(\mathbb{T}^d)$ and $L^{2,e,a}(\mathbb{T}^d)$ by the formulas

$$H^s_{\gamma\lambda} := H_0(0)+V^s_{\gamma\lambda} \qquad \text{and} \qquad H^a_{\lambda} := H_0(0)+V^a_{\lambda},$$

where $V^s_{\gamma\lambda}$ and V^a_{λ} are integral operators given as

$$V^s_{\gamma\lambda}f(p) = \frac{\gamma}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} f(q)\,\mathrm{d}q + \frac{\lambda}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{2(d-1)}\sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=i+1}^{d}(\cos p_i+\cos p_j)\int\limits_{\mathbb{T}^d}(\cos q_i+\cos q_j)f(q)\,\mathrm{d}q$$

and

$$V^a_{\lambda}f(p) = \frac{\lambda}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{2(d-1)}\sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=i+1}^{d}(\cos p_i-\cos p_j)\int\limits_{\mathbb{T}^d}(\cos q_i-\cos q_j)f(q)\,\mathrm{d}q.$$

For any $d \geqslant 3$ there exist the following finite limits:

$$\lim_{z\nearrow 0} a(z) = a(0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)}, \qquad \lim_{z\nearrow 0} b(z) = b(0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos p_i \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)},$$

$$\lim_{z\nearrow 0} c(z) = c(0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos^2 p_i \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)}, \quad \lim_{z\nearrow 0} e(z) = e(0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos p_i\cos p_j \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)}$$

and

$$\lim_{z\searrow 4d} a(z) = a(4d) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)-4d}, \quad \lim_{z\searrow 4d} b(z) = b(4d) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos p_i \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)-4d},$$

$$\lim_{z\searrow 4d} c(z) = c(4d) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos^2 p_i \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)-4d}, \quad \lim_{z\searrow 4d} e(z) = e(4d) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\cos p_i \cos p_j \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)-4d}.$$

Let

$$\lambda_0^+ = (e(4d)-c(4d))^{-1} > 0 \quad \text{and} \quad \lambda_0^- = (e(0)-c(0))^{-1} < 0.$$

In the (γ,λ)-plane let us define the following sets for $d \geq 3$:

$$\begin{aligned}
&\partial\mathcal{S}_{0,d-1} := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2 :\ \lambda = \lambda_0^+\Big\},\\
&\partial\mathcal{S}_{d-1,0} := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2 :\ \lambda = \lambda_0^-\Big\},\\
&\partial\mathcal{C}^+_{0,1} := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2 :\ 1-\gamma a(4d)-\lambda(d-\frac{\gamma}{2})b(4d)=0,\ \lambda < 2\frac{a(4d)}{b(4d)}\Big\},\\
&\partial\mathcal{C}^+_{1,2} := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2 :\ 1-\gamma a(4d)-\lambda(d-\frac{\gamma}{2})b(4d)=0,\ \lambda > 2\frac{a(4d)}{b(4d)}\Big\},\\
&\partial\mathcal{C}^-_{0,1} := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2 :\ 1+\gamma a(0)+\lambda(d+\frac{\gamma}{2})b(0)=0,\ \lambda > -2\frac{a(0)}{b(0)}\Big\},\\
&\partial\mathcal{C}^-_{1,2} := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2 :\ 1+\gamma a(0)+\lambda(d+\frac{\gamma}{2})b(0)=0,\ \lambda < -2\frac{a(0)}{b(0)}\Big\},\\
&P_1^{\pm} := \partial\mathcal{C}^+_{0,1}\cap\partial\mathcal{C}^-_{0,1},\ \mu<0, \qquad P_1^{\mp} := \partial\mathcal{C}^+_{0,1}\cap\partial\mathcal{C}^-_{0,1},\ \mu>0,\\
&P_2^{+} := \partial\mathcal{C}^+_{1,2}\cap\partial\mathcal{S}_{0,d-1}, \qquad P_2^{-} := \partial\mathcal{C}^-_{1,2}\cap\partial\mathcal{S}_{d-1,0},\\
&P_2^{\pm} := \partial\mathcal{C}^-_{0,1}\cap\partial\mathcal{S}_{0,d-1}, \qquad P_2^{\mp} := \partial\mathcal{C}^+_{0,1}\cap\partial\mathcal{S}_{d-1,0}.
\end{aligned}$$

Definition 1. *Let f be a solution of $H_{\gamma\lambda}(0)f = \mathcal{E}_{\min}(0)f$ (resp. $H_{\gamma\lambda}(0)f = \mathcal{E}_{\max}(0)f$).*

(i) If $f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$, then we say that $\mathcal{E}_{\min}(0)$ (resp. $\mathcal{E}_{\max}(0)$) is a threshold eigenvalue of $H_{\gamma\lambda}(0)$.

(ii) If $f \in L^{1,e}(\mathbb{T}^d)\backslash L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$, then we say that $\mathcal{E}_{\min}(0)$ (resp. $\mathcal{E}_{\max}(0)$) is a threshold resonance of $H_{\gamma\lambda}(0)$.

The main result of this note is the following theorem.

Theorem 1. *Let $K=0$ and $d\geq 3$.*

(i) If $(\gamma,\lambda)\in\partial\mathcal{S}_{0,d-1}$ resp. $(\gamma,\lambda)\in\partial\mathcal{S}_{d-1,0}$, then $\mathcal{E}_{\max}(0)$ resp. $\mathcal{E}_{\min}(0)$ is a upper resp. a lower threshold eigenvalue of multiplicity $d-1$ of H^a_λ;

(ii) Let $d=3,4$. If $(\gamma,\lambda)\in\partial\mathcal{C}^+_{i,i+1}$ resp. $(\gamma,\lambda)\in\partial\mathcal{C}^-_{i,i+1}, i=0,1$, then $\mathcal{E}_{\max}(0)$ resp. $\mathcal{E}_{\min}(0)$ is a upper resp. a lower threshold resonance of $H^s_{\gamma\lambda}$;

(iii) Let $d\geq 5$. If $(\gamma,\lambda)\in\partial\mathcal{C}^+_{i,i+1}$ resp. $(\gamma,\lambda)\in\partial\mathcal{C}^-_{i,i+1}, i=0,1$, then $\mathcal{E}_{\max}(0)$ resp. $\mathcal{E}_{\min}(0)$ is a upper resp. a lower threshold eigenvalue of $H^s_{\gamma\lambda}$;

(iv) Let $d=3,4$. If $(\gamma,\lambda)\in P_1^{\pm}$ or $(\gamma,\lambda)\in P_1^{\mp}$, then $\mathcal{E}_{\max}(0)$ and $\mathcal{E}_{\min}(0)$ are resp. a upper and a lower threshold resonance of $H^s_{\gamma\lambda}$;

(v) Let $d\geq 5$. If $(\gamma,\lambda)\in P_1^{\pm}$ or $(\gamma,\lambda)\in P_1^{\mp}$, then $\mathcal{E}_{\max}(0)$ and $\mathcal{E}_{\min}(0)$ are resp. a upper and a lower threshold eigenvalue of $H^s_{\gamma\lambda}$;

Theorem 2. *Let $K=0$ and $d\geq 3$. Then $H_{\gamma\lambda}(0)$ has the following facts are true:*

(i) Let $d=3,4$. If $(\gamma,\lambda)\in P_2^+$ resp. $(\gamma,\lambda)\in P_2^-$, then $\mathcal{E}_{\max}(0)$ resp. $\mathcal{E}_{\min}(0)$ is a upper resp. a lower threshold resonance and a upper resp. a lower threshold eigenvalue of multiplicity $d-1$ of $H_{\gamma\lambda}(0)$;

(ii) Let $d\geq 5$. If $(\gamma,\lambda)\in P_2^+$ resp. $(\gamma,\lambda)\in P_2^-$, then $\mathcal{E}_{\max}(0)$ resp. $\mathcal{E}_{\min}(0)$ is a upper resp. a lower threshold eigenvalue of multiplicity d of $H_{\gamma\lambda}(0)$;

(iii) Let $d = 3, 4$. If $(\gamma, \lambda) \in P_2^{\pm}$ resp. $(\gamma, \lambda) \in P_2^{\mp}$, then $\mathcal{E}_{\max}(0)$ is a upper threshold eigenvalue of multiplicity $d-1$ and $\mathcal{E}_{\min}(0)$ is a lower threshold resonance resp. $\mathcal{E}_{\min}(0)$ is a lower threshold eigenvalue of multiplicity $d-1$ and $\mathcal{E}_{\max}(0)$ is a upper threshold resonance of $H_{\gamma\lambda}(0)$;

(iv) Let $d \geq 5$. If $(\gamma, \lambda) \in P_2^{\pm}$ resp. $(\gamma, \lambda) \in P_2^{\mp}$, then $\mathcal{E}_{\max}(0)$ is a upper threshold eigenvalue of multiplicity $d-1$ and $\mathcal{E}_{\min}(0)$ is a lower threshold eigenvalue resp. $\mathcal{E}_{\min}(0)$ is a lower threshold eigenvalue of multiplicity $d-1$ and $\mathcal{E}_{\max}(0)$ is a upper threshold eigenvalue of $H_{\gamma\lambda}(0)$.

References

1. *Klaus M., Simon B.* Coupling constant thresholds in non-relativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case. Ann. Physics. **130**:2, 251-281 (1980).
2. *S.N. Lakaev, I.N. Bozorov.* The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice. Theoret. and Math. Phys. **158**, 360–376 (2009).
3. *Lakaev, S.N., Özdemir, E.* The existence and location of eigenvalues of the one particle Hamiltonians on lattices. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, **45**, 1693-1703 (2016).
4. *Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu., Khamidov Sh.I.* Bose–Hubbard models with on-site and nearest–neighbor interactions: exactly solvable case. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **54**, (2021).

On the number of eigenvalues of the discrete Schrödinger operator on lattices

[1]**Lakaev S.N.**, [2]**Akhmadova M.O.**, [3]**Alladustova I.U.**

[1] *Samarkand State University, University Boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: slakaev@mail.ru

[2] *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences, University street 4b, 100174 Tashkent, Uzbekistan,*

[3] *Samarkand State University, University Boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail:alladustova.iroda@mail.ru

We consider a family of Schrödinger operators $\hat{H}_{\gamma\lambda\mu} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{\gamma\lambda\mu}$ on the one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$, where $\hat{H}_0$ is a convolution operator with a given Hopping matrix $\hat{\varepsilon}$ and $\hat{V}_{\gamma\lambda\mu}$ a multiplication operator by the function $\hat{v}$ such that $\hat{v}(0) = \gamma$, $\hat{v}(x) = \frac{\lambda}{2}$ for $|x| = 1$, $\hat{v}(x) = \frac{\mu}{2}$ for $|x| = 2$ and $\hat{v}(x) = 0$ for $|x| > 2$, where $\gamma, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Under certain conditions on the potential, we prove that the discrete Schrödinger operator $\hat{H}_{\gamma\lambda\mu}$ can have zero, one, two or three eigenvalues below and above the essential spectrum. Moreover, we show conditions for the existence of three eigenvalues, where two of them are situated below the bottom and the other one above the top of the essential spectrum.

Let $\mathbb{Z}$ be the one-dimensional lattice and $\ell^{2,e}(\mathbb{Z})$ be the Hilbert space of square summable even functions on $\mathbb{Z}$. The one-particle discrete Schrödinger operator $\hat{H}_{\gamma\lambda\mu}$, which are dependent on real parameters γ, λ and μ, acting in $\ell^{2,e}(\mathbb{Z})$ is given as

$$\hat{H}_{\gamma\lambda\mu} = \hat{H}_0 + \hat{V}_{\gamma\lambda\mu},$$

where $\hat{H}_0$ is the convolution operator

$$(\hat{H}_0\hat{\varphi})(x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \hat{\varepsilon}(s)\hat{\varphi}(x+s), \ \ \hat{\varphi} \in \ell^{2,e}(\mathbb{Z})$$

and $\hat{V}_{\gamma\lambda\mu}$ is a multiplication operator

$$(\hat{V}_{\gamma\lambda\mu}\hat{\varphi})(x) := \hat{v}_{\gamma\lambda\mu}(x)\hat{\varphi}(x), \quad \hat{\varphi} \in \ell^{2,e}(\mathbb{Z}),$$

where, the functions $\hat{\varepsilon}(s)$ and $\hat{v}_{\gamma\lambda\mu}(s)$ are defined on $\mathbb{Z}$ as

$$\hat{\epsilon}(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } |s| = 0 \\ -\frac{1}{2} & \text{if } |s| = 1 \\ 0 & \text{if } |s| > 1 \end{cases} \quad \text{and} \quad \hat{v}_{\gamma\lambda\mu}(s) = \begin{cases} \gamma & \text{if } |s| = 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \text{if } |s| = 1 \\ \frac{\mu}{2} & \text{if } |s| = 2 \\ 0 & \text{if } |s| > 2. \end{cases}$$

We remark that $\hat{H}_{\gamma\lambda\mu}$ is a bounded self-adjoint operator on $\ell^{2,e}(\mathbb{Z})$.

In the momentum representation, the operator $H_{\gamma\lambda\mu}$ acts on the Hilbert space of square integrable even functions on one-dimensional torus $\mathbb{T}$, i.e. on $L^{2,e}(\mathbb{T}, d\nu)$ as

$$H_{\gamma\lambda\mu} = \mathcal{F}\hat{H}_{\gamma\lambda\mu}\mathcal{F}^* = H_0 + V_{\gamma\lambda\mu},$$

where $\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$ and $\mathcal{F}^* : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ are the standard Fourier transform and its inverse, respectively.

H_0 is the multiplication operator by function $\varepsilon(p) = 1 - \cos p,\ p \in \mathbb{T}$

$$(H_0 f)(p) = \varepsilon(p) f(p), \quad f \in L^{2,e}(\mathbb{T}, d\nu),$$

and $V_{\gamma\lambda\mu}$ is the integral operator

$$(V_{\gamma\lambda\mu} f)(p) = \int\limits_{\mathbb{T}} \Big(\gamma + \lambda \cos p \cos t + \mu \cos 2p \cos 2t\Big) f(t) d\nu(t), \quad f \in L^{2,e}(\mathbb{T}, d\nu).$$

The perturbation operator $V_{\gamma\lambda\mu}$, $\gamma, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ has a rank at most three, therefore by the well known Weyl's theorem the essential spectrum $\sigma_{ess}(H_{\gamma\lambda\mu})$ of $H_{\gamma\lambda\mu}$ does not depend on $\gamma, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ and coincides with the spectrum $\sigma(H_0)$ of H_0 (see [5]), i.e.,

$$\sigma_{ess}(H_{\gamma\lambda\mu}) = \sigma(H_0) = \big[\min_{p\in\mathbb{T}} \varepsilon(p), \max_{p\in\mathbb{T}} \varepsilon(p)\big] = [0, 2].$$

Let $\Delta_{\gamma\lambda\mu}(z)$ be the Fredholm determinant associated to the operator $H_{\gamma\lambda\mu}$. The following lemma describes the relations between the operator $H_{\gamma\lambda\mu}$ and determinant $\Delta_{\gamma\lambda\mu}(z)$.

Lemma. The number $z \in \mathbb{R} \setminus [0, 2]$ is an eigenvalue of the operator $H_{\gamma\lambda\mu}$ if and only if $\Delta_{\gamma\lambda\mu}(z) = 0$.

We get the following asymptotics for the determinant

$$\Delta_{\gamma\lambda\mu}(z) = C_-(\gamma, \lambda, \mu)\frac{1}{\sqrt{2}(-z)^{\frac{1}{2}}} + D_-(\gamma, \lambda, \mu) + O((-z)^{\frac{1}{2}}),\ as\ z \nearrow 0,$$

$$\Delta_{\gamma\lambda\mu}(z) = C_+(\gamma, \lambda, \mu)\frac{1}{\sqrt{2}(z-2)^{\frac{1}{2}}} + D_+(\gamma, \lambda, \mu) + O((-z)^{\frac{1}{2}}),\ as\ z \searrow 2,$$

where

$$C_\pm(\gamma, \lambda, \mu) = \gamma\lambda + 2\gamma\mu + \lambda\mu \mp (\gamma + \lambda + \mu + \gamma\lambda\mu)$$

and

$$D_\pm(\gamma, \lambda, \mu) = 1 - \gamma\lambda - 2\lambda\mu - 4\gamma\mu \mp (\lambda + \mu + \gamma\lambda\mu).$$

Our main results are given in the following theorem.

Theorem. Followings are true:

(i) If $\gamma, \lambda, \mu > 3$ then $H_{\gamma\lambda\mu}$ has three eigenvalues above the essential spectrum and has no eigenvalues below the essential spectrum.

(ii) If $\gamma, \lambda > 3, \mu < -3$ or $\gamma, \mu > 3, \lambda < -3$ or $\mu, \lambda > 3, \gamma < -3$ then $H_{\gamma\lambda\mu}$ has two eigenvalues above the essential spectrum and exactly one eigenvalue below the essential spectrum.

(iii) If $\gamma, \lambda < -3, \mu > 3$ or $\gamma, \mu < -3, \lambda > 3$ or $\mu, \lambda < -3, \gamma > 3$ then $H_{\gamma\lambda\mu}$ has only one eigenvalue above the essential spectrum and exactly two eigenvalues below the essential spectrum.

(iv) If $\gamma, \lambda, \mu < -3$ then $H_{\gamma\lambda\mu}$ has no eigenvalues above the essential spectrum and three eigenvalues below the essential spectrum.

References

1. *M.Klaus.* On the bound state of Schrödinger operators in one dimension, Ann. Phys. **108**, 288–300 (1977).

2. *B.Simon.* The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions, Ann. Phys. **97**, 279–288 (1976).

3. *S.N. Lakaev and E. Özdemir.* The existence and location of eigenvalues of the one particle Hamiltonians on lattices, Hacettepe J. Math. Stat. **45**, 1693–1703 (2016).

4. *S. Lakaev, Sh. Kholmatov and Sh. Khamidov.* Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: exactly solvable case, J.Phys.A: Math. Theor. **54**, id 245201 (2021).

5. *M. Reed and B. Simon.* Modern Methods of Mathematical Physics. IV: Analysis of Operators, Academic Press, New York, 1978.

The essential spectrum of a three particle Schrödinger operator on lattices

[1]**Lakaev S.N.**, [2]**Boltaev A.T.**

[1] *Samarkand State University, University boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: slakaev@mail.ru

[2] *Samarkand branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, University boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: atboltaev@mail.ru

We consider the Hamiltonian $\mathrm{H}_{\mu\lambda}, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$, of a system of three-particles (two identical bosons and one different particle) moving on the lattice $\mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2$, interacting through zero-range pairwise potentials $\mu \neq 0$ and $\lambda \neq 0$. The essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator $H_{\mu\lambda}(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$, being the three-particle quasi-momentum, is described by means of the spectrum of non-perturbed three-particle operator $H_0(K)$ and the two-particle discrete Schrödinger operators $h_\mu(k), h_{\lambda,\gamma}(k), k \in \mathbb{T}^d, \gamma > 0$. It is established that the essential spectrum of the three-particle discrete Schrödinger operator $H_{\mu\lambda}(K)$, $K \in \mathbb{T}^d$ consists of no more than three bounded closed intervals.

Let $\mathbb{T}^d \equiv (-\pi, \pi]^d$, $d = 1, 2$, be d-dimensional torus and $\eta(dp) = \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$ is the Haar measure on the torus. Let $L^2[\mathbb{T}^d]$ be Hilbert space of square integrable functions defined on $\mathbb{T}^d$ and $L^{2,e}(\mathbb{T}^d) \subset L^2(\mathbb{T}^d)$ be the subspace of even functions on $\mathbb{T}^d$ and $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ be the subspace of functions $\varphi \in L^2[(\mathbb{T}^d)^2]$ symmetric with respect to the permutation of the first two particle coordinates.

The two-particle discrete Schrödinger operators $h_\mu(k)$ and $h_{\lambda,\gamma}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ act in $L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$ and $L^2(\mathbb{T}^d)$, respectively, as

$$h_\mu(k) = h_0(k) + \mu v, \qquad h_{\lambda,\gamma}(k) = h_{0,\gamma}(k) + \lambda v.$$

Note that the operators $h_0(k)$ and $h_{0,\gamma}(k)$ are multiplication operators by the functions $\mathcal{E}_k$ and $\mathcal{E}_{k,\gamma}$, respectively:

$$(h_0(k)f)(p) = \mathcal{E}_k(p)f(p), f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^d), \qquad (h_{0,\gamma}(k)f)(p) = \mathcal{E}_{k,\gamma}(p)f(p), f \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

where

$$\mathcal{E}_k(p) = \varepsilon\left(\frac{k}{2} + p\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} - p\right), \qquad \mathcal{E}_{k,\gamma}(p) = \varepsilon(p) + \gamma\varepsilon(k - p),$$

where ε is of the form $\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{d}(1-\cos p_i), \quad p=(p_1,\dots,p_d)\in\mathbb{T}^d$ and

$$(vf)(p) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(q)\eta(dq), \quad f\in L^2(\mathbb{T}^d).$$

The three-particle discrete Schrödinger operator $H_{\mu\lambda}(K)$, $K\in\mathbb{T}^d$ acts in $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ as

$$H_{\mu\lambda}(K) = H_{0,\gamma}(K) + \mu V_{12} + \lambda V_{13} + \lambda V_{23}.$$

The operator $H_{0,\gamma}(K)$ given by:

$$(H_{0,\gamma}(K)f)(p,q) = E_{K,\gamma}(p,q)f(p,q), \quad f\in L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2], \tag{1}$$

where

$$E_{K,\gamma}(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(q) + \gamma\varepsilon(K-p-q). \tag{2}$$

The interaction operators V_{12}, V_{13}, V_{23} acting on $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ in coordinates $(p,q)\in(\mathbb{T}^d)^2$ can be written in the form

$$(V_{12}f)(p,q) = \int_{\mathbb{T}^d} f(t,p+q-t)\eta(dt), \tag{3}$$

$$(V_{13}f)(p,q) = \int_{\mathbb{T}^d} f(p,t)\eta(dt), \quad (V_{23}f)(p,q) = \int_{\mathbb{T}^d} f(t,q)\eta(dt). \tag{4}$$

There are only two different *channel operators* $H_{\mu,ch}(K), K\in\mathbb{T}^d$ and $H_{\lambda,ch}(K), K\in\mathbb{T}^d$ associated to the three-particle system of two identical bosons and one different particle. Observe that the operators $H_{\mu,ch}(K), K\in\mathbb{T}^d$ and $H_{\lambda,ch}(K), K\in\mathbb{T}^d$, $d=1,2$, act in the Hilbert spaces $L^{2,s}[(\mathbb{T}^d)^2]$ and $L^2[(\mathbb{T}^d)^2]$, respectively, as

$$H_{\mu,ch}(K) = H_{0,\gamma}(K) + \mu V_{12}, \qquad H_{\lambda,ch}(K) = H_{0,\gamma}(K) + \lambda V_{13},$$

where the operators $H_{0,\gamma}(K)$, V_{12} and V_{13} are defined by (1), (3) and (4), respectively.

For each $K\in\mathbb{T}^d$ the function $E_{K,\gamma}(\cdot,\cdot)$ defined in (2) is continuous and symmetric on $(\mathbb{T}^d)^2$, $d=1,2$, and hence the following equalities hold:

$$\mathrm{E}_{\min}(K) = \min_{p,q\in\mathbb{T}^d} E_{K,\gamma}(p,q), \quad \mathrm{E}_{\max}(K) = \max_{p,q\in\mathbb{T}^d} E_{K,\gamma}(p,q).$$

The non-perturbed three-particle operator $H_{0,\gamma}(K)$, $K\in\mathbb{T}^d$, is the multiplication operator by the function $E_{K,\gamma}(\cdot,\cdot)$, and hence, its spectrum $\sigma(H_{0,\gamma}(K))$ coincides with

$$\sigma(H_{0,\gamma}(K)) = [\mathrm{E}_{\min}(K), \mathrm{E}_{\max}(K)].$$

The essential spectrum of the three-particle operator $H_{\mu\lambda}(K)$, $K\in\mathbb{T}^d$, is described by the spectrum of the non perturbed operator $H_0(K)$ and the discrete spectrum of the two-particle operators $h_\mu(k)$, $k\in\mathbb{T}^d$ and $h_{\lambda,\gamma}(k)$, $k\in\mathbb{T}^d$.

Theorem 1. *Let $d=1,2$ and $\mu,\lambda\in\mathbb{R}$. The essential spectrum $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu\lambda}(K))$ of the operator $H_{\mu\lambda}(K)$ is the union of the spectra of the channel operators $H_{\mu,ch}(K)$ and $H_{\lambda,ch}(K)$, i.e.,*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mu\lambda}(K)) = \sigma(H_{\mu,ch}(K)) \cup \sigma(H_{\lambda,ch}(K)),$$

where

$$\sigma(H_{\mu,ch}(K)) = \bigcup_{k\in\mathbb{T}^d} [\sigma_d[h_\mu(k)] + \gamma\varepsilon(K-k)] \cup [\mathrm{E}_{\min}(K), \mathrm{E}_{\max}(K)],$$

$$\sigma(H_{\lambda,ch}(K)) = \bigcup_{k\in\mathbb{T}^d} [\sigma_d[h_\lambda(K-k)] + \varepsilon(k)] \cup [\mathrm{E}_{\min}(K), \mathrm{E}_{\max}(K)],$$

and $\sigma_d[h_\mu(k)]$ *and* $\sigma_d[h_{\lambda,\gamma}(k)]$ *are the discrete spectrums of the operators* $h_\mu(k)$ *and* $h_{\lambda,\gamma}(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$, *respectively.*

Corollary 1. *The essential spectrum* $\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu\lambda}(K))$ *of the operator* $H_{\mu\lambda}(K)$ *can be described as follows:*

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ess}}(H_{\mu\lambda}(K)) =& [\mathrm{E}_{\min}(K), \mathrm{E}_{\max}(K)] \cup \\ & \cup \bigcup_{k\in\mathbb{T}^d} [\sigma_d[h_\mu(k)] + \gamma\varepsilon(K-k)] \cup \bigcup_{k\in\mathbb{T}^d} [\sigma_d[h_\lambda(K-k)] + \varepsilon(k)],\end{aligned}$$

where the part of the essential spectrum $[\mathrm{E}_{\min}(K), \mathrm{E}_{\max}(K)]$ *is called three particle and the part* $\bigcup_{k\in\mathbb{T}^d}[\sigma_d[h_\mu(k)] + \gamma\varepsilon(K-k)] \cup \bigcup_{k\in\mathbb{T}^d}[\sigma_d[h_\lambda(K-k)] + \varepsilon(k)]$ *is called the two-particle essential spectrum.*

References

1. *V. Enss.* "A Note on Hunziker's Theorem," Comm. Math. Phys. **52** (3), 233–238 (1977).

2. *L.D. Faddeev and S.P. Merkuriev.* "Quantum scattering theory for several particle systems," Kluwer Academic Pub- lishers, Dordrecht, (1993).

3. *S. Albeverio, S.N. Lakaev and Z. I. Muminov.* "Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics," Ann. Henri Poincaré, **5** (4), 743–772 (2004).

4. *S. Albeverio , S.N. Lakaev and Z.I. Muminov.* "On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices," Math. Nachr. **280** (7), 699–716 (2007).

On the number of eigenvalues of the discrete Schrödinger operator on the two-dimensional lattices

[1]Lakaev S.N., [2]Akhmadova M.O.

[1] *Samarkand State University, University Boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan,*
e-mail: slakaev@mail.ru

[2] *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbek Academy of Sciences,*
University street 4b, 100174 Tashkent, Uzbekistan.

Let Z^2 be the two dimensional cubical lattice and $\ell^2(Z^2)$ be the Hilbert space of square-summable functions defined on Z^2. The one-particle Schrodinger operator $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ associated to a system of one particle moving on Z^2 in the potential field $V_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ is a bounded self-adjoint operator on the Hilbert space $\ell^2(Z^2)$ and in the position space representation has form

$$H_{\mu_1\mu_2\mu_3} := H_0 + V_{\mu_1\mu_2\mu_3}, \qquad \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in R,$$

where the free energy operator H_0 is a Laurent-Toeplitz-type operator

$$H_0 f(x) = \sum_{y\in Z^2} \varepsilon(x-y) f(y),\ f \in \ell^2(Z^2),$$

with

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} 2 & \text{if } |s| = 0, \\ -\frac{1}{2} & \text{if } |s| = 1, \\ 0 & \text{if } |s| > 1. \end{cases}$$

The potential field $V_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ is the multiplication operator acting in $\ell^2(Z^2)$ as

$$V_{\mu_1\mu_2\mu_3} f(x) = v_{\mu_1\mu_2\mu_3}(x) f(x),$$

where
$$v_{\mu_1\mu_2\mu_3}(s) = \begin{cases} \frac{\mu_1}{2} & \text{if } |s| = 0, \\ \frac{\mu_2}{2} & \text{if } |s| = 1, \\ \frac{\mu_3}{2} & \text{if } |s| = 2, \\ 0 & \text{if } |s| > 2, \end{cases}$$
and $|s| = |s_1| + |s_2|$ for $s = (s_1, s_2) \in Z^2$.

Under certain conditions on the potential, we prove that the discrete Schrödinger operator $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ can have five eigenvalues outside the essential spectrum. Moreover, we show conditions for the existence of five eigenvalues, where some of them are situated below the bottom and the others above the top of the essential spectrum.

Since the self-adjoint operator $V_{\mu_1\mu_2\mu_3}$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ is compact, by the classical Weyl theorem,
$$\sigma_{ess}(H_{\mu_1\mu_2\mu_3}) = \sigma(H_0) = [\mathfrak{e}_{\min}, \mathfrak{e}_{\max}],$$
where
$$\mathfrak{e}(p) = \sum_{x \in Z^2} e^{i(p,x)} \varepsilon(x),$$
and
$$\mathfrak{e}_{\min} := \min_{p \in T^2} \mathfrak{e}(p) = 0,$$
$$\mathfrak{e}_{\max} := \max_{p \in T^2} \mathfrak{e}(p) = 4.$$

Our main results are given in the following theorem.

Theorem. Followings are true:

(i) If $\mu_1, \mu_2, \mu_3 > 7$ then $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ has five eigenvalues above the essential spectrum and has no eigenvalues below the essential spectrum.

(ii) If $\mu_2, \mu_3 > 7, \mu_1 < -7$ then $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ has four eigenvalues above the essential spectrum and one eigenvalue below the essential spectrum.

(iii) If $\mu_1 > 7, \mu_2 > 7, \mu_3 < -7$ or $\mu_1 > 7, \mu_3 > 7, \mu_2 < -7$ then $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ has three eigenvalues above the essential spectrum and two eigenvalues below the essential spectrum.

(iv) If $\mu_1 < -7, \mu_2 < -7, \mu_3 > 7$ or $\mu_1 < -7, \mu_3 < -7, \mu_2 > 7$ then $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ has two eigenvalues above the essential spectrum and three eigenvalues below the essential spectrum.

(v) If $\mu_2, \mu_3 < -7, \mu_1 > 7$ then $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ has exactly one eigenvalues above the essential spectrum and four eigenvalue below the essential spectrum.

(vi) If $\mu_1, \mu_2, \mu_3 < -7$ then $H_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ has no eigenvalues above the essential spectrum and has five eigenvalues below the essential spectrum.

References

1. *S.N. Lakaev and E. Özdemir.* The existence and location of eigenvalues of the one particle Hamiltonians on lattices, Hacettepe J. Math. Stat. **45**, 1693–1703 (2016).

2. *S. Lakaev, Sh. Kholmatov and Sh. Khamidov.* Bose-Hubbard models with on-site and nearest-neighbor interactions: exactly solvable case, J.Phys.A: Math. Theor. **54**, id 245201 (2021).

On the discrete spectra of Schrödinger-type operators on one dimensional lattices

[1]Lakaev S.N., [2]Boltaev A.T., [3]Almuratov F.M.
[1] *Samarkand State University, University boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan*
e-mail: slakaev@mail.ru
[2] *Samarkand branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, University boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan*
e-mail: atboltaev@gmail.com
[3] *Samarkand State University, University boulevard 15, 140104 Samarkand, Uzbekistan*
e-mail: almurotov93@mail.ru

Let $\mathbb{Z}$ be the one dimensional cubical lattice and $\ell^2(\mathbb{Z})$ be the Hilbert space of square-summable functions on $\mathbb{Z}$. Let $\mathbb{T} := (-\pi, \pi]$ be the one dimensional torus, the dual group to $\mathbb{Z}$ and let $L^2(\mathbb{T})$ be the Hilbert space of square-integrable functions on $\mathbb{T}$.

In the coordinate space representation, the energy operator $\widehat{H}_\mu$ is defined as

$$\widehat{H}_\mu := \widehat{H}_0 + \mu\widehat{V}, \qquad \mu \geq 0,$$

where the free energy operator $\widehat{H}_0$ is a Laurent-Toeplitz-type operator

$$\widehat{H}_0\widehat{f}(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{e}}(x-y)\widehat{f}(y),$$

in $\ell^2(\mathbb{Z})$, given by a *Hopping matrix* $\widehat{\mathfrak{e}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ of the particle which satisfies $\widehat{\mathfrak{e}}(x) = \overline{\widehat{\mathfrak{e}}(-x)}$, and the potential energy operator is the multiplication in $\ell^2(\mathbb{Z})$ by a function $\hat{v}$ such that $\hat{v}(0) = a$, $\hat{v}(x) = b$ for $|x| = 1$ and $\hat{v}(x) = 0$ for $|x| \geq 2$, where $a, b \in R \setminus \{0\}$.

In the momentum space representation, the operator acts in $L^2(\mathbb{T})$ by

$$H_\mu = \mathcal{F}\hat{H}_\mu\mathcal{F}^* = \mathcal{F}\hat{H}_0\mathcal{F}^* + \mu\mathcal{F}\widehat{V}\mathcal{F}^* = H_0 + \mu V,$$

where

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T}), \quad \mathcal{F}\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(x) e^{\mathrm{i}(p,x)}$$

is the standard Fourier transform with the inverse

$$\mathcal{F}^* : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \mathcal{F}^* f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{T}} f(p) e^{-\mathrm{i}(p,x)} \mathrm{d}p.$$

The free hamiltonian H_0 is the multiplication operator in $L^2(\mathbb{T})$ by the function $\mathfrak{e} := \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\widehat{\mathfrak{e}}$ so-called the *dispersion relation* of the particle and the potential operator V acts on $L^2(\mathbb{T})$ as a convolution operator

$$Vf(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (a + 2b\,\cos(p-q)) f(q) dq, \qquad f \in L^2(\mathbb{T}),$$

Since $\widehat{V}$ is compact, by the Weyl Theorem [4],

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\widehat{H}_\mu) = \sigma(\widehat{H}_0) = [\min\,\mathfrak{e}, \max\,\mathfrak{e}] = [\mathfrak{e}_{\min}, \mathfrak{e}_{\max}]$$

In what follow we always assume:

Hypothesis *The dispersion relation $\mathfrak{e}$ is a real-valued even function having a unique non-degenerate maximum at $\pi \in \mathbb{T}$. Moreover, $\mathfrak{e}$ is analytic near π.*

Let $L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T})$ and $L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T})$ be the subspaces of essentially even and essentially odd functions in $L^2(\mathbb{T})$. Recall that

$$L^2(\mathbb{T}) = L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T}) \oplus L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T}).$$

Since $\mathfrak{e}(p)$ is even, each of the subspaces $L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T})$ and $L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T})$ is invariant with respect to H_0. Recalling that

$$Vf(p) = V^e f(p) + V^o f(p) = \frac{a}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(q)\mathrm{d}q + \frac{b}{\pi}\cos p\int_{\mathbb{T}}\cos q f(q)\mathrm{d}q + \frac{b}{\pi}\sin p\int_{\mathbb{T}}\sin q f(q)\mathrm{d}q,$$

we get that each $L^{2,\mathrm{e}}$ and $L^{2,\mathrm{o}}$ is invariant also with respect to V.

Let $H_\mu^{\mathrm{e}} := H_\mu\big|_{L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T})}$ and $H_\mu^{\mathrm{o}} := H_\mu\big|_{L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T})}$. Therefore,

$$\sigma(H_\mu) = \sigma(H_\mu^e)\cup\sigma(H_\mu^o).$$

Let

$$\mu_{\mathrm{e}} := \frac{a+2b}{ab}\Big(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{(\cos q+1)^2\mathrm{d}q}{\mathfrak{e}_{\max}-\mathfrak{e}(q)}\Big)^{-1}.$$

First we study the existence of eigenvalues of H_μ^e on depending all the parameters a, b and μ and establish absorption rate of these eigenvalues by the essential spectrum.

Theorem 1. *(a) Assume that $a, b < 0$. Then for any $\mu > 0$ the operator H_μ^{e} has no eigenvalue above the essential spectrum.*

(b) Assume that $ab < 0$ and $a+2b \ge 0$. Then for any $\mu > 0$ the operator H_μ^{e} has a unique eigenvalue $E_{\mathrm{e}}(\mu) > \mathfrak{e}_{\max}$ and $E_{\mathrm{e}}(\cdot)$ is real-analytic, strictly increasing and convex in $(0,+\infty)$.

(c) Assume that $ab < 0$ and $a+2b < 0$. Then for any $\mu \le \mu_{\mathrm{e}}$ the operator H_μ^{e} has no eigenvalue above the essential spectrum and for any $\mu > \mu_{\mathrm{e}}$ the operator H_μ^{e} has a unique eigenvalue $E_{\mathrm{e}}(\mu) > \mathfrak{e}_{\max}$ and $E_{\mathrm{e}}(\cdot)$ is real-analytic, strictly increasing and convex in $(\mu_{\mathrm{e}},+\infty)$.

(d) Assume that $a, b > 0$. Then for any $\mu \le \mu_{\mathrm{e}}$ the operator H_μ^{e} has a unique eigenvalue $E_{\mathrm{e}}^{(1)}(\mu) > \mathfrak{e}_{\max}$ and for any $\mu > \mu_{\mathrm{e}}$ the operator H_μ^{e} has two eigenvalues $E_{\mathrm{e}}^{(1)}(\mu), E_{\mathrm{e}}^{(2)}(\mu) > \mathfrak{e}_{\max}$. Moreover, the functions $E_{\mathrm{e}}^{(1)}(\cdot)$ and $E_{\mathrm{e}}^{(2)}(\cdot)$ are real-analytic and strictly increasing in $(0,+\infty)$ and $(\mu_{\mathrm{e}},+\infty)$, respectively.

Let us introduce first the following real numbers:

$$\Theta^* := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{(1+\cos p)\mathrm{d}p}{\mathfrak{e}_{\max}-\mathfrak{e}(p)} \quad \text{and} \quad \Theta^{**} := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{2\cos p\,(1+\cos p)\mathrm{d}p}{\mathfrak{e}_{\max}-\mathfrak{e}(p)}.$$

Note that all these numbers are finite.

Theorem 2. *Let $E_{\mathrm{e}}(\cdot), E_{\mathrm{e}}^{(1)}(\cdot)$ and $E_{\mathrm{e}}^{(2)}(\cdot)$ be as in Theorem 1.*

(a) Assume that either $\frac{a+2b}{ab} \le 0$ or $a, b > 0$ and let $X_{a,b} : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ be defined as

$$X_{a,b}(\mu) = \begin{cases} E_{\mathrm{e}}(\mu) & \text{if } \frac{a+2b}{ab} \le 0,\\ E_{\mathrm{e}}^{(1)}(\mu) & \text{if } a, b > 0.\end{cases}$$

Then for sufficiently small and positive μ the function $X_{a,b}(\mu) - \mathfrak{e}_{\max}$ has a convergent expansion

$$X_{a,b}(\mu) - \mathfrak{e}_{\max} = \begin{cases} \Big(c_{\mathrm{e}}\,\mu + \sum\limits_{n\ge 2} c_n\mu^n\Big)^2 & \text{if } a+2b > 0,\\ \Big(c_{\mathrm{e}}\,\mu^2 + \sum\limits_{n\ge 3} c_n\mu^n\Big)^2 & \text{if } a+2b = 0,\end{cases}$$

where $\{c_n\}$ are real coefficients,

$$c_{\mathrm{e}} = \begin{cases} \frac{1}{2}J_0(a+2b) & \text{if } a+2b > 0,\\ J_0 b^2\beta_0 & \text{if } a+2b = 0,\end{cases}$$

J_0 is positive number and β_0 are some universal coefficient depending only on $\mathfrak{e}$.

(b) Assume that $\frac{a+2b}{ab} > 0$ *and let* $Y_{a,b} : (\mu_{\rm e}, +\infty) \to \mathbb{R}$ *be defined as*

$$Y_{a,b}(\mu) = \begin{cases} E_{\rm e}(\mu) & \text{if } ab < 0 \text{ and } a + 2b < 0, \\ E_{\rm e}^{(2)}(\mu) & \text{if } a, b > 0. \end{cases}$$

Then for sufficiently small and positive $\mu - \mu_{\rm e}$ *the function* $Y_{a,b}(\mu) - \mathfrak{e}_{\max}$ *has the following convergent expansions:*

- *if* $\Theta^* a \neq \Theta^{**} b$, *then*

$$Y_{a,b}(\mu) - \mathfrak{e}_{\max} = \Big(c_{\rm e}\,(\mu - \mu_{\rm e}) + \sum_{n\geq 2} c_n (\mu - \mu_{\rm e})^n\Big)^2,$$

  where $\{c_n\}$ *are real coefficients,*

$$c_{\rm e} = \frac{J_0 ab(a+2b)}{(\Theta^* a - \Theta^{**} b)^2}\Big(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{(\cos p + 1)^2 {\rm d}p}{\mathfrak{e}_{\max} - \mathfrak{e}(p)}\Big)^2 > 0;$$

- *if* $\Theta^* a = \Theta^{**} b$, *then sufficiently small and positive* $\mu - \mu_{\rm e} > 0$ *the function* $Y_{a,b}(\mu) - \mathfrak{e}_{\max}$ *has a convergent expansion*

$$Y_{a,b}(\mu) - \mathfrak{e}_{\max} = \Big(c_{\rm e}\,(\mu - \mu_{\rm e})^{1/2} + \sum_{n\geq 2} c_n (\mu - \mu_{\rm e})^{n/2}\Big)^2,$$

  where $\{c_n\}$ *are real coefficients,*

$$c_{\rm e} := \sqrt{\frac{ab}{(a+2b)\gamma_{\rm e}^2}}\Big(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{(\cos q + 1)^2\,{\rm d}q}{(\mathfrak{e}_{\max} - \mathfrak{e}(q))^2}\Big)^{-1/2} > 0.$$

Now we formulate the results of existence of eigenvalues for H_μ^o on depending all the parameters a, b and μ and their absorption rate by the essential spectrum.

References

1. *M. Klaus, B. Simon.*Coupling constant thresholds in nonrelativistic Quantum Mechanics. I. Short-range two-body case. Ann. Phys. **130** (1980), 251–281.
2. *Sh. Kholmatov, S. Lakaev, F. Almuratov.* Bound states of Schrodinger-type operators on one and two dimensional lattices. J. Math. Anal. Appl. **503** (2021), 125280.
3. *Sh. Kholmatov, S. Lakaev, F. Almuratov.* On the spectrum of Schrodinger-type operators on two dimensional lattices. J. Math. Anal. Appl. **514** (2), 126363 (2022).
4. *M. Reed, B. Simon.* Modern Methods of Mathematical Physics. IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York. (1978).

The number and location of eigenvalues of the two particle discrete Schrödinger operators

[1]Lakaev S.N., [2]Khamidov Sh., [3]Temirova D.

[1] *Uzbekistan, Samarkand State University and Samarkand branch of the Institute of Mathematics*
e-mail: slakaev@mail.ru

[2] *Uzbekistan, Samarkand State University and Samarkand branch of the Institute of Mathematics*
e-mail: shoh.hamidov1990@mail.ru

[3] *Uzbekistan, Samarkand State University*

Let $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi)^d$ be the d-dimensional torus. Let $L^2(\mathbb{T}^d)$ be the Hilbert space of square-integrable functions on $\mathbb{T}^d$ and $L^{2,e}(\mathbb{T}^d) \subset L^2(\mathbb{T}^d)$ be the subspace of even functions on $\mathbb{T}^d$. For any $\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$ and $k \in \mathbb{T}^d$ the bounded and self-adjoint Schrödinger operator $H_{\gamma\lambda}(k)$ associated to a system of two identical particles (bosons) moving on the d-dimensional lattice $\mathbb{Z}^d$ acts in $L^{2,e}(\mathbb{T}^d)$(see,e.g.[1,2,3,4]) as

$$H_{\gamma\lambda}(k) = H_0(k) + V_{\gamma\lambda}.$$

Here the non-perturbed operator $H_0(k)$, $k \in \mathbb{T}^d$ is the multiplication operator by the function

$$\mathcal{E}_k(p) := 2\sum_{i=1}^{d}\Big(1 - \cos\tfrac{k_i}{2}\,\cos p_i\Big).$$

The perturbation operator $V_{\gamma\lambda}$ is defined as

$$V_{\gamma\lambda}f(p) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\Big(\gamma + \lambda\sum_{i=1}^{d}\cos p_i\cos q_i\Big)f(q)\mathrm{d}q.$$

The operator $H_0(k),\ k \in \mathbb{T}^d$ is the multiplication operator by the continuous real function $\mathcal{E}_k(p)$ defined on $\mathbb{T}^d$, therefore its spectrum consist only of the essential spectrum, i.e.

$$\sigma(H_0(k)) = \sigma_{\rm ess}(H_0(k)) = [\mathcal{E}_{\min}(k),\, \mathcal{E}_{\max}(k)],$$

with

$$\mathcal{E}_{\min}(k) := \min_{p\in\mathbb{T}^d}\,\mathcal{E}_k(p) = 2\sum_{i=1}^{d}\Big(1 - \cos\tfrac{k_i}{2}\Big) \geq 0 = \mathcal{E}_{\min}(0),$$

$$\mathcal{E}_{\max}(k) := \max_{p\in\mathbb{T}^d}\,\mathcal{E}_k(p) = 2\sum_{i=1}^{d}\Big(1 + \cos\tfrac{k_i}{2}\Big) \leq 4d = \mathcal{E}_{\max}(0).$$

Let $k = 0$. The spaces

$$L^{2,e,s}(\mathbb{T}^d) := \Big\{f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^d):\ f(p_1,...,p_d) = \Pi_2 f(p_1,...,p_d),\ p_1,...,p_d \in \mathbb{T}\Big\},$$

and

$$L^{2,e,a}(\mathbb{T}^d) := \Big\{f \in L^{2,e}(\mathbb{T}^d):\ f(p_1,...,p_d) = -\Pi_2 f(p_1,...,p_d),\ p_1,...,p_d \in \mathbb{T}\Big\}$$

of symmetric and antisymmetric even functions are invariant with respect to $H_{\gamma\lambda}(0)$, where Π_2 is the permutation of any two variables p_i and p_j, $i,\, j = 1,...,d$.

The operators $H^s_{\gamma\lambda}$ and H^a_λ act on $L^{2,e,s}(\mathbb{T}^d)$ and $L^{2,e,a}(\mathbb{T}^d)$ by the formulas

$$H^s_{\gamma\lambda} := H_0(0) + V^s_{\gamma\lambda} \qquad \text{and} \qquad H^a_\lambda := H_0(0) + V^a_\lambda,$$

where $V^s_{\gamma\lambda}$ and V^a_λ are integral operators given as

$$V^s_{\gamma\lambda}f(p) = \frac{\gamma}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d} f(q)\,\mathrm{d}q + \frac{\lambda}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{2(d-1)}\sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=i+1}^{d}(\cos p_i + \cos p_j)\int\limits_{\mathbb{T}^d}(\cos q_i + \cos q_j)f(q)\,\mathrm{d}q$$

and

$$V_\lambda^a f(p) = \frac{\lambda}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{2(d-1)}\sum_{i=1}^{d-1}\sum_{j=i+1}^{d}(\cos p_i - \cos p_j)\int\limits_{\mathbb{T}^d}(\cos q_i - \cos q_j) f(q)\,\mathrm{d}q.$$

For any $d \geqslant 3$ there exist the following finite limits:

$$\lim_{z\nearrow 0} a(z) = a(0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)}, \qquad \lim_{z\nearrow 0} b(z) = b(0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos p_i \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)},$$

$$\lim_{z\nearrow 0} c(z) = c(0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos^2 p_i \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)}, \quad \lim_{z\nearrow 0} e(z) = e(0) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos p_i \cos p_j \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)}$$

and

$$\lim_{z\searrow 4d} a(z) = a(4d) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)-4d}, \quad \lim_{z\searrow 4d} b(z) = b(4d) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos p_i \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)-4d},$$

$$\lim_{z\searrow 4d} c(z) = c(4d) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos^2 p_i \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)-4d}, \quad \lim_{z\searrow 4d} e(z) = e(4d) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\frac{\cos p_i \cos p_j \mathrm{d}p}{\varepsilon_0(p)-4d}.$$

Let

$$\lambda_0^+ = (e(4d) - c(4d))^{-1} > 0 \quad \text{and} \quad \lambda_0^- = (e(0) - c(0))^{-1} < 0.$$

In the (γ,λ)-plane let us define the following sets for $d \geq 3$:

$$\mathcal{S}_{0,d-1} := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2:\ \lambda > \lambda_0^+\Big\},$$

$$\mathcal{S}_{00} := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2:\ \lambda_0^- < \lambda < \lambda_0^+\Big\},$$

$$\mathcal{S}_{d-1,0} := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2:\ \lambda < \lambda_0^-\Big\},$$

$$\mathcal{C}_0^+ := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2:\ 1-\gamma a(4d) - \lambda(d-\frac{\gamma}{2})b(4d) > 0,\ \lambda < 2\frac{a(4d)}{b(4d)}\Big\},$$

$$\mathcal{C}_1^+ := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2:\ 1-\gamma a(4d) - \lambda(d-\frac{\gamma}{2})b(4d) < 0\Big\},$$

$$\mathcal{C}_2^+ := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2:\ 1-\gamma a(4d) - \lambda(d-\frac{\gamma}{2})b(4d) > 0,\ \lambda > 2\frac{a(4d)}{b(4d)}\Big\},$$

$$\mathcal{C}_0^- := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2:\ 1+\gamma a(0) + \lambda(d+\frac{\gamma}{2})b(0) > 0,\ \lambda > -2\frac{a(0)}{b(0)}\Big\},$$

$$\mathcal{C}_1^- := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2:\ 1+\gamma a(0) + \lambda(d+\frac{\gamma}{2})b(0) < 0\Big\},$$

$$\mathcal{C}_2^- := \Big\{(\gamma,\lambda)\in\mathbb{R}^2:\ 1+\gamma a(0) + \lambda(d+\frac{\gamma}{2})b(0) > 0,\ \lambda < -2\frac{a(0)}{b(0)}\Big\}.$$

The main result of this note is the following theorem.

Theorem 1. *Let $k = 0$ and $d \geq 3$. Then the operators H_λ^a and $H_{\gamma\lambda}^s$ have the following facts:*

(i) if $(\gamma,\lambda) \in \overline{\mathcal{S}_{00}}$, then H_λ^a has no eigenvalues associated to the antisymmetric bound states outside the essential spectrum where $\overline{A}$ is the closure of a set A;

(ii) if $(\gamma,\lambda) \in \mathcal{S}_{0,d-1}$ and $(\gamma,\lambda) \in \mathcal{S}_{d-1,0}$, then H_λ^a has an eigenvalue of multiplicity $d-1$ associated to the antisymmetric bound state above and below the essential spectrum, respectively;

(iii) if $(\gamma,\lambda) \in \overline{\mathcal{C}_0^+}$ and $(\gamma,\lambda) \in \overline{\mathcal{C}_0^-}$, then $H_{\gamma\lambda}^s$ has no eigenvalues associated to the symmetric bound states above and below the essential spectrum, respectively;

(iv) if $(\gamma,\lambda) \in \mathcal{C}_1^+ \cup \partial\mathcal{C}_2^+$ and $(\gamma,\lambda) \in \mathcal{C}_1^- \cup \partial\mathcal{C}_2^-$, then $H_{\gamma\lambda}^s$ has a unique eigenvalue associated to the symmetric bound state above and below the essential spectrum, respectively, where ∂A is the topological boundary of a set ∂A;

(v) if $(\gamma,\lambda)\in\mathcal{C}_2^+$ and $(\gamma,\lambda)\in\mathcal{C}_2^-$, then $H^s_{\gamma\lambda}$ has a exactly two eigenvalues associated to the symmetric bound states above and below the essential spectrum, respectively.

References

1. *Klaus M., Simon B.* Coupling constant thresholds in non-relativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case. Ann. Physics. **130**:2, 251-281 (1980).
2. *S.N. Lakaev, I.N. Bozorov.* The number of bound states of a one-particle Hamiltonian on a three-dimensional lattice. Theoret. and Math. Phys. **158**, 360–376 (2009).
3. *Lakaev, S.N., Özdemir, E.* The existence and location of eigenvalues of the one particle Hamiltonians on lattices. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, **45**, 1693-1703 (2016).
4. *Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu., Khamidov Sh.I.* Bose–Hubbard models with on-site and nearest–neighbor interactions: exactly solvable case. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **54**, (2021).

Integration of the type loaded second-order Korteweg-de Vries equation with a free term independent of the spatial variable

[1] **Matyakubov M. M.**, [2] **Xayitova S. O.**

[1] *Urgench State University, Urgench, Uzbekistan,*
e-mail: mmm2210410@mail.ru

[2] *Urgench State University, Urgench, Uzbekistan*

Solutions in the class of periodic functions for KdV equation were studied in [1]–[3] in various formulations. In the works of [4] the KdV equation with free a term independent of the spatial variable, and in the work of [5], [6] the KdV equation with a loaded term was studied.

In this work, we study the loaded second-order KdV equation with a free term independent of the spatial variable, namely, we consider the following equation

$$q_t=\frac{1}{4}q_{xxxxx}-5q_xq_{xx}-\frac{5}{2}qq_{xxx}+\frac{15}{2}q^2q_x+\gamma(t)\cdot q\left.\right|_{x=0}\cdot q_x+f(t),x\in R,t>0 \tag{1}$$

with initial condition

$$q(x,t)|_{t=0}=q_0(x), \tag{2}$$

where $\gamma(t)\in C\,[0,\ \infty)$ and $f(t)$ is given real continuous function and $q_0(x)\in C^5(R^1)$ is given real function. It is required to and a real function $q(x,t)$, that is π-periodic in a variable x:

$$q(x+\pi,t)\equiv q(x,t),x\in R,t>0 \tag{3}$$

and satisfies the smoothness conditions:

$$q(x,t)\in C_x^5(t>0)\bigcap C_t^1(t>0)\bigcap C(t\geq 0). \tag{4}$$

Theorem. Let $q(x,t)$ be the solution of problem (1)-(4). Then the boundaries $\lambda_n(t)$, $n\geq 0$ of the spectrum of the following operator

$$L(\tau,t)y\equiv -y''+q(x+\tau,t)y=\lambda y,x\in R \tag{5}$$

satisfy the system of equations

$$\dot{\lambda}_n(t)=f(t),n\geq 0, \tag{6}$$

and the spectral parameters $\xi_n(\tau,t)$, $n\geq 1$ satisfy the analogue of the system of equations of Dubrovin:

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)[-\frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t)+\frac{3}{2}q^2(\tau,t)+2\xi^2q(\tau,t)+4\xi_n^2-\gamma(t)q(0,t)]h_n(\xi)+f(t)h_n(\xi)=$$

$$= \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0) \prod_{\substack{k=1\\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}, n \geq 1, \tag{7}$$

the sign $\sigma_n(\tau, t)$ changes at each collision of the point $\xi_n(\tau, t)$ with the boundaries of its gap $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Moreover, the following initial conditions are fulfilled:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), n \geq 1, \tag{8}$$

where $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geq 1$ are the spectral parameters of the Sturm-Liouville equation corresponding to the coefficients $q_0(x + \tau)$.

Remark. Using the trace formula

$$q(\tau, t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau, t)) \tag{9}$$

$$q^2(\tau, t) - \frac{1}{2} q_{\tau\tau}(\tau, t) = \lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2 - 2\xi_k^2(\tau, t)) \tag{10}$$

system equations of Dubrovin can be rewritten in the “closed ” form.

Corollary 1. The theorem gives a method for solving problem (1)-(4).First we and the spectral data λ_n^0, $n \geq 0$; $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geq 1$ of the Sturm-Liouville equation

$$-y'' + q_0(x + \tau)y = \lambda y, x \in R.$$

Solving equations (6) with initial conditions $\lambda_n^0(t)\big|_{t=0} = \lambda_n^0$, $n \geq 0$, we and

$$\lambda_n(t) = \lambda_n^0 + \int_0^t f(s)ds, n \geq 0. \tag{11}$$

Further, solving the Cauchy problem (7),(8) for $\tau = 0$ we get $\xi_n(0, t)$, $n \geq 1$. Then substituting this data into equation (7) and solving the Cauchy problem $\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)$, $n \geq 1$ for Dubrovin system (7) we and $\xi_n(\tau, t)$, $n \geq 1$. Finally, by using the trace formula (9) and (10) we obtain q(τ, t).

Remark. Equations (6) show that the spectrum of the Sturm-Liouville operator (5) moves on the axis while keeping the initial structure, that is, the lengths of the gaps do not change.

Corollary 2. In [7], there was proved the theorem which states that the lengths of the gaps of the Sturm-Liouvelle equation with π-periodic real-valued coefficient decrease exponentially if and only if the coefficient is analytic. From this theorem we conclude that if $q_0(x)$ is real analytical function, then the lengths of the gaps corresponding to this coefficient decrease exponentially. For the coefficient $q(x, t)$ there correspond the same gaps. Thus the solution $q(x, t)$ of problem (1)-(4) is real analytical functions on x.

Corollary 3. In [8], a generalization of Borg's inverse theorem was proved: the number π/n is a period of the coefficient of the Sturm-Liouville equation with π-periodic real-valued coefficient if and only if all the lacunae whose numbers are not divisible by n are vanished. Here $n \geq 2$ is a natural number and the lacuna $(\lambda_{2k-1},\ \lambda_{2k})$ has a number k. Therefore, if $q_0(x)$ has a period π/n then the solution to problem (1)-(4) is the π/n - periodic function on x.

References

1. *Novikov S.P.* Korteweg-de Vries Periodic Problem I. // Funct. analysis and pril., 1974, vol. 8, no.3, p. 54-66.
2. *Dubrovin B.A., Novikov S.P.* Periodic and conditionally periodic analogues of multisoliton solutions of the Korteweg-de Vries equation. // ZhETF, 1974, v. 67, No. 12, p. 2131-2143.

3. *Lax P.* Periodic Solutions of the KdV equation. Comm. Pure Appl. Math., 1975, v. 28, p. 141-188.

4. *Yakhshimuratov, A.B.* Integration of the Korteweg-de Vries equation with a special free term in the class of periodic functions. Ufa Mat. Journal. 2011, vol. 3, no. 4, p. 144-150.

5. *Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М.* Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций// Известия вузов. Математика. 2016 г., N 2, с. 87-92.

6. *A. B. Khasanov and M. M. Matyakubov.* Integration of the nonlinear Kortewegde Vries equation with an additional term. Theoretical and Mathematical Physics, 2020, v. 203, No. 2, 596–607.

7. *Trubowitz E.* The inverse problem for periodic potentials. Comm. Pure. Appl. Math., 1977, v. 30, p. 321-337.

8. *Hochstadt H.* A Generalization of Borgs Inverse Theorem for Hills Equations. Journal of math. analysis and applications, 1984, 102, p. 599-605.

Optimal bounds on the speed of subspace evolution governed by time-independent Hamiltonians

Motovilov Alexander K.

Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR, Dubna, Russia

e-mail: motovilv@theor.jinr.ru

By a *quantum speed limit* one usually calls a lower bound on the time that is needed for a quantum system to evolve from a given state to a target state or a target subspace. The most known quantum speed limit is given in the form of the celebrated Mandelstam-Tamm inequality that bounds the minimal passage time of a state in terms of its energy dispersion. In contrast to the basic Mandelstam-Tamm inequality, we are concerned not with a single state but with a (possibly infinite-dimensional) subspace which is subject to the Schrödinger evolution. By using the concept of maximal angle between subspaces we derive optimal bounds on the speed of such a subspace evolution. Our present study extends the results obtained in [1] for time-independent Hamiltonians to the case of subspace evolution governed by a (possibly unbounded) *time-dependent* Hamiltonian.

References

1. *S. Albeverio and A.K. Motovilov.* Optimal bounds on the speed of subspace evolution *J. Phys. A: Math. Theor.* 55 (2022), 235203; DOI: 10.1088/1751-8121/ac6bcf.

On a solution of the integral geometry problem for a family of cones with a weight function

[1]**Muminov M.I.**, [2]**Ochilov Z. Kh.**

[1] *Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan),*

e-mail: mmuminov@mail.ru

[2] *Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan),*

e-mail: zarifjonochilov@mail.ru

We introduce the following notations

$$(x, y, z), (\xi, \eta, \zeta) \in R^3, \lambda, \mu \in R^1,$$

$$\Omega = \{(x, y, z) : \;\; x,\, y \in R^1, \;\; z \in [0, h] \;\;\; h < \infty\}.$$

A family of cones $S(x, y, z)$ is considered on Ω, which are uniquely parameterized using the coordinates of their vertices $(x, y, z) \in \Omega$:

$$S(x, y, z) = \left\{(\xi, \eta, \zeta) : (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (z - \zeta)^2, \quad \xi \in R, \quad \eta \in R, \quad 0 \leq \zeta \leq z\right\}.$$

Problem A. Determine a function of three variables $u(x, y, z)$, if the integrals of the function $u(x, y, z)$ over a family of cones $S(x, y, z)$ are known for all (x, y, z) of the layer Ω as

$$\iint_{S(x,y,z)} g\left(x-\xi, y-\eta\right) u\left(\xi, \eta, \zeta\right) ds = f\left(x, y, z\right),$$

where g is the weight function on R^2 and f is the function defined on Ω.

The weight function g consists of the function ρ, we will make the following substitutions. The main result of this paper is the following theorem

Theorem 1 (Existence). *Let the function $g(\rho)$ be differentiable function in R^2 with $g(0) \neq 0$ and $f \in L_2(\Omega)$ be a continuous function in $(x, y, z) \in \Omega$ and have continuous partial derivatives with respect to the variable z with $\frac{\partial}{\partial z} f \in L_2(\Omega)$, $f(x, y, 0) = 0$ and $\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) = 0$. Then the solution to Problem A is unique.*

The next theorem describes exact solutions to the problem for a certain class of weight functions g.

Theorem 2. *Let $f \in L_2(\Omega)$ be a continuous function in $(x, y, z) \in \Omega$ and have continuous partial derivatives up to the second order with respect to the variable z with $\frac{\partial}{\partial z} f, \frac{\partial^2}{\partial z^2} f \in L_2(\Omega)$, $f(x, y, 0) = 0$ and $\frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) = 0$. Let*

$$g(x-\xi, y-\eta) = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Then the function

$$u(x, y, z) = \int_0^z v(\lambda, \mu, t) dt.$$

where

$$v(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{9\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)^3}} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 + \mu^2\right)^5 \int_0^t (t-\tau)^2 J_1\left((t-\tau)\sqrt{\lambda^2+\mu^2}\right) f(\lambda, \mu, \tau) d\tau,$$

is unique solution of the Problem A.

References

1. *M.M. Lavrentyev, L.Ya. Savelyev.* Operator theory and ill-posed problems, Publishing house of the Institute of Mathematics, Moscow, 2010.
2. *A.Kh. Begmatov, M.E. Muminov, Z.H. Ochilov.* The problem of integral geometry of Volterra type with a weight function of a special type, Mathematics and Statistics, **3**, 2015, 113–120.
3. *Z.Kh. Ochilov, M.I. Muminov.* On the problem of restoring a function in three dimensional space by the family of cones, Advances in Mathematics: Scientific Journal, **10(11)**, 2021, 3505–3513.
4. *A.D. Polyanin, A.V. Manzhirov.* Handbook of Integral Equations, CRC Press LLC, N.W. Corporate Blvd., Boca Raton, Florida, 2000.

Existence conditions for solutions of mixed differential equation with piecewise continuous arguments

[1]**Muminov M.I.**, [2]**Radjabov T.A.**

Samarkand state university, 140100, Samarkand, Uzbekistan,

[1] mmuminov@mail.ru

[2]radjabovtirkash@yandex.com

In the note we give existence conditions for solutions of the following mixed equation with piecewise continuous arguments

$$T'(t) = aT(t) + bT([t]) + cT(2[\frac{t+1}{2}]), t > 0 \tag{1}$$

$$T(0) = T_0, \tag{2}$$

where a, b, c, T_0 are real constants and $[\cdot]$ denotes the greatest integer function. Since the second argument deviation $t - 2[(t+1)/2]$ is negative in $[2n, 2n+1)$ and positive in $[2n+1, 2n+2)$, so (1)-(2) is called as mixed type equation with piecewise continuous arguments. In particularly, when $c = 0$,the equation in (1)-(2) becomes $T'(t) = aT(t) + bT([t])$, which is exactly the case of [1]. If let $b = 0$, the equation in (1)-(2) becomes $T'(t) = aT(t) + cT(2[(t+1)/2])$, which is exactly the case of [2]. Thus, the results in this paper are the generalization of corresponding ones in [1] and [2].Applying the method used in [4] and [5] we construct existence conditions for solutions and their explicit formulas for the equation (1). In particular case, we prove existence infinitely many solutions of differential equations with piecewise constant argument, that shows incorrectness of uniqueness result given in [3].

Definition 1. A function $T(t)$ is called a solution of (1)-(2) if the following conditions are satisfied:

(i) $T(t)$ is continuous on $\mathbf{R}_+$;

(ii) $T'(t)$ exists and is continuous in $\mathbf{R}_+$, with possible exception at points $[t] \in \mathbf{R}_+$, where one-sided derivatives exist;

(iii) $T(t)$ satisfies Eq. (1,2) in $\mathbf{R}_+$, with the possible exception at the points $[t] \in \mathbf{R}_+$.

Let

$$E(t) = e^{at} - \frac{b}{a}(1 - e^{at}),$$

$$D(t) = \frac{c}{a}(1 - e^{at}).$$

Theorem 1.*Let a, b, c be real numbers. If $D(1) \neq -1$, then the equation (1) has a unique solution and it represents on $[2n, 2n+2), n = 0, 1, 2, ...$ as*

$$T(t) = \begin{cases} (e^{a(t-2n)} - \frac{b+c}{a}(1 - e^{a(t-2n)})\frac{E^n(1)}{(1+D(1))^n}(e^a - \frac{b+c}{a}(1-e^a))^n T_0, t \in [2n, 2n+1), \\ (E(t-2n-1) - D(t-2n-1)\frac{E(1)}{1+D(1)})\frac{E^n(1)}{(1+D(1))^n}(e^a - \\ -\frac{b+c}{a}(1-e^a))^{n+1}T_0, \qquad t \in [2n+1, 2n+2). \end{cases}$$

Theorem 2. *(i) If $D(1) = -1$ and $E(1) = 0$. Then the initial value problem (1)-(2) has infinitely many solutions. In particular case, this problem has a unique one-periodic and infinitely many $2N$-periodic solutions, $N = 1, 2, 3, ...$*

(ii) If Let $D(1) = -1$ and $E(1) \neq 0$. If $T_0 \neq 0$, then the initial value problem (1)-(2) has no any solutions. If $T_0 = 0$, then the initial value problem (1)-(2) has a trivial solution only.

Remark. *We construct an example such that the initial value problem (1)-(2) has infinitely many solutions which shows incorrectness of the results Theorem 2 in [3], that claims the uniqueness of the solution of (1)-(2).*

References

1. *M.Z. Liu, M.H. Song, Z.W. Yang.* Journal Comput. Appl. Math. 166(2004), 361-370.
2. *M.H. Song, M.Z. Liu.* Journal Inequal. Appl. 2012(2012).
3. *Qi Wang, Xiaoming Wang.* Stability and oscillation of mixed differential equation with piecewise continuous arguments, Asia Pacific Journal of Mathematics,Vol. 5, No. 1 (2018), 50-59.
4. *Mukhiddin I. Muminov.*On the method of finding periodic solutions of second-order neutral differential equations with piecewise constant arguments. Advances in Difference Equations(2017), 2017:336,
5. *Mukhiddin I. Muminov and Ali H. M. Murid.*Existence conditions for periodic solutions of second-order neutral delay differential equations with piecewise constant arguments. Open Mathematics, 2020-0010.

Spectral and Threshold analysis for Discrete Schrödinger operator with some potential

[1]Muminov Z., [2]Lakaev Sh.

[1] *Tashkent State University of Economy, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: zimuminov@gmail.com

[2] *National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: shlakaev@mail.ru

We consider a family of the discrete Schrödinger operators $H_{\lambda\mu}$, depending on two parameters, in the d-dimensional lattice with a potential constructed via the delta function and the shift operator. The existence of eigenvalues, threshold eigenvalue and threshold resonance and their dependence on the parameters of the operator and dimension of the lattice are explicitly derived.

The one-particle Hamiltonian $H_{\lambda\mu}$ in the momentum representation is given as

$$H_{\lambda\mu} = H_0 - V,$$

where the non-perturbed operator H_0 acts on $L^2(\mathbb{T}^d)$ as a multiplication operator by the function $\mathfrak{e}(\cdot)$

$$(H_0 f)(p) = \mathfrak{e}(p) f(p), \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d),$$

where

$$\mathfrak{e}(p) = \sum_{j=1}^{d} (1 - \cos p_j), \quad p \in \mathbb{T}^d.$$

In the physical literature, the function $\mathfrak{e}(\cdot)$ being a real valued-function on $\mathbb{T}^d$, is called the *dispersion relation* of the Laplace operator.

The perturbation V is the two-dimensional integral operator

$$(Vf)(p) = (V_{x_0} f)(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \Big(\mu + \lambda(e^{\mathrm{i}(x_0,p)} + e^{-\mathrm{i}(x_0,s)})\Big) f(s)ds, \quad f \in L^2(\mathbb{T}^d).$$

The perturbation V of H_0 is a two dimensional operator, therefore in accordance with the Weyl theorem on the stability of the essential spectrum the equality $\sigma_{\mathrm{ess}}(H) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0)$ holds, and the essential spectrum $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\lambda\mu})$ of the operator $H_{\lambda\mu}$ fills in the following interval on the real axis

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\lambda\mu}) = [\mathfrak{e}_{\min}, \mathfrak{e}_{\max}],$$

where $\mathfrak{e}_{\min} = 0, \quad \mathfrak{e}_{\max} = 2d.$

For brievity to describe the results, we use the following notations

$$a(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{1}{\mathfrak{e}(t) - z} dt, \quad b(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{T}^d} \frac{e^{\mathrm{i}(x_0,t)}}{\mathfrak{e}(t) - z} dt, \quad z \in \mathbb{R} \setminus [\mathfrak{e}_{\min}, \mathfrak{e}_{\max}].$$

For any $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, the Fredholm determinant associated to the operator $H_{\lambda\mu}$ as a regular function in $z \in \mathbb{C} \setminus [\mathfrak{e}_{\min}, \mathfrak{e}_{\max}]$ is defined as

$$\Delta(\lambda, \mu; z) = \big(1 - \lambda b(z)\big)^2 - \lambda^2 a^2(z) - \mu a(z).$$

For any $z \in \mathbb{R} \setminus [\mathfrak{e}_{\min}, \mathfrak{e}_{\max}]$, the number $a(z)$ is non-zero, and the equality

$$\Delta(\lambda, \mu; z) = a(z)\left(\frac{1}{a(z)} - \frac{2b(z)}{a(z)}\lambda - \frac{c(z)}{a(z)}\lambda^2 - \mu\right)$$

allows us to consider the parabola

$$P_z(\lambda, \mu) := \frac{1}{a(z)} - \frac{2b(z)}{a(z)}\lambda - \frac{c(z)}{a(z)}\lambda^2 - \mu = 0.$$

instead of the equality $\Delta(\lambda, \mu; z) = 0$.

Lemma 1. *The parabola $P_z(\lambda, \mu) = 0$ can be defined at $\mathfrak{e}_{\min}$ and $\mathfrak{e}_{\max}$ as*

$$\begin{aligned} P_{\mathfrak{e}_{\min}}(\lambda, \mu) :=& -2\lambda + \frac{2}{\nu_l}\lambda^2 - \mu = 0 \quad \textit{for} \quad d = 1, 2, \\ P_{\mathfrak{e}_{\min}}(\lambda, \mu) :=& \frac{1}{a_l} - \frac{2b_l}{a_l}\lambda - \frac{c_l}{a_l}\lambda^2 - \mu = 0 \quad \textit{for} \quad d \geq 3, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} P_{\mathfrak{e}_{\max}}(\lambda, \mu) :=& -2\lambda + \frac{2}{\kappa_r}\lambda^2 - \mu = 0 \quad \textit{for} \quad d = 1, 2 \quad \textit{with} \quad |x_0|_1 \textit{ - even}, \\ P_{\mathfrak{e}_{\max}}(\lambda, \mu) :=& 2\lambda - \frac{2}{\nu_r}\lambda^2 - \mu = 0 \quad \textit{for} \quad d = 1, 2 \quad \textit{with} \quad |x_0|_1 \textit{ - odd}, \\ P_{\mathfrak{e}_{\max}}(\lambda, \mu) :=& \frac{1}{a_r} - \frac{2b_r}{a_r}\lambda - \frac{c_r}{a_r}\lambda^2 - \mu = 0 \quad \textit{for} \quad d \geq 3, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} a_l :=& \lim_{z \to \mathfrak{e}_{\min}-} a(z), \ b_l := \lim_{z \to \mathfrak{e}_{\min}-} b(z), \ c_l := a_l^2 - b_l^2, \\ a_r :=& \lim_{z \to \mathfrak{e}_{\max}+} a(z), \ b_r := \lim_{z \to \mathfrak{e}_{\max}+} b(z), \ c_r := a_r^2 - b_r^2. \end{aligned}$$

Let Γ_l and Γ_r be graphs of the parabolas $P_{\mathfrak{e}_{\min}}(\lambda, \mu) = 0$ and $P_{\mathfrak{e}_{\max}}(\lambda, \mu) = 0$, respectively, in the $\lambda\mu$–plane. The lines Γ_l and Γ_r each divide the plane into two disjoint parts

$$G_0^l = \{(\lambda, \mu) : \ P_{\mathfrak{e}_{\min}}(\lambda, \mu) < 0\}, \qquad G_1^l = \{(\lambda, \mu) : \ P_{\mathfrak{e}_{\min}}(\lambda, \mu) > 0\}$$

and

$$G_0^r = \{(\lambda, \mu) : \ P_{\mathfrak{e}_{\max}}(\lambda, \mu) > 0\}, \qquad G_1^r = \{(\lambda, \mu) : \ P_{\mathfrak{e}_{\max}}(\lambda, \mu) < 0\}.$$

Now we can formulate the first main result of the paper.

Theorem 1.

(a) For $(\lambda, \mu) \in G_0^l \cup \Gamma_l$, the operator $H_{\lambda\mu}$ has no eigenvalues in $(-\infty, \mathfrak{e}_{\min}]$.

(b) For $(\lambda, \mu) \in G_1^l$, the operator $H_{\lambda\mu}$ has a simple eigenvalue in $(-\infty, \mathfrak{e}_{\min})$.

(c) For $(\lambda, \mu) \in G_0^r \cup \Gamma_r$, the operator $H_{\lambda\mu}$ has no eigenvalues in $[\mathfrak{e}_{\max}, \infty)$.

(d) For $(\lambda, \mu) \in G_1^r$, the operator $H_{\lambda\mu}$ has a simple eigenvalue in $[\mathfrak{e}_{\max}, \infty)$.

References

1. *Faria da Veiga P. A., Ioriatti L., and O'Carroll M.* Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonians. Phys. Rev. E (3) **66**, 016130, 9 pp. (2002).

2. *S.N. Lakaev, I.N. Bozorov.* The number of bound states of one particle Hamilonian on a three-dimensional lattice. Theoretical and Mathematical physics, **158**(3): 360-376 (2009)

3. *Zahriddin Muminov, Shukhrat Lakaev.* On negative eigenvalues of the discrete Schrodinger operator with non-local potential. Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. **3** (1) Article 4, (2020)

4. *Z.E. Muminov, Sh.U. Alladustov, and Sh.S. Lakaev.* Threshold Analysis of the Three Dimensional Lattice Schrodinger Operator with Non-local Potential. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, No. 6, pp. 1094–1102. c Pleiades Publishing, Ltd., 2020

A low-rank ODE's based tool to compute bounds of structured singular values

Mutti-Ur Rehman

Dept. of Mathematics, Akfa University-Tashkent and Sukkur IBA University-Pakistan,
e-mail: m.rehman@akfauniversity.org, mutti.rehman@iba-suk.edu.pk

Abstract. A novel method for approximating structured singular values is proposed and investigated. These quantities constitute an important tool in the stability analysis of uncertain linear control systems as well as in structured eigenvalue perturbation theory. Our approach consists of an inner-outer iteration. In the outer iteration, a Newton method is used to adjust the perturbation level. The inner iteration solves a gradient system associated with an optimization problem on the manifold induced by the structure. Numerical results and comparison with the well-known MATLAB function mussv, implemented in the MATLAB Control Toolbox, illustrate the behavior of the method.

On the one minimax control problem for differential inclusion with parameter of uncertainty

[1]**Otakulov S.**, [2]**Sobirova G.**

[1] *Doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Jizzakh Polytechnic Institute, Jizzakh, Uzbekistan,*
e-mail: otakulov52@mail.ru

[2] *Senior Lecturer, Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan ,*
e-mail: otakulov52@mail.ru

Questions of analysis and synthesis of control systems lead to the need to study models taking into account the influence of various internal and external parameters. The class of such models includes differential inclusions with control parameters and uncertainty [1-4]. Differential inclusions with control parameters arise in the study of control systems under conditions of uncertainty. For control systems in conditions of uncertainty, the tasks of controlling an ensemble of trajectories are of great importance. The problems of controlling an ensemble of trajectories for control systems under conditions of uncertainty and differential inclusions are considered in [4-7].

Consider the model of the control system in the form of the following differential inclusion.

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t,u) + D(t,q), x(t_0) \in X_0, u \in V, q \in Q, \ t \in T = [t_0, t_1], \tag{1}$$

where x - n-dimensional state vector, u-m-dimensional control vector, q-k-dimensional vector of external influences, $A(t)$-$n \times n$-matrix, $B(t,u) \subset R^n$,$D(t,q) \subset R^n$, $X_0 \subset R^n$, $V \subset R^m$, $Q \subset R^k$. With respect to parameter q, we will assume that it is constant over the interval $T = [t_0, t_1]$, but only its set of possible values Q is known. The control system (1) will be studied under the following assumptions: 1) the elements of matrix $A(t)$ are summable by $T = [t_0, t_1]$; 2) $X_0 \subset R^n$, $V \subset R^m$, $Q \subset R^k$ - convex compacts; 3) for any $t \in T = [t_0, t_1]$, $u \in V, q \in Q$ sets $B(t,u)$ and $D(t,q)$ non-empty compacts of R^n ; 4) the multi-valued map $(t,u) \to B(t,u)$ is measurable by $t \in T = [t_0, t_1]$, continuous by $u \in V$, and integrally bounded, i.e. there is a function $T = [t_0, t_1]$ summable by $\beta_B(t)$ such thatsup$\{\|\gamma\| : \gamma \in B(t,u)\} \leq \beta_B(t)\}$,$(t,u) \in T \times V$; 5) the multi-valued map $(t,q) \to D(t,q)$

is measurable by $t \in T = [t_0, t_1]$, continuous by , and integrally bounded, i.e. there is a function $T = [t_0, t_1]$ summable by $\beta_D(t)$ such that $\sup\{\|\gamma\| : \gamma \in B(t,u)\} \leq \beta_D(t)$,$(t,u) \in T \times V$;6) the support function of the set $D(t,q)$ is concave by $q \in Q$.

Let U - the set of all permissible controls; $H(u,q)$ - the set of admissibly trajectories corresponding to the pair $(u,q) \in U \times Q$; $X(t,u,q) = \{\xi \in R^n : \xi = x(t),\ x(\cdot) \in H(u,q)\}$,$X_1(u,q) = X(t_1,u,q)$. We will manage this terminal state $X_1(u,q)$ by evaluating the quality of the control process using the following non-smooth functionality

$$g(X_1(u,q)) = \sup\{\sum_{i=1}^{l} \min_{z_i \in Z_i} (z_i, P\xi) :\ \xi \in X_1(u,q)\}$$

where P-$s \times n$ is a matrix, $Z_i,\ i = \overline{1,l}$, are compacts of R^s. The terminal state $X_1(u,q)$ will be controlled according to the minimax principle, i.e. following minimax problem is considered

$$J(u) \equiv \sup_{q \in Q} g(X_1(u,q)) \to \min,\ u \in U \tag{2}$$

Let $F(t,\tau)$ be the fundamental matrix of solutions to equation $\dot{x} = A(t)x$, $F(\tau,\tau) = E$. The set $X_1(u,q)$ is a convex compact of R^n and its support function has the form:

$$(X_1(u,q),\psi) = (F(t_1,t_0)X_0,\psi) + \int_{t_0}^{t_1} (F(t_1,t)[B(t,u(t)) + D(t,q)],\psi)dt$$

We have $J(u) = \max\limits_{q \in Q} \min\limits_{z \in coZ} \gamma(u,q,z)$, where

$$\gamma(u,q,z) = (X_0,\psi(t_0,z)) + \int_{t_0}^{t_1} (B(t,u(t)) + D(t,q),\psi(t,z))dt$$

$\psi(t,z)$- absolutely continuous solution of system $\dot{\psi} = A'(t)\psi,\ \psi(t_1) = P'z$. Functional $\gamma(u,q,z)$ is concave by and convex by $z \in coZ$. Therefore, applying the minimax theorem, we obtain the following formula:

$$J(u) = \min_{z \in coZ} [(X_0,\psi(t_0,z)) + \max_{q \in Q} \int_{t_0}^{t_1} (B(t,u(t)) + D(t,q),\psi(t,z))dt]$$

Let's introduce the following functionals:

$$\rho(q,z) = (X_0,\psi(t_0,z)) + \int_{t_0}^{t_1} \min_{v \in V} (B(t,v),\psi(t,z))dt + \int_{t_0}^{t_1} (D(t,q),\psi(t,z))dt$$

Theorem 1. Let $u^*(t)$, $t \in T = [t_0,t_1]$, be the optimal control in problem (2). Then there exists a $z^* \in coZ$- point of the global minimum of the function $z \to \max\limits_{q \in Q} \rho(q,z)$ by coZ , such that, for almost all $t \in T = [t_0,t_1]$, following equality holds:

$$\min_{v \in V} (B(t,v),\psi(t,z^*)) = (B(t,u^*(t)),\psi(t,z^*)) \tag{3}$$

Theorem 2. Let $z^* \in coZ$ be the point of the global minimum of a function $z \to \max\limits_{q \in Q} \rho(q,z)$ by coZ, and $u^*(t)$, $t \in T = [t_0,t_1]$ be a admissible control satisfying almost everywhere on $T = [t_0,t_1]$ the relation (3). Then $u^*(t)$ is the optimal control in problem (2).

In conclusion, we note that in the work developing the research methods [5-7], the results are obtained, which are the theoretical basis for the development of an algorithm for constructing optimal control in the considered minimax problem.

References

1. *Blagodatskikh V. I., Filippov A. F.* Differential inclusions and optimal control. -Proceedings of the Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences (1985), 169. - pp. 194–252.

2. *Plotnikov A.V.* Some properties of integro-differential inclusions. Differential equations (2000), 36, No. 10. - pp. 1410–1414.

3. *Perestyuk N. A., Skripnik N. V.* Averaging of pulsed multi-valued systems. - Ukrainian Mathematical Journal (2013), vol. 65, no. 1. - pp. 126–142.

4. *Otakulov S.* Problems of controlling an ensemble of trajectories of differential inclusions. LAP Lambert Academic Publishing (2019)

5. *H. A. Primova, F. N. Iskandarova and Q. M. Gaybulov* Accounting Experience Between Fuzzy Integraland Z-numbers, Advances in Intelligent Systems and Computing 1323, 11th World Conference ¥Intelligent System for Industrial Automation¥ (WCIS-2020), Springer, 2021, pp.40–46.

6. *Otakulov S., Rahimov B. Sh.* About the property of controllability an ensamble of trajectories of differential inclusion. International Engineering Journal for Research & Development (2020). vol.5, issue 4. -pp.366-374.

7. *Otakulov S., Sobirova G. D.* Optimality conditions in the problem of controlling an ensemble of trajectories of differential inclusion. Uzbek Mathematical Journal (2008), No. 2. - p. 81-89

Determination of a coefficient and kernel in a two-dimensional fractional integro-differential equation

[1]Ramonov A., [2]Safarov J., [3]Boboev S.

[1] *V.I. Romanovskii Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: araxmonov@mail.ru

[2] *V.I. Romanovskii Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: j.safarov65@mail.ru

[3] *V.I. Romanovskii Institute of Mathematics, Academy of Sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: bssamandar@gmail.com

This paper is devoted to obtaining a unique solution to an inverse problem for a two-dimensional time-fractional integro-differential equation. In the case under additional data, we consider an inverse problem. The unknown coefficient and kernel are determined uniquely by the additional data. The existence and uniqueness result is based on the Fourier method, fractional calculus, properties of Mittag-Lefler function, and Banach fixed point theorem.

Let $Q_T := \bar{S} \times [0, T]$ for a given time $T > 0$, where S defined by the inequalities $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. We consider a fractional integrodifferential equation with fractional derivative in time t:

$$\partial_t^\alpha u = u_{xx} + u_{yy} + q(t)u_t + \int_0^t k(t-\tau)u(x,y,\tau)d\tau + f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T, \tag{1}$$

with the Gerasimov–Caputo time fractional derivative ∂_t^α of order $1 < \alpha < 2$, defined by

$$\partial_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} v''(\tau)d\tau,$$

where Γ is the Euler's Gamma function.

We supplement the above fractional wave equation with the following initial conditions:

$$u(x,y,0) = a(x,y), \quad u_t(x,y,0) = b(x,y), \tag{2}$$

and the boundary conditions

$$u_x(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0,t) = u_y(x,1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

In this paper, we take the following additional overdetermination and integral conditions:

$$u(0,1,t) = h_0(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$\Lambda[u(\cdot,\cdot,t)] = h_1(t), \tag{6}$$

where Λ are defined by

$$\Lambda[h](t) := \iint\limits_S h(x,y,t)dxdy,$$

where $h_i(t)$ are given functions [1].

The inverse problem considered in this paper is stated as follows.

Definition. *By the classical solution of the inverse boundary value problem (1)-(6), we mean the triple functions* $\{u(x,y,t),\ q(t),\ k(t)\}$, *if*

$$u(x,y,t) \in Y_T, \tag{7}$$

$q(t) \in C[0,T]$, $k(t) \in C[0,T]$ *and relations (1)-(6) hold in the usual sense, where* $Y_T := \{u : u(\cdot,\cdot,t) \in C^2(\overline{S}),\ t \in [0,T]$ *and* $u(x,y,\cdot) \in C_\gamma^{\alpha,1}[0,T],\ (x,y) \in \overline{S}\}$.

$$C_\gamma^{\alpha,n}[0,T] := \Big\{v(t) :\ v(t) \in C^{(n)}[0,T], \text{ and}$$

$$\partial_t^\alpha v(t) \in C_\gamma[0,T]\Big\}, \quad C_\gamma^{\alpha,0}[0,T] = C_\gamma^\alpha[0,T],$$

where $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \le \gamma < 1$ be such that $\gamma \le \alpha$ (see [2], p. 199) and here

$$C_\gamma[0,T] := \{f(t) :\ t^\gamma f(t) \in C[0,T]\}, \quad \|f\|_{C_\gamma} := \|t^\gamma f(t)\|_{C[0,T]}.$$

In this work we will investigate a forward and an inverse problem.

References

1. *Wang H., Wu B.* On the well-posedness of determination of two coefficients in a fractional integro-differential equation. *Chin. Ann. Math.* 35B(3), 2014, 447-468.

2. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.

The problem of restoring the rate of temperature change according to indirect observations

Rustamov M.J

Professor of the "Applied Mathematics"department of the Jizzakh branch of the National University of Uzbekistan, Uzbekistan.

e-mail: rustamovmuhammadi73@gmail.com

$\prod = [0,1]\, x\, [0,\bar{t}]$, $\bar{t}$>0 is a fixed number. The function $T(x,t)$ is called the phase state of the heating process. Inside the segment $[0,1]$ and at $\bar{t}$>0 and during temperature distribution it obeys the heat equation:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

Here a is the temperature conductivity coefficient. At the ends of the rod, the following heat transfer conditions are accepted:

$$\mu\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\alpha\left[U(t)-T(1,t)\right];\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=0 \tag{2}$$

Where μ- is the thermal conductivity coefficient, α- is the heat transfer coefficient between the heating medium, respectively, on one side o=0 and the side surface of the plate on the other. The left end of the plate x = 0 is heat insulated. The temperature of the heating medium $U(t)$ is called the control action or simply control. Let during the heating process it is possible to measure the temperature change at some points of the heated body. The task of determining the rate of change in temperature $T(\bar{x},t)$ at the point $\bar{X}\in[0,1]$ over time at a given point of the rod from a known change in temperature at a point and the heat transfer law (1)-(2) is the subject of the identification (process) of heating, discussed below.

Point $x_i\in[0,1]$ Related Functions $y_i(t)$

$$y_i(t)=T(\bar{x}_i,t)+\xi(\zeta) \tag{3}$$

We call it the measured component of the heating process.

Task 1 From the functions $y_i(t)$, $t\in[0,1]$, constants a,α,μ and relations (1)-(3) determine„ $T'(\bar{\bar{x}},t)$, $t\in[0,1]$, $(\bar{\bar{E}}\neq\bar{E})$

Let g (t) be some given function from $(0,\bar{t})$

Task 2.

For all the data of task 1, find the value

$$Z_g=\int_0^{\bar{t}}g(t)T'(\bar{\bar{x}},t)dt \tag{4}$$

It is clear that the solutions of Problem 2 for various functions $g(t)=g_i(t)i=1,2,...$ making up the basis of space $Z_2(0,\bar{t})$ will allow us to find the function from the projections $T'(\bar{\bar{x}},t)$ (4) as an element $Z_2(0,\bar{t})$.. Therefore, we will consider only Problem 2 below. For brevity, we consider below the observation of one the distribution of the sensor ($i=1$) to the general case will be fundamentally understandable.

We will search for quantity (4) in the form (5)

$$Z_g\int_0^{\bar{t}}\left[K(t)y(t)+\varphi(t)U(t)\right]dt \tag{5}$$

Where K (t) and φ(o) are the desired functions from $Z_2(0,\bar{t})$.

Following the well-known technique of the theory of observability in linear problems [2] - [3], we choose the linear functional (5) so that for relations (1)-(3) the identity

$$Z_g\int_0^{\bar{t}}g(t)T'(\bar{\bar{x}},t)dt=\int_0^{\bar{t}}\left[K(t)T(\bar{x},t)+\varphi(t)U(t)\right]dt \tag{6}$$

On the solutions of equation (1), we consider the identity

$$O\equiv\int_0^1\int_0^{\bar{t}}\psi(x,t)\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=a\frac{\partial^2T(x,t)}{\partial x^2}\right]dxdt$$

Here, $\psi(x,t)$ an arbitrary function having continuous derivatives $\frac{\partial\psi}{\partial t},\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ everywhere in the inside of the rectangle $\prod$ except perhaps the segments

$t\in[0,\bar{t}]\,,x=\bar{x},x=\bar{\bar{x}}$.

It is assumed that system (1)-(2) has solutions with continuous $\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$. ones. We add the last identity with equation (6) and using integration by parts over the intervals $(0,x),(\bar{x},\bar{\bar{x}}),(\bar{\bar{x}},1)$ (taking into account (3) we obtain

$$Z_g = \int_0^{\bar{t}} \left\{ \{g\ (t) + a \left[\frac{\partial \psi(\bar{\bar{x}}+0,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\bar{\bar{x}}-0,t)}{\partial x} \right] \right\} T'(\bar{\bar{x}},t)dt - \int_0^{\bar{t}} \left\{ K(t) + a \left[\frac{\partial \psi(\bar{\bar{x}}+0,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\bar{\bar{x}}-0,t)}{\partial x} \right] \right\}$$
$$T(\bar{\bar{x}},t)dt - a \int_0^{\bar{t}} [\psi(\bar{\bar{x}}+0,t) - \psi(\bar{\bar{x}}-0,t)] \frac{\partial T(\bar{\bar{x}},t)}{\partial x} dt - a \int_0^{\bar{t}} [\psi(\bar{\bar{x}}+0,t) - \psi(\bar{\bar{x}}-0,t)] \frac{\partial T(\bar{\bar{x}},t)}{\partial x} dt -$$
$$-a \int_0^{\bar{t}} \left[\frac{\alpha}{\mu} \psi(1,t) + \frac{\partial \psi(1,t)}{\partial x} \right] T(1,t)dt - \int_0^1 \psi(x,\bar{t}) T(x,\bar{t})dx$$
$$+ \int_0^1 \psi(x,0) T(x,0)dx + a \int_0^{\bar{t}} \left[\frac{\alpha}{\mu} \psi(1,t) - \varphi(t) \right]$$
$$U(t)dt + a \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} T(0,t)dt + a \int_0^1 \int_0^{\bar{t}} \left[\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \right] T(x,t)dxdt \tag{7}$$

We require here that the coefficients vanish for unknown values of the function$T(\bar{x},t)$ $T(\bar{x},t)$ and its derivatives

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = 0 (x,t) \in \prod \tag{8}$$

$$\psi(x,0) = 0, \psi(x,\bar{t}) = 0, x \in [0,1] \tag{9}$$

$$\frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} = 0, t \in [0,t] \tag{10}$$

$$\frac{a\alpha}{\mu} \psi(1,t) + \frac{\partial \psi(1,t)}{\partial x} = 0, t \in [0,\bar{t}] \tag{11}$$

$$a \left(\frac{\partial \psi(\bar{x}-0,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\bar{x}+0,t)}{\partial x} \right) = -K(t) \tag{12}$$

$$a \left(\frac{\partial \psi(\bar{\bar{x}}-0,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(\bar{\bar{x}}+0,t)}{\partial x} \right) = -g(t) \tag{13}$$

$$\psi(\bar{x}+0,t) = \psi(\bar{x}-0,t), \psi(\bar{\bar{x}}+0,t) = \psi(\bar{\bar{x}}-0,t) \tag{14}$$

So, for the function$\psi(x,t)$, the boundary value problem (8)-(14) is obtained. Let this system have solutions for some functions$[K(\cdot), \psi(\cdot)]$. Then in identity (6) there remains

$$O \equiv \int_0^{\bar{t}} U(t) \left[\varphi(t) + \frac{a\alpha}{\mu} \psi(1,t) \right] dt$$

From this we conclude: in order for relation (6) to hold for constraints (1)-(3) and any equation, it is enough $U(t)$

$$\psi(t) = -\frac{a\alpha}{\mu} \psi(1,t) \tag{15}$$

Thus it is identified that

Theorem. *In order for identity (6) to hold under constraints (1)-(3), it is sufficient that there exists a solution to the boundary value problem (8)-(15) [6].*

References

1. *Butkovsky A.G.* The theory of optimal control of systems with distributed parameters. M.1965.
2. *Krasovsky N.N.* Motion control theory. M. 1968.
3. *Israilov I., Kirin N.E., Rustamov M.D.* Tasks of observability of the heating process. Questions of computational and applied mathematics. T., 1988, issue 84, -166 p.
4. *Rustamov M.* Natada Issiqlik o‘zgarishini o‘lchash natijasida berilgan nuqtadagi Issiqlik o‘zgarishini aniqlash usuli. Republic of ilmiy-nazariy conference. SamDU 2019 15-December

The second order differential games with La-constraints

[1]Samatov B., [2]Uralova S.

[1] *Namangan state university, Namangan, Uzbekistan,*
e-mail: samatov57@inbox.ru

[2] *V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics of Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan,*
e-mail: saboxat.17@inbox.uz

Let's suppose that in R^n, an object P (the Pursuer) of a control u follows another object E (the Evader) of a control v. Describe the position of the Pursuer by x and that of the Evader by y in $\mathbf{R}^n$. Let motions of the objects be given by the second order differential equations

$$\ddot{x} = u, \quad \dot{x}(0) = x_1, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\ddot{y} = v, \quad \dot{y}(0) = y_1, \quad y(0) = y_0 \tag{2}$$

respectively, where $x, y, u, v \in \mathbf{R}^n, n \geq 2$; x_1, y_1 are initial positions of velocities of objects; x_0, y_0 are the initial positions of the objects and we presume that $x_0 \neq y_0$; As to the controls u and v function as the acceleration vectors of the objects correspondingly, and they should be suitably picked as measurable functions $u(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbf{R}^n$ and $v(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathbf{R}^n$.

Below we examine the number of classes of admissible controls for the Pursuer.

P_1) Langenhop type constraint $(briefly, La - constraint)$

$$|u(t)|^2 \leq \rho^2 - 2k \int\limits_0^t |u(s)|^2 ds \tag{3}$$

for almost every $0 \leq t \leq t^*$, and we represent the class of all the control functions fulfilling (3) by U_{La}, where

$$t^* = \sup\left\{ t : \rho^2 - 2k \int\limits_0^t |u(s)|^2 ds \geq 0 \right\};$$

P_2) Geometric constraint $(briefly, G - constraint)$ in the form

$$|u(t)| \leq \rho e^{-kt} \tag{4}$$

for almost every $t \geq 0$, and we represent the class of all the control functions fulfilling (4) by U_G;

P_3) Integral constraint $(briefly, I - constraint)$ of the form

$$\int\limits_0^t |u(s)|^2 ds \leq \frac{\rho^2}{2k}(1 - e^{-2kt}), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

and we represent the class of all the control functions fulfilling (5) by U_I, where the parameters ρ and k in (3)-(5) are the positive numbers. In a similar way, below we present several classes of the admissible controls for the Evader.

E_1) Langenhop type constraint $(briefly, La - constraint)$

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 - 2k \int\limits_0^t |v(s)|^2 ds \tag{6}$$

for almost every $0 \leq t \leq t_*$,

and we indicate the class of all the control functions satisfying (6) by V_{La}, where

$$t_* = \sup\left\{ t : \sigma^2 - 2k \int\limits_0^t |v(s)|^2 ds \geq 0 \right\};$$

E_2) Geometric constraint ($briefly, G - constraint$)

$$|v(t)| \leq \sigma e^{-kt} \tag{7}$$

for almost every $t \geq 0$,

and we indicate the class of all the control functions satisfying (7) by V_G;

E_3) Integral constraint ($briefly, I - constraint$)

$$\int_0^t |v(s)|^2 ds \leq \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt}), \quad t \geq 0, \tag{8}$$

and we indicate the class of all the control functions satisfying (8) by V_I, where the parameters σ and k in (6)-(8) are the positive numbers too.

If U (correspondingly, V) is one of the above classes U_G, U_I, U_{La} (correspondingly, V_G, V_I, V_{La}), then the pairs $(x_0, u(\cdot))$ and $(y_0, v(\cdot))$ generate the following trajectories

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \int_0^t (t - s)u(s)ds, \quad y(t) = y_0 + y_1 t + \int_0^t (t - s)v(s)ds.$$

The target of the Pursuer is to catch the Evader, i.e. to get the equality $x(T) = y(T)$ (the pursuit problem) at some finite instance $T > 0$, but the Evader tries extremely hard not to be caught (the evasion problem), i.e. to preserve the relation $x(t) \neq y(t)$ for all $t \geq 0$, and if impossible, to put back the meeting time T as long as possible. Let's introduce the denotations: $z(t) = x(t) - y(t)$, $\dot{z}(0) = x_1 - y_1$, $z_0 = x_0 - y_0$. We study the La - differential game for the case $z_1 = mz_0, m \in \mathbf{R}$

Definition 1. *If $\rho \geq \sigma$, then the function*

$$\boldsymbol{u}_{La}(t, v) = v - \lambda_{La}(t, v)\xi_0, \quad \lambda_{La}(t, v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \rho^2 e^{-2kt} - |v(t)|^2} \tag{9}$$

is called Π_{La}-strategy of pursuer in the La-Game, where $\xi_0 = z_0/|z_0|$.

Note that $|\mathbf{u}_{La}(t)|^2 = \rho^2 e^{-2kt}, \quad t \geq 0$.

Conjecture 1. *Assume that $\rho > \sigma$ is valid and there exists at least one positive root of the equation*

$$F_P(t) - G_P(t) = |z_0|(1 + mt) \tag{10}$$

with respect to t, where $F_P(t) = \frac{\rho}{k^2}\left(e^{-kt} + kt - 1\right), G_P(t) = \sigma\sqrt{\frac{t^3}{6k}\left(1 - e^{-2kt}\right)}$ and $m \in \mathbf{R}$

Theorem 1. *If $\rho \leq \sigma$ and $m \in \boldsymbol{R}$, there exists the smallest positive root of the equation (10), then Π_{La} (9)-strategy guarantees the completion of pursuit in the La-Game on the time interval $[0, T_{La}]$.*

Definition 2 *Let $\sigma \geq \rho$ in the La-game. Then by the E_{La}-strategy of the Evader we mean the function*

$$\boldsymbol{v}_{La}(t, u_\varepsilon(t)) = \begin{cases} 0, & if \quad 0 \leq t < \varepsilon, \\ -|u(t - \varepsilon)|\xi_0, & if \quad t \geq \varepsilon \end{cases} \tag{11}$$

where $u_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad 0 \leq t < \varepsilon, \\ u(t - \varepsilon), & \text{if} \quad t \geq \varepsilon, \end{cases}$ $u_\varepsilon(t) \in \mathbf{R}^n$, $\xi_0 = z_0/|z_0|$.

Theorem 2. *If in the La-game $\rho \leq \sigma$, $0 < \varepsilon \leq \frac{2|z_0|^2}{\rho^2}$ and*
1) $m \geq 0$,$0 \leq t \leq \varepsilon$ 2) $m \geq \frac{\rho}{2|z_0|}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2k}}$, $t \geq \varepsilon$ then the E_{La}-strategy (11) is winning for E.

References

1. *Isaacs R.* Differential games. New York: John Wiley and Sons, 1965.

2. *Langenhop C.E.* Bounds on the norm of a solution of a general differential equation // Proc. AMS 11, 1960. 795–799.
3. *Azamov A.A., Samatov B.T.*The Π-Strategy: Analogies and Applications // The Fourth International Conference Game Theory and Management. St. Petersburg, 2010. 33–47.
4. *Samatov B.T.* The pursuit-evasion problem under integral-geometric constraints on pursuer controls // Automation and Remote Control. 2013. 74, 7. 1072–1081.
5. *Samatov B.T., Umaraliyeva N.T., Uralova S.I.* Differential games with the Langenhop type constrains on controls Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. 42, 12. 2942–2951.

The Pursuit-Evasion problems in a differential game with GGr-constraints on controls

[1]**Samatov B.T.**, [2]**Juraev B.I.**, [3]**Akbarov A.Kh.**

[1] *Namangan State University, Namangan, Uzbekistan,*
e-mail: samatov@inbox.ru

[2,3] *Andijon State University, Andijon, Uzbekistan,*
e-mail: jbahodirjon@bk.ru, akbarov.adhambek@bk.ru

In the present paper, we have considered pursuit and evasion problems in a simple motion differential game for the case where Pursuer's control is subjected to geometric constraint and Evader's control is subjected to Grönwall type constraint. In order to solve the pursuit problem, the parallel convergence strategy (the Π-strategy) for the Pursuer is constructed, and sufficient conditions of pursuit have been determined. Also, we have proved that the Π-strategy of the Pursuer is an optimal strategy. In solving of the evasion problem, we have proposed an admissible control function to the Evader, and we have obtained sufficient conditions of evasion. In addition, an estimation function for the distance between the objects during the game has been provided.

Suppose that in $\mathbb{R}^n$ a controlled object P called the Pursuer, chases another controlled object E called the Evader. Denote by x the position of the Pursuer and denote by y the position of the Evader in $\mathbb{R}^n$. In the present work, we consider the pursuit-evasion problems when the objects move in accordance with the equations

$$P: \quad \dot{x} = u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$E: \quad \dot{y} = v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

respectively, where $x, y, u, v \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; x_0 and y_0 are the initial positions of the objects accordingly, and it is assumed that $x_0 \neq y_0$; u and v are the control parameters of the objects correspondingly, and they denote the velocity vectors which depend on the time $t \geq 0$.

On the control u of the Pursuer, we impose the geometric constraint or briefly, G-constraint described in the form

$$|u(t)| \leq \alpha \ \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{3}$$

and we denote a class of such admissible controls by $\mathbf{U}_G$, where α is the given positive number which expresses the maximal speed of the Pursuer.

To the control of the Evader we propose the following Grönwall type constraint (in brief, Gr-constraint)

$$|v(t)|^2 \leq \sigma^2 + 2k \int\limits_0^t |v(s)|^2 ds \ \text{ for almost every } t \geq 0, \tag{4}$$

and we denote a class of such admissible controls by $\mathbf{V}_{Gr}$, where σ and k are the given positive numbers.

Definition 1. *We say that a strategy $\mathbf{u} = \mathbf{u}(v)$ guarantees capture at time moment $T(\mathbf{u})$ if at some time $t_* \in [0, T(\mathbf{u})]$ the equality $x(t_*) = y(t_*)$ is satisfied for any control $v(\cdot)$, $v(\cdot) \in \mathbf{V}_{Gr}$, where $x(t)$ and $y(t)$ are the solutions of the initial value problems*

$$\dot{x} = \mathbf{u}(v(t)), \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{y} = v(t), \qquad y(0) = y_0,$$

where $t \geq 0$.

Definition 2. *We say that a control function* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ *guarantees evasion on the time interval* $[0, \infty)$ *if for any control* $u(\cdot)$, $u(\cdot) \in \mathbf{U}_G$, *the relation* $x(t) \neq y(t)$ *holds for all* t, $t \in [0, \infty)$, *where* $x(t)$ *and* $y(t)$ *are the solutions of the initial value problems*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(t), \quad x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= \boldsymbol{v}(t), \quad y(0) = y_0, \end{aligned}$$

where $t \geq 0$.

Problem 1. *Solve the pursuit problem in the game (1), (2) with the G-constraint (3) and the Gr-constraint (4) (briefly, GGr-Game of Pursuit).*

Problem 2. *Solve the evasion problem in the game (1), (2) with the G-constraint (3) and the Gr-constraint (4) (briefly, GGr-Game of Evasion).*

Definition 3. *We say the function*

$$\mathbf{u}_{GGr}(v) = v - \lambda_{GGr}(v)\xi_0 \tag{5}$$

the parallel approach strategy, or Π_{GGr}*-strategy of the Pursuer in the GGr-Game of Pursuit on the time interval* $[0, \theta]$, *where*

$$\lambda_{GGr}(v) = \langle v, \xi_0 \rangle + \sqrt{\langle v, \xi_0 \rangle^2 + \alpha^2 - |v|^2}, \ \xi_0 = \frac{z_0}{|z_0|}, \quad \theta = \frac{1}{k} ln(\alpha/\sigma)$$

and $\langle v, \xi_0 \rangle$ *represents the inner product of the vectors* v *and* ξ_0 *in* $\mathbb{R}^n$.

Lemma 1. *If the conditions*

$$\alpha > \sigma, \quad |z_0| \leq \Theta$$

are satisfied on the time interval $[0, \theta]$, *then there exists a positive root of the equation*

$$e^{kt} = At + B$$

on that interval, and we denote the root by T_{GGr}, *where*

$$\theta = \frac{1}{k} ln\frac{\alpha}{\sigma}, \quad \Theta = \frac{1}{k}\left(\sigma - \alpha\left(1 - ln\frac{\alpha}{\sigma}\right)\right), \quad A = \frac{\alpha k}{\sigma}, \quad B = 1 - \frac{|z_0|k}{\sigma},$$

Theorem 1. *If Lemma 1 is valid, then in the GGr-Game of Pursuit, the* Π_{GGr}*-strategy (5) guarantees capture the Evader on the time interval* $[0, T_{GGr}]$.

Definition 4. *In the GGr-Game of Evasion, we call the control function*

$$\boldsymbol{v}_{GGr}(t) = -\sigma e^{kt}\xi_0, \quad t \geq 0, \tag{6}$$

a strategy of the Evader.

Theorem 2. *Let Lemma 1 be valid. Then in the GGr-Game of Pursuit, the strategy (6) guarantees evasion in the time interval* $[0, T_{GGr})$, *where* T_{GGr} *is the guaranteed time of pursuit (see Theorem 1.*

Theorem 3. *Let one of the following conditions be valid: 1) $\alpha \leq \sigma$; 2) $\alpha > \sigma$, $|z_0| > \Theta$. Then in the GGr-Game of Evasion, the strategy (6) guarantees evasion in the time interval* $[0, \infty)$, *and for the distance function* $z(t)$ *the following estimation is valid:*

$$|z(t)| \geq \begin{cases} |z_0|, & \text{if } \alpha = \sigma,\ k = 0, \\ |z_0| + \frac{\alpha}{k}(e^{kt} - 1) - \alpha t, & \text{if } \alpha = \sigma,\ k > 0, \\ |z_0| + \frac{\sigma}{k}(e^{kt} - 1) - \alpha t, & \text{if } \alpha < \sigma,\ k > 0 \ \text{ or } \ \alpha > \sigma,\ k > 0,\ |z_0| > \Theta, \end{cases}$$

where Θ *is given in Lemma 1.*

References

1. *Azamov A.A, Samatov B.T.* The Π-Strategy: Analogies and Applications, The Fourth International Conference Game Theory and Management. St. Petersburg, Vol.4, 2010, 33–47.
2. *Samatov B.T, Ibragimov G, Khodjibayeva I.V.* Pursuit-evasion differential games with Grönwall-type constraints on controls, Ural Math. J, Vol.6, 2020, 95–107.
3. *Grönwall T.H.* Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, Ann. of Math, Vol.20, 1919, 292–296.
4. *Samatov B.T, Jurayev B.I.* The Π-strategy in differential game with *GrG*-constraints on controls, Bulletin of the Institute of Mathematics, Vol.5, 2022, 6–13.
5. *Samatov B.T, Jurayev B.I, Akbarov A.Kh.* On evasion problem for the case which imposed geometrical-Gronwall constraint, Scientific Bulletin of Namangan state University, Vol.2, 2020, 3–8.

Problem cauchy for the laplas field in bounded domain

[1]**Sattorov E.**, [2]**Mardonov Dj.**

[1] *Samarkand State University , Samarkand, Uzbekistan,),*

e-mail: Sattorov-e@rambler.ru

[2] *Samarkand State University , Samarkand, Uzbekistan,,*

e-mail: mardonov-jolgosh@mail.ru

Introduce the following notations: R^3 is the third dimensional real Euclidean space,

$$x = (x_1, x_2, x_3),\ \ y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3,\ \ x' = (x_2, x_3),\ \ y' = (y_2, y_3) \in R^2,$$

$$s = \alpha^2 = |y' - x'| = (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2,\ \ r^2 = s + (y_1 - x_1)^2 = |y - x|^2,$$

Ω is a bounded simply connected domain in R^3 with boundary $\partial\Omega$ composed of a compact connected part T of the plane $y_3 = 0$ and a smooth Lyapunov surface S lying in the half-space $y_3 > 0$, with $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = S \cup T$.

Problem. Let we know the Cauchy data for a solution to system [1]

$$\Delta \overrightarrow{F}(x) = 0, x \in \Omega, \tag{1}$$

$$rot \overrightarrow{F}(x) = 0, x \in \Omega \tag{2}$$

$$\overrightarrow{F}(y) = \overrightarrow{\varphi}(y), y \in S, \tag{3}$$

In this paper, we offer an explicit formula for reconstruction of a solution of the Laplase field in bounded domain from its values on part of the boundary, i.e., we give an explicit continuation formula for a solution to the Cauchy problem for the Laplase field.

The Cauchy problem (3) for the Laplase field (1)-(2) is well-known to be ill-posed. Hadamard noted that solution to problem is not stable. Possibility of introducing a positive parameter σ, depending on the accuracy of the initial data, was noticed by M. M. Lavrent'ev. Uniqueness of the solution follows from the general theorem by Holmgren. Traditionally, regularization techniques, such as Tikhonov regularization.

We suppose that a solution to the problem exists (in this event it is unique) and continuously differentiable in the closed domain and the Cauchy data are given exactly. In this case we establish an explicit continuation formula.

References

1. *Zhdanov M.S.* Use of Cauchy integral analogs in the geopotential field theory, Annal. Geophys. v.36, 4(1980), pp. 447-458.

Structure of essential spectra and discrete spectrum of the energy operator of four-electron systems in the Impurity hubbard model. Second four-electron triplet state

[1]**Tashpulatov S.M.**, [2]**Parmanova R.T.**

[1] *Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republik of Uzbekistan, Tashkent;*
sadullatashpulatov@yandex.com, toshpul@mail.ru, toshpul@inp.uz

[2] *Institute of Nuclear Physics of Academy of Science of Republik of Uzbekistan, Tashkent;*
togaymurodota@gmail.com

The Hubbard model and impurity Hubbard model is currently one of the most extensively studied multielectron models of metals [1,2,3,4]. Therefore, obtaining exact results for the spectrum and wave functions of the crystal described by the Hubbard model and impurity Hubbard model is of great interest. We consider of the energy operator of four-electron systems in the impurity Hubbard model and investigate the structure of essential spectra and discrete spectrum in second triplet state. Hamiltonian of the system has the form

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_{m} a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0-A)\sum_{\gamma} a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} +$$

$$(B_0-B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0-U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \tag{1}$$

Here A (A_0) is the electron energy at a regular (impurity) lattice site; $B>0$ $(B_0>0)$ is the transfer integral between electrons (between electron and impurity) in a neighboring sites, $\tau = \pm e_j, j = 1,2,...,\nu$, where e_j are unit mutually orthogonal vectors, which means that summation is taken over the nearest neighbors, U (U_0) is the parameter of the on-site Coulomb interaction of two electrons, correspondingly in the regular (impurity) lattice site; γ is the spin index, $\gamma =\uparrow$ or $\gamma =\downarrow$, $\uparrow$ and $\downarrow$ denote the spin values $\frac{1}{2}$ and $-\frac{1}{2}$, and $a^+_{m,\gamma}$ and $a_{m,\gamma}$ are the respective electron creation and annihilation operators at a site $m \in Z^\nu$. The second triplet state corresponds four-electron bound states (or antibound states) to the basis functions: ${}^2t^1_{p,q,r,k} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{r,\downarrow}a^+_{k,\uparrow}\varphi_0$. The subspace ${}^2\widetilde{\mathcal{H}}^1_t$, corresponding to the second triplet state is the set of all vectors of the form ${}^2\psi^1_t = \sum_{p,q,r,k\in Z^\nu} f(p,q,r,k)^2t^1_{p,q,r,k}, f \in l_2^{as}$, where l_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $l_2((Z^\nu)^4)$. In this case, the Hamiltonian H acts in the antisymmetric Fock space $\widetilde{\mathcal{H}}_{as}$. Let φ_0 be the vacuum vector in the antisymmetrical Fock space $\widetilde{\mathcal{H}}_{as}$. Let ${}^2\widetilde{H}^1_t$ be the restriction H to the subspace ${}^2\widetilde{\mathcal{H}}^1_t$. The second triplet state corresponds the free motions of four-electrons in the lattice and their interactions. Let $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$, $\varepsilon_3 = U_0 - U$.

In the quasimomentum representation, the operator ${}^2\overline{H}^1_t$ acts in the Hilbert space $L_2^{as}((T^\nu)^4)$, where L_2^{as} is the subspace of antisymmetric functions in $L_2((T^\nu)^4)$.

Theorem 1. *The Fourier transform of operator* ${}^2\overline{H}^1_t$ *is an operator* ${}^2\widetilde{H}^1_t = \mathcal{F}\,{}^2\overline{H}^1_t\mathcal{F}^{-1}$ *acting in the space* ${}^2\widetilde{\mathcal{H}}^1_t$ *be the formula*

$${}^2\widetilde{H}^1_t\,{}^2\psi^1_t = h(\lambda,\mu,\gamma,\theta)f(\lambda,\mu,\gamma,\theta) +$$

$$+U\int_{T^\nu}[f(s,\mu,\lambda+\gamma-s,\theta)+f(\lambda,s,\mu+\gamma-s,\theta)+f(\lambda,\mu,s,\gamma+\theta-s)]ds+ \tag{2}$$

$$+(A_0-A)[\int_{T^\nu}f(s,\mu,\gamma,\theta)ds+\int_{T^\nu}f(\lambda,l,\gamma,\theta)dl+$$

$$+\int_{T^\nu}f(\lambda,\mu,\xi,\theta)d\xi+\int_{T^\nu}f(\lambda,\mu,\gamma,n)dn]+(B_0-B)\times$$

$$\times[\sum_{j=1}^{\nu}\int_{T^\nu}2[cos\lambda_j+coss_j]f(s,\mu,\gamma,\theta)ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{\nu}\int_{T^\nu}2[cos\mu_j+cosl_j]f(\lambda,l,\gamma,\theta)dl+\sum_{j=1}^{\nu}\int_{T^\nu}2[cos\gamma_j+cos\xi_j]\times$$

$$\times f(\lambda,\mu,\xi,\theta)d\xi+\sum_{j=1}^{\nu}\int_{T^\nu}2[cos\theta_j+cosn_j]f(\lambda,\mu,\gamma,n)dn]+(U_0-U)[\int_{T^\nu}\int_{T^\nu}f(s,\mu,\xi,\theta)dsd\xi+$$

$$+\int_{T^\nu}\int_{T^\nu}f(\lambda,l,\xi,\theta)dld\xi+\int_{T^\nu}\int_{T^\nu}f(\lambda,\mu,\xi,n)d\xi dn],$$

where $h(\lambda,\mu,\gamma,\theta)=4A+2B\sum_{j=1}^{\nu}[cos\lambda_j+cos\mu_j+cos\gamma_j+cos\theta_j]$.

Theorem 2. *Let* $\nu=1$. *Then*

A). If $\varepsilon_2=-B$ *and* $\varepsilon_1<-2B$ *(respectively,* $\varepsilon_2=-B$ *and* $\varepsilon_1>2B$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_t^1$ *is consists of the union of eight segments:* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_t^1)=[4A-8B,4A+8B]\cup[3A-6B+z,3A+6B+z]\cup[2A-4B+2z,2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z,A+2B+3z]\cup[2A-4B+z_3,2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3,A+2B+z+z_3]\cup[2A-4B+z_4,2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4,A+2B+z+z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_t^1$ *is consists of three eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_t^1)=\{4z,2z+z_3,2z+z_4\}$, *where* $z=A+\varepsilon_1$, *and* z_3 *and* z_4 *are same concrete real numbers.*

B). If $\varepsilon_1<0$ *and* $\varepsilon_2=-2B$ *or* $\varepsilon_2=0$ *(respectively,* $\varepsilon_1>0$ *and* $\varepsilon_2=-2B$ *or* $\varepsilon_2=0$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_t^1$ *is consists of the union of eight segments:* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_t^1)=[4A-8B,4A+8B]\cup[3A-6B+z,3A+6B+z]\cup[2A-4B+2z,2A+4B+2z]\cup[A-2B+3z,A+2B+3z]\cup[2A-4B+z_3,2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z+z_3,A+2B+z+z_3]\cup[2A-4B+z_4,2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z+z_4,A+2B+z+z_4]$, *and the discrete spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_t^1$ *is consists of three eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_t^1)=\{4z,2z+z_3,2z+z_4\}$, *where* $z=A-\sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ *(respectively,* $z=A+\sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$*) and* z_3 *and* z_4 *are same concrete real numbers.*

C). If $\varepsilon_2>0$ *and* $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}<\varepsilon_1<0$ *(respectively,* $\varepsilon_2<-2B$ *and* $-\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}<\varepsilon_1<0$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_t^1$ *is consists of the union of sixteen segments:* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_t^1)=[4A-8B,4A+8B]\cup[3A-6B+z_1,3A+6B+z_1]\cup[3A-6B+z_2,3A+6B+z_2]\cup[2A-4B+2z_1,2A+4B+2z_1]\cup[2A-4B+2z_2,2A+4B+2z_2]\cup[2A-4B+z_1+z_2,2A+4B+z_1+z_2]\cup[A-2B+3z_1,A+2B+3z_1]\cup[A-2B+3z_2,A+2B+3z_2]\cup[A-2B+z_1+2z_2,A+2B+z_1+2z_2]\cup[A-2B+2z_1+z_2,A+2B+2z_1+z_2]\cup[2A-4B+z_3,2A+4B+z_3]\cup[A-2B+z_1+z_3,A+2B+z_1+z_3]\cup[A-2B+z_2+z_3,A+2B+z_2+z_3]\cup[2A-4B+z_4,2A+4B+z_4]\cup[A-2B+z_2+z_4,A+2B+z_2+z_4]\cup[A-2B+z_1+z_4,A+2B+z_1+z_4]$, *the discrete spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_t^1$ *is consists of eleven eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_t^1)=\{4z_1,4z_2,2z_1+z_3,2z_2+z_4,3z_1+z_2,z_1+3z_2,2z_1+2z_2,z_1+z_2+z_3,z_1+z_2+z_4,2z_2+z_3,2z_1+z_4\}$, *where* $z_1=A-\frac{2B(\alpha+E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, *and* $z_2=A-\frac{2B(\alpha-E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, *and* $E=\frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2}$, *and the real number* $0<\alpha<1$, *and* z_3 *and* z_4 *are same concrete real numbers.*

D). If $-2B<\varepsilon_2<0$, *then the essential spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_t^1$ *is consists of the union of three segments:* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_t^1)=[4A-8B,4A+8B]\cup[2A-4B+z_3,2A+4B+z_3]\cup[2A-4B+z_4,2A+4B+z_4]$, *the discrete spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_t^1$ *is empty set:* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_t^1)=\emptyset$.

E). If $\varepsilon_2>0$ *and* $0<\varepsilon_1<\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$ *(respectively,* $\varepsilon_2<-2B$ *and* $0<\varepsilon_1<\frac{2(\varepsilon_2^2+2B\varepsilon_2)}{B}$*), then the essential spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_t^1$ *is consists of the union of sixteen segments:* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}_t^1)=[4A-8B,4A+8B]\cup[3A-6B+z_1,3A+6B+z_1]\cup[3A-6B+z_2,3A+6B+z_2]\cup[2A-4B+2z_1,2A+4B+2z_1]\cup[2A-4B+2z_2,2A+4B+2z_2]\cup[2A-4B+z_1+z_2,2A+4B+z_1+z_2]\cup[A-2B+3z_1,A+2B+$

$3z_1] \cup [A-2B+3z_2, A+2B+3z_2] \cup [A-2B+z_1+2z_2, A+2B+z_1+2z_2] \cup [A-2B+2z_1+z_2, A+2B+2z_1+z_2] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [A-2B+z_1+z_3, A+2B+z_1+z_3] \cup [A-2B+z_2+z_3, A+2B+z_2+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4] \cup [A-2B+z_2+z_4, A+2B+z_2+z_4] \cup [A-2B+z_1+z_4, A+2B+z_1+z_4]$, *the discrete spectrum of the operator* ${}^2\widetilde{H}_t^1$ *is consists of eleven eigenvalues:* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}_t^1) = \{4z_1, 4z_2, 2z_1+z_3, 2z_2+z_4, 3z_1+z_2, z_1+3z_2, 2z_1+2z_2, z_1+z_2+z_3, z_1+z_2+z_4, 2z_2+z_3, 2z_1+z_4\}$, *where* $z_1 = A + \frac{2B(\alpha - E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, *and* $z_2 = A + \frac{2B(\alpha + E\sqrt{E^2-1+\alpha^2})}{E^2-1}$, *and* $E = \frac{(B+\varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, *and the real number* $0 < \alpha < 1$, *and* z_3 *and* z_4 *are same concrete real numbers.*

References

1. *Hubbard J.* Electron Correlations in Narrow Energy Band, Proc. Roy. Soc. A., V. 276:1365 (1963), 238–257.

2. *Tashpulatov S.M.* Spectral Properties of three-electron systems in the Hubbard model, Theoretical and Mathematical Physics, V. 179(3) (2014), 712–728.

3. *Tashpulatov S.M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state, Lobachevskii Journal of Mathematics, V. 38(3) (2017), 530–541.

4. *Tashpulatov S. M.* The structure of essential spectra and discrete spectrum of three-electron systems in the impurity Hubbard model. Quartet state. Journal of Applied Mathematics and Physics. 9(2021), No 6, 1391–1421.

The problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity system

[1] **Turdiev Kh. Kh.**, [2] **Boltaev A.A.**
[1] *Bukhara State University, Bukhara, Uzbekistan,*
e-mail: hturdiev@mail.ru
[2] *Institute of Mathematics at the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan,*
e-mail: asliddinboltayev@mail.ru

Maxwell's relation, which follows from thermodynamic considerations, is valid in any medium. We will consider anisotropic media with a matrix of independent elastic module of the following form[1]:

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} \end{pmatrix}.$$

Let us denote by σ_{ij} the projection onto the x_i axis of the stress acting on the area with the normal parallel to the x_j axis, and $\overline{u}_i$ are the projection onto the x_i axis of the vector particle displacement. In viscoelastic anisotropic media, the stress tensor has the following representation[2]:

$$\sigma_{ij}(\overline{x}, t) = \sum_{k,l=1}^{3} c_{ijkl} \left[S_{kl} + \int_0^t K_{ij}(t-\tau) S_{kl}(x,\tau) \right], \ i,j = 1,2,3,$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right), \ i,j = 1,2,3, \tag{1}$$

here $c_{ijkl} = c_{ijkl}(x_3)$ are module of elasticity $K_{ij}(t)$ are functions responsible for the viscosity of the medium and $K_{ij} = K_{ji}, \ i,j = \overline{1,3}$.

The equations of motion of a viscoelastic body particles in the absence of external forces have the form[3]:

$$\rho\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j},\quad i=\overline{1,3}, \tag{2}$$

where $\rho=\rho(x_3)$ is medium density and $\rho>0$, $\overline{u}(\overline{x},t)=(\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overline{u}_3)$ is displacement vector.

Then the system of equations (1) and (2) for the velocity u_i and strain σ_{ij} ($\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$) in view can be written as a system of first-order integro-differential equations.

$$\left(A\frac{\partial}{\partial t}+B\frac{\partial}{\partial x_1}+C\frac{\partial}{\partial x_2}+D\frac{\partial}{\partial x_3}+F\right)U(\overline{x},t)=\int\limits_0^t R(t-\tau)U(\overline{x},\tau)d\tau, \tag{3}$$

where $U=(u_1,u_2,u_3,\sigma_{11},\sigma_{12},\sigma_{13},\sigma_{22},\sigma_{23},\sigma_{33})^*$, $*$ is the transposition sign,

$$A=\begin{pmatrix}\rho\mathbf{I}_{3\times3} & \mathbf{O}_{3\times6}\\ \mathbf{O}_{6\times3} & I_{6\times6}\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{3\times3} & \mathbf{O}_{3\times6}\\ \mathbf{0}_{6\times3} & -r_{ii}(0)I_{6\times6}\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}\mathbf{O}_{3\times3} & \mathbf{O}_{3\times6}\\ \mathbf{O}_{6\times3} & r'_{ii}I_{6\times6}\end{pmatrix},\ i=\overline{1,6},$$

$$B=\left(\begin{array}{ccc|cccccc} & & & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ & \mathbf{O}_{3\times3} & & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ -c_{11} & 0 & 0 & & & & & & \\ -c_{12} & 0 & 0 & & & & & & \\ -c_{13} & 0 & 0 & & & \mathbf{O}_{6\times6} & & & \\ 0 & -c_{44} & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & -c_{44} & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{array}\right),$$

$$C=\left(\begin{array}{ccc|cccccc} & & & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ & \mathbf{O}_{3\times3} & & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -c_{12} & 0 & & & & & & \\ 0 & -c_{11} & 0 & & & & & & \\ 0 & -c_{13} & 0 & & & \mathbf{O}_{6\times6} & & & \\ -c_{44} & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & & & & & & \end{array}\right),$$

$$D=\left(\begin{array}{ccc|cccccc} & & & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ & \mathbf{O}_{3\times3} & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ & & & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -c_{13} & & & & & & \\ 0 & 0 & -c_{13} & & & & & & \\ 0 & 0 & -c_{33} & & & \mathbf{O}_{6\times6} & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ -c_{44} & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & \frac{c_{11}-c_{12}}{2} & 0 & & & & & & \end{array}\right).$$

here, $r_{ij}(t)=-K_{ij}(t)-\int\limits_0^t K_{ij}(t-\tau)r_{ij}(\tau)d\tau,\quad i,j=\overline{1,3}.$

Making a some changes to the equation, we get the following system of equations:

$$\left(I\frac{\partial}{\partial t}+\Lambda\frac{\partial}{\partial x_3}+B_1\frac{\partial}{\partial x_1}+C_1\frac{\partial}{\partial x_2}+F_1\right)\vartheta=\int\limits_0^t R_1(t-\tau,x_3)\vartheta(\overline{x},\tau)d\tau, \tag{4}$$

where

$$B_1=T^{-1}A^{-1}BT=(b_{ij}),\quad C_1=T^{-1}A^{-1}CT=(c_{ij}),$$

$$F_1 = T^{-1}A^{-1}D\frac{\partial T}{\partial x_3} + T^{-1}A^{-1}FT = (p_{ij}), \quad R_1 = T^{-1}A^{-1}RT = (\widetilde{r}_{ij})$$

here $\widetilde{r}_{11} = \widetilde{r}_{99} = -\widetilde{r}_{19} = -\widetilde{r}_{91} = \frac{r'_{33}}{2}$, $\widetilde{r}_{22} = \widetilde{r}_{88} = -\widetilde{r}_{28} = -\widetilde{r}_{82} = \frac{r'_{13}}{2}$, $\widetilde{r}_{33} = \widetilde{r}_{77} = -\widetilde{r}_{37} = -\widetilde{r}_{73} = \frac{r'_{23}}{2}$, $\widetilde{r}_{41} = -\widetilde{r}_{49} = \frac{c_{13}}{\lambda_1}(r'_{11} - r'_{33})$, $\widetilde{r}_{44} = r'_{11}$, $\widetilde{r}_{46} = r'_{11} - r'_{12}$, $\widetilde{r}_{51} = -\widetilde{r}_{59} = \frac{c_{13}}{\lambda_1}(r'_{22} - r'_{23})$, $\widetilde{r}_{55} = r'_{22}$, $\widetilde{r}_{66} = r'_{12}$.

The inverse problem is to determine the nonzero components of the matrix kernel R_1, that is $r_{ij}(t),\ i,j = \overline{1,3}$ in (4) if the following conditions are known:

$$\vartheta_i\Big|_{t=0} = \varphi_i(\overline{x}), \quad i = \overline{1,9}, \tag{5}$$

$$\vartheta_i\Big|_{x_3=H} = g_i(x_1,x_2,t), \quad i = \overline{1,3}, \quad \vartheta_i\Big|_{x_3=0} = g_i(x_1,x_2,t), \quad i = \overline{7,9}. \tag{6}$$

$$\vartheta_i\Big|_{x_3=0} = h_i(x_1,x_2,t), \quad i = \overline{1,6}, \tag{7}$$

where $\varphi(x)$, $g(x_1,x_2,t)$, $h(x_1,x_2,t)$ are the given functions.

In this paper, we restrict ourselves to studying the Fourier transform in the variables $x_1,\ x_2$ of the solution. $\widehat{\cdot}$ is Fourier transformer.

Theorem. *Assume functions $F_1(x,t)$, $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $g(x_1,x_2,t)$, $h(x_1,x_2,t)$ are compact support in x_1, x_2 for each fixed x_3, t. Let be $\rho(z), c_{33}(z), c_{44}(z), c_{11}(z), c_{12}(z), \in C^2[0,\infty)$, $\varphi(t) \in C^2(\mathbb{R}^3_+)$, $g(x_1,x_2,t) \in C^2(\mathbb{R}^3_+)$, $h(x_1,x_2,t) \in C^2(\mathbb{R}^3_+)$, $\rho(x_3) > 0$, $c_{33}(x_3) > 0$, $c_{44}(x_3) > 0$, $c_{11}(x_3) > 0$, $c_{12}(x_3) > 0$, $r_{ij}(t) \in C^1[0,\infty)$, $i,j = 1,2$, and matching conditions*

$$\widehat{\varphi}_i(0) = \widehat{g}_i(H), \quad i = 1,2,3, \qquad \widehat{\varphi}_i(0) = \widehat{g}_i(0), \quad i = 7,8,9.$$

$$\left[\frac{\partial \widehat{g}_i(t)}{\partial t}\right]_{t=0} = -\lambda_j\left[\frac{\partial \widehat{\varphi}_i(z)}{\partial z}\right]_{z=H} + \sum_{j=1}^{9} p_{ij}(H)\widehat{\varphi}_j(H), \quad i = \overline{1,3},$$

$$\left[\frac{\partial \widehat{g}_i(t)}{\partial t}\right]_{t=0} = -\lambda_j\left[\frac{\partial \widehat{\varphi}_i(z)}{\partial z}\right]_{z=0} + \sum_{j=1}^{9} p_{ij}(0)\widehat{\varphi}_j(0), \quad i = \overline{7,9}.$$

$$\left[-\lambda_j\frac{\partial \widehat{\varphi}_i(z)}{\partial z}\right]_{z=0} + \sum_{j=1}^{9} p_{ij}(0)\widehat{\varphi}_j(0) = \left[\frac{d}{dt}\widehat{h}_i\right]_{t=0}, \qquad i = \overline{1,6}.$$

hold. Then for any $H > 0$ on the segment $\big[0,H\big]$ there is a unique solution to the inverse problems (4), (5), (6) and (7) from class $R_1(z,t) \in C^1\big[0,H\big]$.

By the found functions $r'_{ij}(t),\ i,j = \overline{1,3}$ the functions $r_{ij}(t),\ i,j = \overline{1,3}$ are found by the formulas

$$r_{ij}(t) = r_{ij}(0) + \int_0^t r'_{ij}(\tau)d\tau, \quad i,j = \overline{1,3}.$$

References

1. *Delesan E., Ruaye D.* Elastic waves in solids. Moscow: Nauka, 1982(In Russian).
2. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids, second, revised edition. USA, IL, Evanston, Northwestern University, 1987.
3. *Galin L.A.* Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity. Moscow: Nauka, 1980(In Russian).

Asymptotics of the solution of bisingularly boundary value problems for the ordinary differential equations second order

[1]Tursunov D., [2]Bekmurza uulu Ybadylla

[1] *Osh State University, Kyrgyzstan,*
e-mail: dtursunov@oshsu.kg

[2] *Osh State University, Kyrgyzstan,*
e-mail: ybadylla_bekmurza@mail.ru

Abstract Uniform asymptotic expansions of the solution of two-point boundary value problems of Dirichlet, Neumann and Robin for a linear inhomogeneous ordinary differential equation of the second order with a small parameter at the highest derivative are constructed. A feature of the considered two-point boundary value problems is that the corresponding unperturbed boundary value problems for an ordinary differential equation of the first order has a regularly singular point at the left end of the segment. Asymptotic solutions of boundary value problems are constructed by the modified Vishik-Lyusternik-Vasilyeva method of boundary functions. Asymptotic expansions of solutions of two-point boundary value problems are substantiated. We propose a simpler algorithm for constructing an asymptotic solution of bisingular boundary value problems with regular singular points, and our boundary functions constructed in a neighborhood of a regular singular point have the property of "boundary layer that is, they disappear outside the boundary layer.

Formulation of the problem

Let us investigate the boundary value problems generated by the equation

$$\varepsilon\, y_\varepsilon''(x) + xp(x)y_\varepsilon'(x) - q(x)y_\varepsilon(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

and one of the boundary conditions of the form

$$y_\varepsilon(0) = a, \;\; y_\varepsilon(1) = b, \tag{2}$$

$$y_\varepsilon'(0) = a, \;\; y_\varepsilon'(1) = b, \tag{3}$$

$$y_\varepsilon(0) - h_1 y_\varepsilon'(0) = a, \;\;\; y_\varepsilon(1) + h_2 y_\varepsilon'(1) = b, \tag{4}$$

here $0 < \varepsilon << 1$, a, b, $0 < h_1$, $0 < h_2$ are given constants, $p(0) = 1, q(0) = 2$, $0 < p$, $0 < q$, $f \in C^\infty[0,1]$, $f''(0) \neq 0$, $y_\varepsilon(x)$ is the required function depending on the small parameter ε and on the independent variable x.

We have proved the theorem

Theorem. *To solve two-point boundary value problems (1), (2); (1), (3) and (1), (4) on the segment* $0 \le x \le 1$ *for* $\varepsilon \to 0$ *the uniform asymptotic expansion*

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k w_k(x) + \sum_{k=0}^{2n+1} \sqrt{\varepsilon}^k \pi_k(x\mu^{-1}) + O\left(\varepsilon^{n+1/2}\right),$$

with the corresponding functions $w_k(x)$ and $\pi_k(x\mu^{-1})$.

References

1. *Tursunov D.A. and Bekmurza uulu Ybadylla.* Asymptotic Solution of the Robin Problem with a Regularly Singular Point, Lobachevskii Journal of Mathematics, 42(3), 2021, pp.613–620.

2. *Alymkulov K., Tursunov D.A., Azimov B.A.* Generalized method of boundary layer function for bisingularly perturbed differential Cole equation, Far East Journal of Mathematical Sciences, 101(3), 2017, pp.507–516.

3. *Protter M. H. and Weinberger H. F.* Maximum-Principles in Differential Equations, Diff.Equat.Ser. Prentice-Hall, Inc. X, N. J., 1967.

Integration of the loaded nonlinear Schrodinger equation with a self-consistent source via inverse scattering method

[1]**Urazboev G. U,** [2]**Baltaeva I. I,** [3]**Ruzmetova Y.M.**
[123] *Urgench state university, Urgench, Uzbekistan,*
e-mail: gayrat71@mail.ru, iroda-b@mail.ru, ruzmetova_yulduz@mail.ru

Solution for the NLS equation is always considered interesting to achieve. In 1972, the inverse scattering transform method was first proposed by Zakharov and Shabat |1| for solving the Cauchy problem for the NLS equation. Additionally, in 2004, Khasanov A.B., Urazboev G. U., Sodiqov S.S. |2| gave a lecture "On the nonlinear Schrödinger equation with self-consistent source.

In this work, we consider the system of equations

$$\left\{ \begin{array}{l} iu_t + 2\left|u\right|^2 u + u_{xx} - \gamma\left(t\right) u\left(0,t\right) u_x = i\sum_{k=1}^{2N}\left(f_{k1}g_{k1} - f_{k2}^{*}g_{k2}^{*}\right), \quad t>0, x\in R \\ L(t)f_k = \xi_k f_k, \;\; L(t)g_k = \xi_k g_k, \quad k = 1,2,...,2N, \end{array} \right. \tag{1}$$

under the initial condition

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in R, \tag{2}$$

where

$$L(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -u\left(x,t\right) \\ -u^{*}\left(x,t\right) & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$

The initial function $u_0(x)$ ($-\infty < x < \infty$) has the following properties:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+|x|\right)\,|u_0(x)|\,dx < \infty$,

(ii) The equation $L\left(0\right)y = i\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -u(x) \\ -u^{*}(x) & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \xi\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

(iii) $x\in R$ can have 2N number of simple eigenvalues and does not have spectral singularities. Here, the function $u_0^{*}(x)$ is a complex conjugation of $u_0(x)$.

In the problem under consideration $f_k = \left(f_{k1},\ f_{k2}\right)^T$ is an eigenvector function of the operator $L(t)$ corresponding to the eigenvalue ξ_k, $g_k = \left(g_{k1},\ g_{k2}\right)^T$ linearly independent with f_k solution of the equation $Lg_k = \xi_k g_k$, and

$$W\left\{f_k,\ g_k\right\} \equiv f_{k1}g_{k2} - f_{k2}g_{k1} = \ \omega_k(t), \quad k = 1,\ 2,\ ...,\ 2N, \tag{3}$$

where $\omega_k(t)$ - initially given continuous functions satisfying the conditions

$$\begin{array}{l} \omega_n(t) \ = \ -\,\omega_k^{*}(t) \qquad at \qquad \xi_n \ = \xi_k^{*}, \\ Re\left\{\int_0^t \omega_k(\tau)d\tau\right\} \ > \ -Im\left\{\xi_k(0)\right\}, \quad k \ = \ 1,\ 2,\ ...,\ 2N, \quad t>0 \end{array} \tag{4}$$

For definiteness, we will assume that in the sum participating in the right-hand side of (1), first there are terms with $Im\xi_k > 0, \quad k = 1,2,...,2N$.

The main goal of this work is to study the integration of the loaded NLS equation with a self-consistent source in the class of $u(x,t)$ function, which is su?ciently smooth and tends to its limits rapidly enough when $x\to\pm\infty$ and satisfies the condition

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(1+|x|\right)|u(x,t)| + \sum_{j=1}^{2}\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right|\right)dx < \infty, t\geq 0 \tag{5}$$

via inverse scattering problem.

References

1. *Zakharov V. E. and Shabat A. B.* Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional selfmodulation of waves in nonlinear media, Sov. Phys. JETP, 34, 1972, 62–69.

2. *Khasanov A.B., Urazboev G. U., Sodiqov S.S.* On the nonlinear Schrödinger equation with self-consistent source. Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, 2004. 16-19.

Integration of Harry Dym equation with a special self-consistent source

[1,2] **Urazboev G.U.**, [1,2]**Babadjanova A.K.**, [2]**Azamatova D.SH.**

[1] *V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Khorezm, Uzbekistan*

[2] *Urgench State University, 14, str.Khamid A., Urgench, Uzbekistan*

e-mail: gayrat71@mail.ru, oygul@bk.ru

Nonlinear evolution equations play a vital role in studying problems of analytical chemistry, biology, signal processing, electromagnetism, hydrodynamics and other physical processes. The Harry Dym equation is a prime example of integrable nonlinear evolution equation, which describes a system, where dispersion and non-linearity are being coupled together [1]. This equation firstly was appeared in the works [2]-[4], which is represented as

$$u_t = -\frac{1}{2}u^3 u_{xxx}$$

for real-valued function $u(x,t)$and related to the classical string problem [5].

The present work is based on integrating of the Harry Dym equation with a special self-consistent source using the techniques in [6]-[8]. There are also another interesting works on the integration of the Harry Dym equation with the source in the various class of functions [9]-[10].

We consider the following system of equations:

$$q_t(x,t) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+q(x,t)}}\right)_{xxx} - 2\sum_{n=1}^{N}(1+q(x,t))\frac{\partial}{\partial x}(f_n(x,t))g_n(x,t)) - q_x(x,t)\sum_{n=1}^{N} f_n(x,t)g_n(x,t) \tag{1}$$

$$f_n''(x,t) - \chi_n^2 f_n(x,t)q(x,t) = \chi_n^2 f_n(x,t) \tag{2}$$

$$g_n''(x,t) - \chi_n^2 g_n(x,t)q(x,t) = \chi_n^2 g_n(x,t) \tag{3}$$

with initial data

$$q(x,0) = q_0(x) \tag{4}$$

which has following properties

- $$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\left(|q_0(x)| + \left|1 - \frac{1}{1+q_0(x)}\right|\right)dx < \infty, \tag{5}$$

- The equation $y'' + \lambda^2 q_0(x)y = -\lambda^2 y$ possesses exactly N eigenvalues $-\chi_1^2(0) > -\chi_2^2(0) > ... > -\chi_N^2(0)$ without spectral singularities.

Here, the prime means the derivative with respect to variable x, while dot means the derivate by variable t, $f_n(x,t)$ is eigenfunction corresponding to the eigenvalue $-\chi_n^2$, while $g_n(x,t)$ is linear independent solution with $f_n(x,t)$

$$W(f_n(x,t), g_n(x,t)) = f_n(x,t)g_n'(x,t) - f_n{}'(x,t)g_n(x,t) = \omega_n(t), \tag{6}$$

where $\omega_n(t)$ is ahead given continuous function satisfying the condition

$$\omega_1(t) \le \omega_2(t) \le ... \le \omega_N(t) \tag{7}$$

for any $t \ge 0$ and $q(x,t)$ is assumed to be sufficiently smooth and sufficiently rapidly tends to zero as $|x| \to \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^2)\left(|q(x,t)| + \left|1 - \frac{1}{1+q(x,t)}\right|\right)dx < \infty. \tag{8}$$

We have concerned on determining the time evolution equations of the scattering data with approach of the inverse scattering method for the operator $L(t)$ in order to find the solution

$\{q(x,t), f_n(x,t), g_n(x,t)\}$ of the problem (1)-(7) under the assumption of existence in the class of decreasing functions (8). Now we give main results on determining of the scattering data of the equation

$$y'' + \lambda^2 q(x,t) y = -\lambda^2 y. \tag{9}$$

Theorem 1. *Let $\{q(x,t), f_n(x,t), g_n(x,t)\}$ be a solution of the problem (1)-(8), then the scattering data of the equation (9) satisfy*

$$\dot{R} = i\lambda^3 \left(8 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\omega_n}{(\lambda^2 + \chi_n^2)\,\chi_n} \right) R, \tag{10}$$

$$\frac{d\chi_j(t)}{dt} = \frac{\chi_j(t)\omega_j(t)}{2}, \quad j = \overline{1,N}. \tag{11}$$

$$\dot{c}_j(t) = c_j(t) \left(8\chi_j^3(t) + i\beta_j \frac{\omega_j(t)\chi_j(t)}{2} \right), \quad j = \overline{1,N}. \tag{12}$$

Remark 1. Due to the condition (7) for the considering problem (1)-(8), there is no effect of the creation and anhilation of the solitons as in the work [6].

Remark 2. The equations (10), (11) and (12) allow completely determine the time evolution of all scattering data for the eigenvalue problem of the form of (9). Then, we can integrate the problem (1)-(8) by reducing it into solving the integral Gelfand-Levitan equation [4] with the obtained results (10)-(12).

References

1. *S. Kumar, M.P. Tripathi, O.P.Singh*, A fractional model of Harry Dym equation and its approximate solution, Ain Shams Eng. J. 4 (2013) 111-115.
2. *M.D. Kruskal*, Lecture notes in physics, 38, Berlin: Springer,1975.
3. *P.C. Sabatier*, On some spectral problems and isospectral evolutions connected with the classical string problem.II: evolution equation, Lettere al Nuovo Cimento. 26 (1979) 483-486.
4. *M. Wadati, H. Konno, Y.H. Ichikawa*, New integrable nonlinear evolution equation, J. Phys. Soc. Japan.47 (1979) 1698-1700.
5. *W. Hereman, P.P. Banerje and M.R. Chatterjee*, Derivation and implicit solution of the Harry Dym equation and its connection with the Korteweg-de Vries equation, J. Phys. A Math. Theor. 22 (1989) 241-255.
6. *V. K. Mel'nikov*, Creation and annihilation of solitons in the system described by the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source, Inverse Probl. 6 (1990) 809-823.
7. *G.U. Urazboev*, Toda lattice with a special self-consistent source, Theor Math Phys. 154 (2008) 260-269.
8. *B. Babajanov, M. Feckan, G. Urazboev*, On the periodic Toda lattice hierarchy with an integral source, Commun Nonlinear Sci Numer Simul.52 (2017) 110-123.
9. *G.U. Urazboev, A.K. Babadjanova, D.R. Saparbaeva*, Intagration of the Harry Dym equation with an integral type source, Vestnik Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh.Komp.Nauki. 31 (2021) 285-295.
10. *G.U. Urazboev, A.K. Babadjanova, T.A. Zhuaspayev*, Integration of the periodic Harry Dym equation with a source, Wave Motion. 113 (2022) 102970.

Yadroning nosingulyar qismida nokarleman siljishli Trikomining bir integral tenglamasi haqida

[1] **Xurramov N.X.**, [2] **Chorshanbiyev T. A.**,[3] **Mengnorov P. M.**

[1] *O'zbekiston, Termiz, Termiz davlat pedagogika instituti,*
e-mail: nxurramov22@mail.ru

[2] *O'zbekiston, Termiz, Termiz davlat universiteti,*
e-mail: chorshanbiyevtolqin@gmail

[3] *O'zbekiston, Termiz, Termiz davlat universiteti,*
e-mail: mengnorov2996@gmail.com

Quyida berilgan integral tenglamani qaraymiz

$$\nu_1(x)+C(x)\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1+s}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bs+a)}\right)\nu_1(s)ds=$$

$$=-A(-1)\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{a(1-s)}{b(1+x)}\right)^{1-2\beta}\frac{a\nu_0(s)ds}{as-bx-1}+\int\limits_{-1}^{1}\tilde{H}_0(x,s)\nu_0(s)ds+\int\limits_{-1}^{1}\tilde{H}_1(x,s)\nu_1(s)ds+F_1(x),\ \ x\in I, \tag{1}$$

bu yerda $a+b=1,\ a-b=c,\ A(-1)=-a_1cos(\beta\pi)/\pi(f(c)+a_1sin(\beta\pi)),\ C(-1)=-A(-1)$ va $\tilde{H}_0(x,s),\ \tilde{H}_1(x,s)-$ regulyar operatorlar, $F_1(x)-$ ma'lum funksiya.

(1) tenglama Trikomining noklassik integral tenglamasi bo'lib, u quydagi maxsus xususiyatlarga ega:

1. Yadroning "nosingulyar "qismi $bx+a,\ bs+a$ kabi nokarleman siljishga ega;

2. Tenglamaning o'ng tomonidagi birinchi integral operator regulyar emas, chunki $x=-1,\ s=1$ nuqtalarda yakkalangan maxsuslikka ega.

Endi esa (1) integral tenglamani regulyarlashtirishni qarab chiqamiz. (1) tenglamaning o'ng qismidagi ifodani ma'lum deb hisoblab, quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$g_1(x)=-A(-1)\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{a(1-s)}{b(1+x)}\right)^{1-2\beta}\frac{a\nu_0(s)ds}{as-bx-1}+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\tilde{H}_0(x,s)\nu_0(s)ds+\int\limits_{-1}^{1}\tilde{H}_1(x,s)\nu_1(s)ds+F_1(x),\quad x\in I, \tag{2}$$

(2) munosabatni e'tiborga olib (1) tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\nu_1(x)+C(x)\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1+s}{1+x}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bs+a)}\right)\nu_1(s)ds=g_1(x), \tag{3}$$

(3) yadroning jamlanmagan qismida siljishga ega bo'lgan $\nu_1(x)$ ga nisbatan integral tenglamadan iborat.

Quyidagi teorema o'rinli:

1-teorema. *Agar* $g_1(x),\ x\in(-1,1)$ *funksiya Gyolder shartini qanoatlantirsa va* $g_1(x)\in L_p(-1,1),\ p>1$ *bo'lsa, u holda (3) tenglamaning yechimi* $h(-1)$ *funksiyalar sinfida, ya'ni* $(1+x)^{1-2\beta}\nu_1(x)$ *funksiya* $(-1,1)$ *intervalning* $x=-1$ *chap chetki nuqtasida chegaralangan, kesmaning* $x=1$ *o'ng chetki nuqtasida esa chegaralanmagan funksiyalar sinfida*

$$\nu_1(x)=\frac{g_1(x)}{1+\pi^2C^2(x)}-\frac{\pi C(x)}{1+\pi^2C^2(x)}\int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1+x}\right)^{4\alpha-\alpha_0}\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{2\alpha_1}$$

$$\left(\frac{1-c(bx+a)}{1-c(bt+a)}\right)^{\alpha_0}\frac{\delta(x)}{\delta(t)}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)g_1(t)dt. \tag{4}$$

formula orqali ifodalanadi.

Isbot (3) tenglamaga S.G. Mixlin [1] tomonidan takomillashtirilgan Karlemanning regulyarlashtirish metodidan foydalanamiz.

Quyidagi belgilashlarni kiritib olamiz:

$$\rho(x)=(1+x)^{1-2\beta}\nu_1(x), \quad g(x)=(1+x)^{1-2\beta}g_1(x), \tag{5}$$

u holda (3) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi

$$\rho(x)+C(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)\rho(t)dt=g(x). \tag{6}$$

Faraz qilamiz $z-$ kompleks tekisligining ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin, Karleman g‘oyasiga asosan

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-z}-\frac{b}{(bz+a)(bt+a)}\right)\rho(t)dt. \tag{7}$$

munosabat o‘rinli.

Ma‘lumki, $\Phi(z)$ yuqori va pastki yarim tekisliklarda golomorf, hamda cheksizlikda nolga intiladi. $\Phi^+(x)$ va $\Phi^-(x)$ mos holda $z,\ z\in\Phi(z)$ nuqtaning yuqori va quyi yarim tekisliklardan x haqiqiy o‘qqa intilgandagi $\Phi(z)$ ning limit qiymatlari.

(7) munosabatdan quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz

$$\Phi\left(\frac{1+a-az}{bz+a}\right)=(bz+a)\Phi(z). \tag{8}$$

Kasr–chiziqli $W=W(z)=\dfrac{1+a-az}{bz+a}$ $\left(z=\dfrac{1+a-aW}{bW+a}\right)$ akslantirish yuqori yarim tekislikni pastki yarim tekislikka o‘tkazadi va aksinchasi ham o‘rinli bo‘ladi. Shu sababdan $(-1,1)$ oraliq quyda keltirilgan oraliqlarga o‘tadi

$$\Delta=\begin{cases}(1;\dfrac{2+c}{c}), & \text{agar } c>0;\\ (1,\infty), & \text{agar } c=0;\\ (-\infty,\quad \dfrac{2+c}{c})\cup(1,+\infty), & \text{agar } c<0.\end{cases}$$

(8) munosabatdan quyidagi tengliklar kelib chiqadi

$$\Phi^+\left(\frac{1+a-ax}{bx+a}\right)=(bx+a)\Phi^-(x), \quad \Phi^-\left(\frac{1+a-ax}{bx+a}\right)=(bx+a)\Phi^+(x). \tag{9}$$

(7) ga, hamda Soxotskiy–Plemeli [1] formulasiga asosan quyidagi tengliklar o‘rinli

$$\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=\rho(x), \tag{10}$$

$$\Phi^+(x)+\Phi^-(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{b}{1-(bx+a)(bt+a)}\right)\rho(t)dt. \tag{11}$$

(10) va (11) munosabatlardan (6) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$\Phi^+(x)-\frac{1-i\pi C(x)}{1+i\pi C(x)}\Phi^-(x)=\frac{g(x)}{1+i\pi C(x)}, \quad x\in I. \tag{12}$$

(9) ni e‘tiborga olib, (12) da x ni $W(x)$ ga (u holda $x\in\Delta, \quad W\in I$) almashtirganimizda

$$\Phi^+(x)-\frac{1+i\pi C(W(x))}{1-i\pi C(W(x))}\Phi^-(x)=-\frac{g(W(x))}{(bx+a)(1-i\pi C(W(x)))}, \quad x\in\Delta \tag{13}$$

ifodani hosil qilamiz.(12) va (13) tenglamalarni birlashtirib

$$\Phi^{+}(x) - G(x)\Phi^{-}(x) = h(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{14}$$

tenglamaga bo'lamiz.(14) tenglamadagi $G(x)$ va $h(x)$ ning qiymatlari (12) va (13) munosabatlardan topiladi.

1- Teorema isbotining davomi [2] metod orqali amalga oshiriladi.

Adabiyotlar

1. *Mixlin S.G.* Ob integral'nom uravnenii F.Trikomi.// DAN SSSR.1948.t.59, No 6, s.1053-1056.

2. *Mirsaburov M., Begaliev O., Khurramov N.Kh.* Generalization of the Tricomi Problem // Differential Equations, 2019, Vol., 55, No8, pp.1118-1127

Shredinger tipli operatorning xos qiymatlari mavudligi

[1]**Xurramov Y.**

[1] *O'zbekiston milliy universitetining Jizzax filiali Amaliy matematika kafedrasi assistenti.*

e-mail: yxurramov94@mail.ru

Panjaradagi soni saqlanmaydigan bir nechta zarrachalar sistemasi hamiltonianini o'rganish masalasi statistik fizika, kvant mexanikasi va kvant maydon nazariyasi masalalarini yechish uchun muhim ahamiyatga ega. Qattiq jismlar fizikasi sohasida zarrachalarning soni saqlanmaydigan sistemasi uchun ko'plab muhim va qiziqarli masalalar mavjud.

Tashqi maydon ta'siridagi bir kvant zarracha harakatini tavsiflovchi bir zarrachali hamiltonianlar hamda qisqa masofada ta'sirlashuvchi ikkita bir xil va har xil zarrachalar sistemasi hamiltonianlariga mos ikki zarrachali diskret Shredinger operatorlarining spektral xossalari Faria, Corolli, Albeverio, S.N. Laqaevlarning ishlarda o'rganilgan.

Soni saqlanmaydigan zarrachalar sistemasi hamiltoniani $S - D$ misolida ([Mogilner A:Hamiltonians in solid state phzsics as multi-partile discret Schrödinger operators: Problem and result Advances in Soviet Mathematics 5. 199-1994(1991)) o'rganilgan.

Panjaradagi soni saqlanmaydigan chekli zarrachalar sistemasini o'rganish, panjara bir, ikki, uch va hokazo N zarrachali sistema hamiltonianlarini va $S - D$ modelga mos Schrödinger tipli operatorni o'rganishdan boshlanadi. Shuning uchun bunday operatorlarning spektral xossalarini o'rganish zamonaviy matematik fizikada muhimdir.

Faraz qilaylik $L_2(T^1)$-bir o'lchamli tor $T^1 = (-\pi, \pi]$ da kvadrati bilan (Lebeg ma'nosida) integrallanuvchi funksiyalar fazosi bo'lsin. Bu fazoda quydagicha aniqlangan $H_A(k), k \in T^1$ operatorni qaraymiz.

$$H_A(k) = H_0(k) + \frac{A}{2}V$$

bunda $A > 0$ va $H_0(k)$-operator $E_{AS}(k; \cdot) := E(k; \cdot)$ funksiyaga ko'paytirish operatori:

$$(H_0(k)f)(p) = E(k,p)f(p), f \in L_2(T^1)$$

bunda $S > 0$ va

$$E(k;p) = \varepsilon\left(\frac{k}{2} - p\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} + p\right) - AS = 2\left(1 - \cos\frac{k}{2}\cos p\right) - AS$$

bunda $\varepsilon(p) = 1 - \cos p$. $V-$ integral operator:

$$(Vf)(p) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}^1} cos(p-q)f(q)dq, f \in L_2(T^1),$$

$H_A(k)$ operator o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘lganligi uchun uning qoldiq spektri bo‘sh to‘plam bo‘lib, spektri haqiqiy sonlar to‘plamining qismidan iborat, ya’ni

$$\sigma(H_A(k)) \subset \mathbb{R}.$$

$(H_0(k)f)(p) = E(k;p)f(p), f \in L_2(T^1)$ operatorning spektri faqat muhim spektrdan iborat va uning uchun quydagi tenglik o‘rinli, ya’ni

$$\sigma_{ess}(H_0(k)) = [m(k), M(k)]. \tag{1}$$

bunda

$$m(k) = \min_{p\in\mathbb{T}^1} E(k;p) = E(k;0) = 2\left(1 - \cos\frac{k}{2}\right) - AS,$$

$$M(k) = \max_{p\in\mathbb{T}^1} E(k;p) = E(k;\pi) = 2\left(1 + \cos\frac{k}{2}\right) - AS.$$

$H_0(k)$ operatorning o‘z-o‘ziga qo‘shma operator va V operatorning kompakt (ikki o‘lchamli operatorligidan) ekanligidan muhim spektr turg‘unligi haqidagi G.Veyl teoremasi (qarang [2]) va (1) tenglikga ko‘ra

$$\sigma_{ess}(H_A(k)) = \sigma_{ess}(H_0(k)) = [m(k), M(k)]$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Teorema 1. $A, S > 0$ bo‘lsin. U holda barcha $k \in (-\pi, \pi)$ larda $H_A(k)$ operator $(-\infty, m(k))$ oraliqda xos qiymatga ega bo‘lmaydi.

Teorema 2. $A, S > 0$ bo‘lsin. U holda barcha $k \in (-\pi, \pi)$ larda $H_A(k)$ operator $(M(k), +\infty)$ oraliqda ikkita $z_1(A, k)$ va $z_2(A, k)$ xos qiymatlarga ega va ularga mos xos funksiyalar

$$f_i(p) = \frac{A}{2} \cdot \frac{C_{1i}\cos p + C_{2i}\sin p}{z_i(A,k) - E(k;p)}, \quad i = 1, 2$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Teorema 3. $k = \pi$ bo‘lsin. $H_A(\pi)$ operatorning spektri $\sigma(H_A(\pi)) = \left\{\frac{A\pi}{2} - AS + 2, 2 - AS\right\}$ ga teng.

Adabiyotlar

1. *A.T.Boltayev.* ”Svyazannie sostoyaniya operatora tipa Shredingera assotsiirovannogo s S-D obbennoy modeli ” 4-son UzMJ 2015 /
2. *Reed M., Simon B.:* Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of operators. Academic Press, N.Y., London 1978./

Inverse problem for a fredholm type integro-differential equation with degenerate kernel and two redefinition data

Yuldashev T.K.
Tashkent State University of Economics, Karimov street 49, Tashkent, 100066 Uzbekistan
e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Integro-differential equations of the Fredholm type are of great interest from the point of view of applications [1, 2]. Inverse problems for the Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel are studied in many works, in particularly, in [3].

In this paper, we study the solvability of the inverse problem for a second-order ordinary Fredholm integro-differential equation with a degenerate kernel, two parameters, and final conditions at the end point of the given segment. This work differs from the existing works in that it requires two additional redefinition data to be found. The studying inverse problem has features with respect to the direct problem. So, on the segment $[0;T]$, an integro-differential equation of the form

$$u''(t) + \left(\lambda^2 - \alpha(t)\right) u(t) = \nu \int_0^T K(t,s)\, u(s)\, ds \tag{1}$$

is considered with following conditions

$$u\,(T) = \varphi_1, \quad u'(T) = \varphi_2, \tag{2}$$

$$\int_0^{t_1} u(t)\, dt = \psi_1, \quad \int_0^{t_1} e^t u'(t)\, dt = \psi_2, \tag{3}$$

where $0 < T$ is given real number, $0 < t_1 < T$, $0 < \lambda$ is real parameter, ν is real nonzero parameter, $\varphi_j = \text{const}$, φ_j are redefinition data, $\psi_j = \text{const}$, $j = 1, 2$, $\alpha(t) \in [0;T]$,

$$K\,(t,s) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t)\, b_i(s),$$

$a_i(t)$, $b_i(s) \in C\,[0;T]$. Assume that the system of functions $\left\{a_i(t)\right\}$ and $\left\{b_i(s)\right\}$, $i = \overline{1,k}$ are linear independent. The choice of conditions (2) with the final data is due to the fact that in practice it is not always possible to determine the initial condition. For example, when studying the technological process of aluminum production, before the start of the production cycle, the raw material passes through firing and the state of the raw material by the beginning of the production cycle is not known.

Note that the direct problem (1), (2) has a unique solution for all values of the parameter λ, and the inverse problem (1)–(3) has a unique solution only for certain values of this parameter λ. In addition, the second parameter ν also plays an important role in the issue of one valued solvability. The questions of solvability and construction of solutions of one inverse boundary value problem for a second-order Fredholm integro-differential equation (1) with a degenerate kernel $K(t,s)$, final conditions (2) at the end point of the segment, two parameters λ, ν, and two redefinition data φ_1, φ_2 are considered. Sets of regular and irregular values of parameters are determined and solutions corresponding to these values are constructed. The features that arise when solving the inverse problem are studied. Criteria for the unique solvability of the posed inverse problem are established.

References

1. *Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Ferreira J.* Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping, Math. Methods in the Appl. Sciences, Vol. 24, 2001, P. 1043–1053.
2. *Ushakov E. I.* Static stability of electrical circuits. Novosibirsk: Nauka, 1988.
3. *Yuldashev T. K.* Determination of the coefficient and boundary regime in boundary value problem for integro-differential equation with degenerate kernel, Lobachevskii journal of mathematics, Vol. 38, 2017, P. 547–553.

One problem for integro-differential equation

Yuldasheva A.
Tashkent Branch, Lomonosov Moscow State University (Tashkent, 100060 Uzbekistan),
e-mail:yuasv86@mail.ru

We consider equation

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + (-\Delta)^s u = f(x,t), \quad x \in \Omega, \ t > 0, \tag{1}$$

with initial data

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

where $s \in (0, 1/2)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $-$ domain with piecewise smooth boundary and $n \geq 3$.

We suppose, that $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ is unknown function, kernel $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ and function $f : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ are scalar functions.

According to definitions from [1], equation (1) can be rewrite as

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_{\Omega} \frac{[u(x,t) - u(y,t)]}{|x-y|^{n+2s}} \, dy = f(x,t), \quad x \in \Omega, \ t > 0, \tag{3}$$

Now we formulate the main result of the paper on the solvability of problem (1)-(2).

Theorem 1. *Let $0 < \beta < 2s/n$. Then for any $T > 0$ and $\varphi \in W_2^{2s}(\Omega)$, $\psi \in W_2^{2s}(\Omega)$ and $f \in C\big\{[0,T] \to W_2^{2s}(\Omega)\big\}$ problem (1)–(2) has a unique solution from $C^2\big\{[0,T] \to H^{\beta}(\Omega)\big\}$.*

References

1. *Maha Daoud, El Haj Laamri.* Fractional Laplacians : a short survey, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S.,V.15, 1, 2022, 95–116.

О точности вычислений в вычислительной динамике

[1]**Абдуганиев А.А.**, [2]**Абдуллаев А.Х.**
[1] *Институт математики им. В.И.Романовского АН Республики Узбекистан,*
[2] *Институт математики им. В.И.Романовского АН Республики Узбекистан,*
e-mail: abduganiax@gmail.ru

Динамические системы – область математики, которая отличается глубокими теоретическими исследованиями и широкими прикладными применениями. В ней имеются ряд трудных проблем, для решения которых часто применяются методы вычислительной математики. И это иногда требует разработку новых и модификацию существующих методов вычислений. Вычислительная динамика является в настоящее время быстро развивающей областью динамических систем, во многом, благодаря этому новому подходу вычислительным экспериментам.

Отличительной особенностью вычислительной динамики является вычисления с повышенной точностью, нередко превышающая 100 значащих цифр после запятой. Наличие и исследование детерминированного хаоса, в частности, требует вычислений, точность которых превышает это число на несколько порядков. Современное программное обеспечение позволяет производить вычисления с высокой точностью, но, обычно, вычисление значений даже элементарных и стандартных математических функций не реализовано в них.

Функция квадратного корня от действительного числа используется для вычисления ряда норм в многомерных пространствах, например для нахождения расстояния между двумя точками. Существует ряд численных методов для вычисления квадратного корня. Одним из них является т.н. геометрический метод, известный с античных времен, благодаря своей простой геометрической интерпретации.

Суть этого метода проста. Чтобы найти $c = \sqrt{S}$, т.е. длину стороны квадрата c, площадь которого равна S, квадрат заменяется равнозначным прямоугольником площадью $S = ab$, где a – ширина, b – высота прямоугольника. Если ширина прямоугольника стремится высоте, то в пределе получим длину стороны исходного квадрата. Чтобы добиться этого, можно в качестве ширины прямоугольника взять каждый раз среднеарифметическую ширины и высоты прямоугольника и пересчитать высоту исходя из нового значения ширины прямоугольника. Т.е. вычисление квадратного корня можно реализовать с помощью итерационной формулы

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad a_n = \frac{S}{b_n}.$$

Здесь в качестве начального значения можно взять фактически любое число, например, e4$b_0 = 1$.

Отличительной особенностью этого метода вычисления квадратного корня является стремительное достижение заданной точности. Например, для вычисления квадратного корня от 2 с точностью 2^N достаточно $N+2$ итераций. Причем в последнем шаге итерации проверяется достижение заданной точности, а в предпоследнем шаге корректируется только последние значащие цифры (существенно меньше от 1% всех требуемых цифр после запятой).

Программная реализация на языке Python показала, что для вычисления $\sqrt{2}$ с точностью $2^{27} = 134217728$ цифр после запятой потребовалось примерно 40 минут в обычном ноутбуке. А мобильные устройства, даже обычные ноутбуки существенно уступают настольным версиям персональных компьютеров, не говоря уже о суперкомпьютерах. Для сравнения можно привести следующее сравнение. Результат вычислений в текстовом формате содержал более 20 тысяч страниц текста и открыть этот файл в офисной программе MS Word не удалось в течении 40 минут.

Существенному сокращению времени вычислений помогла установка плавающей точности вычислений: в i–м шаге итераций вычисления проводились с точностью 2 в степени i. Благодаря этому, для первых 26 шагов итераций потребоволось ровно столько времени, сколько для последнего 27–шага итераций. Это позволило более 13 раз сократить время вычислений (более 7 раз с учетом допольнительных 28– и 29–шагов итерации). Причем с увеличением количество итераций выигриш по времени только увеличивется. Например, если количество итераций равно 100, то выигриш по времени составит более чем в 25 раз.

При увеличении S точность вычисления $\sqrt{S}$ несколько ухудшается, примерно каждое увеличение на 100 числа S требует дополнительного шага итерации. Но можно избавиться от дополнительных шагов итерации. Для этого можно предварительно привести число S в интервал $(0,1;10]$ делением несколько раз его на 100. Обычно точность числа S намного меньше, чем требуемая точность квадратного корня от него. Поэтому деление его на 100 выполняется фактически мгновенно по сравнению с дополнительным шагом итерации.

Квантовые компьютеры отличаются отличной масштабируемостью мощности компьютера. Увеличение числа кубитов на единицу в квантовом компьютере удваивает его мощность. Рассмотренный метод в чем-то похож на квантовые технологии: увеличение количества шагов итераций на единицу позволяет удваивать точность вычислений. Остается надеяться, что разработка таких алгоритмов позволила бы прорыву в вычислительной динамике.

Результат численного эксперимента размещен в Интернете, в телеграм канале семинара по динамическим системам при институте Математики им. В.И.Романовского по адресу

Инвариантные подпространства оператора Шредингера системы двух бозонов с цилиндрическим потенциалом на решетке

[1]**Абдуллаев Ж.И.**, [2]**Шотемиров Й.С.**

[1]*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: jabdullaev@mail.ru

[2]*Навоийский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан,*
e-mail: shotemirov.y@gmail.com

Рассматривается оператор Шредингера $H(\mathbf{k})$ соответствующий гамильтониану $\hat{H}$ системы двух бозонов на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$ с цилиндрическим потенциалом $\hat{v}$. Изучаются инвариантные подпространства и дискретный спектр семейства операторов Шредингера $H(\mathbf{k}), \mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$, соответствующий гамильтониану $\hat{H}$.

Полный гамильтониан $\hat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2^{sym}(\mathbb{Z}^3 \otimes \mathbb{Z}^3)$ и состоит из разности свободного гамильтониана $\hat{H}_0$ и потенциала взаимодействия $\hat{V}_2$ двух частиц (см.[1],[2]) т.е.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \hat{V}_2.$$

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье. Гамильтониан H в импульсном представлении разлагается в прямой интеграл (см. [3])

$$H = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus H(\mathbf{k}) d\mathbf{k}.$$

Слой $H(\mathbf{k}) := H_0(\mathbf{k}) - V$ оператора H называется оператором Шредингера. Операторы $H_0(\mathbf{k})$ и V действуют в гильбертовом пространстве $L_2^e(\mathbb{T}^3) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^3) : f(-\mathbf{q}) = f(\mathbf{q})\}$ по формулам:

$$(H_0(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}), \quad \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^{3} 2(1 - \cos\frac{k_j}{2}\cos p_j),$$

$$(Vf)(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{T}^3} v(\mathbf{q}-\mathbf{s}) f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad v(\mathbf{q}) = (F\hat{v})(\mathbf{q}),$$

Относительно потенциала $\hat{v}$ предполагается, что

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} \bar{v}(|\mathbf{n}|), & |n_1| + |n_2| \le 1 \\ 0, & |n_1| + |n_2| \ge 2, \end{cases} \tag{1}$$

где $|\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2| + |n_3|$ и $\bar{v} : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ убывающая функция на $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\bar{v} \in \ell_2(\mathbb{Z}_+)$. Носитель потенциала $\hat{v}$ совпадает с множеством D :

$$D = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_3 \in \mathbb{Z}, |n_1| + |n_2| \le 1\}.$$

При условии (1), V является оператором Гильберта-Шмидта, в частности, компактным оператором. Поэтому в силу теоремы Вейля, существенный спектр оператора $H(\mathbf{k})$ совпадает со спектром оператора $H_0(\mathbf{k})$. Если $\mathbf{k} = (\pi, \pi, \pi)$, тогда спектр оператора $H(\pi, \pi, \pi) = 6I - V$ состоит из собственных значений вида $6 - \bar{v}(n), n \in \mathbb{Z}_+$ и существенного спектра $\{6\}$.

Сначала мы найдем инвариантные подпространства относительно оператора $H(\mathbf{k})$. Гильбертово пространство $L_2^e(\mathbb{T}^3)$ можно представить в виде прямой суммы

$$L_2^e(\mathbb{T}^3) = L_{123} \oplus L_{123}^{\perp}, \quad L_{123} := L_2^e(\mathbb{T}) \otimes L_2^e(\mathbb{T}) \otimes L_2^e(\mathbb{T}).$$

Лемма 1. Пусть потенциал $\hat{v}$ имеет вид (1). Тогда подпространство L_{123} является инвариантным относительно оператора $H(\mathbf{k})$.

Обозначим через $H_{123}(\mathbf{k})$ сужение оператора $H(\mathbf{k})$ в инвариантном подпространстве L_{123}. Мы изучаем собственные значения и собственные функции оператора $H_{123}(\mathbf{k}) := H(\mathbf{k})|_{L_{123}}$.

Система функций $\psi_0^+(q)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \psi_n^+(q)=\frac{\cos nq}{\sqrt{\pi}}, n\in\mathbb{N}$ образует ортонормированный базис в $L_2^e(\mathbb{T})$. Обозначим через $L(n), n\in\mathbb{Z}_+-$ одномерное подпространство натянутое на вектор ψ_n^+. При этом $L_2^e(\mathbb{T})$ разлагается в прямую сумму

$$L_2^e(\mathbb{T})=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus L(n). \tag{2}$$

Разложение (2) порождает разложение

$$L_{123}=L_2^e(\mathbb{T})\otimes L_2^e(\mathbb{T})\otimes\sum_{n=0}^{\infty}\oplus L(n)=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)\otimes L(n)=\sum_{n=0}^{\infty}\oplus\mathfrak{R}(n),$$

где $\mathfrak{R}(n)=L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)\otimes L(n), \quad L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)=L_2^e(\mathbb{T})\otimes L_2^e(\mathbb{T})$.

Лемма 2. Пусть потенциал $\hat{v}$ имеет вид (1), то для любого $n\in\mathbb{Z}_+$ подпространство $\mathfrak{R}(n)$ является инвариантным относительно оператора $H_{123}(k_1,k_2,\pi)$.

Несложные вычисления показывает, что сужение $H_{123}^{(n)}(k_1,k_2,\pi):=H_{123}(k_1,k_2,\pi)|_{\mathfrak{R}(n)}$ оператора $H_{123}(k_1,k_2,\pi)$ можно представить в виде тензорного произведения:

$$H_{123}^{(n)}(k_1,k_2,\pi)=[2I+H_0(k_1,k_2)-V_{123}^{(n)}]\otimes I. \tag{3}$$

Здесь $I-$ единичный оператор, $H_0(k_1,k_2)-$ оператор умножения на функцию $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})=4-2\cos\frac{k_1}{2}\cos p_1-2\cos\frac{k_2}{2}\cos p_2$, а $H_{123}^{(n)}(k_1,k_2):=2I+H_0(k_1,k_2)-V_{123}^{(n)}-$ двумерный двухчастичный оператор, действующий в $L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)$ по формуле:

$$(H_{123}^{(n)}(k_1,k_2)f)(\mathbf{p})=(2+\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}))f(\mathbf{p})-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}[\bar{v}(n)+2\bar{v}(n+1)(\cos p_1\cos q_1+\cos p_2\cos q_2)]f(\mathbf{q})d\mathbf{q}.$$

Гильбертово пространство $L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)$ можно представить в виде прямой суммы

$$L_2^{ee}(\mathbb{T}^2)=L_2^{ee(s)}(\mathbb{T}^2)\oplus L_2^{ee(as)}(\mathbb{T}^2),$$

где

$$L_2^{ee(s)}(\mathbb{T}^2):=\{f\in L_2^{ee}(\mathbb{T}^2): f(p_1,p_2)=f(p_2,p_1)\},$$
$$L_2^{ee(as)}(\mathbb{T}^2):=\{f\in L_2^{ee}(\mathbb{T}^2): f(p_1,p_2)=-f(p_2,p_1)\}.$$

Теорема 1. Подпространства $L_2^{ee(s)}(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^{ee(as)}(\mathbb{T}^2)$ являются инвариантными относительно оператора $H_{123}^{(n)}(\lambda,\lambda)$ для любого $n\in\mathbb{Z}_+$.

Сужение оператора $H_{123}^{(n)}(\lambda,\lambda)$ в подпространствах $L_2^{ee(s)}(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^{ee(as)}(\mathbb{T}^2)$ обозначим через

$$H_{123}^{(n,s)}(\lambda,\lambda)=H_{123}^{(n)}(\lambda,\lambda)|_{L_2^{ee(s)}(\mathbb{T}^2)},\quad H_{123}^{(n,as)}(\lambda,\lambda)=H_{123}^{(n)}(\lambda,\lambda)|_{L_2^{ee(as)}(\mathbb{T}^2)}.$$

Например, действие оператора $H_{123}^{(n,as)}(\lambda,\lambda)$ на элемент $f\in L_2^{ee(as)}(\mathbb{T}^2)$ имеет вид:

$$(H_{123}^{(n,as)}(\lambda,\lambda)f)(\mathbf{p})=(2+\varepsilon_k(\mathbf{p})f(\mathbf{p}))-\frac{\bar{v}(n+1)}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}(\cos p_1-\cos p_2)(\cos q_1-\cos q_2)f(\mathbf{q})d\mathbf{q}.$$

Теорема 2. Для любого $n\in\mathbb{Z}_+$ и $\lambda\in\mathbb{T}$ оператор $H_{123}^{(n,s)}(\lambda,\lambda)$ имеет хотя бы одно собственное значение лежащее слева от существенного спектра.

Обозначим через a значении следующего интеграла:

$$a=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\frac{\cos p_1-\cos p_2}{2-\cos p_1-\cos p_2}d\mathbf{p}\approx 0,546.$$

Теорема 3. Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$ и $\bar{v}(n+1)>\dfrac{2}{a}\cos\dfrac{\lambda}{2}$. Тогда оператор $H_{123}^{(n,as)}(\lambda,\lambda)$ имеет единственное простое собственное значение вне существенного спектра.

Заключение. Из теоремы 2 следует, что для любого $\lambda\in\mathbb{T}$ оператор $H_{123}(\lambda,\lambda,\pi)$ имеет бесконечное число собственных значений ниже существенного спектра.

Литература

1. *J.I.Abdullaev., A.M. Toshturdiyev.* Invariant subspaces of the Schrodinger operator with a finite support potential. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 3, pp. 1481-1490.

2. *J.I. Abdullayev, Sh.X. Ergashova, Yu.S. Shotemirov.* Bound states of a system of two bosons with a spherically potential on a lattice. Journal of Physics: Conference Series.Vol.2070 (2021) 012023.

3. *Рид М., Симон Б.* Методы современной математической физики. IV: Анализ операторов. М: Мир. 1982.

Обратная задача с интегральным условием склеивания для уравнения третьего порядка

[1]Абдуллаев О.Х., [2] Матчанова А.А.

Институт Математики имени В.И.Романовского, Ташкент, Узбекистан.100174.

e-mail: [1] obidjon.mth@gmail.com, [2] oygul87-87@mail.ru

Пусть Ω– односвязная область, ограниченная отрезками BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $x=1$, $y=h$, $x=0$ и характеристиками $AC:\ x+y=0$, $BC:\ x-y=1$ уравнения колебания струны, пересекающимися в точке $C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. Введем обозначение $\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{y<0\}$. Рассмотрим в области Ω уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\right)Lu=f(x)g(y) \tag{1}$$

где

$$Lu\equiv u_{xx}-\frac{1-signy}{2}u_{yy}-\frac{1+signy}{2}{}_cD_{0y}^{\alpha}u,$$

$$g(y)\equiv\begin{cases} g_1(y);\ y<0\\ g_2(y);\ y>0\end{cases}$$

и ${}_cD_{ay}^{\alpha}$ - известный оператор Капуто порядка α $(0<\alpha<1)$ (см [1]):

$${}_cD_{0y}^{\alpha}u(x,y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^y(y-t)^{-\alpha}u_t(x,t)dt,$$

a, b – заданные постоянные числа, причем $a\neq 0$.

Определение. Функция $u(x,y)$ называется *регулярным решением* уравнения (1), если она имеет непрерывные производные входящие в оператор Lu, также $Lu\in C^1(\Omega)$.

Задача.Найти в области Ω функции $u(x,y)$ и $f(x)$ уравнения (1) из класса функций $u(x,y)\in C(\overline{\Omega});\quad u_x\in C(\overline{\Omega_1}\setminus\overline{A_0B_0});\ u_x,u_y\in C(\Omega_2\cup AC);\ u_{xx}\in C(\Omega_1\cup AA_0)$; удовлетворяющие краевым условиям

$$u_x(0,y)=\varphi_1(y),\qquad 0\leqslant y<h;$$

$$u_x(1,y)=\varphi_2(y),\qquad 0\leqslant y<h;$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\qquad 0\leqslant y<h;$$

$$u\,|_{AC}=\psi_1(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\,|_{AC}=\psi_2(x),\qquad 0\leqslant x<\frac{1}{2};$$

и интегральное условие склеивания :

$$\lim_{y\to+0}{}_cD_{0y}^{\alpha}u(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)u_x(x,-0)+$$

$$+\lambda_3(x)u(x,0)+\lambda_4(x)\int_0^y r(t)u(t,-0)dt+\lambda_5(x), \quad x\in[0,1],$$

здесь n-внутренняя нормаль $\varphi_i(y)$, $\psi_j(x)$, $g_j(y)$, $\lambda_k(x)$ $(i=\overline{1,3}, j=\overline{1,2}, k=\overline{1,5})$– заданные функции, причем $\sum\limits_{i=1}^{4}\lambda_i^2\neq 0$.

Литература

1. *A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. in: North-Holland Mathematics Studies, vol. 204,Elsevier Science B.V., Amsterdam. 2006.

Стабилизация режима работы реактора

[1]Абдурахимов А., [2]Холиков Д.К.

[1] *Ташкентский архитектурно строительный институт, Узбекистан*
e-mail: abduraximov1943@mail.ru

[2] *Ташкентский архитектурно строительный институт, Узбекистан,*
e-mail: xoliqov23@mail.ru

Рассматривается возможность стабилизации неустойчивого режима работы химического реактора с неоднородным кипящим слоем для одностадийной реакции. Определен диапазон параметра стабилизации, в котором можно получить устойчивый режим работы реактора. Построена область устойчивости среднего стационарного режима при идеальном регулировании в зависимости от гидродинамических параметров.

Как показал анализ влияния гидродинамических параметров на режим работы реактора [1] с неоднородным кипящим слоем для адиабатического реактора ($\alpha = 0$) в случае малой интенсивности массобмена между фазами (А«1) стационарных режимов в зависимости от значений А, В, $T_0^{''}$ β, u_1, u_2 может быть от одного до трех, причем они соответствуют высоко температурному, среднему и низко температурному режимам T_1^{01}, T_1^{02} , T_1^{03} . Обычно нижние и верхние стационарные режимы устойчивы.

В нижнем стационарном режиме T_1^{01} температура в реакторе слишком мала, чтобы реакция протекала достаточно эффективно, а в верхнем T_1^{03} она настолько велика, что это часто приводит к распаду продукта и возникновению побочных реакций.

Средний стационарный режим T_1^{03} обычно оказывается наиболее целесообразным с точки зрения проведения химико-технологических процессов. Но как раз этот режим не устойчив и возникает задача его стабилизации.

Поэтому исследуем возможность стабилизации среднего режима работы реактора. При этом уравнения массо-и теплопереноса в безразмерном виде имеет [1] .

Уравнения для плотной фазы

$$\frac{\partial Z_1}{\partial\tau}+u_1\frac{\partial Z_1}{\partial x}=(1-Z_1)\,ge^{\left(-\frac{\beta}{T_1}\right)}-A\,(Z_1-Z_2)\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial\tau}=\alpha(T_0^{'}-T_1)+\omega u_1(T_0^{'}-T_1)+\omega ge^{-\frac{\beta}{T_1}}\int_0^1(1-Z_1)dx-B(T_1-\int_0^1 T_2dx) \tag{2}$$

Начальные и граничные условия

$$\tau=0,\qquad T_1(0)=T_0{''},\qquad Z_1(x,0)=Z_{01}(x) \tag{3}$$

$$x=0,\qquad\quad Z_1(0,\tau)=0 \tag{4}$$

для разбавленной фазы

$$\frac{\partial Z_2}{\partial \tau} + u_2 \frac{\partial Z_2}{\partial x} = A\left(Z_1 - Z_2\right), \tag{5}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} + u_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = B\left(T_1 - T_2\right), \tag{6}$$

Начальные и граничные условия

$$\tau = 0, \qquad T_2(x,0) = T_{02}(x,0), \qquad Z_2(x,0) = Z_{02}(x) \tag{7}$$

$$x = 0, \qquad T_2(o,\tau) = T_0^{''}, \qquad Z(0,\tau) = 0 \tag{8}$$

Здесь используются обозначения принятые в работе[2].

В результате решения задачи (1-8) найдены выражения для исследования стационарных распределений степени продвижения реакции в плотной $Z_1^0(x)$, разбавленной $Z_2^0(x)$ фазах и при температуре $T_2^0(x)$ разбавленной фазы. Получено уравнение относительно стационарной температуры, решение которого дает значение стационарных температур для плотной фазы.

$$T_0^{''} - T_0^{'} + \frac{1}{\omega} Z_1^0(1) + \frac{u_2}{\omega u} Z_2^0(1) - \frac{u_2}{\omega u_1}(T_2^0(1) - T^{''}) = 0 \tag{9}$$

Для стабилизации неустойчивого режима работы реактора с неоднородным кипящим слоем в систему вводится пропорционального регулирования скорости реагента в разбавленной фазе по отклонению температуры в плотной фазе реактора.

$$v_2 = v_{02}(1 + d(T_1(\tau - \tau_\alpha) - T_1^{02})) \tag{10}$$

здесь $T_1^{02}-$ температура среднего стационарного режима плотной фазы при $v_2 = v_{02}$; $\tau_\alpha-$ время запаздывания, определяемое степенью инертности контроля; $d-$ параметр стабилизации.

При определении области параметров стабилизации задача сводится к выявлению корней квазиполинома шестой степени в комплексной плоскости. Если все полюсы распологаются в комплексной плоскости левее мнимой оси, то возмущения стационарного режима затухают со временем и режим устойчив. В противном случае режим неустойчивый.

Литература

1. *Абдурахимов А.* Об одном методе стаблизации среднего режима работы реактора, Доклады АН РУз, no 7, 2000., стр.21-28.

2. *Гупало Ю.П., Абдурахимов А.А., Джуманиёзов К. А.* Влияние продольного перемешивания на степень превращения реагента с неоднородным псевдоожиженным слоем, ТОХТ, 1991, Т.XXXV, стр. 44-50.

Задача быстродействия для уравнения теплопроводности

Азамов А.А.
Институт математики имени В.И. Романовского
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com

В приложениях математики важное место занимает задачи оптимального управления. Для систем, описываемых конечномерными дифференциальными уравнениями, основным инструментом служит принцип максимума Понтрягина. Этот принцип формально допускает обобщение и для эволюционных уравнениях в банаховых пространствах (Ж.-Л.Лионс) в случае задачи управления на фиксированном конечном отрезке времени. Что касается задачи быстродействия, то даже для уравнения теплопроводности не имеется даже формальной формулировки аналога принципа максимума Понтрягина.

В связи с этим, Ф.Л.Черноуско предлагал метод расщепления задачи быстродействия на одномерные управляемые системы. Последняя задача решается в конечном виде, однако при этом получается лишь достаточно грубая верхняя оценка для времени оптимального перехода. В настоящем докладе будет рассмотрены конечномерные аппроксимации задачи быстродействия для уравнения теплопроводности в стержне.

Пусть в области $\Delta = (0, +\infty) \times (0, \pi)$, задано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v(t, x)$$

Будем рассматривать начально-краевую задачу $u(0, x) = \varphi(x)$, $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$, функция управления $v(t, x)$ (интенсивность источников тепла) удовлетворяет ограничению $-1 \leq v(t, x) \leq 1$.

При каждой $v(\cdot, \cdot) \in L^2(\Delta)$ задача имеет единственное решение $u_{v(\cdot,\cdot)}$ из соответствующего класса Соболева. Управление $v(\cdot, \cdot)$ называется допустимым, если $u_{v(\cdot,\cdot)}(T, x) \equiv 0$. Пусть $T_*(\varphi) = \inf T_{v(\cdot,\cdot)}(\varphi)$ по всевозможным допустимым управлениям. Если $T_*(\varphi) = \inf T_{\hat{v}(\cdot,\cdot)}(\varphi)$, то $\hat{v}\,(\cdot, \cdot)$ называется оптимальным управлением, а $T_*(\varphi)$ – оптимальным временем перехода.

В докладе будет приведены результаты о конечномерных аппроксимациях поставленной задачи и сформулированы нерешенные задачи.

Оценка продолжительности теплового режима в зависимости от параметров нагревателя

Алимов Ш. А.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент,

Рассматривается математическая модель процесса разогрева некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с помощью расположенных в ней источников тепла. Область Ω предполагается имеющей цилидрическую форму: $\Omega = D \times (0, H)$. Сечение $D \subset \mathbb{R}^{n-1}$ представляет собой выпуклую область с гладкой границей, а высота H является произвольным положительным числом.

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t(x, t) \;=\; \Delta u(x, t) \;+\; f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1}$$

с граничными условиями Робена

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} + \sigma u(x, t) = 0, \quad x \in \partial D \times [0, H], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(\widetilde{x}, 0, t)}{\partial x_n} \;=\; \frac{\partial u(\widetilde{x}, H, t)}{\partial x_n} \;=\; 0, \quad \widetilde{x} \in D, \tag{3}$$

и начальным условием

$$u(x, 0) \;=\; 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Мы предполагаем, что правая часть в уравнении (1) имеет вид

$$f(x, t) \;=\; e^{-\alpha t} g(\widetilde{x}) \cdot \omega(x_n, h(t)), \tag{5}$$

где $h = h(t)$ − непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$0 \leq\; h(t) \leq H, \quad t \geq 0, \quad u(0) = 0, \tag{6}$$

а кусочно-постоянная функция ω равна 1 при $0 \leq x_n \leq h$ и равна 0 при $x_n > h$.

Функция g в равенстве (5), представляющая собой начальную плотность распределения источников тепла, предполагается неотрицательной и принадлежащей классу $L_2(D)$.

Параметр α характеризует скорость потери тепловыделяющими элементами нагревательных свойств, именно, за время $t = \ln 2/\alpha$ интенсивность тепловыделения уменьшается в 2 раза.

Коэффициент теплообмена $\sigma = \sigma(\tilde{x})$ есть заданная гладкая функция, не зависящая от x_n и не равная тождественно нулю. Условие (2) означает, что на поверхности $\partial D \times [0, H]$ теплообмен с окружающей средой происходит в соответстии с законом Ньютона.

Обозначим через $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ собственные значения, а через $\{v_m\}$ собственные функции следующей спектральной задачи:

$$-\Delta v_m(\tilde{x}) = \mu_m v_m(\tilde{x}),\ \tilde{x} \in D, \quad \frac{\partial u(\tilde{x})}{\partial \nu} + \sigma u(\tilde{x}) = 0,\ \tilde{x} \in \partial D. \tag{7}$$

Введём весовую функцию $\rho(\tilde{x})$, пропорциональную первой собственной функции задачи (7):

$$\rho(\tilde{x}) = \frac{1}{H}\, \frac{v_1(\tilde{x})}{\|v_1\|_{L(D)}}. \tag{8}$$

Определим среднее взвешенное значение температуры по области Ω интегралом

$$\overline{u_h}(t) \ = \ \int_{\Omega} u_h(x,t)\rho(\tilde{x})\, dx. \tag{9}$$

Как правило, данное среднее значение температуры однозначно определяет выходную мощность рассматриваемого процесса (см. [1]).

Предположим, что для некоторого фиксированного числа $\theta > 0$ для некоторых значений $t > 0$ выполняется следующее неравенство: $\overline{u_h}(t) \ \geq \ \theta$.

В настоящей работе изучается вопрос о том, насколько продолжительным может быть процесс, обеспечивающий данное неравенство. Иначе говоря, каков запас энергии нагревателя, позволяющий на выходе обеспечивать заданную температуру.

Обозначим символом $U(H)$ класс функций $h(t)$, непрерывных на полупрямой $t \geq 0$ и удовлетворяющих условию (6).

Для любого управления $h \in U(H)$ определим максимально возможное время поддержания средней температуры θ при заданном управлении:

$$S_\alpha(\theta, h) \ = \ \sup\{t \in \mathbb{R}_+ \mid \overline{u_h}(t) \ \geq \ \theta\}. \tag{10}$$

Требуется оценить величину

$$T_\alpha(\theta) \ = \ \sup_{h \in U(H)} S_\alpha(\theta, h). \tag{11}$$

Смысл данной величины заключается в том, что после момента $t = T_\alpha(\theta)$ ни при каком допустимом управлении среднюю температуру θ получить невозможно. Непосредственно из определения $S_\alpha(\theta, h)$ следует, что с уменьшением θ величина $T_\alpha(\theta)$ возрастает.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что выполняется условие $\alpha \ < \ \mu_1$, где μ_1 – первое собственное значение спектральной задачи (7).

Положим

$$A \ = \ \frac{\|v_1\|_{L(D)}}{(g, v_1)}, \quad \tau = \frac{1}{\mu_1 - \alpha} \ln \frac{\mu_1}{\alpha}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть θ - произвольное число, удовлетворяющее условию*

$$0 \ < \ \theta \ < \ \frac{e^{-\alpha\tau}}{A\mu_1}.$$

Тогда при $\alpha \to 0$ выполняется соотошение

$$T_\alpha(\theta) \ = \ \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{A\mu_1\theta} \ + \ \frac{1}{\mu_1} \ + \ O(\alpha).$$

Отметим, что данная работа представляет собой развитие работ [1] и [2]. По поводу прикладных аспектов рассматриваемой проблемы см., например, [3].

Литература

1. *Алимов Ш. А., Комилов Н. М.* Об определении параметров, задающих тепловой режим, по выходным данным. Дифференциальные уравнения, 58, No.1, 2022, стр. 23-36.
2. *Albeverio S., Alimov Sh.A.* On one time-optimal control problem associated with the heat exchange process. Applied Mathematics and Optimization, 47, no. 1, 2008, 58-68.
3. *A. Gavrikov, G. Kostin* ¥Heat Transfer Processes in a Cylindrical Body Surrounded by Air,¥ in Proc. of 59th MIPT Scientific Conference, Moscow, 2016.

Единственность решения третьей краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками

[1]Апаков Ю.П., [2]Умаров Р.А.

[1] *Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан; Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан,*
yusupjonapakov@gmail.com

[2] *Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан,*
r.umarov1975@mail.ru

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах.

В работе [1], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = const.$$

Это уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ плоско - параллельный поток [2].

В области $D = \{(x, y): \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < q\}$ рассмотрим следующее уравнения третьего порядка вида:

$$L(u) = U_{xxx} - U_{yy} + A_1 U_{xx} + A_2 U_x + A_3 U_y + A_4 U = g_1(x, y), \tag{1}$$

где $A_i,\ p,\ q \in R, \quad i = \overline{1,4}, g_1(x, y)$ заданные, достаточно гладкие функции.

Заменой $U(x, y) = u(x, y)\, e^{-\frac{A_1}{3}x + \frac{A_3}{2}y}$ уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx} - u_{yy} + a_1 u_x + a_2 u = g(x, y), \tag{2}$$

где $a_1 = -\dfrac{{A_1}^2}{3} + A_2, \quad a_2 = \dfrac{2A_1^3}{27} + \dfrac{A_3^2}{2} - \dfrac{A_1 A_2}{3} + A_4, \quad g(x, y) = g_1(x, y) \cdot e^{\frac{A_1}{3}x - \frac{A_3}{2}y}.$

Отметим, что в работе [3] рассмотрен случай $a_1 = a_2 = 0$.

Задача A_3 **.** *Найти функцию $u(x, y)$ из класса $C^{3,2}_{x,y}(D) \cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:*

$$\begin{cases} \alpha u(x, 0) + \beta\, u_y(x, 0) = 0, \\ \gamma u(x, q) + \delta\, u_y(x, q) = 0, \end{cases} \quad 0 \le x \le p, \tag{3}$$

$$u(p, y) = \psi_2(y), \quad u_x(p, y) = \psi_3(y), \quad u_{xx}(0, y) = \psi_1(y), \quad 0 \le y \le q, \tag{4}$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ и δ - заданные постаянные, удовлетворяющие условию $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0,\ \gamma^2 + \delta^2 \ne 0$, $\psi_i(y),\ i = \overline{1,3},\ g(x, y)$ заданные достаточно гладкие функции.

Теорема. *Если задача A_3 имеет решение, то при выполнении условий $a_1 \le 0, \quad a_2 \ge 0, \quad \alpha\beta \le 0, \quad \gamma\delta \ge 0$ оно единственно.*

Доказательство. Предположим, обратное. Пусть задача A_3 имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в D.

В области D справедливо тождество

$$uL[u]=uu-uu+a_1uu_x+a_2u^2=0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}a_1u^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)+u_y^2+a_2u^2=0. \tag{5}$$

Интегрируя тождество (5) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\int\limits_0^q\left(u(p,y)\,u_{xx}(p,y)-\frac{1}{2}u_x^2(p,y)+\frac{1}{2}a_1u^2(p,y)\right)dy$$

$$-\int\limits_0^q\left(u(0,y)\,u_{xx}(0,y)-\frac{1}{2}u_x^2(0,y)+\frac{1}{2}a_1u^2(0,y)\right)dy-$$

$$-\int\limits_0^p u(x,q)\,u_y(x,q)\,dx+\int\limits_0^p u(x,0)\,u_y(x,0)\,dx+\iint\limits_D u_y^2dxdy+a_2\iint\limits_D u^2dxdy=0$$

Требуя $\beta\neq 0,\ \delta\neq 0$, из (3) имеем

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^q\left(u_x^2(0,y)\right)dy-\frac{1}{2}a_1\int\limits_0^q u^2(0,y)\,dy+\frac{\gamma}{\delta}\int\limits_0^p u(x,q)\,dx-$$

$$-\frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^p u(x,0)^2dx+\iint\limits_D u_y^2dxdy+a_2\iint\limits_D u^2dxdy=0$$

Учитывая условия теоремы, получим $u(x,y)\equiv 0$. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что при нарушении условий теоремы, т.е $a_1>0,\ \ a_2<0$ однородная задача A_3 для однородного уравнения (2) может иметь нетривиальное решение. Например,

$$\begin{cases} u_{xxx}(x,y)+\left(\dfrac{(2k+1)\,\pi}{2p}\right)^2u_x(x,y)-\lambda_n^3u(x,y)-u_{yy}(x,y)=0,\\ \left.\begin{array}{l}\alpha u(x,0)+\beta\,u_y(x,0)=0,\\ \gamma u(x,q)+\delta\,u_y(x,q)=0,\end{array}\right.\quad 0\le x\le p,\\ u(p,y)=0,\quad u_x(p,y)=0,\quad u_{xx}(0,y)=0,\quad 0\le y\le q,\end{cases}$$

задача имеет нетривиальное решение

$$u(x,y)=\left(1+(-1)^{k+1}\sin\left(\frac{(2k+1)\,\pi}{2p}x\right)\right)Y_n(y)\,,\quad n,k\in Z,$$

где $Y_n(y)$ решение задачи

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda_n^3Y(y)=0,\\ \alpha Y(0)+\beta Y'(0)=0,\\ \gamma Y(q)+\delta Y'(q)=0.\end{cases}$$

Литература

1. *Рыжов О.С.* Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа, Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

2. *Диесперов В.Н.* О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения, Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - No. 5. - С. 1265-1279.

3. *Apakov, Y.P., Zhuraev, A.K.* Third Boundary-Value Problem for a Third-Order Differential Equation with Multiple Characteristics, Ukr Math J, 70, 2019, 1467-1476

4. *Apakov, Y.P., Umarov, R.A.* Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 3, pp. 738-748.

Обратная задача по определению плотности тепловых источников для уравнения субдиффузии

[1]Ашуров Р.Р., [2]Мухиддинова А.Т.

[1,2] *Узбекистан, Институт Математики Академии наук РУз., Национальный университет Узбекистана,*

e-mail: ashurovr@gmail.com

e-mail: oqila1992@mail.ru

Пусть $A(x,D)=\sum\limits_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)D^\alpha$ - произвольный положительный формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка $m=2l$ с достаточно гладкими коэффициентами $a_\alpha(x)$, где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N)$ - мультииндекс, $D=(D_1,D_2,...,D_N)$, $D_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$ и определена в произвольной многомерной области Ω (с достаточно гладкой границей).

Для того, чтобы определить дробную часть нашего дифференциального уравнения, введем сначала дробный интеграл в смысле Римана-Лиувилля порядка $\rho<0$ от функции f, определенной на $[0,\infty)$, по формуле (см. например, [1], стр. 14)

$$\partial_t^\rho f(t)=\frac{1}{\Gamma(-\rho)}\int\limits_0^t \frac{f(\xi)}{(t-\xi)^{\rho+1}}d\xi,\quad t>0,$$

при условии, что правая часть равенства существует. С помощью дробного интеграла определим дробную производную в смысле Римана-Лиувилля порядка ρ, $k-1<\rho\le k$, $k\in\mathbb{N}$ положив

$$\partial_t^\rho f(t)=\frac{d^k}{dt^k}\partial_t^{\rho-k}f(t). \tag{1}$$

Задача: *Пусть* $0<\rho\le 1$. *Рассмотрим уравнение субдиффузии*

$$\partial_t^\rho u(x,t)+A(x,D)u(x,t)=f(x),\quad x\in\Omega,\quad 0<t\le T, \tag{2}$$

в котором функция $f(x)$, характеризующая действие источников тепла, зависит только от x. Если эта функция известна, то для того, чтобы найти однозначно распределение температуры $u(x,t)$, необходимо задавать дополнительные условия. Например, можно задавать начальное условие

$$\lim_{t\to 0}\partial_t^{\rho-1}u(x,t)=\varphi(x),\quad x\in\overline{\Omega}, \tag{3}$$

и граничные условия

$$B_j u(x,t)=\sum_{|\alpha|\le m_j} b_{\alpha,j}(x)D^\alpha u(x,t)=0,\quad 0\le m_j\le m-1,\quad j=1,2,...,l;\quad x\in\partial\Omega,\quad 0\le t\le T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ и коэффициенты $b_{\alpha,j}(x)$ - заданные функции. В результате получим прямую начально-краевую задачу.

Отметим, что начальное условие (3) можно еще записать так (см. например, [1] стр. 104)

$$\lim_{t\to 0} t^{1-\rho} u(x,t) = \frac{\varphi(x)}{\Gamma(\rho)}, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{5}$$

откуда следует, что для решения $u(x,t)$ задачи (2)-(4) допускается рост при $t \to 0$.

В данной работе рассмотрим обратную задачу. Ее можно интерпретировать следующим образом. Найти, наряду с решением $u(x,t)$ начально-краевой задачи, плотность тепловых источников $f(x)$ так, чтобы в момент времени T распределение температуры достигло заданного уровня:

$$u(x,T) = \Psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{6}$$

Обратные задачи такого типа возникают при исследовании теплофизических и ряда других процессов.

Теорема 1. *(О единственности). Пусть функции $\varphi(x), \Psi(x)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{\Omega}$. Тогда может существовать лишь одно классическое решение $\{u(x,t), f(x)\}$ обратной задачи (2)-(4), (6).*

Пусть τ - произвольное действительное число. В пространстве $L_2(\Omega)$ введем оператор $\hat{A}^\tau$, действующий по правилу

$$\hat{A}^\tau g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau g_k v_k(x), \quad g_k = (g, v_k).$$

Очевидно, данный оператор $\hat{A}^\tau$ с областью определения

$$D(\hat{A}^\tau) = \{g \in L_2(\Omega) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |g_k|^2 < \infty\}$$

является самосопряженным. Если через A обозначить оператор в $L_2(\Omega)$ действуюший по правилу $Ag(x) = A(x,D)g(x)$ и с областью определения $D(A) = \{g \in C^m(\overline{\Omega}) : B_j g(x) = 0, \quad j = 1, ..., l, \quad x \in \partial\Omega\}$, то оператор $\hat{A} \equiv \hat{A}^1$ является самосопряженным расширением в $L_2(\Omega)$ оператора A.

Теорема 2. *(О существовании).Пусть $\varphi \in D(\hat{A}^\tau)$ и $\Psi \in D(\hat{A}^{\tau+1})$, где $\tau > \frac{N}{2m}$. Тогда существует решение $\{u(x,t), f(x)\}$ обратной задачи (2) - (4), (6) и оно предствимо ввиде рядов (7), (8), которые сходятся абсолютно и равномерно по $x \in \overline{\Omega}$ для всех $t \in (0,T]$.*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k t^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\lambda_k t^\rho) v_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\lambda_k t^\rho) v_k(x), \tag{7}$$

и

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Psi_k}{T^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\lambda_k T^\rho)} v_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k E_{\rho,\rho}(-\lambda_k T^\rho)}{T E_{\rho,\rho+1}(-\lambda_k T^\rho)} v_k(x). \tag{8}$$

Литература

1. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., Наука. 2005.

Существование и единственность решения прямой задачи для нагруженного интегрально-дифференциального уравнения распространения тепла с постоянными коэффициентами

[1]Балтаева У.И., [2]Хасанов Б.М.,[3]Атаханов С.С.
[1] *Хорезмская Академия Маъмуна,Хорезмская область,*
e-mail: umida-baltayeva@mail.ru
[2] *Хорезмская Академия Маъмуна,Таянч доктаранти,Хорезмская область,*
e-mail: boburjonxasanov1993@gmail.com
[3] *Хорезмская область*
e-mail: sanjar4841@gmail.com

Рассмотрим задачу определения функции $u(x,t)$ в области $(x,t) \in R_T^n$ с помощью следующих уравнений:

$$u_t - a(t)\,\Delta u = \lambda D_{0t}^{\alpha} u\left(x', t\right) + f(x,t)\,,\ (x,t) \in R_T^n, \tag{1}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x)\,,\ x \in R^n, \tag{2}$$

где Δ - оператор Лапласа, $\lambda \in R$, D_{0t}^{α} – оператор дробного[3](в смысле Римана-Лиувилля) интегрирования порядка α при $\alpha < 0$ задается формулой

$$D_{0t}^{\alpha} u\left(x', t\right) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u\left(x', \tau\right) d\tau}{(t-\tau)^{1+\alpha}},\ \ \alpha < 0,$$

$$a(t) \in E := \left\{ a(t) \in C^1[0,T]\,, 0 < a_0 < a(t) \le a_1 < \infty \right\}.$$

Пусть для функции $\varphi(x)$ выполняются следующие условия

$$\varphi(x) \in H^{l+2}(R^n)\,, \varphi(x) \le \varphi_0 = const > 0,$$

$$f(x,t) \in H^{l+2,(l+2)/2}(\bar{R}_T^n),$$

$$\left(\overline{R}_T^{n-1}\right) = \left\{ \left(x', t\right) x' \in R^{n-1}, 0 \le t \le T \right\}, l \in (0,1)\,.$$

Задача нахождения функции $u(x,t)$ из нагруженного [2] интегро-дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2) для функций называется задачей Коши.

Задача Коши (1) и (2) эквивалентна интегральному уравнению типа Вольтерры. Воспользуемся следующей формулой[1]:

$$p(x,t) = \int_{R^n} \varphi(\xi) G(x-\xi, \theta(t)-\tau) d\xi +$$
$$+ \int_0^{\theta(t)} \frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))} \int_{R^n} f_1(\xi, \theta^{-1}(\tau)) G(x-\xi, \theta(t)-\tau) d\xi. \tag{3}$$

Формула (3) выражает решение следующей задачи Коши для уравнения распространения тепла с переменными коэффициентами:

$$p_t - a(t)\,\Delta p = f_1(x,t)\,, x \in R^n, t > 0,$$

$$p(x,0) = \varphi(x)\,, x \in R^n,$$

здесь $\varphi(x) \in H^{l+2}(R^n)\,,\ f_1(x,t) \in H^{l+2,(l+2)/2}(\bar{R}_T^n)$,$G(x-\xi, \theta(t)-\tau)$ - является фундаментальным решением.

В формуле (3) функция $\theta(t) = \int_0^t a(t)\,d\tau$ и $\theta^{-1}(t)$ являются обратными функции $\theta(t)$.

С помощью формулы (3) выразим задачу Коши (1) и (2) в виде следующего интегрального уравнения Вольтерры:

$$u(x,t)=\int_{R^n}\varphi(\xi)G(x-\xi,\theta(t)-\tau)d\xi+$$

$$+\int_0^{\theta(t)}\frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))}\int_{R^n}f(\xi,\theta^{-1}(\tau))G(x-\xi,\theta(t)-\tau)d\xi+ \tag{4}$$

$$+\frac{\lambda}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^{\theta(t)}\frac{d\tau}{a(\theta^{-1}(\tau))}\int_{R^n}\int_0^{\theta^{-1}(\tau)}\frac{1}{(\theta^{-1}(\tau)-\beta)^{\alpha+1}}u(\xi',\beta)G(x-\xi,\theta(t)-\tau)d\beta d\xi.$$

Теорема. *Пусть $\varphi(x)\in H^{l+2}(R^n)$ $f(x,t)\in H^{l+2,(l+2)/2}(\bar{R}^n_T)$ и $a(t)\in E$ Тогда существует единственное решение $u(x,t)$ интегрального уравнения (4) в классе $H^{l+2,(l+2)/2}\in(R^n_T)$.*

Литература

1. *Durdiev D.K, Nuriddinov J.Z.* On investigation of the inverse problem for a parabolic integrodifferential equation with a variable coefficient of thermal Conductivity Vestnik Udmurtskogo Universiteta. 2020, vol.30, issue 4, pp. 572-584
2. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применения Москва Наука Российская Академия наука Кабардино-Балкарский Научны центр Научо-Исследовательский Институт Прикладной Математики и Автоматизации Год: 2012 Страниц: 232
3. *Торебек Б.Т* Модифицированные интегро-дифференциальные операторы римана-лиувилля в классе гармонических функций и их применения issn 2074-1863 Уфимский математический журнал. том 7. No.3 (2015). с. 76-87
4. *БалтаеваУ.И.* О Некоторых Краевых задачах для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка с действительными параметрами вестник Удмуртского университета математика. Механика. компьютерные науки 2012, вып. 3, с. 3-12

О разрешимости обратной нелокальной задачи для уравнения четвертого порядка

Бекиев А.Б.

Каракалпакский государственный университет, г.Нукус

e-mail: ashir1976@mail.ru

Введение. Математические моделирование многих процесов, происходящих в реальном мире, например, некоторые задачи геофизики, аэродинамики, экологии, сейсмологии, диагностики в медицине, компьютерной томографии, неразрушающего контроля и дефектоскопии, георадиолокации, приводят к изучению обратных задач. Изучение задачи динамики одномерных течений, динамики сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, задачи распространения волн в диспергирующих средах, задачи изгиба тонких пластинок, поперечные колебания стержня и балок и другие, сводятся к решению краевых задач для уравнения четвертого порядка[1,2].

В данной работе рассмотрены обратные задачи для уравнения четвертого порядка с нелокальными условиями. Корректность краевых задач для уравнений с частными производными четвертого порядка, устанавливается доказательством существования и единственности решения.

Подстановка задачи. В области $\Omega=\{(x,t):0<x<1,\ \ -\alpha<t<\beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv u_{xxxx}(x,t)+b^2u(x,t)-\mathrm{sgn}t\cdot u_{tt}(x,t)=f(x), \tag{1}$$

где b - заданное число.

Задача 1. Найти в области Ω функции $u(x,t)$ и $f(x)$ удовлетворяющие следующим условиям:

$$u(x,t)\in C^{3,1}_{x,t}\left(\bar{\Omega}\right)\cap C^{4,2}_{x,t}\left(\Omega_+\cup\Omega_-\right), \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0,1) \cap L_2(0,1), \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x), \ (x,t) \in \Omega_+ \cup \Omega_- \tag{4}$$

$$u(0,t) = 0, \ u_x(0,t) = u_x(1,t), \ u_{xx}(1,t) = 0, \ u_{xxx}(0,t) = u_{xxx}(1,t), \ -\alpha \le t \le \beta, \tag{5}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \ u(x,-\alpha) = \psi(x), u_t(x,-\alpha) = \eta(x), \ 0 \le x \le 1, \tag{6}$$

где $\Omega_+ = \Omega \cap \{t > 0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{t < 0\}$ и $\varphi(x)$, $\psi(x), \eta(x)$ - заданные, достаточно гладкие функции.

Единственность и существование решения задачи. Система функций

$$X_0(x) = 2x, \ X_{2k-1}(x) = 2\sin\lambda_k x, \ X_{2k}(x) = \frac{e^{\lambda_k x} - e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k x} - 1} + \cos\lambda_k x, \tag{7}$$

$$Y_0(x) = 1, \ Y_{2k-1}(x) = \frac{e^{\lambda_k x} + e^{\lambda_k(1-x)}}{e^{\lambda_k x} - 1} + \sin\lambda_k x, \ Y_{2k}(x) = 2\cos\lambda_k x, \ \lambda_k = 2k\pi, k = 1, 2, ... \tag{8}$$

биортогональная и образуют базис Рисса [3].

Теорема 1. *Если существует решение задачи (2)-(6), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in N$ выполнены условия*

$$\Delta_k(\alpha,\beta) = \cos\nu_k\alpha \operatorname{ch}\nu_k\beta - \sin\nu_k\alpha \operatorname{sh}\nu_k\beta - 1 \ne 0, \tag{9}$$

и при $b = 0$, $k = 0$

$$\Delta_0(\alpha,\beta) = -\alpha\beta - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} \ne 0, \tag{10}$$

где $\nu_k = \sqrt{\lambda_k^4 + b^2}$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in C^5[0,1]$, $\eta(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(1) = 0, \varphi'''(0) = \varphi'''(1), \psi(0) = 0, \psi'(0) = \psi'(1), \psi''(1) = 0, \psi'''(0) = \psi'''(1), \varphi^{(IV)}(0) = \psi^{(IV)}(0) = 0, \eta(0) = 0, \eta'(0) = \eta'(1), \eta''(1) = 0$ и выполняются условия (9)-(10). Тогда существует единственное решение задачи (2)-(6).*

Решение задачи найдена в виде ряда составленной из функций (7). Единственность решения задачи вытекает из полнота ортонормированных систем (8).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда для решения задачи 1 справедливы оценки:*

$$\begin{aligned} &\|u(x,t)\|_{L_2} \le C_1\left(\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|\eta\|_{L_2}\right), \ t > 0, \\ &\|u(x,t)\|_{L_2} \le C_2\left(\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|\eta\|_{L_2}\right), \ t < 0, \\ &\|f(x)\|_{L_2} \le C_3\left(\|\varphi\|_{W_2^4} + \|\psi\|_{W_2^4} + \|\eta\|_{W_2^2}\right). \end{aligned}$$

Литература

1. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Ташкент: Фан, 2000. 144 с.

2. *Короткий, А. И., Стародубцева Ю. В.* Моделирование прямых и обратных граничных задач для стационарных моделей тепломассопереноса. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2015. 168 с.

3. *Berdyshev A.S., Cabada A., Kadirkulov B.J.* The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // Computers and Mathematics with Applications 62 (2011) 3884-3893.

Принцип квазиинвариантности с векторным функционалом Ляпунова-Красовского

[1]Бердиеров А.Ш., [2]Буранов Ж.И., [3]Хусанов Д.Х.
[1,3]*Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан,*
e-mail: berdiyorov1957@mail.ru, d.khusanov1952@mail.ru
[2] *Академический лицей им. И.Каримова ТГТУ, Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: juventus88.60.94@mail.ru

В работе рассматривается векторное функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1}$$

где $t \in R$, $x \in R^n$, R^n – $n-$мерное действительное пространство векторов с некоторой нормой $|x|$, $\dot{x}(t)$ – верхняя правосторонняя производная непрерывной функции $x = x(t)$, $f : R \times C_n \to R^n$ – непрерывная функция, C_n – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^n$, определенных на отрезке $[-h, 0]$ $(h = const > 0)$, с нормой $||\varphi|| = sup(|\varphi(s)|, -h \le s \le 0)$, для непрерывного отображения $x : R \to R^n$ функция $x_t \in C_n$ определяется равенством $x_t(s) = x(t + s), -h \le s \le 0$.

Предполагается, что правая часть уравнения (1) $f = f(t, \varphi)$ удовлетворяет условиям

$$|f(t,\varphi)| \le m(H),\ |f(t,\varphi^{(2)}) - f(t,\varphi^{(1)})| \le L(H)||\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}||$$

для всех $(t, \varphi),\ (t, \varphi^{(1)}),\ ((t, \varphi^{(2)}) \in R \times \varphi \in C_n :\ ||\varphi|| \le H$ при каждом $H = const > 0$.

Следуя [2, 3], построено функциональное пространство G функций $g : R \times C_n \to R^n$ с метризуемой сходимостью, в котором семейство сдвигов $F = \{f_\tau :\ f_\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi)\}$ будет предкомпактно. Отсюда для уравнения (1) определяется семейство предельных уравнений [3]

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t),\ f^* \in F \subset G,\ f^*(t,\varphi) = \frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int_0^t f(t_k+\tau,\varphi)d\tau. \tag{2}$$

Пусть для уравнения (1) можно найти векторный функционал $V = V(t, \varphi), V : R^+ \times C_n \to R^r$, инвариантно дифференцируемый в каждой точке $(t, \varphi) \in R^+ \times C_n$, и тем самым, имеющим производную $\dot{V}(t, \varphi)$ в силу уравнения (1).

Допустим, что для производной $\dot{V}(t, \varphi)$ имеет место неравенство

$$\dot{V}(t,\varphi) \le g(t, V(t,\varphi)) + W(t, \varphi(0)), \tag{3}$$

где $g \in C(R^+ \times R^n \to R^r)$ есть квазимонотонная функция, $W \in C^-(R^+ \times R^n \to R^r)$ – неположительная функция, $W \le 0$, функции g и W удовлетворяют условиям ограниченности и равномерной непрерывности [3].

Введем соответствующее векторное дифференциальное уравнение сравнения

$$\dot{y} = g(t, y). \tag{4}$$

Будем полагать, что определитель фундаментальной матрицы линейного приближения уравнения сравнения (4) ограничен положительными постоянными снизу и сверху [4].

Определим предельные к W функции W^* согласно равенствам

$$W^*(t,x) = \lim_{t_k\to\infty} W(t_k+t, x).$$

Примем, что f^* и W^* образуют предельную пару (f^*, W^*), если являются предельными для одной и той же последовательности $t_k \to \infty$.

Пусть $M(f^*, W^*)$ есть максимально инвариантное относительно уравнения (4) подмножество множества $\{W^*(t, x) = 0\}$, M^* есть объединение M по всем предельным парам (f^*, W^*), $M^* = \cup M(f^*, W^*)$ [3].

Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть какое-либо ограниченное решение уравнения (1), $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq H$ $\forall t \geq \alpha$, $\omega^+(x(t, \alpha, \varphi))$ есть его положительное предельное множество в пространстве R^n.

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) найдется векторный функционал $V : C^+ \times C_n \to R^r$, удовлетворяющий неравенству (3);

2) решения уравнения (4) равномерно ограничены.

Тогда положительное предельное множество $\omega^+(x(t, \alpha, \varphi))$ ограниченного решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$, $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq H$ $\forall t \geq \alpha$ уравнения (1) содержится в M^*, $\omega^+(x(t, \alpha, \varphi)) \subset M^*$.

Теорема 1 представляет собой принцип квазиинвариантности для функционально-дифференциального уравнения с векторным функционалом Ляпунова-Красовского. Она обобщает и дополняет соответствующие результаты работ [1–3].

Литература

1. *Hale J.* Theory of Functional Differential Equations, New York: Springer-Verlag, 1977, 366 p.
2. *Андреев А.С., Хусанов Д.Х.* Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Диффер. Уравн. 1998. Т. 34, No 4. С. 435–440.
3. *Хусанов Д.Х.* К конструктивной и качественной теории функционально-дифференциальных уравнений (монография). Ташкент: Изд-во ФАН АН РУз, 2002. 256 с.
4. *Buranov J.I., Khusanov D.Kh.* On stability with respect to the part of variables of a non-autonomous system in a cylindrical phase space // Zhurnal SVMO. 2021. Vol. 23. No 3. P. 273–284.

Об однозначной разрешимости одной линейной четерехточечной обратной задачи для уравнения теплопроводности

[1]Джамалов С.З., [2]Худойкулов Ш.Ш., [3]Исабаева Д.З,[4]Самадова А.П.

[1] *Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз, г.Ташкент, Узбекистан*
e-mail: siroj63@mail.ru[1]

[2] *Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз, г.Ташкент, Узбекистан*
e-mail: xudoykulov1194@gmail.com.[2]

[3] *Какандский Государственные Педогогические Университет*
e-mail: dilyoraisaboyeva@gmail.com.[3]

[4] *Какандский Государственные Педогогические Университет*
e-mail: azizasamatova1996@gmail.com.[4]

В работе [1] впервые предложны математические модели, возникающие при изучении ряда прикладных задач и приводящие к рассмотрению нелокальных краевых задач. Как известно, нетрудно установить связь между нелокальными краевыми задачами и трёхточечными обратными задачами [1,2]. С этой целью мы изучаем корректность по Адамару некоторых линейных четерехточечных обратных задач (Л.Т.О.З.) для уравнение теплопроводности.

В области

$$Q = (0, T) \times (0, 1) \times (0, l) = Q_1 \times (0, l) \subset R^3$$

рассмотрим уравнение теплопроводности

$$Lu = u_t - \Delta u + c(x, t)u = g(x, t, y) + \sum_{k=1}^{4} h_k(x, t) f_k(x, t, y) \tag{1}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $g(x, t, y)$ и $f_k(x, t, y)$, $k = 1, 2, 3, 4$-заданные функции. Будем предполагать, что все коэффициенты уравнения (1), встречающиеся в тезисе, вещественнозначные и достаточно гладкие функции.

Линейная обратная задача. Найти функции (u, h_1, h_2, h_3, h_4),удовлетворяющие уравнению (1) в области Q, такие, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\gamma u|_{t=0} = u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=l} = 0, \tag{4}$$

с дополнительными условиями

$$u|_{y=\ell_k} = \varphi_k(x,t), \tag{5}$$

где $k = 1,2,3,4$; и $0 < \ell_1 < \ell_2 < \ell_3 < \ell_4 < \ell < +\infty$ и принадлежит классу $U = \{(u, h_k, k = 1,2,3,4) \in W_2^{2,1}(Q), D_y^3(u_t, u_x, u_{xx}) \in L_2(Q), h_k \in W_2^2(Q_1)\}$. Введем обозначения. Пусть $g_i(x,t) = g(x,t,l_i), f_{ij}(x,t) = f_i(x,t,l_j), \forall i,j = 1,2,3,4$ Тогда через $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^4$ определим квадратную матрицу порядка четере.

Теорема.Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть $\lambda c - c_t \geq \delta > 0$, для всех $(x,t) \in \overline{Q}$, где $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0, |\gamma| > 1, |\det F| \geq \varepsilon > 0$; $\varphi_i, \varphi_{it}, \varphi_{ixx} \in W_2^2(Q_1)$; $\gamma\varphi_i\,|_{t=0} = \varphi_i\,|_{t=T}$; $\varphi\,|_{x=0} = \varphi\,|_{x=1} = 0$; $g_i \in W_2^2(Q_1)$; $f_{ij} \in W_2^2(Q_1)$; $\forall_{i,j} = 1,2,3,4$ и пусть $\beta \equiv M \sum\limits_{k=1}^{4} \left\|(1 + D_y^3) f_k\right\|^2_{W_2^1(Q_1)} < 1$, где $= const(mes(Q_1), \det F)$. Тогда для любых функций f_i, и g таких, что $(1 + D_y^3) f_i \in W_2^2(Q)$; $f_i\,|_{x=0} = f_i\,|_{x=1} = 0$, $\forall i = 1,2,3,4$, $(1 + D_y^3) g \in W_2^2(Q)$; $|_{x=0} = g\,|_{x=1} = 0$, существует единственное решение задачи (1)-(5) из указанного класса U.

Замечание 1. Для уравнения (1) аналогично изучаются Л.Т.О.З. с условием Коши, то есть в этом случае вместо условия (2) предлагается начальное условие $u\,|_{t=0} = u_0(x)$,

Литература

1. *Бицадзе А.В.* О нелокальных краевых задачах.// ДАН СССР. 1989. Т. № 2. pp. 277.
2. *Джамалов С.З.* О корректности некоторых линейных многоточечных задач управления для волнового уравнения и уравнения Пуассона // ДАН РУз.1992. № 6, С. 4–5, С. 5 – 7.

Об однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка

[1]Джамалов С.З., [2]Курбанов О., [3]Арзикулов З.

[1] *Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз, г.Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: siroj63@mail.ru

[2] *Ташкентский экономический университет. Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: одил69@indox.ru

[3] *Ферганский политехнический институт. Фергана, Узбекистан,*
e-mail: zafarbekarziqulov1984@gmail.ru

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго порядка некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа второго порядка были предложены и изучены в работе Ф.И.Франкля [2]. Как близкая по постановке к изучаемым, задача для уравнения смешанного типа второго рода, второго порядка исследована в ограниченных областях в работах[3-5]. А для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка такие задачи практически не исследованы.

С этой целью в данной работе с использованием результатов работ [5] и с применением метода Галеркина и априорных оценок изучается однозначная разрешимость обобщенного решения одной нелакалной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка

В области $Q = (0,1) \times (0,T)$ рассмотрим уравнения смешанного типа второго рода четвертого порядка.

$$L_2 u = \sum_{i=0}^{4} K_i(x,t) D_t^i u - u_{xxxx} + u_{xxtt} + u_{xx} = f(x,t) \tag{1}$$

где $K_4(x,0) = K_4(x,T) = 0$, $D_t^i u = \frac{\partial^i u}{\partial t^i}$ $(i = 0,1,2,3,4)$, $D_t^0 u = u$ и пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в Q.

Нелокальная краевая задача периодического типа: Найти обобщённое решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}; \;\; p = 0,1,2 \tag{2}$$

$$D_x^q u|_{x=0} = D_x^q u|_{x=T}; \; q = 0,1,2,3. \tag{3}$$

$$u_{xx}|_{x=0} = u_{xx}|_{x=1} = 0 \tag{4}$$

где $\gamma-$отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Теорема *Пусть выполнены следующие условие* $-(2K_3 - 3K_{4t} - 3\lambda K_4) \geq \delta_3 > 0;$ $2K_1 - K_{2t} + \lambda K_2 \geq \delta_2 > 0$, $\lambda K_0 - K_{0t} \geq \delta_0 > 0$, *для любих* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\lambda = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, $\eta \in R$, $K_{4t}(x,T) = K_{4t}(x,0) = 0$, $K_3(x,0) = K_3(x,T)$; $K_0(x,0) = K_0(x,T)$ *для всех* $x \in [0,1]$. *Тогда для любого* $f(x,t) \in L_2(Q)$, *существует единственное* $u(x,t)$ *из пространства Соболева* $W_2^2(Q)$ *и для нее справедливо следующая оценка.*

$$\|u\|^2_{W_2^2(Q)} \leq c\,\|f\|_0^2 .$$

Литература

1. *Бицадзе А.В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа, ДАН СССР. 1953. Т. 122, № 4.С.167–170.

2. *Франкль Ф.И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до-и сверхзвуковых течений. Изв.АН СССР Сер. матем. 1945. Т.9, № 4.С.121–143.

3. *Глазатов С.Н.* Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике// Сиб. мат. журн.,1985, Т26, № 6,с. 162–164.

4. *Каратопраклиева М.Г.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа-Дифференциальные уравнения, 1991, Т.27, №1, с.68-79.

5. *Джамалов С.З.* Нелокальные кр аевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент.2021. С.176.

Об однозначной разрешимости нелокальной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа первого рода четвертого порядка

[1]Джамалов С.З., [2]Курбанов О., [3]Дехканов Х.

[1] *Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз, г.Ташкент, Узбекистан*
e-mail: siroj63@mail.ru[1]

[2] *Ташкентский экономический университет. Ташкент, Узбекистан*
e-mail: одил69@indox.ru[2]

[3] *Наманганский Государственный Университет Наманган, Узбекистан*
e-mail: dhusanboy89@mail.ru[3]

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работе Ф.И.Франкля [2]. Как близкая по постановке к изучаемым, задача для уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка исследована в ограниченных областях в работах[3-7]. А для уравнения смешанного типа первого рода четвертого порядка такие задачи практически не исследованы.

С этой целью в данной работе с использованием результатов работ [6,7] и с применением метода Галеркина и априорных оценок изучается однозначная разрешимость обобщенного решения одной нелакалной краевой задачи периодического типа для уравнения смешанного типа первого рода четвертого порядка

В области $Q=(0,1)\times(0,T)$ рассмотрим уравнения смешанного типа первого рода четвертого порядка.

$$L_1u=\sum_{i=0}^{4}K_i(x,t)D_t^iu-u_{xxxx}+u_{xxtt}+u_{xx}+cu=f(x,t) \tag{1}$$

где $K_4(x,t)=K_4(x)$, такое, что $xK_4\left(x\right)>0,\ x\in(0,1);\ D_t^iu=\frac{\partial^iu}{\partial t^i}\ \ (i=0,1,2,3,4),\ D_t^0u=u$ и пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в Q.

Нелокальная краевая задача периодического типа: Найти обобщённое решение $u(x,t)$ уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^2(Q)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p\,u|_{t=0}=D_t^p\,u|_{t=T};\ \ p=0,1,2,3 \tag{2}$$

$$D_x^p\,u|_{x=0}=D_x^p\,u|_{x=1}; \tag{3}$$

$$u_{xx}|_{x=0}=u_{xx}|_{x=1}=0 \tag{4}$$

где $\gamma-$отличное от нуля, величина которого будет уточнена ниже.

Теорема Пусть выполнены следующие условие $-(2K_3+3\lambda K_4)\geq\delta_3>0;\ 2K_1-K_{2t}+\lambda K_2\geq\delta_2>0,\ \lambda K_0-K_{0t}\geq\delta_0>0$, для любых $(x,t)\in\overline{Q}$, где $\lambda=\frac{2}{T}\ln|\gamma|>0,\ \ |\gamma|>1$, $K_3(x,0)=K_3(x,T);\ K_2(x,0)=K_2(x,T);\ K_0(x,0)=K_0(x,T)$ для всех $x\in[0,1]$. Тогда для любого $f(x,t)\in L_2(Q)$, существует единственное решение $u(x,t)$ из пространства Соболева $W_2^2(Q)$ и для нее справедливо следующая оценка.

$$\|u\|_{W_2^2(Q)}^2\leq c\,\|f\|_0^2\,.$$

Литература

1. *Бицадзе А.В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа,

2. *Франкль Ф.И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до-и сверхзвуковых течений. Изв.АН СССР Сер. матем. 1945. Т. 9,121–143.

3. *Кальменов Т.Ш.* О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа Дифференциальные уравнения. 1978.т.14, с546-548.

4. *Цыбиков.Б.Н.* О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа. В. кн: Неклассические уравнения математи- ческой физики. Новосибирск,1986, с.201-206

5. *Джамалов С.З.* Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа первого рода Вестник Самарского государственного технического университета, Сер.физ.-мат.науки, 2017,т.21, С.1-14.

6. *Джамалов С.З.* О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода в пространстве. Журнал Средневолжского мат общества. -2019г,Т.21, 24-33.

7. *Джамалов С.З.* Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.Монография. Ташкент.2021. С.176.

Об одной полупериодической краевой задаче для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода,второго порядка в неограниченном паралелепипеде

[1] **Джамалов С.З.,** [2] **Сипатдинова Б.К.,**[3] **Исламова Д.**

[1],[2] *Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз, г.Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: siroj63@mail.ru[1], sbiybinaz@mail.ru.[2]

[3] *Бухарский Государственные Университет,*
e-mail: dildoraislomova01101995@gmail.com.[2]

Как известно, в работе А.В.Бицадзе показано, что задача Дирихле для уравнения смешанного типа некорректна [1]. Естественно возникает вопрос: нельзя ли заменить условия задачи Дирихле другими условиями, охватывающими всю границу, которые обеспечивают корректность задачи? Впервые такие краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения смешанного типа были предложены и изучены в работе Ф.И.Франкля [2]. Как близкая по постановке к изучаемым, задача для уравнения смешанного типа второго рода исследована в ограниченных областях в работах [3-7].А для уравнений смешанного типа второго рода в неограниченных областях такие задачи в многомерном случае практически не исследованы.

С этой целью в данной работе с использованием результатов работ [6,7] и с применением преоброзования Фурье изучаются однозначная разрешимость и гладкость обобщенного решения одной полупериодической краевой задачи для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода в неограниченном паралелепипеде.

В области

$$G = (0,1) \times (0,T) \times \mathbb{R} =$$
$$= Q \times \mathbb{R} = \{(x,t,z); x \in (0,1), 0 < t < T < +\infty, z \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)\},$$

рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа второго рода:

$$Lu = k(t)u_{tt} - \Delta u + a\,(x,t)\,u_t + c\,(x,t)\,u = f\,(x,t,z), \tag{1}$$

где $k(0) \leq 0 \leq k(T)$, $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$- оператор Лапласа.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $k(t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [8]. Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области Q.

Полупериодическая краевая задача. Найти обобщённое решение $u(x,t,z)$ уравнения (1) из пространства $W_2^{\ell}(G)$, ($2 \leq \ell$-целое число) удовлетворяющее следующим полупериодическим краевым условиям

$$u|_{t=0} = u|_{t=T}\,, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\overline{Q}$.

Здесь через $W_2^\ell(G)$, обозначено пространство Соболева с нормой

$$\|\vartheta\|^2_{W_2^\ell(G)} = \sum_{|\alpha|\leq \ell} \int\limits_G |D^\alpha \vartheta|^2 \, dxdt,$$

$\alpha-$ это мультииндекс, $D^\alpha-$есть обобщенные производные по переменними x и t.

Замечание. Результат справедлив также для многомерного уравнения смешанного типа второго рода.

Литература

1. *Бицадзе А.В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа, ДАН СССР. 1953.Т. 122, № 4. С. 167–170.
2. *Франкль Ф.И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до-и сверхзвуковых течений. Изв.АН СССР Сер.матем. 1945.Т.9, № 4.С.121–143.
3. *Глазатов С.Н.* Нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного типа в прямоугольнике Сиб. мат. журн.,1985, Т26,№ 6,С. 162–164.
4. *Каратопраклиева М.Г.* Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного типа. Дифференциальные уравнения,1991, Т.27, № 1, С.68–79.
5. *Джамалов С.З.* О корректности одной нелокальной краевой задачи с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в пространстве. Мат. заметки СВФУ.2017. № 4,С.17–28.
6. *Джамалов С.З.* О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения смешанного типа второго рода в пространстве. Журнал Средневолжского мат общества. -2019г,Т.21,№ 1,С. 24–33.
7. *С.З. Джамалов.* Нелокалные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа. Монография. Ташкент.2021г, с.176.
8. *Врагов В.Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983.с.84

Об одной линейной обратной задаче для трехмерного уравнения Трикоми с полупериодическым краевым условиям в неограниченном паролелепипеде

[1]Джамалов С.З., [2]Туракулов Х.Ш., [3]Мирзаева Г., [4]Шокиров А.

[1,2,4] *Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз, г.Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: siroj63@mail.ru[1], hamidtsh87@gmail.com.[2],asakirov@mail.ru.[4]
[3] *Бухарский Гос. Университет,*
e-mail: gulimirzoyeva1992@mail.com

Как нам известно обратные задачи для уравнений смешанного типа первого рода (в частности для уравнения Трикоми) в ограниченных областях изучено в работах [1-3]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа первого рода (в частности для уравнения Трикоми) в неограниченных областях [4,5]. Частично восполнить данный пробел мы и попытаемся в рамках этой работы.

В данной работе, для исследования однозначное разрешимости обратных задач для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном паролилепипеде предлагается метод, который основан на сведение обратной задачи к прямым полупериодическим краевым задачам для семейство нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми в ограниченной прямоугольной области.

В области

$$G = (-1,1) \times (0,T) \times R = Q \times R = \{(x,t,z); x \in (-1,1), 0 < t < T < +\infty, z \in R.\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - \Delta u + \ (x,t)\, u_t + c\,(x,t)\, u = \psi\,(x,t,z) \tag{1}$$

где $\Delta u = u_{xx} + u_{zz}$- оператор Лапласа. Здесь $\psi\,(x,t,y) = g\,(x,t,y) + h\,(x,t)\, \cdot f\,(x,t,y)$, $g\,(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

Линейная обратная задача. *Найти функции $u(x,t,z)$, $h(x,t)$ удовлетворяющие уравнению (1) в области G такие что, функция $u\,(x,t,z)$ удовлетворяет следующим периодическим краевым условиям*

$$D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0 \tag{3}$$

при $p = 0,1$, *где* $D_t^p u = \frac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u = u$.

Дальнейшем будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\overline{Q}$.

и с дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0) = \varphi_0\,(x,t), \tag{4}$$

где $\ell_0 \in R$ и с функций $h(x,t)$ принадлежит классу.

$$U = \{\,(u,h)|\ \ u \in W_2^{2,3}(G\,);\, h \in W_2^2(Q\,).\}$$

Здесь через $W_2^{2,3}(G)$ обозначено Банахово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \ \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + |\lambda|^2\right)^3 \cdot \|\hat{u}\,(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\, d\lambda,$$

где $W_2^2(Q)$ пространства Соболева с нормой

$$\|\vartheta\|_2^2 = \|\vartheta\|^2_{W_2^2(Q)} = \sum_{|\alpha| \le 2} \int\limits_Q |D^\alpha \vartheta|^2 dxdt.$$

Здесь $\alpha-$ мультииндекс, $D^\alpha-$ обобщенная производная по переменным x и t.

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной z, функции $u(x,t,z)$.

Литература

1. *Djamalov S.Z.* Linear inverse problem for Trikomy equation in three-dimensional space, Bulletin KRASES. Phys. Math.Sci.-2016. v.13. № 2. pp. 10–15. (РИНЦ)

2. *Джамалов С.З., Ашуров Р.Р.* Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода, второго порядка, Известия вузов. Математика, 2019, Т.46, № 6, С. 1-12. (Scopus)

3. *Джамалов С.З.* Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа, Монография. Ташкент, 2021, с. 176.

4. *Dzhamalov S.Z, Ashurov R.R, Turakulov Kh.Sh.* The Linear Inverse Problem for the Three-Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, 42, № 15, pp. 3606-3615. (Scopus)

5. *Dzhamalov S.Z., Aliev M.G., Turakulov Kh.Sh.* On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain,Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math, 2022, (42) (1), pp. 1-12. (Scopus)

Нелокальная обратная задача по времени для уравнения колебаний балки

[1] [2] Дурдиев У., [1] Одинаев Р.

[1] *Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан*

[2] *Бухарское отделение Института Математики им. В. И. Романовского АН РУз, Бухара, Узбекистан*

e-mail: umidjan93@mail.ru

Рассмотрим балку длиной l, опирающуюся на концы. Под действием внешней силы $G(x,t)$, вынужденные изгибные поперечные колебания балки описываются уравнением четвертого порядка

$$\rho S u_{tt} + EJu_{xxxx} + Q(t)u = G(x,t),$$

где ρ - плотность балки, S - площадь поперечного сечения балки, E - модуль упругости материала балки, J - момент инерции поперечного сечения относительно горизонтальной оси и по всей длине поддерживается упругим основанием с коэффициентом жесткости $Q(t)$.

Разделив на ρS запишем это уравнение в следующим в виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + q(t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{1}$$

где $a^2 = EJ/\rho S$, $q(t) = Q(t)/\rho S$ и $f(x,t) = G(x,t)/\rho S$. Уравнение (1) рассмотрим в прямоугольной области

$$D = \{(x,t),\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\},$$

где l – длина балки, T – временной интервал, с нелокальными начальными

$$u(x,0) + \delta_1 u(x,T) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) + \delta_2 u_t(x,T) = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

В прямой задаче требуется определить $u(x,t) \in C^{4,2}(D)$ удовлетворяющую равенствам (1)–(3), при положительных чисел δ_1, δ_2, и заданных чисел a, l, T и достаточно гладких функций $q(t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$. [1]

Обратная задача. Найти коэффициент $q(t)$, $t \in [0,T]$ если известно условие переопределение вида:

$$\int_0^l h(x)u(x,t)dx = H(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной задачи для уравнения колебания балки с интегральным условиям переопределения.

Литература

1. *Yashar T.Mehraliyev and Elvin I.Azizbayov.* A time-nonlocal inverse problem for a hyperbolic equation with an integral overdetermination condition, Elect. Jour. of Qualitative Theory of Diff. Equa., No. 28, (2021) 1–12.

Упрощенная модель теплообмена между цилиндром и протекающим по нему потоком массы

[1]Дустназаров С.Б., [2]Бекимов М.А.
[1] *Институт математики им. В.И.Романовского АН Республики Узбекистан,*
e-mail: cdustnazarov@mail.ru
[2] *Институт математики им. В.И.Романовского АН Республики Узбекистан,*
e-mail: mansu@mail.ru

Рассмотрим задачу математического моделирования процесса теплообмена между цилиндрической трубой произвольной сечения и тепло агентом (газом, дисперсной средой, жидкостью суспензией и т.п.) протекающим по трубе. Движение тепло агента необязательно ламинарное, будем считать, что средняя по сечению скорость постоянна вдоль трубы. Известно несколько математических моделей, описывающих такой процесс, состояние из уравнений газа-гидродинамики внутри трубы, теплопроводности в трубы и пограничного слоя на контакте внутренной поверхности труби и тепло агента. Даже для труб простого сечения такая модель приводит к сложной начально-краевой задачей для системы многомерных дифференциальных уравнений [1].

В настоящей работе для обсуждаемого процесса применяется метод, предложенный А.Азамовым [2] и названный им ккинематографическимњ, согласно которому дискретизируется исходный процесс. В результате получается линейная дискретная динамическая система простого вида, позволяющий легко найти неизвестные коэффициенты полученной системы, выражающие процесс теплообмена и тем самым получить алгоритм нахождения распределение температуры теплоагента непосредственных измерений.

Физическаяч помстановка задачи. Имеется цилиндрическая труба длины L произвольного сечения и определенной толщины, на внешней границе которой происходит теплообмен с окружающей средой заданного режима. Примеры такого режима: а) поддерживается определенная температура в трубе за счет внутренний или внешних источников, б) происходит свободный теплообмен на внешней границе трубы с внешней средой; в) внешняя граница труба теплотизолирована.

По трубе в одном направлении течет поток теплоагента (газа, дисперсий среды (пыли, газообразной смеси и т.п.) или жидкости, суспензии, других веществ). Задача состоит в определении температуры трубы и теплоагента, в том числе температуру теплоагента на выхода потока из трубы.

Координату вдоль длины обозначим x, ортогональное сечении трубы с плоскости абсциссой x обозначим , его внешнюю границу – $S_T(x)$, внутреннюю границу – $S_T(x)$, Температура внутреннюю часть сечения с границей $s_T(x)$. В цилиндрических координатах (x, r, φ) цилиндр задается увсловиями

$$0 \leqslant x \leqslant L, \quad a(\varphi) \leqslant r \leqslant A(\varphi),$$

где $r = a(\varphi)$ (соответственно $r = A(\varphi)$) - границы $S_T(x)$ и $s_T(x)$.

До момента времени $s = 0$ распределение температура x_{k_0}, y_{k_0} трубы и газа известны (например, $x_{k_0} = y_{k_0} = T_B-$ температура воздуха). Пусть при $t = nh - 0$ температура трубы и газа $x_k(n)$, $y_k(n)$. В момент времени $t = nh$ температура k-ой секции толщи трубы остается$x_k(n)$, температура газа при $k = 1$ становится , при $k = 1, 2, ..., m$ становится $y_{k-1}(n)$. На интервале $(nh,\ (n + 1)h)$ произойдет процесс теплообмена между порцией газа и трубой: Температура трубы становится

$$x_k(n + 1) = x_k(n) + \alpha[y_{k-1}(n) - x_k(n)] = \bar{\alpha}x_k(n) + \alpha y_{k-1}(n),$$

Температура газа становится в первой секции k-ой секции

$$y_k(n + 1) = y_{k-1}(n) + \beta[-y_{k-1}(n) + x_k(n)] = \beta x_k(n) + \bar{\beta}y_{k-1}(n)$$

Итак,

$$x_1(n + 1) = \bar{\alpha}x_1(n) + \alpha T,$$

$$x_2(n+1) = \bar{\alpha}x_2(n) + \alpha y_1(n),$$
$$......$$
$$x_m(n+1) = \bar{\alpha}x_m(n) + \alpha y_{m-1}(n),$$

$$y_2(n+1) = \beta x_2(n) + \bar{\beta}y_1(n)$$
$$......$$
$$y_m(n+1) = \beta x_m(n) + \bar{\beta}y_{m-1}(n)$$

Получаем линейную дискретную систему порядка $2m$:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \bar{\alpha}x(n) + \alpha Jy(n) + \alpha p \\ y(n+1) &= \beta x(n) + \bar{\beta}Jy(n) + \beta p \end{aligned} \tag{1}$$

Где $J = (\delta_{i+1,j})-$нижний диагональ, Для системы (1) решается обратная задача определения коэффициентов теплообмена для идентификации модели.

Список литературы

1. *Алалыкин Г.Б., Годунов С.К., Киреева И.Л., Поинер Л.А.* Рпешение олдномерных залдач газовой лдинамики в полдвижных сетках. М., Наука, 1970.

2. *Азамов А.А., Бекимов М.А.* Дискретная модель процесса теплообмена во вращающихся регенеративных воздухоподогревателях // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017, Том 23, є 1, С. 12-19.

Краевая задача для одного неклассического уравнения третьего порядка с кратными характеристиками

[1]Жураев Б.Б., [2] Хушбоков Х.Т.

[1] *Денауский институт предпринимательства и педагогики, Узбекистан,*

[2] *Денауский институт предпринимательства и педагогики, Узбекистан,*

e-mail: xoshboqovxusniddin846@gmail.com

Для уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = F(x,y), \tag{1}$$

рассмотрим следующая краевая задача α в конечной области $D = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}$. Постановка задачи α и теорема единственности. Отметим при исследовании краевых задач в место уравнение (1) неограничевая общности,можно взять уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{i=0}^{2} a_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} = F(x,y), \tag{2}$$

так как если в уравнение (1) $b(x,y) \in c^{3,1}(\bar{D})$, то преобразование $u(x,y) = v(x,y)\exp(\frac{1}{2}\int_0^y b(x,t)dt)$ приводит к уравнение (2) относительно $v(x,y)$. Задача α Найти в области D решение

$u(x,y) \in c^{2,1}(\bar{D})\bigcap c^{3,2}(D)$ уравнения (2) удавлятворяющую следующую краевым условиям:

$$\alpha_0(x)u(x,0) + \alpha_1(x)u_y(x,0) = h_0(x), \tag{3}$$

$$\beta_0(x)u(x,1) + \beta_1(x)u_y(x,1) = h_1(x),\ 0 \le x \le 1 \tag{4}$$

$$\gamma_0(y)u_0(0,y)+\gamma_1(y)u_x(0,y)+\gamma_2(y)u_{xx}(0,y)=P_0(y) \tag{5}$$

$$\delta_0(y)u_0(1,y)+\delta_2(y)u_{xx}(1,y)=P_1(y) \tag{6}$$

$$u_x(1,y)=P_2(y),\ 0\le y\le 1 \tag{7}$$

Здесь $\alpha_i(x),\beta_i(x),h_i(x),\delta_i(y),\gamma_i(y),P_j(y)$ $(i=0,1;j=0,1,2)$. заданные непрерывные функции, причем $\alpha_0^2+\alpha_1^2\neq 0,\beta_0^2+\beta_1^2\neq 0,\ \gamma_0^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2\neq 0,\delta_0^2+\delta_1^2\neq 0$. Это задача исследована при $\alpha_1(x)\equiv\beta_1(x)\equiv\gamma_1(y)\equiv\gamma_2(y)\equiv\delta_1(y)\equiv 0,\ \alpha_0(x)\equiv\beta_0(x)\equiv\gamma_0(y)\equiv\delta_0(y)\equiv 1,\ a_i(x,y)\equiv b(x,y)\equiv 0$ $(i=0,1,2)$ в работе [3].

Теорема 1. *Пусть* $a_i(x,y)\in c^{i,0}(\overline{D}), a_2(x,y)\le 0, a_0-\frac{1}{2}a_{2x}+\frac{1}{2}a_{2xx}=c(x,y)\ge 0,$ *если* $\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0\neq 0$ *то* $\alpha_0\alpha_1\ge 0,\beta_0\beta_1\le 0,\gamma_0\gamma_1\le 0,\gamma_0\gamma_2\ge 0,\ \delta_0\delta_1\le 0,(-1)[a_1(i,y)-a_{2x}(i,y)]\ge 0,$ $\frac{\gamma_1}{\gamma_0}+\frac{\gamma_2}{\gamma_0}a_2(0,y)\ge -1, i=0,1.$

Тогда существует единственное решение задача α. Единственность решение задача α доказывается методом интегралов энергии а существование с водится к системе интегральных уравнения Фредгольма второго рода.

Литература

1. *Тихонов А.Н.,Самарский А.А.* Уравнения математической физики.Масква-1972.
2. *ДЖураев Т.Д.,* Краевы задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Тошкент., ФАН, 1979. 240С.
3. *Абдиназаров С.,* Ободной краевой задаче для одного неклассического уравнения. Тошкент., ФАН, 1991. 4.,3-13ст .

О нелокальной краевой задаче для уравнение с кратными характеристиками третьего порядка

[1]**Жураев Б.Б.**, [2]**Хуррамова М.А.**

[1] *Денауский институт предпринимательства и педагогики, Узбекистан,*

[2] *Денауский институт предпринимательства и педагогики, Узбекистан,*

e-mail: xurramovamunira16@gmail.com

Пусть задано уравнение:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+C(x,y)u=F(x,y), \tag{1}$$

в конечной области $D=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$ где $C(x,y)$, $F(x,y)$ заданные непрерывные функции. Для уравнение (1) в области D рассмотрим следующая краевая задача: Найти в области D функция $u(x,y)$ из класса $C^{2,1}(\overline{D})\bigcap C^{3,2}(D)$ удовлетворяющие краевым условиям:

$$\alpha_1(x)u(x,y_0)+\alpha_2(x)u(x,1)=\varphi_1(x),\ 0\le x\le 1, \tag{2}$$

$$u_y(x,0)=\varphi_2(x),\ 0\le x\le 1, \tag{3}$$

$$\beta_0(y)u(0,y)+\beta_1(y)u_{xx}(0,y)=\psi_1(y),\ 0\le y\le 1, \tag{4}$$

$$\gamma_1(y)u(1,y)+\gamma_2(y)u_{xx}(1,y)=\psi_2(y),\ 0\le y\le 1, \tag{5}$$

$$u_x(1,y)=\psi_3(y),\ 0\le y\le 1, \tag{6}$$

Здесь $\alpha_i(x),\beta_i(y),\varphi_i(y),\psi_i(y)$ -заданные непреривные функции:

Теорема 1. *Если* $c(x,y)\ge 0$ *и* $\alpha_1(y)\alpha_2(y)\ge 0,\ \beta_1(y)\beta_2(y)\le 0,$ *то задачи* $(1)-(6)$ *имеет единственное решение. Предположим что для заданных функции требуется следующие условия:* $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0,\ \beta_0^2+\beta_1^2\neq 0,\ \gamma_0^2+\gamma_1^2\neq 0.$

Целью данной работы является изучение вопросы единственности и сушествования решения поставленной задачи. Единственность решения задачи $(1)-(6)$ доказывается методом интегралов энергии. Теорема существования путем построения функция Грина с использованием теории интегралных уравнений.

Литература

1. *Тихонов А.Н.,Самарский А.А.* Уравнения математической физикиҰ.Масква-1972.
2. *ДЖураев Т.Д.,* Краевы задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Тошкент., ФАН, 1979. 240С.
3. *Абдиназаров С.,* Ободной краевой задаче для одного неклассического уравнения. Тошкент., ФАН, 1991. 4.,3-13ст .

Получение представления решения задачи Коши для уравнения с дробной производной Хилфера

Иргашев Б.Ю.

Наманганский инженерно-строительный институт, Наманган, Узбекистан,
Институт Математики им.В.И.Романовского , Ташкент, Узбекистан,
e-mail: bahromirgasev@gmail.com

В области $\Omega = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 < y \leqslant T\}$, рассмотрим начальную задачу типа задачи Коши для уравнения с дробной производной Хилфера:

Задача Коши. Найдите решение задачи

$$\begin{cases} D_{0y}^{\alpha,\beta} u(x,y) - (-1)^{n-1} \dfrac{\partial^{2n} u(x,y)}{\partial x^{2n}} = 0, \\ \lim\limits_{y\to+0} \left(y^{(1-\beta)(2-\alpha)} u(x,y) \right) = \varphi(x), \\ \lim\limits_{y\to+0} \dfrac{\partial}{\partial y} \left(y^{(1-\beta)(2-\alpha)} u(x,y) \right) = \psi(x), \end{cases} \tag{1}$$

где

$$D_{0y}^{\alpha,\beta} u(x,y), \frac{\partial^{2n} u(x,y)}{\partial x^{2n}} \in C(D), y^{(1-\beta)(2-\alpha)} u(x,y) \in C^1\left(\overline{D}\right);$$

$$\varphi^{(2n)}(x), \psi(x) \in C(R), |\psi(x)|, \left|\varphi^{(j)}(x)\right| \leqslant M, \forall x \in R, j = 0, 1, ..., 2n, 0 < M - const;$$

$$1 < \alpha < 2, 0 \leqslant \beta \leqslant 1;$$

$D_{0y}^{\alpha,\beta}$ оператор дробного дифференцирования в смысле Хилфера, порядка α и типа β (см. [1])

$$D_{0y}^{\alpha,\beta} u(x,y) = D_{0y}^{-\beta(s-\alpha)} \frac{\partial^s}{\partial y^s} \left(D_{0y}^{-(1-\beta)(s-\alpha)} u(x,y) \right),$$

здесь

$$s - 1 < \alpha \leq s,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ s \in N,$$

D_{0t}^{γ} дифференциальный оператор дробного порядка Римана-Лиувилля, который определяется так [2, c.28]:

$$D_{0t}^{\gamma}\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\gamma)} \displaystyle\int_0^t \dfrac{\varphi(\tau)\, d\tau}{|t-\tau|^{\gamma+1}}, \gamma < 0, \\ \varphi(t), \gamma = 0, \\ \dfrac{d^{[\gamma]+1}}{dt^{[\gamma]+1}} D_{0t}^{\gamma-[\gamma]-1} \varphi(t), \gamma > 0, \end{cases}$$

$[\gamma]$ целая часть числа γ.

Заметим, что в уравнении (1) при $\beta = 0$ мы имеем дробную производную Римана-Лиувилля, а при $\beta = 1$ дробную производную Капуто.

Понятие дробной производной Хилфера эффективно используется при теоретическом описании некоторых релаксационных процессов в физике и механике [1], [3-5].

Задача Коши для уравнений с дробными производными Джрбашяна-Нерсесяна и Римана-Лиувилля рассматривалась в [6-7] и [8] соответственно. Воспользуемся идеями из этих работ.

Теорема 1 . *Решение задачи Коши дается формулой*

$$u(x,y) = \Gamma(1-(1-\beta)(2-\alpha)) \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_b(x-\xi,y)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\Gamma(2-(1-\beta)(2-\alpha)) \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{b+1}(x-\xi,y)\psi(\xi)d\xi,$$

здесь

$$\Gamma_b(x-\xi,y) = \frac{y^b}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k\phi\left(-\frac{\alpha}{2n}, b+1; -\lambda_k|x-\xi|y^{-\frac{\alpha}{2n}}\right), \tag{2}$$

$$\lambda_k = e^{\frac{2k-n+1}{2n}i\pi}, k=\overline{0,n-1},$$

$$b = -\frac{\alpha}{2n} - (1-\beta)(2-\alpha).$$

Теорема 2. *Пусть существует решение $u(x,y)$ задачи Коши со следующими условиями:*

1. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(x,y)|dx < \infty$;

2. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{\partial^j u(x,y)}{\partial x^j} = 0, j=\overline{0,2n-1}$,

тогда это решение единственно при $y>0$.

Литература

1. *Hilfer R.* Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore:World Scientific, 2000.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003.
3. *Sandev T., Metzler R., and Tomovski Z.* Fractional diffusion equation with a generalized Riemann-Liouville time fractional derivative. Physics A, 2011. V. 44. p. 5-52 .
4. *Hilfer R., Luchko Y., and Tomovski Z.* Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives. Fract. Calcul. and Appl. Analysis, 2009. V.12, N.3. p. 299-318.
5. *Tomovski Z., Sandev T., Metzler R. and Dubbeldam J.* Generalized space-time fractional diffusion equation with composite fractional time derivative. Physica A, 2012. V.391. p. 2527-2542
6. *Pskhu A.V.* Fundamental solutions and cauchy problems for an odd-order partial differential equation with fractional derivative. Electronic Journal of Differential Equations. 2019. V.2019. N. 21. p. 1-13.
7. *Псху А.В.* Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка.// Изв. РАН. Сер. матем., 2009. Т.73, N.2. с. 141-182
8. *Карашева Л.Л.* Задача Коши для параболического уравнения высокого четного порядка с дробной производной по временной переменной. Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т.15. с. 696-706.

Краевая задача для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа со спектральным параметром

[1]**Исломов Б.И.**, [2]**Усмонов Б.З.**

[1] *Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан*

e-mail: islomovbozor@yandex.com

[2] *Чирчикский Государственный педагогический институт, г. Чирчик, Узбекистан,*

e-mail: bakhtiyer.usmanov@mail.ru

Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка, когда главной часть оператора содержит производную по или изучались авторами [1-2]. В этих работах при исследовании краевых задач использовано представление общего решения уравнения смешанно-составного типа в виде суммы функций. Такое представление имеет важное место для уравнений, составляемых из произведения перестановичных дифференциальных операторов.

Краевые задачи для уравнения третьего порядка эллиптико-гиперболического типа, в случае, когда уравнения содержит из произведения неперестановичных дифференциальных операторов мало изучены. Отметим работу [3].

В настоящее работе предлагается метод решения задачи для уравнения третьего порядка эллип-тико-гиперболического типа со спектральным параметром путем сведения к обратной задаче для дифференциального уравнения смешанного типа второго порядка с неизвестными правыми частями.

Рассмотрим уравнение

$$o=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}-\lambda^2 u, \text{ при } y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}-\lambda^2 u, \text{ при } y<0,\end{cases} \tag{1}$$

где $a,\ b$ и $\lambda\neq 0$-заданные действительные числа, причем $a^2+b^2\neq 0$.

Пусть D_1- конечная однозначная область в плоскости (x,y), ограниченная кривой σ при $y>0$ с концами в точках $A(-1,0),\ B(1,0)$ и отрезком AB оси x. Предположим, что кривая униформа относительно оси y, точка $N(0,h)$ этой кривой является единственной максимально удаленной от оси x точкой, части AN и BN дуги σ униформы отрезка ON оси y, здесь O-начало координат. Через D_2 обозначим область, ограниченную при $y<0$ отрезком AB и двумя характеристиками $AC:\ x+y=-1,\ BC:\ x-y=1$ уравнения (1), выходящими из точки $A(-1,0),\ B(1,0)$ и пересекающимися в точке $C(0,-1),\ D=D_1\cup D_2\cup AB$.

Разобьем кривую σ на две части σ_1 и σ_2 следующим образом:

$$\sigma_1=\{(x,y)\in\sigma: ax_n+by_n>0\},\ \sigma_2=\sigma\backslash\sigma_1,$$

где $x_n=\cos(n,x),\ y_n=\cos(n,y)$ и n-внешняя нормаль к границе.

Задача T^{λ}_{ab}. *Найти функцию со следующими свойствами:*
1) $u(x,y)\in C(\overline{D}_1\cup\overline{D}_2)\cap C^1(D\cup\overline{AC}\cup\overline{\sigma_1})$;
2) $u(x,y)\in C^{3,3}_{x,y}(D_1\cup D_2),\ u_{xxy},\ u_{xyy}\in C(D_1\cup D_2)$ и удовлетворяет уравнению (1) в областях D_1 и D_2;
3) на интервале AB выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to-0}u(x,y)=\alpha(x)\lim_{y\to+0}u(x,y)+\beta(x),\ (x,0)\in\overline{AB},$$

$$\lim_{y\to-0}u_y(x,y)=\gamma(x)\lim_{y\to+0}u_y(x,y)+\delta(x),\ (x,0)\in AB;$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u|_{\sigma}=\varphi_1(x,y),\qquad (x,y)\in\bar{\sigma},$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\sigma_1}=\varphi_2(x,y),\qquad (x,y)\in\overline{\sigma}_1,$$

$$u(x,y)|_{AC}=\psi_1(x),\qquad -1\leq x\leq 0,$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}|_{AC}=\psi_2(x),\qquad -1\leq x\leq 0,$$

где $\alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x),\ \delta(x),\ \varphi_j(x,y),\ \psi_j(x)\ (j=1,2)$-заданные функции, причем $\varphi_1(0,h)=\varphi_2(0,h)$,
$\psi_1(-1)=\varphi_1(-1,0)$,

$$\alpha(x),\ \beta(x)\in C^1(\overline{AB})\cap C^3(AB),\ \gamma(x),\ \delta(x)\in C(\overline{AB})\cap C^2(AB), \tag{2}$$

$$\varphi_1(x,y) = y\,\widetilde{\varphi}_1(x,y),\ \widetilde{\varphi}_1(x,y) \in C(\overline{\sigma}),\ \varphi_2 \in C(\overline{\sigma}_1), \tag{3}$$

$$\psi(x) \in C^1[-1,1] \cap C^3(-1,1),\ \psi_2(x) \in C[-1,0] \cup C^2(-1,0). \tag{4}$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (2)-(4), то в области D существует единственное регулярное решение задачи T_{ab}^{λ}.*

Единственность решения задачи T_{ab}^{λ} для уравнения (1) доказывается методом интегралов энергии, а существование - сведением к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

Литература

1. *Салахитдинов М.С.* Уравнения смешанно-составного типа, Фан, 1974.
2. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа, Фан, 1979.
3. *Islomov B. I., Usmonov B.* Nonlocal boundary value problem for a third-order equation of elliptic-hyperbolic type, Lobachevski Journal of Mathematics, 1, 2020, 32-38.

Разложение функций в ряд функциям Бесселя

[1]**Каримов К.Т.,** [2]**Суфиев Х.И.**

[1] *Ферганский государственный университет, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19. Узбекистан,*
karimovk80@mail.ru

[2] *Ферганский государственный университет, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19. Узбекистан,*
hayotbeksufiyev440@gmail.com

В данной статье рассмотрим спектральную задачу Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка и с помощью собственным функциям этой задачи разложим некоторую функцию в ряд.

Задача D_λ. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные решения уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR\left(r\right)}{dr}\right) + \lambda r R\left(r\right) = 0,\ \ 0 < r < a, \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям

$$R\left(0\right) = O\left(1\right),\quad R\left(a\right) = 0, \tag{2}$$

где O большое [1, с.15] обозначают любую функцию, ограниченную относительно функции при аргументе, стремящемся к некоторому конечному или бесконечному числу.

Те значения параметра λ, которые требуется найти, называются собственными значениями задачи, а соответствующие им нетривиальные решения - собственными функциями.

Чтобы записать общие решение уравнения (1), сделаем замену переменной $x = \sqrt{\lambda}r$. Тогда получим, уравнение Бесселя нулевого порядка [2]:

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + R = 0. \tag{3}$$

Принимая во внимание вид общего решения [2] уравнения (3) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (1) в виде

$$R\left(r\right) = AJ_0\left(\sqrt{\lambda}r\right) + BY_0\left(\sqrt{\lambda}r\right),\ \lambda \neq 0,$$

где $J_0\left(x\right)$ и $Y_0\left(x\right)-$ функция Бесселя нулевого порядка первого и второго рода [2] соответственно.

Известно [2], что

$$\lim_{r\to 0} J_0\left(\sqrt{\lambda} r\right) = 1, \ \lim_{r\to 0} Y_0\left(\sqrt{\lambda} r\right) = \infty,$$

следовательно, в силу ограниченности функции в нуле, $B = 0$.

Таким образом, будем иметь

$$J_0\left(\sqrt{\lambda} a\right) = 0 \ \ (A \neq 0). \tag{4}$$

Известно, что при $l > -1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [2, с.528]. Удобно принять в уравнение (4) $\sqrt{\lambda} a = \gamma$, тогда будем иметь

$$J_0(\gamma) = 0. \tag{5}$$

Так как $\lambda \geq 0$, то $\gamma-$ вещественные; это позволяет находить корни уравнений (5) графически. Пусть $\gamma_1, \ \gamma_2, \ \gamma_3, \ldots \gamma_n, \ \ldots-$ положительные корни уравнений (5), тогда собственные значения будут

$$\lambda_1 = \left(\frac{\gamma_1}{a}\right)^2, \ \lambda_2 = \left(\frac{\gamma_2}{a}\right)^2, \ \lambda_3 = \left(\frac{\gamma_3}{a}\right)^2, \ \ldots, \ \lambda_n = \left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2, \ \ldots, \tag{6}$$

а собственные функции будут иметь вид

$$R_1(r) = J_0\left(\gamma_1 \frac{r}{a}\right), \ R_2(r) = J_0\left(\gamma_2 \frac{r}{a}\right), \ldots, R_n(r) = J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right), \ldots. \tag{7}$$

Известно [2], что система собственных функций (7) ортогональна на отрезке $[0, a]$ с весом r, причем квадрат нормы

$$\left\| J_0\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right)\right\|^2 = \int_0^a r J_0^2\left(\gamma_n \frac{r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(\gamma_n).$$

Теперь рассмотрим следующую задачу: разложить функцию $f(r) = 1 - \frac{r^2}{a^2}$ на отрезке $[0, a]$ в ряд по собственным функциям (7).

Решим эту задачу. Находим коэффициенты разложения

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{a}\right)$$

по формуле

$$C_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(\gamma_n)} \int_0^a r f(r) J_0(\gamma_n r/a)\, dr. \tag{8}$$

Для вычисления интеграла в (8) удобно воспользоваться уравнением (1). Откуда найдем

$$r J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right) dr = -\left(\frac{a}{\gamma_n}\right)^2 d\left(r \frac{d}{dr} J_0\left(\frac{\gamma_n}{a} r\right)\right). \tag{9}$$

После подстановки (9) в (8) интегрирование производим по частям, тогда в итоге имеем

$$C_n = \frac{8}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)},$$

и следовательно,

$$1 - \frac{r^2}{a^2} = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_n r/a)}{\gamma_n^3 J_1(\gamma_n)}.$$

Литература

1. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. -М.: Т.1.Изд. ИЛ., 1949.

2. *Олвер Ф.* Введение в асимптотические методы и специальные функции. -М.: Мир, 1986.

Приведение линейной D_e-системы к ступенчатому каноническому виду

[1]**Кульжумиева А.А.**

[1] *Западно-Казахстанский университет им. М. Утемисова, Республика Казахстан, г. Уральск,*
e-mail: aiman-80@mail.ru

Рассмотрим линейную систему вида

$$D_e x = A(\sigma)x, \tag{1}$$

с $n \times n$-матрицей $A(\sigma)$, которая удовлетворяет условию

$$A(\sigma + k\omega) = A(\sigma) \in C_{\sigma}^{(1)}(R^m), \quad \forall k \in Z^m, \tag{2}$$

$\sigma = t - e\tau$ – характеристика оператора $D_e = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t_j}$, $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m)$ – кратный вектор-период.

Ставится задача о выяснении условий приведения системы (1) к ступенчатому каноническому виду.

Пусть $\lambda_j(\sigma)$ – собственные значения $A(\sigma)$ кратности k_j, $j = \overline{1,s}$, обладающие свойствами периодичности, непрерывной дифференцируемости, разделенности и знакоопределенности [1].

Здесь следует отметить, что для приводимости системы (1) к одному линейному уравнению n-го порядка, согласно доказанной теореме [2], необходимо выполнение условие обратимости матрицы $A(\sigma)$.

Если это условие приводимости системы к одному уравнению не выполняется, то приходим к случаю когда система (1) состоит из совершенно независимых между собой нескольких подсистем.

Система (1) распадается на подсистемы, когда обратимую, непрерывно дифференцируемую и ω-периодическую матрицу $L(\sigma)$ удается выбрать так, что заменой $x = L(\sigma)\xi$ из системы (1) получим системы вида

$$D_e\overline{\xi}_1 = A_{11}(\sigma)\overline{\xi}_1, \tag{3_1}$$

$$D_e\overline{\xi}_2 = A_{21}(\sigma)\overline{\xi}_1 + A_{22}(\sigma)\overline{\xi}_2, \tag{3_2}$$

....

$$D_e\overline{\xi}_r = A_{r1}(\sigma)\overline{\xi}_1 + ... + A_{rr-1}(\sigma)\overline{\xi}_{r-1} + A_{rr}(\sigma)\overline{\xi}_r, \tag{3_r}$$

где $A_{11}(\sigma)$ – диагональная матрица, $\overline{\xi}_s$ – m_s-вектор, $\xi = (\overline{\xi}_1, ..., \overline{\xi}_r)$.

Следовательно, для системы (3_1) будем считать выполненным условие приводимости $\det B_{11}^*(\sigma) \neq 0$, все другие диагональные матрицы $A_{ss}(\sigma)$, $s = \overline{2,r}$ удовлетворяют условиям приводимости к одному линейному уравнению высшего порядка, которые представляем в виде

$$\det B_{ss}^*(\sigma) \neq 0, \quad \sigma \in R^m, \quad s = \overline{2,r}. \tag{4}$$

Здесь $B^*(\sigma)$ – матрица Вандермонда.

Далее, соответствующими заменами переходим к линейным системам

$$D_e z_1 = C_1(\sigma)z_1, \tag{5_1}$$

$$D_e z_2 = C_2(\sigma)z_2 + \mathcal{L}_1(\sigma, z_1), \tag{5_2}$$

....

$$D_e z_r = C_r(\sigma)z_r + \mathcal{L}_r(\sigma, z_1, ..., z_{r-1}) \tag{5_r}$$

с сопровождающими матрицами $C_1(\sigma)$, $C_2(\sigma)$, ..., $C_r(\sigma)$ периодическими по σ и линейными относительно z_1, ..., z_{r-1} вектор-функциями $\mathcal{L}_1(\sigma, z_1)$, ..., $\mathcal{L}_{r-1}(\sigma, z_1, ..., z_{r-1})$.

Очевидно, что каждая из систем (5_1), ..., (5_r) приводима к системе с жордановой канонической матрицей $J_1(\sigma)$, ..., $J_r(\sigma)$ на основе неособенного линейного преобразования.

Таким образом, системы (5_1), ..., (5_r) имеют вид

$$D_e y_1 = J_1(\sigma) y_1, \tag{6_1}$$

$$D_e y_2 = J_2(\sigma) y_2 + l_2(\sigma, y_1), \tag{6_2}$$

....

$$D_e y_r = J_r(\sigma) y_r + l_r(\sigma, y_1, ..., y_{r-1}), \tag{6_r}$$

где $l_2(\sigma, y_1)$, ..., $l_r(\sigma, y_1, ..., y_{r-1})$ – непрерывно дифференцируемые, периодические по σ и линейные по y_1, ..., y_{r-1} функции.

Системы (6_1), ..., (6_r) объединив можно записать в виде

$$D_e y = J(\sigma) y + l(\sigma, y), \tag{6}$$

где $J(\sigma) = diag\,[J_1(\sigma), ..., J_r(\sigma)]$, $l(\sigma, y) = (0, l_2(\sigma, y_1), ..., l_r(\sigma, y_1, ..., y_{r-1}))$ – вектор-функция с векторными компонентами.

Систему (6) можно назвать общим каноническим видом системы (1).

Итак, мы пришли к следующему утверждению.

Теорема. *Пусть система (1) при условии (2) с собственными значениями* $\lambda_j(\sigma)$, $j = \overline{1, n}$, *обладающими свойствами периодичности, непрерывной дифференцируемости, разделенности и знакоопределенности, распадается на* r *подсистем вида* (3_1), ..., (3_r). *Тогда если для них выполнено условие (4), то система (1) приводима к общему каноническому виду.*

Данная работа примыкает к исследованиям [3-4].

Литература

1. *Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A.* Reduction of linear homogeneous D_e-systems to the Jordan canonical form, NEWS NAS RK. Physico-Math. Series, 2017. № 5(315). - P. 5-12.
2. *Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А.* О приводимости линейной D_e-системы с постоянными на диагонали коэффициентами к D_e-системе с жордановой матрицей в случае эквивалентности ее одному уравнению высшего порядка, Вестник Карагандинского университета. Сер. Математика, 2016. № 4(84). С. 88-93.
3. *Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A.* On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables, Eurasian Math. J., 2017. № 1(8). P. 67-75.
4. *Kulzhumiyeva A.A., Sartabanov Zh.A.* Integration of a linear equation with differential operator, corresponding to the main diagonal in the space of independent variables, and coefficients, constant on the diagonal, Russian Mathematics, 2019. № 6(63). P. 29–41.

Об одной краевой задаче для смешанной уравнения третьего порядка с неперестановочным дифференциальным оператором в прямоугольнной области

Кылышбаева Г.К.

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан, г. Ташкент, Узбекистан,

e-mail: kalbaevna85@mail.ru

В последние годы возник интерес исследованию методом спектрального анализа[11] однозначной разре-шимости и устойчивости решения прямых и обратных задач для модельного уравнения смешанного типа второго и третьего порядка в прямоугольной области. Отметим работы М.М. Хачева [2], К.Б. Сабитова [3-4], Н.Ю. Капустина и Е.И. Моисеева[5], Э.М. Сафина [6-7].

Краевые задачи для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического и эллиптико-гиперболи-ческого типов в прямоугольных областях, случай, когда уравнения содержит произведения неперестановоч-ных дифференциальных операторов, ранее не изучены.

В настоящее работе предлагается метод решения задачи для дифференциального уравнения третьего порядка путём сведения к обратной задаче для дифференциального уравнения смешанного типа второго порядка с неизвестными правыми частями.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$0 = \left(a\frac{\partial}{\partial x} + c\right) \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda^2 u, & \text{при} \quad y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 u, & \text{при} \quad y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y): \ 0 < x < 1, \ -p < y < q \}$, где $a, \ c, \ \lambda, \ p, \ q \in \mathbb{R}$, причем

$$a \neq 0, \ \ \lambda \neq 0, p > 0, \ q > 0. \tag{2}$$

Введем обозначения: $J = \{(x, y): \ 0 < x < 1, \ y = 0\}$,

$$D_1 = D \ \cap \ \{(x, y): \ x > 0, \ y > 0\},$$

$$D_2 = D \ \cap \ \{(x, y): \ x > 0, \ y < 0\}, D = D_1 \cup D_2 \cup J.$$

Через $C_\theta^k(M)$ обозначим класс функций, непрерывных вместе со своими частными производных
по θ до $k-$го порядка включительно в области M.

В области D исследуем следующую задачу.

Задача P_1. Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}), \ \ u \in C_y^2(\bar{D}_2), \ \ u \in C_x^2(\bar{D}), \ \ u_{xxy} \in C(D_1 \cup D_2), \quad u_{yyy} \in C(D_2), \tag{3}$$

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + c\right) Lu = 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2, \tag{4}$$

$$u(0, y) = 0, \quad au_x(1, y) + cu(1, y) = 0, \quad -p \leq y \leq q, \tag{5}$$

$$u_x(0, y) = \varphi(y), \quad -p \leq y \leq q, \tag{6}$$

$$u(x, -p) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \ , \tag{7}$$

где $\varphi(y), \ \ \psi(x)$ $-$заданные достаточно гладкие функции.

Уравнение (1) в области D равносильно уравнению параболо- гиперболического типа второго порядка с неизвестной правой частью

$$Lu(x, y) \equiv f(y) \exp\left(-\frac{c}{a}x\right), \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2. \tag{8}$$

Тогда задача P_1 сводится к следующей обратной задаче.

Задача P_2. Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(y)$, удовлетворяющие условиям (3), (5)-(7) и уравнению (8), где $f(y) \in C(-p,q) \cap L_2\left[-p,q\right]$.

Используя методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, математического и спектрального анализа доказаны теоремы существования и единственности решения задачи P_2. Решения задачи P_2 построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Получены оценки, позволяющие обоснование сходимости рядов в классе регулярных решений уравнения (8) и устойчивость решения задачи P_2 от граничных данных.

Литература

1. *Ильин В.А.* Единственность и принадлежность W_2^1 классического решения смешанной задачи для самосопря-женного гиперболического уравнения. Математические заметки. 1975. Т. 17. No 1 С. 93–103.

2. *Хачев М.М.* Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лаврентьев –Бицадзе в прямоугольной области. Дифференциальные уравнения. 1978. Т.14. No 1 . С.136-139.

3. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области. Доклады РАН 2007. Т.413. No 1. С. 23-26.

4. *Сабитов К.Б.* Краевая задача для уравнений смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области. Дифференциальные уравнения. 2011. Т.47. No 5. С.705-713.

5. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* Об оценке решения одной задачи для параболо-гиперболического уравнения с помощью рядов Фурье. Дифференциальные уравнения. 2003. Т.39. No 5. С.656-662.

6. *Сабитов К.Б.,Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо- гиперболического типа.С. 907–918.

7. *Сабитов К. Б., Сафин Э. М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. Изв. вузов. Матем. 2010. 4. С. 55–62.

Интегральная формула для систем эллиптического типа первого порядка в неограниченной области в трехмерной области

[1]Маликов З., [2]Бахшиллоева Ш.

[1] *Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: ziyadillo@internet.ru

[2] *Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан,*

В данной работе рассматривается справедливости интегральной формулы для систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области с растущим вектор функции.

Интегральная формула является основным аппаратом решение многих математических задачах. В работе [1] доказывается интегральная формула для систем эллиптического типа первого порядка в ограниченной области Ш.Ярмухамедовым [2] доказана интегральная формула для растущим гармонических функции в неограниченной области

Вводим следующие обозначение

$$E = (E_1, E_2, E_3)\,, C = (C_1, C_2, C_3)\,, r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (C_2 - E_2)^2 + (C_3 - E_3)^2},$$

$$E^1 = (E_1, E_2)\,, C^1 = (C_1, C_2)\,, \alpha = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (C_2 - E_2)^2}, \omega = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3,$$

$$u\left(x\right) = \left(u_1\left(x\right), u_2\left(x\right), ..., u_n\left(x\right)\right)^T, n \geq 3, \frac{\partial}{\partial E} = \left(\frac{\partial}{\partial E_1}, \frac{\partial}{\partial E_2}, \frac{\partial}{\partial E_3}\right)^T.$$

(E)-диагональная матрица размерности $n \times n$, $u^0 = (1, 1, ..., 1)$ n-мерной вектор.

Через $A_{l\times n}\left(x^T\right), l\geq 3, n\geq 3$ обозначим класс матриц $D\left(x^T\right)\in D\left(x^T\right)$ элементы которых состоящих из линейной функции с комплексной коэффициентами удовлетворяющий условии $D^*\left(x^T\right)D\left(x^T\right)=\left(\left(|x|^2+\lambda\right)u^0\right)$, где $D^*(x^t)$ эрмитовим сопряженным к матрице $D(x^t)$.

Пусть $G\subset R^3$ односвязной ограниченной области с гладкой границей.

В области G рассматриваем систем дифференциальных уравнений вида

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(x\right)=0, x\in G, \tag{1}$$

где $D\left(x\right)\in A_{l\times n}\left(x^T\right)$.

Если $u\left(x\right)=C^1\left(G\right)\bigcap C\left(\overline{G}\right)$ удовлетворяет систему (1) в области G, тогда верна следующая интегральная формула

$$u\left(x\right)=\int_{\partial G}M\left(x,y\right)u\left(y\right)ds_y, x\in G, \tag{2}$$

где

$$M\left(x,y\right)=\left(\left(\frac{C_3 cos\lambda r}{r}\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D\left(t^T\right), C_3=\frac{1}{4\pi}. \tag{3}$$

Пусть область G является неограниченная областью с кусочно-гладкой границей. Через K_R обозначим круга радиуса R центра в начало координат и $G_R=G\bigcap K_R, G_R^\infty=G\backslash K_R$. Интегральная формула верна в неограниченной области G, если выполняются условию

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\partial G_R^\infty}M\left(x,y\right)u\left(y\right)ds_y=0, x\in G. \tag{4}$$

Рассмотрим случай когда области $G_\rho, \rho>0$, лежит внутри слоя наименьшей шириной $h, 0< C_3<h, h=\frac{\pi}{\rho}, \rho>0$, граница области состоит из плоскости $C_3=0$ и поверхности $C_3=f\left(y_1,y_2\right)$ простирающийся до бесконечности, удовлетворяющий условии $\frac{\partial f(y_1,y_2)}{\partial y_i}\leq M<\infty, i=1,2$.

Пусть функция $K\left(w\right), w=u+iv$ целая функция, вещественно при вещественном аргумента, удовлетворяющий условии

$$\sup_{v\geq 1}\left|v^p K^p\left(w\right)\right|=M\left(p,u\right)<\infty, p=0,1,2,3, K\left(u\right)\neq 0.$$

Тогда функцию $\Phi_\sigma\left(C,E\right)$ определим следующим образом

$$\Phi_\sigma\left(C,E\right)=\frac{1}{4\pi\left(E_3\right)}\int_0^\infty Im\frac{K\left(w\right)}{w-x_3}\frac{cos\lambda udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}. \tag{5}$$

В работе [2] показана, что функция $\Phi_\sigma\left(C,E\right)$ представима в виде

$$\Phi_\sigma\left(C,E\right)=\frac{\cos\lambda r}{4\pi r}+g_\sigma\left(y,x\right). \tag{6}$$

Интегральная формула верна если вместо $\frac{\cos\lambda r}{4\pi r}$ подставить функцию $\Phi_\sigma\left(C,E\right)$.

Теорема. *Если вектор функция $u\left(y\right)$ из класса $u\left(x\right)=C^1\left(G_\rho\right)\bigcap C\left(\overline{G_\rho}\right)$, удовлетворяет систему (1) в области G_ρ имеющие роста*

$$u\left(y\right)=\exp\left(0\left(\exp\left|y^1\right|\right)\right), |y|\to\infty, y\in G_\rho. \tag{7}$$

Тогда верна интегральная формула (2) в области G_ρ.

Литература

1. *Н.Н.Тарханов.* Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа.//Ин-т физики АН СССР. Красноярск 1980.С.147-160.

2. *Ярмухамедов Ш.* О продолжении решения уравнения Гельмгольца.// ДАН, 1997. Т.357. є3. с. 320-323.

3. *Д.А.Жураев, З.Маликов, И.Исломов.* Задача Коши для эллиптических систем в ограниченно области. Материалы международной научно-технической конференции. Самарканд, 28-29 июня, 2007.

Об одной игровой задаче управления пучками траекторий при интегральных ограничениях на управляющие параметры игроков

[1]Мамадалиев Н.А., [2]Абдуолимова Г.М.

[1]*Национальный университет Узбекистана, 100174, г.Ташкент, Вузгоро-док, ул. Университетская, 4, математический факультет, Узбекистан,*
e-mail: m_numana59@mail.ru

[2] *Андижанский государственный университет, 170100, г.Андижан, ул. Университетская, 129, Узбекистан,физико-математический факультет,*
e-mail: abduolimova81@inbox.ru

В данной работе изучены конфликтно-управляемый процесс, описываемой системой дифференциально - разностных уравнений нейтрального типа. Для этой игры получено достаточное условие для возможности перевода пучка траекторий, исходящих из начального множества $N\left(\Phi\left(\cdot\right)\right)$, на терминальное множество M при интегральных ограничениях на управляющие параметры игроков.

Постановка задачи. Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ описывается системой линейных дифференциально - разностных уравнений нейтрального типа, содержащей неизвестную функцию и ее производные в различные моменты времени

$$\dot{z}(t)=\sum_{i=1}^{m}A_i\dot{z}(t-h_i)+\sum_{i=0}^{m}B_iz(t-h_i)-Cu(t)+Dv(t),\ t\geq 0, \tag{1}$$

где z — n — мерный вектор из евклидова пространства $\mathbb{R}^n, n\geq 1$; $A_i\,(i=1,2,\cdots,m)$, $B_i\,(i=0,1,2,\cdots,m)$, — постоянные квадратные матрицы порядка $(n{\times}n)$, $(n{\times}n)$; C, D — постоянные матрицы порядка $(n\times p)$ и $(n\times q)$, соответственно; $0=h_0<h_1<\cdots<h_m$ — действительные числа; Вектором $u(t)$ распоряжается догоняющий объект, т.е. преследователь, вектором $v(t)$ распоряжается убегающий объект. Управления $u(t)$, $v(t)$ выбираются в классе измеримых векторных функций удовлетворяющих интегральным ограничениям

$$\|u(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)}\leq\rho,\ \|v(\cdot)\|_{L_2[0,+\infty)}\leq\sigma, \tag{2}$$

где ρ и σ — неотрицательные константы.

Измеримые функции $u=u(t), v=v(t)$, $0\leq t<+\infty$, удовлетворяющие ограничениям (2), назовем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков, соответственно.

Всюду в дальнейшем терминальное множество M имеет вид $M=M_0+M_1$, где M_0 — линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, M_1 — компактное подмножество подпространства L, где L — ортогональное дополнение к подпространству M_0 в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $M_0\oplus L=\mathbb{R}^n$).

Кроме того в пространстве $\mathbb{R}^n$ задано множество $N\left(\Phi\left(\cdot\right)\right)$ из точек которого исходят траектории игры (1), называется *начальным множеством.* В качестве начального множества $N\left(\Phi\left(\cdot\right)\right)$ берется множество измеримых однозначных ветвей многозначного отображения

$$\Phi\left(s\right),\,-h\leq s\leq 0: N\left(\Phi\left(\cdot\right)\right)=\left\{z_0\left(t\right): z\left(s\right)=z_0\left(t\right),\quad z_0\left(t\right)\in\Phi\left(t\right),\quad -h\leq t\leq 0\right\}.$$

Пусть $u=u\left(t\right)$, $0\leq t<+\infty$ и $v=v\left(t\right)$, $0\leq t<+\infty$ — допустимые управления в игре (1),(2). Через $Z\left(u\left(\cdot\right),v\left(\cdot\right),N\left(X\left(\cdot\right)\right)\right)$ обозначим множество (пучок) всех траекторий уравнения (1), исходящих из точек начального множества $N\left(\Phi\left(\cdot\right)\right)$ при допустимых управлениях

$u(\cdot), v(\cdot)$ преследующего и убегающего игроков соответственно. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(\Phi(\cdot)))$ на терминальное множество M за некоторое конечное время.

Целью настоящей работы является получение некоторое достаточное условие общего вида, при выполнение которых гарантируется перевод пучка траекторий, исходящих из начального множества $N(\Phi(\cdot))$, на терминальное множество M за некоторое конечное время.

При изучении игры (1),(2), мы отождествляем себя с преследователем. В этом случае наша цель заключается в приведении пучка траекторий $Z(u(\cdot), v(\cdot), N(\Phi(\cdot)))$ на терминальное множество M.

Задача управления пучками траекторий в игре (1),(2), состоит в нахождении числа $T \geq 0$ и конструировании при каждом $t \in [0, +\infty)$ значения допустимого управления $u[t]$ параметра u так, чтобы каждая траектория $z(t)$, $0 \leq t < +\infty$, пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(\Phi(\cdot)))$ попала на терминальное множество M за время, не превосходящее T, т.е. для каждой траектории $z(t)$, $0 \leq t < +\infty$ пучка $Z(u[\cdot], v(\cdot), N(\Phi(\cdot)))$ при некотором $t = t^* \in [0, T]$ должно иметь место включение $z(t^*) \in M$. В случае, когда задача управления пучками траекторий разрешима, то говорят, что в игре (1),(2), пучок траекторий из (начального множества) $N(X(\cdot))$ можно перевести на (терминальное множество) M за время T. Число T называется *временем перевода.*

Определение. *Пусть* $K(t), 0 < t \leq \tau,$ *— единственная матричная функция, обладающая следующими свойствами*: а) $K(t) = \tilde{0},\ t < 0,\ \tilde{0}$ *— нулевая матрица порядка* n; б) $K(0) = E_n$, где E_n *— единичная матрица порядка* n; в) *функция* $\sum_{i=0}^{m} C_i K(t - h_i)$ *непрерывна на* $[0, +\infty)$; г) $K(t)$ *при* $t > 0$ *удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению*

$$\dot{K}(t) = \sum_{i=1}^{m} A_i \dot{K}(t - h_i) + \sum_{i=0}^{m} B_i K(t - h_i). \tag{3}$$

Существование и единственность матричной функции $K(t), -\infty < t \leq \tau$, удовлетворяющей условиям а)–б, могут быть доказаны обычном методом последовательного интегрирования уравнения (3).

Обозначим через π — матрицу оператора ортогонального проектирования из $\mathbb{R}^n$ на $L: \ \pi: \mathbb{R}^n \longrightarrow L$; под операцией $\underline{*}$ понимается операции геометрической разности (разность Минковского)[1].

Предположение 1. *Для всех* $t \in [0, \tau]$ *имеет место включение* $\pi K(t) C R^p \supset \pi K(t) D R^q$ [2].

При выпольнении предположения 1, существует матрица $F_0(t): R^q \to R^p$, $0 \leq t \leq \tau$, такая, что $\pi K(t) D = \pi K(t) C F_0(t)$ при каждом $t \in [0, \tau]$.

Предположение 2. *Существует матричная функция* $F_0(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, *элементы которой являются суммируемыми функциями и удовлетворяют условию* $\chi < \rho$, *где*

$$\chi^2(\tau) = \sup_{\|v(\cdot)\| \leq \sigma} \int_0^{\tau} \|F_0(t) v(t)\|^2 dt.$$

Далее, через $W_1(\tau)$ обозначим множество $W_1(\tau) = \Big[M_1 \underline{*}\, \Omega[t, N(\Phi(\cdot))]\Big] + W(\tau)$, где

$$\Omega\Big[t, N(\Phi(\cdot))\Big] = -\sum_{i=0}^{m} \pi K(t - h_i) A_i \Phi(0) + \sum_{i=0}^{m} \int_{-h_i}^{0} \pi K(t - s - h_i)\Big[A_i \dot{\Phi}(s) + B_i \Phi(s)\Big] ds =$$

$$= \Big\{-\sum_{i=0}^{m} \pi K(t - h_i) A_i \varphi(0) + \sum_{i=0}^{m} \int_{-h_i}^{0} \pi K(t - s - h_i)\Big[A_i \dot{\varphi}(s) + B_i \varphi(s)\Big] ds :$$

$\varphi(s) \in N(\Phi(s)),\ -h_i \leq s \leq 0\Big\}$, $\ W(\tau) = \Big\{\int_0^{\tau} \pi K(t) C w(t)\, dt : \|w(\cdot)\| \leq \rho - \chi(\tau)\Big\}$.

Теорема. *Пологаем, что выполнены предположения 1,2 на параметры игры (1)-(2). Предположим, что при некотором* $\tau = \tau_1$ *имеет место включение* $0 \in W_1(\tau))]$.

Тогда в игре (1) при ограничениях (2) пучок траекторий можно перевести из множества $N(\Phi(\cdot))$ *на множество* M *за некоторое конечное время* $T[N(\Phi(\cdot))] = \tau_1$.

Литература

1. *Понтрягин Л.С.* Избранные научные труды. М.:Наука. Том 2. 1998.
2. *Сатимов Н.Ю.* Методы решения задачи преследования в теории дифференциальных игр. Изд-во Национальной библиотеки Узбекистана имени Алишера Навои. Ташкент. 2019.

О корректной постановке краевой задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками

Мамажонов С.М.

Институт Математика им. В.И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан,
e-mail: sanjarbekmamajonov@gmail.com

Изучение многих задач газовой динамике, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см. [1]-[4]). Монография Джураева Т.Д., Сопуева А. [5] посвящена классификаций дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка и решению краевых задач для таких уравнений.

Аманов Д., Мурзамбетова М.Б. в работе [6] рассмотрели задачу с краевыми условиями для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками с одним младшим членом.

Сабитов К. Б, Фадеева О. В. в работе [7] решили задачу с начальными и граничными условиями для уравнения колебания балки.

Уринов А.К., Азизов М.С. в работе [8] исследовали задачу для уравнения четвертого порядка с неизвестной правой частью.

Рассмотрим следующее уравнение четвертого порядка вида:

$$U_{xxxx} + A_1(x)U_{xxx} + A_2(x)U_{xx} + A_3(x)U_x + A_4(x)U + A_5(x)U_y - U_{yy} = F(x, y),$$

где $A_i(x)$, $i = \overline{1, 5}$, $F(x, y)$ заданные достаточно гладкие функции. Заменой

$$U(x, y) = \exp\left[-\frac{1}{4}\int\limits_0^x A_1(\xi)d\xi + \frac{A_5(x)}{2}y\right]u(x, y),$$

это уравнения можно привести к уравнению

$$u_{xxxx} + a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x + a_3(x)u - u_{yy} = f(x, y), \qquad (1)$$

где $a_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$ выражается через $A_j(x)$, $j = \overline{1, 5}$,

$$f(x, y) = \exp\left[\frac{1}{4}\int\limits_0^x A_1(\xi)d\xi - \frac{A_5(x)}{2}y\right]F(x, y).$$

Для уравнения (1) в области $\Omega = \{(x, y) : \ 0 < x < p, \ 0 < y < q\}$ изучим следующую задачу.

Задача *A. Найти функцию* $u(x, y)$ *из класса* $C^{4,2}_{x,y}(\Omega) \cap C^{3,1}_{x,y}(\bar{\Omega})$, *удовлетворяющую уравнению (1) в области* Ω *и следующим краевым условиям:*

$$u(x, 0) = u_y(x, q) = 0, \quad 0 \le x \le p,$$

$$u_x(0,y)=\psi_1(y),\ u_x(p,y)=\psi_2(y),\ u_{xxx}(0,y)=\psi_3(y),\ u_{xxx}(p,y)=\psi_4(y),\quad 0\le y\le q,$$

где $\psi_i(y)$, $i=\overline{1,4}$, $f(x,y)$ *заданные достаточно гладкие функции.*

Отметим, что в работе [6] рассмотрен случай $a_1=a_2=0$, $a_3\neq 0$, а в работах [8-10] исследованы краевые задачи для уравнений четвертого порядка спектральном методом. В работе [11], метод Фурье используется для решения краевой задачи для модельного уравнения произвольного четного порядка.

Теорема 1. *Если задача A имеет решение, то при выполнении условий* $a_1(x)\le 0$, $a_2(p)-a_1'(p)\ge 0$, $a_1''(x)-a_2'(x)+2a_3(x)\ge 0$, $a_1'(0)-a_2(0)\ge 0$, *оно единственно.*

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (1) и однородным краевым условиям. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar\Omega$.

В области Ω справедливо тождество

$$uL[u]\equiv 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xxx}-u_xu_{xx}+a_1(x)uu_x-\frac{1}{2}a_1'(x)u^2+\frac{1}{2}a_2(x)u^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}(uu_y)+$$

$$+u_{xx}^2-a_1(x)u_x^2+\left(a_3(x)+\frac{1}{2}a_1''(x)-\frac{1}{2}a_2'(x)\right)u^2+u_y^2=0.$$

Интегрируя это тождество по области Ω и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\int_0^p\int_0^q u_{xx}^2(x,y)dxdy+\int_0^p\int_0^q u_y^2(x,y)dxdy-\int_0^p\int_0^q a_1(x)u_x^2(x,y)dydx+\frac{1}{2}\int_0^q(a_2(p)-a_1'(p))u^2(p,y)dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^p\int_0^q(a_1''(x)-a_2'(x)+2a_3(x))u^2(x,y)dydx+\frac{1}{2}\int_0^q(a_1'(0)-a_2(0))u^2(0,y)dy=0,$$

отсюда имеем

$$u_{xx}(x,y)=0\Rightarrow u_x(x,y)=c(y).$$

Учитывая однородные краевые условия, получим

$$u_x(0,y)=c(y)=0,\quad\Rightarrow\quad c(y)=0,\quad\Rightarrow\quad u(x,y)\equiv 0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если выполняются следующие условия:*

1) $\psi_i(y)\in C^3[0,q]$, $\psi_i(0)=\psi_i'(q)=\psi_i''(0)=0$, $i=\overline{1,4}$;

2) $f_{xyy}(x,y)\in C(\bar\Omega)$, $\int\limits_0^q|f_{yy}(x,y)|dy<\infty$, $\int\limits_0^q|f_{xyy}(x,y)|dy<\infty$, $f(x,0)=0$;

3) $C<\dfrac{\mu_1^3(1-e^{-2\mu_1p})^2}{p(2\mu_1^2+3\mu_1(1+e^{-4\mu_1p})+3)}$,

то решение задачи A существует. Здесь, $C=\max\limits_{\xi\in[0,p]}\{|a_i^{(j)}(\xi)|,|a_1''(\xi)|,\ i=\overline{1,3},\ j=0,1\}$, $\mu_1=\sqrt{\dfrac{\pi}{2q}}$.

Доказательство теоремы 2 проведено методом разделение переменных. Решение выписано через построенную функцию Грина.

Литература

1. *Турбин М.В.* Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершеля-Балкли // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. 2013. No 2. C. 246–257.
2. *Уизем Дж.* Линейние и нелинейные волны.-М.: Мир,1977.
3. *Шабров С.А.* Об оценках функций влияния одной математической модели четвертого порядка // Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. 2015. No 2. C. 168–179.
4. *Benney D.J., Luke J.C.* Interactions of permanent waves of finite amplitude // J. Math. Phys. 1964. 43. P.309–313.
5. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Т: Фан, 2000.-144 с.
6. *Аманов Д., Мурзамбетова М. Б.* Краевая задача для уравнения четвертого порядка с младшим членом, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2013, выпуск 1, С. 3–10.
7. *Сабитов К. Б., Фадеева О. В.* Начально-граничная задача для уравнения вынужденных колебаний консольной балки // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 25:1 (2021), С. 51–66.
8. *Urinov A.K., Azizov M.S.* Boundary Value Problems for a Fourth Order partial Equation with an Unknown Right-hand Part // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42 No 3 P. 632–640.
9. *Аманов Д., Бекиев А.Б., Отарова Ж.А.* Об одной краевой задаче для уравнения четвертого порядка // УзМЖ. 2015. No 4. C. 11–18.
10. *Сабитов К. Б.* Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий // Дифференциальные уравнения, 2020, том 56, No 6, С. 761–774.
11. *Б. Ю. Иргашев* Краевая задача для уравнения высокого четного порядка, Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ., 2016, выпуск 3(34), С. 6–18.

О самосопряженном операторе Дирака с массой на полуоси

Маматов А.Э.

Ташкентский университет информационных технологии, ул. А.Темура 108, Ташкент, Узбекистан,

e-mail: aemamatov@mail.ru

В гильбертовом пространстве вектор-функции $L_2^2(0,+\infty)$ рассмотрим самосопряженный оператор Дирака D, порожденный дифференциальным выражением вида

$$dy = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{dy}{dx} + i\begin{pmatrix} 0 & \overline{-q(x)} \\ q(x) & 0 \end{pmatrix} y = \lambda y, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, 0 \le x < \infty \tag{1}$$

с граничным условием

$$y_1(0) = y_2(0), \tag{2}$$

где функция $q(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} (1-x)\,|q(x) - m|\,dx < \infty, \tag{3}$$

а $m > 0$ масса.

В качестве области определения этого оператора мы принимаем множество D_D всех вектор-функций f абсолютно непрерывных в каждом интервале $[0,a]$, $a > 0$, таких,что $f, d(f) \in L_2^2(0,+\infty)$ и $f_1(0) = f_2(0)$. При $f \in D_D$ мы полагаем $Df = d(f)$.

Обратная задача рассеяния для системы уравнений (1) на полупрямой с граничным условием $y_1(0) = 0$ рассматривалась Б. М. Левитаном и М. Г. Гасымовым [1]. Обобщение на случай $2n$-компонентных векторов было получено М. Г. Гасымовым [2]. Для системы уравнений (1) с массой $m = 0$ обратная задача решена в работе Фам Лой Ву [3].

В настоящей работе решается прямая задача рассеяния для системы уравнений (1) с граничным условием (2).

Если выполняется условие (3), то система уравнении (1) при действительных λ и $|\lambda| > m$ имеет специальные решения

$$f^{+}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{i(k-\lambda)}{m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx} + \int_x^{+\infty} \Gamma(x,y) \begin{pmatrix} \frac{i(k-\lambda}{m} \\ 1 \end{pmatrix} e^{iky} dy$$

и

$$f^{-}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\lambda-k)}{m} \end{pmatrix} e^{-ikx} + \int_x^{+\infty} \Gamma(x,y) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i(\lambda-k)}{m} \end{pmatrix} e^{-iky} dy,$$

где, $k = \sqrt{\lambda^2 - m^2}, signk(\lambda) = sign\lambda$, ядро $\Gamma(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x,y) + \sigma_3 \frac{\partial}{\partial y}\Gamma(x,y)\sigma_3 - U_0(x)\Gamma(x,y) + \sigma_3\Gamma(x,y)\sigma_3 U = 0$$

и условиям $\Gamma(x,x) - \sigma_3\Gamma(x,x)\sigma_3 = U - U_0(x)\,, \lim\limits_{y\to\infty}\Gamma(x,y) = 0,$
где

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} 0 & \overline{q(x)} \\ q(x) & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & 0 \end{pmatrix},$$

причем для элементов матрицы $\Gamma(x,y)$ справедливы оценки

$$|\Gamma_{ij}| \le C_1/(1+x)(1+t)^{1+\varepsilon}, i \ne j; |\Gamma_{ii}| \le C_1/(1+t)^{1+\varepsilon},$$

C_1 и $\varepsilon-$ положительные постоянные числа.

Обозначим через $\Phi(x,\lambda)$ решение системы уравнений (1) с начальным условием

$$\Phi_1(0,\lambda) = \Phi_2(0,\lambda) = 1. \tag{4}$$

Теорема. *Если коэффициент $q(x)$ дифференциального оператора D удовлетворяет условию (3), то каждая вектор-функция $q(x) \in L_2^2(0,+\infty)$ имеет следующее разложение*

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>m} \frac{-k}{(k+\lambda)\left(f_1^{+}(\lambda) - f_2^{+}(\lambda)\right)\left(f_1^{-}(\lambda) - f_2^{-}(\lambda)\right)} \Phi(x,\lambda)\Phi^T(\lambda)\,d\lambda +$$
$$+\sum_{j=1}^n \frac{-i}{\left(f_1^{+}(\lambda_j) - f_2^{+}(\lambda_j)\right)\gamma_j} \Phi(x,\lambda_j)\Phi^T(\lambda_j),$$

где

$$\Phi^T(\lambda) = \int_0^{+\infty} (\sigma_1\Phi(x,\lambda))^T g(x)\,dx.$$

Литература

1. *Гасымов М.Г., Левитан Б.М.* Определение системы Дирака по фазе рассеяния. ДАН СССР, 1966,т.167, N6, с.1219-1222.
2. *Гасымов М.Г.* Обратная задача теории рассеяния для системы уравнения Дирака порядка 2n. Труды моск. мат. об-ва., 1968,т.19,с.41-190.
3. *Фам Лой Ву.* Обратная задача рассеяния для системы уравнений Дирака на полуоси. В сб. "Линейные краевые задачи математической физики"Изд. инс.математики АН УССР, Киев,1973,с.174-207.

Оптималъное управление обыкновенными непрерывными стохастическими системами при функционалъных ограничениях типа неравенств

[1] **Мансимов К.Б.**, [2]**Масталиев Р.О.**

[1] *Бакинский государственный университет,Баку,Азербайджан Институт систем упрвления НАН Азербайджана,Баку,Азербайджан,*
e-mail: kamilbmansimov@gmail.com

[2]*Институт систем упрвления НАН Азербайджана,Баку,Азербайджан,*
e-mail: mastaliyevrashad@gmail.com

Изучается задача оптималъного управления нелинейными стохастическими системами, математическая модель которых описивается обыкновенным стохастическим дифференциальным уравнением. Ито при наличии функциональных ограничениях типа неравенств. Установлены стохастического анологи-принципа максимума Понтрягина, линеаризованного условия максимума. Пуст $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1}, P)$ полное вероятностное простронство,наделенное естественной фильтрацией $n-$мерного стандартного винеровского процесса $\omega(t), t \in T = [t_0, t_1]$. $L^2_{\mathcal{F}}(t_0, t_1; R^n)-$ пространство измеримых по (t, ω) и $\mathcal{F}^t$ согласованных процессов,$(t, \omega) : T \times \Omega \to R^n$, для которых $E \int\limits_{t_0}^{t_1} ||x(t)||^2 < +\infty$где $E-$символ математического ожидания. Предположим,что на этом вероятностном пространстве задан управляемый процесс описываемый стохастическим дифференциальным уравнением Ито [1-3]

$$dx(t) = f(t, x(t), u(t))dt + \sigma(t, x(t))d\omega(t), t \in T, \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

Здесь $x(t) \in R^n$ вектор состояния $f(t, x, u)-$ заданная $n-$мерная,вектор-функция,непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $x; \sigma(t, x(t)) : T \times R^n \to R^{n \times n} - n \times n-$ мерная матричная функция,непреривная по совокупности переменных вместе с частными производными по x.

$$u(t, \omega) \in U_{ac} \equiv \{u(.,.) \in L^2_{\mathcal{F}}(t_0, t_1; R^n)/u(.,.) \in U \subset R^r\}, \tag{3}$$

где $U-$ заданное непустое,ограниченное множество(область управления). Управляющую функцию $u(t) \in U_{ac}, t \in T$ назовем допустимым управлением,если соответствующее ему решение $x(t)$, задачи (1)-(2) удовлетворяет ограничениям

$$S_i(u) = E_{\varphi_i}(x(t_1)) \leq 0, i = 1, p, \tag{4}$$

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t), t \in T$ соответствует единственное почти наверное непрерывное решение $x(t)$ задачи (1)-(2).

Задача: требуется найти допустимому управление $u(t)$, минимизирующее терминальный функционал

$$S_i(u) = E_{\varphi_i}(x(t_1)), \tag{5}$$

где $\varphi_i(x), i = 0, p-$ заданные непреривно дифференцируемые скалярные функции. Пуст $u(t), t \in T$ некоторое допустимое управление. Положим $I(u) = i : E_{\varphi_i}(x(t_1)) = 0, i = 1, p, J(u) = 0 \cup I(u)$. С целью упрощения выкладок будем считать,что в задаче (1)-(5)

$$I(u) = 1, 2, ..., m, (m \prec p).$$

Введим обозначения:

$$H(t, x, u, \psi_i) = {\psi_i}'(t) f(t, x, u), {H_x}^i = H(t, x, u, \psi_i(t)), i \in J(u)$$

$$\sigma_x[t] = \sigma_x(t, x(t)).$$

Здесь случайные процессы $\psi_i(t) \in L^2_{\mathcal{F}}(t_0, t_1; R^n)$ и $\beta_i(t) \in L^2_{\mathcal{F}}(t_0, t_1; R^{n\times n})$ являются решением следующей системы стохастических дифференциальных уравнений (сопряженная система):

$$\begin{cases} \psi_i(t) = -(H_x^{(i)}[t] + \beta_i(t)\sigma_x[t])dt + \beta_i(t)d\omega(t), \\ \psi_i(t_1) = \frac{\partial\psi_i(x(t_1))}{\partial x}, i \in J(u). \end{cases}$$

Используя методику аналогичной методики работ [4,5] доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для оптимальности допустимого управления $u(t), t \in T$ в стохастической задаче (1)-(5) необходимо,чтобы неравенство*

$$\min_{i\in J(u)} E\sum_{j=1}^{m+1} l_j[H^{(i)}(\theta_j, x(\theta_j), v_j, \psi_j(\theta_j)) - H^{(i)}(\theta_j, x(\theta_j), u(\theta_j), \psi_j(\theta_j))] \le 0,$$

выполнялось для всех $v_j \in U, l_j \ge 0, \theta_j \in [t_0, t_1), j = 1, m+1$.

Теорема 1. *Предположим что,множество U выпукло,а $f(t, x, u)$ непрерывно по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u), тогда для оптимальности допустимого управления $u(t), t \in T$ в стохастической задаче (1)-(5) необходимо,чтобы неравенство*

$$\min_{i\in J(u)} E\sum_{j=1}^{m+1} l_j H_u^{(i)}(\theta_j, x(\theta_j), u(\theta_j), \psi_i(\theta_j))(v_j - u(\theta_j))) \le 0,$$

выполнялось для всех $v_j \in U, l_j \ge 0, \theta_j \in [t_0, t_1), j = 1, m+1$.

Литература

1. *Peng.S* A general schotastic maximum principle for optimal control problems SIAM J.Control and optim. 1990. № 4. C. 966-979.
2. *Shaolin Ji,Haodong Liu.* Maximum principle for stochastic optimal control problem of forward-backward stochastic difference systems International Journal of control.2021.№ 95. C. 1979-1992.
3. *Mansimov K.B., Mastaliyev R.O.* Necessary optimality conditions of stochastic systems with functional constraints of the inequality type Informatics and Control Problems,iss № 1, 2019, C. 40-46.
4. *Мансимов К.Б.* Особые управления в системах с запаздыванием. Баку, Изд-во "Элм 1999,176с
5. *Мансимов К.Б.,Марданов М,Дж.* Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу.Баку.Изд-во "Элм 2010,360с.

О единственности решения задачи с условием Бицадзе–Самарского на параллельных характеристиках для одного класса уравнений смешанного типа

[1] Мерганов Р. А., [2] Олтиев Б.Ж., [3] Шерматов Ш.Х

[1] *Узбекистан, Термез, Термезский государственный университет,*
e-mail: merganovravshan7@gmail.com

[2] *Узбекистан, Термез, Термезский государственный университет,*
e-mail: oltiyevbaxriddin@gmail.com

[3] *Узбекистан, Денау, Денауский институт предпринимательства и педагогики,*
e-mail: oltiyevbaxriddin@gmail.com

Введение. Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$, с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, а при $y < 0-$ характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0, \tag{1}$$

где постоянная $m>0$.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, а через C_0 и C_1- соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристиками исходящей из точки $E(c,0)$, где $c\in I=AB=(-1,1)-$ интервал оси $y=0$.

Задача BS **(Бицадзе–Самарского)**. В области Ω требуется найти функцию $u(x,y)$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x,y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\overline{\Omega}^+$ и $\overline{\Omega}^-$;

2) функция $u(x,y)$ принадлежит классу $C^2\left(\Omega^+\right)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;

3) функция $u(x,y)$ является обобщённым решением класса R_1 уравнения (1) $(u(x,y)\in R_1$ если в формуле Даламбера $\tau^{'}(x),\nu(x)\in H$ (см. ниже (11)) [1], [2, c.35] в области Ω^-;

4) на интервале вырождения выполняется общее условия сопряжения [3]

$$u(x,-0)=a_1u(x,+0)+a_0(x),\quad x\in\overline{I},\tag{2}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}=f(x)\lim_{y\to+0}y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}+b_0(x),\ x\in I\setminus\{c\},\tag{3}$$

причем эти пределы при $x=\pm1$, $x=c$ могут иметь особенности порядка ниже единицы, $a_1=const$;

5) выполнены условия

$$u(x,y)=\varphi(x),\quad (x,y)\in\overline{\sigma}_0,\tag{4}$$

$$u(x,y)\mid_{AC_0}=\psi(x),\quad x\in[-1,(c-1)/2],\tag{5}$$

$$u[\theta(x)]=\mu u[\theta^*(x)]+\rho(x),\quad x\in[c,1],\tag{6}$$

где

$$\theta(x_0)=\frac{x_0-1}{2}-i\left[\frac{(m+2)(x_0+1)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$$\theta^*(x_0)=\frac{x_0+c}{2}-i\left[\frac{(m+2)(x_0-c)}{4}\right]^{2/(m+2)}$$

соответственно аффиксы точек пересечения характеристик $C_0C\subset AC$ EC_1 с характеристикой исходяшей из точки $(x_0,0)$, где $x_0\in[c,1]$, $a_0(x)$, $f(x)$, $b_0(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$–заданные достаточно гладкие функции, $\mu-$ некоторая постоянная причем $\psi(-1)=0$, $\rho(c)==\rho(1)=0$, $\varphi(-1)=\varphi(1)=0$.

Заметим, что условие (4) является условием Дирихле на σ_0 а условие (6) есть условие Бицадзе–Самарского [4] на параллельных характеристиках $C_0C\subset AC$ EC_1.

Отметим, что задача BS при $\mu=0$, $(\psi((c-1)/2)=\rho(c))$ переходит в задачу Трикоми с разрывными условиями сопряжения на линии вырождения вида (2) и (3) [3].

Введём обозначения

$$\tau^-(x)=u(x,-0),\quad \nu^-(x)=\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y},\tag{7}$$

$$\tau(x)=u(x,+0),\quad \nu(x)=\lim_{y\to+0}y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}.\tag{8}$$

В силу обозначений (7), (8) условия склеивания (2) и (3) примут вид

$$\tau^-(x)=a_1\tau(x)+a_0(x),\quad x\in\overline{I},\tag{9}$$

$$\nu^-(x)=f(x)\nu(x)+b_0(x),\quad x\in I.\tag{10}$$

Единственность решения задачи BS.

Формула Даламбера, определяющая в области Ω^- решение для уравнения (1) видоизменённой задачи Коши с начальными данными (7) имеет вид [2, c.39] :

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau^-\left(x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)+\tau^-\left(x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)\right]-$$

$$-\frac{(-y)^{(m+2)/2}}{m+2}\int_{-1}^{1}\nu^-\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right]dt. \tag{11}$$

С помощью формулы Даламбера (11) не трудно вычислить значения

$$u(x,y)\mid_{AC_0}=\frac{\tau^-(-1)+\tau^-(x)}{2}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\nu^-(t)dt, \tag{12}$$

$$u[\theta(x)]=\frac{\tau^-(-1)+\tau^-(x)}{2}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\nu^-(t)dt, \tag{13}$$

$$u[\theta^*(x)]=\frac{\tau^-(c)+\tau^-(x)}{2}-\frac{1}{2}\int_{c}^{x}\nu^-(t)dt. \tag{14}$$

Теперь подставляя (12) , (13) и (14) в краевые условия (5) и (6) соответственно, имеем

$$\left(\tau^-(x)\right)'=\nu^-(x)+\psi_1(x),\ x\in(-1,c), \tag{15}$$

$$\left(\tau^-(x)\right)'=\nu^-(x)+\rho_1(x),\ x\in(c,1), \tag{16}$$

где $\psi_1(x)=\psi'((x-1)/2),\quad \rho_1(x)=2\rho'(x)/(1-\mu)$.

В силу условий склеивания (2) и (3) ((9) и (10)) соотношения (15) и (16) преобразуем к виду

$$a_1\tau'(x)=f(x)\nu(x)+\psi_2(x),\quad x\in(-1,c), \tag{17}$$

$$a_1\tau'(x)=f(x)\nu(x)+\rho_2(x),\ x\in(c,1), \tag{18}$$

где $\psi_2(x)=b_0(x)-a_0'(x)+\psi_1(x),\quad \rho_2(x)=b_0(x)-a_0'(x)+\rho_1(x)$.

Соотношения (17) и (18) являются первыми основными функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесёнными на интервалы $(-1,c)$ и $(c,1)$ оси $y=0$ из области Ω^-.

Теорема 1. *Решение $u(x,y)$ задачи BS, при выполнении условий $a_0(x)\equiv 0,\quad b_0(x)\equiv 0,\quad \varphi(x)\equiv 0,\quad \psi(x)\equiv 0,\quad \rho(x)\equiv 0$, и $a_1>0,\ \mu<1,\ f(x)>0$ в замкнутой области $\overline{\Omega}^+$ тождественно равна нулю.*

Доказательство теоремы проводится методом работы [2, c.110].

Литература

1. *Бабенко К.И.* К теории уравнений смешанного типа. Докторская диссертация (библиотека математического института им. В.А. Стеклова РАН).1952

2. *Салахитдинов М.С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005.

3. *Каратопраклиев Г.* Об одном обобшении задачи Трикоми //ДАН СССР. 1964. Т.158, (2), С. 271-274.

4. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобшениях линейных эллиптических краевых задач //ДАН СССР. 1969. Т.185, (4), С. 739-740.

Задача Коши для системы уравнений теории упругости

[1]Ниёзов И.Э., [2]Махмудов О.И.

[1] *Самаркандский государственный университет, г.Самарканд, университетский бульвар-15, Узбекистан*

e-mail: iqboln@mail.ru

[2] *Самаркандский государственный университет, г.Самарканд, университетский бульвар-15,Узбекистан*

e-mail: makhmudovo@rambler.ru

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений колебания теории упругости в пространственной области по его значениям и значениям его напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши.

Задача Коши для эллиптических уравнений являлась предметом изучения математиков на протяжении двадцатого века и продолжает по сей день притягивать внимание исследователей. Как и общая задача аналитического продолжения, задача Коши для эллиптических уравнений оказалась некорректной. Развитие специальных методов, позволяющих работать с некорректными задачами Коши, стимулировалось запросами жизни. Такие задачи вставали в гидродинамике, в теории передачи сигнала, в томографии, в геологоразведке.

А.Н. Тихоновым, М.М. Лаврентьевым и другими была разработана концепция условно корректных задач [1]. Принципиальным моментом является то, что в данных работах выведены не только условия разрешимости, но и формулы для решения их в виде ряда. Это позволяет строить удовлетворительные приближенные решения путем суммирования конечного числа членов ряда.

В работе основным приемом является разложение элементов подходящего пространства в ряд по однородным гармоническим функциям, образующим базис на сфере. При этом специфичность области гарантирует наличие упомянутого базиса. Лежащим в основе формул Карлемана можно назвать метод Мергеляна и Лаврентьева, состоящий в приближении ядра интегрального представления на части границы, если необходимо восстановить функцию в области по ее значениям на дополнении этого множества границы. Используя конструкцию Ярмухамедова [2], авторами построены явные формулы Карлемана для специальных классов областей, а также регуляризованное решение задачи Коши [3]-[8].

Литература

1. *Лаврентьев М. М. , Романов В. Г. , Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа, Наука, М., 1980.

2. *Ярмухамедов Ш.Я.* О задаче Коши для уравнения Лапласа.ДАН СССР. 1977. Т.235. (2). С. 281-283.

3. *Niyozov I.E.* The Cauchy problem of couple-stress elasticity. Global and Stochastic Analysis, Vol.9 No. 2 (March, 2022).pp.27-42.

4. *Makhmudov O., Niyozov I.* The Cauchy problem for the Lame system in infinite domains in R^m, Journal of inverse and Ill-Posed Problems.V14. No.9.2006. pp.905-924(20).

5. *Махмудов О. И., Ниёзов И. Э.* О разрешимости задачи Коши для системы математической теории термоупругости в пространстве. Журн. Диф.ур. Т57. No.5. 2021. с.687-699.

6. *О. И. Махмудов, И. Э. Ниёзов.* О задаче Коши для системы динамических уравнений теории упругости. Журн. Диф. ур. 2020. Т56. No.9. с.1164-1173.

7. *Ниёзов И.Э.* Регуляризация нестандартной задачи Коши для динамической системы Ламе. Изв. вузов. Математика.2020, No.4, с.54-63.

8. *Махмудов О.И., Ниёзов И.Э.* Задача Коши для системы уравнений моментной теории упругости в R^m. Известия вузов. Математика 2014, No.2, с. 30-37.

Краевая задача для уравнения гиперболического типа второго рода

[1]Окбоев А.Б., [2]Ахмедова М.Б.

[1] *Наманганское отделение института Математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекитан, ул. Уйчи, 316, 160136, Наманган, Узбекистан,*
e-mail: akmaljon12012@gmail.com

[2] *Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан,*
e-mail: mirjalol9966@mail.ru

Рассмотрим уравнения

$$L_\alpha (u) \equiv sign\,(-y)\, u_{xx} + y u_{yy} + \alpha u_y = 0 \tag{1}$$

в области, ограниченной характеристиками данного уравнения

$$OA: \;\; x - 2\sqrt{-y} = 0,\;\; 0 \le x \le 1/2,\;\; y < 0;$$

$$AB: \;\; x + 2\sqrt{-y} = 1,\;\; 1/2 \le x \le 1,\;\; y < 0;$$

$$OC: \;\; x - 2\sqrt{y} = 0,\;\; 0 \le x \le 1/2,\;\; y > 0;$$

$$CB: \;\; x + 2\sqrt{y} = 0,\;\; 1/2 \le x \le 1,\;\; y < 0,$$

где $\alpha \in (-1/2,\, 0)$. Обозначим за D_1 область, ограниченную характеристическими кривыми OA, AB, OB, за D_2 - область, ограниченную характеристическими кривыми OC, CB, OB.

Задача 1. *Найти в области $D = D_1 \bigcup D_2$ решение $u(x,y) \in C\left(\bar{D}\right)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u\,(x,y)|_{OA} = \varphi_1(x), \quad u\,(x,y)|_{OC} = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le 1/2,$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{y\to -0} u\,(x,y) = \lim_{y\to +0} u\,(x,y)\,, \qquad 0 \le x \le 1;$$

$$\lim_{y\to -0} (-y)^\alpha \frac{\partial}{\partial y}\left[u - A_\alpha^-(\tau,\lambda)\right] = \lim_{y\to +0} y^\alpha \frac{\partial}{\partial y}\left[u - A_\alpha^+(\tau,\lambda)\right], \quad 0 < x < 1,$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - заданнные непрерывные функции, а [1]

$$A_\alpha^\pm(\tau,\lambda) = \gamma_1 \int\limits_0^1 \tau\left(s^\pm\right)[z\,(1-z)]^\beta dz + \frac{4\gamma_1 y}{(\beta+1/2)\,(\beta+1)} \int\limits_0^1 \tau''\left(s^\pm\right)[z\,(1-z)]^{1+\beta} dz,$$

$$s^\pm = \begin{cases} s^+ = x - 2\sqrt{y}\,(1-2z)\,,\; y > 0; \\ s^- = x - 2\sqrt{-y}\,(1-2z)\,,\; y < 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Если $\varphi_i\,(x) \in C^3\,[0, 1/2]\,, \varphi_i^{(k)}(0) = 0,\;\; i = 1,2;\;\; k = 1,2,\,3,$ то задача 1 имеет единственное решение.*

Литература

1. *Исамухамедов С.С.* О краевой задаче для одного уравнения смешанного типа второго рода, Сб. "Краевые задачи для дифференциальных уравнений." Ташкент, Изд-во "Фан" 1975. С. 28–37.

Представление решений одного класса систем квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка

Орипов Т.С.
Денауский институт предпринимательства и педагогики,
e-mail: oripovdenov@mail.ru

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка, с сингулярными коэффициентами в пространстве трёх переменных вида

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a(x+y+z, y, z; u'_x), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = b(x, y, z; u'_x/(x+y+z)^n) + \frac{u'_x}{(x+y+z)^n}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = c(x, y, z; u'_x/(x+y+z)^n) + \frac{u'_x}{(x+y+z)^n}, \end{array} \qquad (1)$$

где заданные функций $a,\ b, c \in C^1(\overline{D})\bigcap$, $u \in C^3(\overline{D})\bigcap$, причём функция

a(x +y +z , y, z, u'$_x$ *)* по первым и последним аргументам является обобщённым однородным функцией, т.е. $a(t\cdot(x+y+z), y, z;\ t^n \cdot V) = t^{1-n}\cdot a(x+y+z, y, z;\ \ V)$. За замкнутой областью $\bar{D}$ принимаем трёхмерный параллелепипед, включая ее границ по главным граням. Делая замену $u'_x = (x+y+z)^n \cdot V$, где V=V(x,y,z)- новая неизвестная функция. Преобразуем систему (1) к виду системой комплексных дифференциальных уравнений типа в полных дифференциалах неизвестной функции V=V(x,y,z) вида

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{a(1, y, z; V) - n\cdot V}{x+y+z}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{b(x, y, z; V)}{(x+y+z)^n}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{c(x, y, z; V)}{(x+y+z)^n}. \qquad (2)$$

Приравнивая смешанные производные второго порядка, по переменным, получаем условия совместности системы (2)

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+y+z)\cdot b'_x + (a - n\cdot V)\cdot b'_V = (a'_V - n)\cdot b + (x+y+z)\cdot a'_y, \\ (x+y+z)\cdot c'_x + (a - n\cdot V)\cdot c'_V = a'_V\cdot c + (x+y+z)\cdot a'_z + (nV - a)\cdot(x+y+z)^{n-1}, \\ (x+y+z)^n\cdot b'_z + c\cdot b'_V - n(x+y+z)^{n-1}b = b\cdot c'_V + (x+y+z)\cdot c'_y - n(x+y+z)^{n-1}c. \end{array} \right. \qquad (3)$$

Допустим, условия совместности (2) выполняются, но не тождественно. Тогда решая каждого из этих соотношений алгебраическим способом, получаем функций вида $V = h_j(x,,y,z), (j = 1,2,3)$. Если эти найденные нами функций удовлетворяют систему уравнений (1), то они будут некоторые частные, либо особые решения системы. А также, если при ограниченности неизвестной функции то ее частные производные по всем переменным, существуют следующие конечные пределы и они равны к нулю:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y,z\to 0}} \left((x+y+z)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad \lim_{\substack{x,y\to 0\\ z\to 0}} \left((x+y+z)\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x,y\to 0\\ z\to 0}} \left((x+y+z)\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, \qquad (4)$$

то существуют некоторые частные, либо особые решения исходной задачи. При этом некоторое частное решение системы (1) возможно принимает вид

$$u(x,y,z) = \frac{1}{n+1}(x+y+z)^{n+1}\cdot\left(P(C,z) + \int_0^x h_j(t,y,z)dt\right) \in C(\bar{G})\bigcap,\ (j = 1,2,3). \qquad (5)$$

Интегрируя эту систему по переменным y, z получаем, переходя к прежним

$$u(x,y,z) = C_2(y,z) + \int_0^x (t+y+z)^n \cdot A^{-1}\left[y, z;\ \ln(t+y+z) + F(y,z;C_1)\right]dt\,. \qquad (6)$$

Теорема 1. *Пусть в системе дифференциальных уравнений второго порядка (1), функция а $(x+z, y, z; u'_x)$ по первым и последним аргументам является обобщённым однородным функцией в области* $\bar{D} = \{G: |x| \le p\,,\ |y| \le q,\ |z| \le r,\, |u-u_0| \le m,\, |V-V_0| \le m\}\,,\ p, q, r, m-$ *const.. Если в системе (2) выполняются условий* $\alpha < \min\left\{p, q, r; \frac{m}{M}\right\}$, $M = \max\{\,|a|\,,|b|\,,|c|\,\} < \infty$ *в точке х области* $\overline{D}$, *причём* $a(x{+}z,\ ,y,z;u'_x)$ *считается обобщённо-однородной по первой и последним аргументам функции. Если условий совместности (3) по всем переменным выполняются, но не тождественно, либо выполняются условий (4), тогда возможно находятся некоторые частные, либо особые решения системы (1). В противном случае, система (1)- несовместна. Для тождественного выполнения условий совместности (3) необходимо и достаточно, чтобы взаимосвязь функций* $a(x{+}z, y, z; u'_x.)$, $b(x, y, z; \frac{u'_x}{x+z}$, $c(x, y, z; \frac{u'_x}{x+z},)$ *имели вид (5). Тогда исходная система разрешима и многообразие ее решений определяется формулой (6), непрерывной и аналитической во всей данной комплексной области.*

Литература

1. *Михайлов Л.Г., Орипов Т.С.* Формулы представления решений систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными линиями. Михайлов Л.Г., Орипов Т.С. - Вестник Таджикского Национального Университета.- Душанбе, 2005 г., No.2, с. 83-85.

2. *Орипов Т.С.* Об одном классе систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными коэффициентами. Орипов Т.С. -Труды Таджикского технического университета.- Душанбе, 2013 г., No.4 (14), с. 6-9.

3. *Орипов Т.С.* Вырождение систем нелинейных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффицентами. Вестник ТНУ No.2,Душанбе - 2019г. (серия естественных наук),стр.102-108.

4. *Орипов Т.С.* Представление решение систем нелинейных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффицентами . Тезисы Докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых "Современные методы математической физики и их приложения" 17-18 ноября 2020 г.Тошкент -2020

Переопределённая система трёх дифференциальных уравнений второго порядка с регулярными коэффициентами

[1]Орипов Т.С., [2]Олимова З.

[1] *Денауский институт предпринимательства и педагогики,*

e-mail: oripovdenov@mail.ru

[2] *Магистрант 2-го года обучения ДИПП,*

Рассматривается переопределённая система трёх дифференциальных уравнений второго порядка с регулярными коэффициентами, относительно неизвестной функции с разделяющимися переменными различными видами:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a(x,y,z)\cdot m\left(z, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial C \partial x} = b(x,y,z)\cdot n\left(z, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = c\left(x,y,z; \frac{\partial u}{\partial x}\right), \end{array}\right. \tag{1}$$

где в ней ее функций $a(x,y,z)$, $b(x,y,z)$, $c(x,y,z;u'_x)$ при всех значениях являются заданными функциями в заданной области $\bar{D}$, т. е.: a, b, $c(x,y,z;u'_x) \in C^1(\bar{D})$, $u \in C^3(\bar{D})$ считаются непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми функциями и регулярными. Прежде всего, заменяя в системе (1) $u'_x = V$, $V = V(x,y,z)$ вводим новую неизвестную функцию, и преобразуем данную систему в регулярной системе дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} = a(x,y,z)\cdot m\left(z, V\right), \quad \frac{\partial V}{\partial C} = b(x,y,z)\cdot n\left(z, V\right), \\ \frac{\partial V}{\partial z} = c\left(x,y,z; V\right). \end{array}\right. \tag{2}$$

Приравниваем смешанные производные второго порядка, в системе (2), получаем условия совместности исходной системы в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_y m + a \cdot b \cdot m' n - b'_x n - a \cdot b \cdot n'_V m = 0, \\ c'_x + a \cdot m \cdot c'_V - a \cdot m'_V \cdot c - (a'_z m + a \cdot m'_z) = 0, \\ c'_y + b \cdot m \cdot c'_V - b \cdot m'_V \cdot c - (b'_z m + b \cdot m'_z) = 0. \end{array} \right. \tag{3}$$

Пусть условий совместности (3) по всем переменным выполняются, но не тождественно. Тогда алгебраическим способом решая соотношений (3) легко, имеем $V = h_k(x, y, z), \quad k = 1,\ 2.$ Если эти функций удовлетворяют системе уравнений (2), то они будут некоторыми частными решениями системы. В противном случае, система уравнений (2) и (1) будут не совместными. Допустим, что соотношений в (3) по всем переменным выполняется тождественно. Тогда можно найти такую взаимосвязь данных функций можем определить в различных случаях:

1 случай: Пусть в исходной системе (2) $a'_y = 0,\ b'_x = 0,\ m'_V = 0,\ n'_V = 0$. Тогда исходная система принимает классический вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} = a\left(x, y, z\right).m\left(z\right) = a_1(x, y, z) \\ \frac{\partial V}{\partial y} = b\left(x, y, z\right).n\left(z\right) = b_1(x, y, z) \\ \frac{\partial y}{\partial x} = c\left(x, y, z; V\right) \end{array} \right. \tag{4}$$

Условий совместности системы (4) выполняются тождественно, если в ней найдётся некоторая вполне определённая функция

$$\omega(x, y, z), \omega x? = a_1(x., y, z)\ \omega y? = a_2(x., y, z),$$

многообразие решений системы (4) представляется следующей явной формулой:

$$u(x, y, z) = C_2(y, z) + \int_0^x [\omega(t, y, z) + F(z, C_1)]dt\ . \tag{5}$$

Литература

1. *Михайлов Л.Г., Орипов Т.С.* Формулы представления решений систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными линиями. Михайлов Л.Г., Орипов Т.С. - Вестник Таджикского Национального Университета.- Душанбе, 2005 г., No.2, с. 83-85.

2. *Орипов Т.С.* Об одном классе систем уравнений в полных дифференциалах второго порядка с сингулярными коэффициентами. Орипов Т.С. -Труды Таджикского технического университета.- Душанбе, 2013 г., No.4 (14), с. 6-9.

3. *Орипов Т.С.* Вырождение систем нелинейных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффицентами. Вестник ТНУ No.2,Душанбе - 2019г. (серия естественных наук),стр.102-108.

4. *Орипов Т.С.* Представление решение систем нелинейных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами . Тезисы Докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “Современные методы математической физики и их приложения” 17-18 ноября 2020 г.Тошкент -2020

Первая краевая задача для уравнения буссинеска-лява с сингулярными коэффициентами

Орипов Ш.А.

Ферганский государственный университет

e-mail: shoripov1991@gmail.com

Уравнения Соболевского типа, иначе называемые уравнениями, неразрешенными относительно старшей производной, после известной работы Соболева [1] является объектом исследования для многих авторов. Обзор этих работ можно найти в монографиях [2]-[4].

Важным классом уравнений Соболевского типа является уравнение Буссинеска-Лява четвертого порядка:

$$\Delta_x u_{tt}(x,t) - u_{tt}(x,t) + \Delta_x u(x,t) = 0, \tag{1}$$

которое описывает процесс нестационарного движения вязкой стратифицированной жидкости в приближении Буссинеска, где Δ_x – многомерный оператор Лапласа. Исследованию задачи Коши, смешанных и обратных задач для уравнений Буссинеска-Лява посвящены работы С.А.Габова, А.Г. Свешникова, М.О. Корпусова, А.Б.Альшина, Ю.Д. Плетнера, А.И.Кожанова и других.

Данная работа посвящена изучению вопросов разрешимости в классическом смысле аналога краевой задачи Гурса для уравнения

$$L_\alpha^{\lambda,\mu}(u) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \mu u = f(x,t), \tag{2}$$

где α, λ, $\mu \in R$, а $f(x,t)$ - заданная функция.

Параметр α, входящее в уравнение (2), определяет порядок сингулярности уравнения и задач с ним связанных. При $\alpha = 0$, $\mu = 0$ уравнение (2) переходит в одномерное уравнение Буссинеска-Лява (1), а при $\alpha = (n-1)/2$, $\mu = 0$ мы получим сферически симметричный случай уравнения (1), причем в последнем случае переменная x выполняет роль переменной $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ в сферической системе координат.

Известно, что вырождающиеся и сингулярные уравнения второго порядка обладают той особенностью, что для них не всегда имеет место корректность классических задач. На постановку задачи существенно влияют младшие коэффициенты. Такие вопросы для уравнений высокого порядка с сингулярными коэффициентами почти не исследованы.

Уравнение (2) по классификации работы [5], принадлежит гиперболическому типу. Прямые $x = const$, $t = const$ являются действительными двукратными характеристиками.

Задача А. *В области* $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\, 0 < t < h\}$ *требуется найти функцию* $u(x,t)$ *в классе* $M = \left\{u :\ u \in C^1\left(\bar{\Omega}\right);\ u_{xxt},\ u_{xtt},\ u_{xxtt} \in C\left(\Omega\right)\right\}$*, удовлетворяющую уравнению (2) при* $0 < \alpha < 1/2$ *и краевым условиям*

$$u(0,t) = \varphi_1(t),\ \ u(l,t) = \varphi_2(t),\ \ 0 \le t \le h,$$

$$u(x,0) = \psi_1(x),\ \ u_t(x,0) = \psi_2(x),\ \ 0 \le x \le l;$$

где $\psi_k(x)$, $\varphi_k(t)$, $(k = 1,2)$*- заданные гладкие функции, причем* $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\varphi_2(0) = \psi_1(l)$, $\varphi'_1(0) = \psi_2(0)$, $\varphi'_2(0) = \psi_2(l)$.

Данная задача ранее не исследована. Исследованием различных задач для одномерного общего линейного уравнения типа (2) со старшей производной u_{xxtt} и с гладкими коэффициентами занимались А.П. Солдатов, М.Х.Шхануков, В.И.Жегалов, А.Н.Миронов, Е.А.Уткина, A.Maher и другие. Использовав обобщенный дробный оператор Эрдейи-Кобера [6] и метод Римана [7], нами получена явная формула решения поставленной задачи. В работе построена функция Римана оператора $L_\alpha^{\lambda,\mu}(u)$, которая выражается через гипергеометрическую функцию Кампе де Ферье. При $\alpha = 0$, $\mu = 0$ из этой функции получим функцию Римана одномерного уравнения Буссинеска-Лява (1).

Литература

1. *Соболев С.Л.* Об одной краевой задаче математической физики. Известия АН СССР, Серия Матем. 1954, Т.18, № 4, С. 3-50.
2. *Kozhanov A.I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. - Utrecht. 1999.
3. *Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. - Новосибирск, Наука, 2000.
4. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.Ю., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа. - М.: Физматлит, 2007.
5. *Джураев Т.Д., Сопуев А.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. - Ташкент: ФАН, 2000, С. 144.
6. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. -Минск: Наука и техника, 1987, С. 702.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981.

О свойствах множества управляемости дифференциальных включений

[1]Отакулов С., [2]Рахимов Б.

[1] *Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан,*
e-mail: otakulov52@mail.ru

[2] *Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан,*

В теории управления достаточно важное внимание уделено вопросам управляемости для моделей динамических систем с различными математическими описаниями и содержаниями [1–3]. Задача управляемости динамических систем имеет важное значение для различных классов дифференциальных включений [3–5]. Представляет большой интерес изучение структурных свойств множества управляемости дифференциальных включений относительно подвижного терминального множества[5].

Постановка задачи. Рассмотрим математическую модель динамическую системы в виде дифференциального включения

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t). \tag{1}$$

Пусть задано подвижное, т.е. зависящее от времени терминальное множество$M = M(t),\ t \geq t_0$.

Множество всех начальных состояний $x_0 \in R^n$, из которых дифференциальное включение (1) управляемо в подвижное терминальное состояние $M = M(t)$ на заданном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$, т.е. существует траектория $x(t)$,$T = [t_0, t_1]$, такая, что $x(t_0) = x_0$,$x(t_1) \in M(t_1)$, называется множеством MT–управляемости дифференциального включения.

Множеством M-управляемости дифференциального включения называется совокупность всех начальных состояний $x_0 \in R^n$, из которых оно управляемо в терминальное множество $M = M(t)$ на некотором конечном отрезке времени T. При $M = \{0\}$ будем говорит о множестве нуль –управляемости.

Пусть $X(t_0, t_1, x_0, A, B)$– множество достижимости дифференциального включения (1) из начальной точки $x_0 \in R^n$ в момент времени $t_1 > t_0$. Ясно, что точка $x_0 \in R^n$ является точкой $MT-$ управляемости дифференциального включения (1) тогда и только тогда, когда существует $t_1 > t_0$ такой, что $X(t_0, t_1, x_0,$
$A, B) \bigcap M(t_1) \neq \emptyset$. Таким образом, для изучения свойства множества $M-$ управляемости дифференциального включения (1) следует изучить множеств $MT-$управляемости

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = \left\{ \xi \in R^n : X(t_0, t_1, \xi, A, B) \bigcap M(t_1) \neq \emptyset \right\}, t_1 > t_0.$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие условия: 1) элементы матрицы $A(t)$ измеримы на любом $T = [t_0, t_1] \subset [t_0, +\infty]$ и $||A(t)|| \leq a(t)$, где $a(\cdot) \in L_1(T)$; 2) при каждом $t \geq t_0$ множества $B(t) \subset R^n$ компактны и многозначное отображение $t \to B(t)$

измеримо на произвольном отрезке $T = [t_0, t_1] \subset [t_0, +\infty]$ и $||B(t)|| \leq b(t)$, где $b(\cdot) \in L_1(T)$. Относительно терминального множества $M = M(t)$, $t \geq t_0$, будем предполагать, что оно выпуклый компакт и непрерывно зависит от времени $t \geq t_0$.

Используем следующие обозначения для дифференциального включения (1): $W(M, A, B)$ – множество $M-$управляемости; $W_0(A, B)$–множество нуль-управлямости. Из приведённых определений ясно, что

$$W(M, A, B) = \bigcup_{t_1 > t_0} K(t_0, t_1, M, A, B), W_0(A, B) = \bigcup_{t_1 > t_0} K_0(t_0, t_1, A, B).$$

Известно[3,5], что для множество $X(t_0, t_1, \xi, A, B)$ $X(t_0, t_1, \xi, A, B)$ является выпуклым компактом из R^n и справедлива формула

$$X(t_0, t_1, \xi, A, B) = \$(t, t_0)\xi + \int_{t_0}^{t_1} \$(t_1, \tau)B(\tau)d\tau, \tag{2}$$

где $\$(t, \tau)$ – фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = A(t)x,\ t \in T$.

Результаты исследования.

Теорема 1. Множество $K(t_0, t_1, M, A, B)$ представимо формулой

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = -\int_{t_0}^{t_1} \$_A(t_0, t)B(t)dt + \$_A(t_0, t_1)M(t_1) \tag{3}$$

Следствие 1. Если $M(t_1)$– выпуклый компакт, то $K(t_0, t_1, M, A, B)$ также является выпуклым компактом из R^n. Если множества $M(t_1)$ и $convB(t)$– строго выпуклы при $t \in T = [t_0, t_1]$, то $K(t_0, t_1, M, A, B)$– строго выпуклое множество.

Следствие 2. Пусть$M(t) = \$_A(t, t_0)M_0$. Тогда

$$K(t_0, t_1, , A, B) = K_0(t_0, t_1, A, B) + M_0, W(, A, B) = W_0(A, B) + M_0.$$

Теорема 2. Пусть$M(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t)M_i(t)$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) = 1$, $\alpha_i(t) \geq 0$, $i = \overline{1, k}$, $t \geq t_0$. Тогда:

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t_1)K(t_0, t_1, M_i, A, B).$$

Теорема 3. Пусть $B(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i B_i(t)$, где $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, k}$ и множество $M(t_1)$ выпукло. Тогда:

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i K(t_0, t_1, M, A, B_i).$$

Заключение. В работе исследована проблема управляемости для математической модели системы управления в виде линейного дифференциального включения. Рассмотрен случай, когда терминальное множество подвижное, т.е. зависит от времени: $M = M(t)$. Для этой модели динамической системы изучены структурные и топологические свойства M-управляемости.

Литература

1. *Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление. Труды математического института АН СССР. – 1985. –169. – с. 194-252.

2. *Половинкин Е.С.* Многозначный анализ и дифференциальные включения. –М.: Физматлит, 2015.

3. *Отакулов С.* Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений. Монография. Lambert Academic Publishing, 2019.

4. *Otakulov S., Rahimov B. Sh.* About the property of controllability an ensamble of trajectories of differential inclusion. International Enjineering Journal for Research & Development. Vol.5, issue 4, 2020. pp.366-374.

5. *Otakulov S., Rahimov B. Sh. Haydarov T.T.* On the property of relative controllability for the model of dynamic system with mobile terminal set. AIP Conference Proceedings, 2022, 2432, 030062. -p. 1–5.

Об одной негладкой задаче оптимизации для системы управления с параметром в условиях неопределенности

[1]Отакулов С., [2]Хайдаров Т.

[1] *Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан,*
e-mail: otakulov52@mail.ru

[2] *Джизакский политехнический институт, Джизак, Узбекистан,*
e-mail: omad2015@inbox.ru

Развитие методов негладкой оптимизации имеет актуальное прикладное значение. К настоящему времени достигнуты определённые успехи в данном направлении [1,2], развивается негладкий и многозначный анализ [2,3], все более расширяется круг исследований, посвящённых негладким задачам оптимизации различного математического содержания [4]. К негладким задачам оптимизации часто приводят принципы минимакса или максимина. Эти подходы, применяемые в игровых задачах для конфликтных ситуаций, используется при принятия решения в условиях неполноты информации о начальных данных и (или) параметров внешних воздействий

Постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему управления с параметрами вида

$$\dot{x} = A(t,y)x + b(t,u,y),\ t \in T = [t_0,t_1], x(t_0) \in D,\ u \in V(y),\ y \in Y, \tag{1}$$

где x − n-вектор состояния, u − m-вектор управления, y–k-мерный параметр, $A(t,y)$–$n \times n$-матрица, $b(t,u,y)$– n-вектор функция. В данной системе управления информация о начальном состоянии системы ограничена тем, что известно только выпуклое компактное множество $D \subset R^n$ возможных начальных состояний. Другая особенность системы заключается в том, что в процессе управления участвует параметр y, значение которого принимается из компактного подмножество Y пространства R^k и сохраняется постоянным в рассматриваемом отрезке времени $T = [t_0,t_1]$. Область значений управления $u = u(t)$ является выпуклым компактным подмножеством $V(y)$ пространства R^m, непрерывно зависящим от параметра $y \in Y$.

Относительно правой части дифференциального уравнения (1) будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) элементы матрицы $A(t,y)$ суммируемы по $t \in T$ и непрерывны по $y \in Y$, причем $\|A(t,y)\| \le \alpha(t)$, $\alpha(\cdot) \in L_1(T)$;

2) каждая компонента n-вектор функции $(t,u,y) \to b(t,u,y)$ измерима по $t \in T$ и непрерывна по $(u,y) \in V \times Y$, причем $\|b(t,u,y)\| \le \beta(t)$, $\beta(\cdot) \in L_1(T)$.

Обозначим через $U_T(y)$– множество допустимых управлений $u = u(\cdot)$, таких, что $u(t) \in V(y)$, $t \in T$. Обозначим через $H_T(u,y)$ множество всех допустимых траекторий, соответствующих допустимому управлению $u \in U_T(y)$ и параметра $y \in Y$.

Пусть качество управления динамической системой (1) оценивается негладким терминальным функционалом

$$J(x(\cdot),y) = \sum_{i=1}^{l} \max_{z \in Z_i}[(P_i(y)x(t_1),z_i) + f_i(z_i,y)], \tag{2}$$

где $P_i(y)$–$s \times n$-матрица, непрерывно зависящая от параметра $y \in Y$, Z_i, $i = \overline{1,l}$–выпуклые компакты из R^s, $f_i(z,y)$, $i = \overline{1,l}$– вогнутые по$z \in Z_i$ и непрерывные по $y \in Y$ функции. Учитывая, что начальное состояние системы (1) задано неточно, будем считать, что целью управления является достижение гарантированного значения критерия качества $J(x(\cdot), y)$ вида (2), т.е. будем максимизироватьь функционал вида

$$G(u,y)=\min_{x(\cdot)\in H_T(u,y)} J(x(\cdot),y).$$

Иначе говоря, для системы (1) рассмотрим следующую максиминную задачу:

$$\min_{x(\cdot)\in H_T(u,y)} J(x(\cdot),y)\to \max, u\in U_T(y), y\in Y. \tag{3}$$

Будем изучать необходимые и достаточные условия оптимальности для максиминной задачи (3).

Результаты исследования. Рассмотрим множество, состоящее из концов всех траекторий $x(\cdot)\in H_T(u,y)$ в момент времени $t_1>t_0$:

$$X_T(t_1,u,y)=\{\xi\in R^n|\, \xi=x(t_1),\, x(\cdot)\in H_T(u,y)\}$$

Следовательно для функционала $G(u,y)=\min\limits_{x(\cdot)\in H_T(u,y)} J(x(\cdot),y)$ справедливо представление:

$$G(u,y)=\max_{z_i\in Z_i, i=\overline{1,l}}[\sigma(X_T(t_1,u,y),\sum_{i=1}^{l}P_i'(y)z_i)+\sum_{i=1}^{l}f_i(z_i,y)]. \tag{4}$$

Учитывая формулу (4), максиминную задачу (3) можно записать в следующем виде:

$$\max_{z_i\in Z_i, i=\overline{1,l}}[\sigma(X_T(t_1,u,y),\sum_{i=1}^{l}P_i'(y)z_i))+\sum_{i=1}^{l}f_i(z_i,y)]\to \max,\, u(\cdot)\in U_T(y),\, y\in Y. \tag{5}$$

Таким образом, максиминная задача (3) сведена к задаче повторной максимизации вида (5).

Множество $X_T(t_1,u,y)$имеет следующее представление:

$$X_T(t_1,u,y)=F_y(t_1,t_0)D+\int_{t_0}^{t_1}F_y(t_1,\tau)b(\tau,u(\tau),y)d\tau \tag{6}$$

В силу формулу (6), имеем:

$$\sigma(X_T(t_1,u,y),\psi)=\sigma(F_y(t_1,t_0)D,\psi)+\int_{t_0}^{t_1}(F_y(t_1,\tau)b(\tau,u(\tau),y),\psi)d\tau \tag{7}$$

Рассмотрим функции: $\psi(t,y,z) = F_y'(t_1,t)\sum_{i=1}^{l}P_i'(y)z_i$, $\delta(z,y) = \sum_{i=1}^{l}f_i(z_i,y)$ $z = (z_1,z_2,...,z_l)$. Согласно формуле (7) имеем:

$$\sigma(X_T(t_1,u,y),\psi(t_0,y,z))=\sigma(F_y(t_1,t_0)D,\psi(t_0,y,z))+\int_{t_0}^{t_1}(F_y(t_1,\tau)b(\tau,u(\tau),y),\psi(t_0,y,z))d\tau$$

Поожим: $Z=Z_1\times Z_2\times\cdots\times Z_l$. Введем функционал:

$$\gamma(y,z)=!(D,\psi(t_0,y,z))+\int_{t_0}^{t_1}\max_{v\in V(y)}(b(t,v,y),\psi(t,y,z))dt+\delta(z,y), y\in Y,\, z\in Z. \tag{8}$$

Теорема. Для оптимальности управления $u^0(\cdot)$ и параметра y^0 в задаче (3) необходимо и достаточно существование такой точки $z^0\in Z$ и выполнение следующих условий:

$$\gamma(y^0,z^0)=\max_{z\in Z}\gamma(y^0,z)=\max_{y\in Y}\max_{z\in Z}\gamma(y,z), \tag{9}$$

$$\max_{v\in V(y^0)}(b(t,v,y^0),\psi(t,y^0,z^0))=(b(t,u^0(t),y^0),\psi(t,y^0,z^0)) \tag{10}$$

п.в. на T.

Заключение. В работе изучена задача управления ансамблем траекторий системы, сформулированной в виде негладкой задачи управления максиминного типа. Полученные необходимые и достаточные условия оптимальности дают теоретическое обоснование метода построения решения задачи (3) с помощью решения конечномерных задач вида (9) и (10). Конечномерную задачу минимизации функции (9) можно решить методами математического программирования.

Литература

1. *Demyanov V.F., Rubinov A.M.* Fundamentals of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus. Moskow, Nauka, 1990.
2. *Clark F.* Optimization and non-smooth analysis. John Wiley & Sons, New York, Toronto, Singapore,1983.
3. *Polovinkin E.S.* Multivalued analysis and differential inclusions. Moskow, Fizmatlit, 2015.
4. *Otakulov S.* Problems of controlling an ensemble of trajectories of differential inclusions. Lambert Academic Publishing, 2019.

Об идентификации неупругих закрепленний кольцевой пластины

Пардаев Дж.А.
Самаркандский Государственный Университет, Узбекистан
e-mail: pardayev.jasurhon@mail.ru

Кольцевые пластины являются деталями многих механизмов и конструкций. Если пластины недоступны для непосредственного осмотра или же доступ к ним является дорогостоящим, требующим разборки всей конструкции, то единственным источником установления их надежного закрепления является звучание колебаний пластины. Возникает задача определения закрепления пластины по ее звучанию или же с помощью специальных приборов, определяющих первые собственные частоты.

Задача об осесимметрических колебаниях тонкой кольцевой пластины сводится [1] к следующей спектральной задаче:

$$\frac{d^4 y}{dr^4}+\frac{2}{r}\,\frac{d^3 y}{dr^3}-\frac{1}{r^3}\,\frac{d^2 y}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\,\frac{dy}{dr}-\lambda^4 y=0, \tag{1}$$

$$U_i(y)=\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\,L_j\,y=0, \qquad i=1,\,2, \tag{2}$$

$$U_i(y)=\sum_{j=1}^{4} b_{ij}\,L_{4+j}\,y=0, \qquad i=3,\,4. \tag{3}$$

Здесь $y(r)$ — функция прогиба пластины; L_j — линейные формы, характеризующие закрепление пластины на внутреннем и внешнем крайах:

$$\begin{aligned}
&L_1\,y=y(a),\;\; L_2\,y=\left[\frac{d\,y(r)}{dr}\right]_{r=a},\\
&L_3\,y=\left[\frac{d^2y(r)}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\,\frac{d\,y(r)}{dr}\right]_{r=a},\;\; L_4\,y=\left[\frac{d}{dr}\,\left(\frac{d^2y(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{dy(r)}{dr}\right)\right]_{r=a},\\
&L_5\,y=y(b),\;\; L_6\,y=\left[\frac{d\,y(r)}{dr}\right]_{r=b},\\
&L_7\,y=\left[\frac{d^2y(r)}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\,\frac{d\,y(r)}{dr}\right]_{r=b},\;\; L_8\,y=\left[\frac{d}{dr}\,\left(\frac{d^2y(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{dy(r)}{dr}\right)\right]_{r=b};
\end{aligned}$$

$\lambda = \left(\frac{\rho h \omega^2}{D}\right)^{\frac{1}{4}}$; ω — частотный параметр; D — цилиндрическая жесткость пластины; ν — отношение Пуассона; h — толщина; ρ — плотность.

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{ij} форм $U_1(y)$ и $U_2(y)$, через A, а матрицу, составленную из коэффициентов b_{ij} форм $U_3(y)$ и $U_4(y)$, через B:

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{matrix} \right\|.$$

Миноры второго порядка матриц A и B будем для краткости обозначать через A_{ij} и B_{ij}:

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, \quad B_{ij} = \begin{vmatrix} b_{1i} & b_{1j} \\ b_{2i} & b_{2j} \end{vmatrix}, \qquad i,\, j = 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

Общим решением задачи (1) является (см. [2]) функция

$$y(r) = y(r, \lambda) = C_1\, y_1 + C_2\, y_2 + C_3\, y_3 + C_4\, y_4, \tag{4}$$

где через y_i ($i = 1,\, 2,\, 3,\, 4$) обозначены цилиндрические функции:

$$y_1 = J_0(\lambda\, r), \qquad y_2 = I_0(\lambda\, r), \qquad y_3 = Y_0(\lambda\, r), \qquad y_4 = K_0(\lambda\, r).$$

Для определения констант C_1, C_2, C_3, C_4 используют краевые условия $U_i(y) = 0$, $i = 1,\, 2,\, 3,\, 4$.

Собственными значениями задачи являются корни характеристических определителей:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_i\, y_1 & L_i\, y_2 & L_i\, y_3 & L_i\, y_4 \\ L_j\, y_1 & L_j\, y_2 & L_j\, y_3 & L_j\, y_4 \\ L_k\, y_1 & L_k\, y_2 & L_k\, y_3 & L_k\, y_4 \\ L_l\, y_1 & L_l\, y_2 & L_l\, y_3 & L_l\, y_4 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где $i = 1, 4$, $j = 2, 3$, $k = 5, 8$ $j = 6, 7$.

Подстановка решений (4) в характеристические определители (5) при $\nu = \frac{1}{3}$, $a = 1$, $b = 2$ и решение уравнений $\Delta(\lambda) = 0$ приводит к следующему результату, который представлен в виде следующей таблицы:

No	Вид закрепления (внутренний край – внешний край)	Первая собственная частота λ_1	Вторая собственная частота λ_2
1	заделка – заделка	4,72	7,85
2	заделка – свободное опирание	3,87	7,04
3	заделка – свободный край	1,81	4,61
4	заделка – плавающая заделка	2,25	5,44
5	Свободное опирание – заделка	4,00	7,11
6	Свободное опирание – свободное опирание	3,16	6,30
7	Свободное опирание – свободный край	1,01	7,06
8	Свободное опирание – плавающая заделка	1,57	4,71
9	Свободный край – заделка	2,10	4,84
10	Свободный край – свободное опирание	1,12	4,05
11	Свободный край – свободный край	1,52	4,80
12	Свободный край – плавающая заделка	2,54	5,57
13	Плавающая заделка – заделка	2,53	5,58
14	Плавающая заделка – свободное опирание	1,70	4,77
15	Плавающая заделка – свободный край	2,41	5,52
16	Плавающая заделка – плавающая заделка	3,20	6,31

Литература

1. *Akhtyamov A.M., Mouftakhov A.V.* Identification of boundary conditions using natural frequencies, Inverse Probl. Sci. and Eng-ng.

2. *Ахтямов А. М.* Диагностирование закрепления кольцевой пластины по собственным частотам ее колебаний, Известия РАН. МТТ. 2003.No 6. С.137–147.

Задача с двумя свободными границами для диффузной модели лотки-вольтерра

[1]**Расулов М.С.,** [2]**Норов А.К.**

[1] *Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан.,*
e-mail: rasulovms@bk.ru

[2] *Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан.,*
e-mail: norov@mathinst.uz

В работе рассматриваем динамику конкурентной системы типа Лотки–Вольтерра с двумя свободными границами, введенными в [1,2], где две свободные границы используются для описания фронтов распространения двух конкурирующих видов, соответственно. Взаимодействие между двумя конкурирующими видами формулируется как следующая задача со свободной границей:

$$u_t - d_1 u_{xx} - m_1 u u_x = u\left(a_1 - b_1 u - c_1 v\right), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$v_t - d_2 v_{xx} - m_2 v v_x = v\left(a_2 - b_2 u - c_2 v\right), \quad (t,x) \in Q, \tag{2}$$

$$u\left(0,x\right) = u_0\left(x\right), \quad 0 \le x \le s_0, \tag{3}$$

$$v\left(0,x\right) = v_0\left(x\right), \quad 0 \le x \le h_0, \tag{4}$$

$$u_x\left(t,0\right) = 0, \quad v_x\left(t,0\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$u\left(t,s\left(t\right)\right) = 0, \quad v\left(t,h\left(t\right)\right) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$s'\left(t\right) = -\mu_1 u_x\left(t,s\left(t\right)\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

$$h'\left(t\right) = -\mu_2 v_x\left(t,h\left(t\right)\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$s\left(0\right) = s_0, \quad h\left(0\right) = h_0, \quad s_0 < h_0; \quad u(t,x) \equiv 0, \quad s(t) \le x \le h(t), \tag{9}$$

где $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\}$, $Q = \{(t,x) : 0 < t \le T, 0 < x < h(t)\}$; $u\left(t,x\right)$, $v\left(t,x\right)$ – плотности популяции в момент времени t в точке x; $s\left(t\right)$, $h\left(t\right)$– свободные границы, которые представляют фронты распространения, определяются вместе с функциями $u\left(t,x\right)$, $v\left(t,x\right)$; d_i – коэффициент диффузии, a_i – коэффициенты удельной скорости роста популяций, $i = 1,2$; c_1 и b_2 – коэффициенты межвидовой конкуренции, c_2 и b_1 – коэффициенты внутривидовой конкуренции, $u_0\left(x\right)$, $v_0\left(x\right)$ – начальные плотности популяции соответственно находятся в областях $[0,s_0]$ и $[0,h_0]$. А параметры μ_i соответственно представляют скорость распространения в новые области для $u(t,x)$ и $v(t,x)$.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

(i) d_i, m_i, a_i, b_i, c_i, μ_i– положительные постоянные, $i = 1,2$;

(ii) $u_0\left(x\right), v_0\left(x\right) \in C^2[0,s_0]$, $0 < u_0\left(x\right) \le \frac{a_1}{b_1}$ в $(0,s_0)$ $\quad 0 < v_0\left(x\right) \le \frac{a_2}{c_2}$ в $(0,h_0)$,
$u_0\left(0\right) = v_0\left(0\right) = 0$, $u_0\left(s_0\right) = v_0\left(h_0\right) = 0$, $u_0'\left(s_0\right) < 0$, $v_0'\left(h_0\right) < 0$,

(iii) $\frac{c_1}{c_2} < \frac{a_1}{2_2} < \frac{b_1}{b_2}$.

Задача (1)-(9) исследована в работе [1,2] при $m_i \equiv 0$, $i = 1, 2$.

Теорема 1. *Если функции $u\,(t, x)$, $v\,(t, x)$, $s\,(t)$, $h\,(t)$ являются решением задачи (1)-(9), то справедливы оценки*

$$0 < u\,(t, x) \le M_1 \equiv \frac{a_1}{b_1}, \qquad (t, x) \in \overline{D}, \tag{10}$$

$$0 < v\,(t, x) \le M_2 \equiv \frac{a_2}{c_2}, \qquad (t, x) \in \overline{Q}, \tag{11}$$

$$0 < s'(t) \le M_3 \equiv \mu_1 N_1, \quad 0 \le t \le T, \tag{12}$$

$$0 < h'(t) \le M_4 \equiv \mu_2 N_2, \quad 0 \le t \le T, \tag{13}$$

где $N_1 \ge \max\left\{\frac{a_1}{m_1}, \max\limits_x \left|\frac{u_0}{s_0 - x}\right|\right\}$, $N_2 \ge \max\left\{\frac{a_2}{m_2}, \max\limits_x \left|\frac{v_0}{h_0 - x}\right|\right\}$.

Литература

1. *Guo J.S., Wu C.H.* Dynamics for a two-species competition-diffusion model with two free boundaries, Nonlinearity. 2015.28.С.1–27.
2. *Wu C.H.* The minimal habitat size for spreading in a weak competition system with two free boundaries, J.Differential Equation.2015.259.С. 873–897.

Краевая задача для дифференциального уравнения псевдопараболо-псевдогиперболического типа

Рахмонов Ф.Д.

Национальный университет Узбекистана (НУУ), Узбекско-Израильский совместный факультет, Ташкент, Узбекистан

e-mail: farxod_frd@bk.ru

Рассмотрены вопросы разрешимости нелокальной краевой задачи для одного смешанного псевдопараболо- псевдогиперболического дифференциального уравнения со спектральным параметром. С помощью метода ряда Фурье получена нелинейная система из двух счетных систем обыкновенных интегральных уравнений Фредгольма второго рода для определения коэффициентов функций переопределения. При доказательстве однозначной разрешимости этой системы применен метод сжимающих отображений. Вычислены регулярные и иррегулярные значения спектрального параметра. Для регулярных значений спектрального параметра установлен критерий однозначной разрешимости поставленной обратной краевой задачи. Показаны сходимость полученных рядов Фурье и возможность почленного дифференцирования основных рядов Фурье. Для иррегулярных значений спектральных параметров установлен критерий существования бесконечного множества решений поставленной обратной краевой задачи. Результаты работы сформулированы в виде теорем.

Постановка задачи

В области $\Omega = \{(t,\, x) \,|\, -T < t < T\,,\ 0 < x < l\,\}$ рассматривается смешанное дифференциальное уравнение вида

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (-1)^k \frac{\partial^{2k+1}}{\partial t\, \partial x^{2k}} + \frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right] U(t,x) = a_1(t)\, b_1(x), & t > 0, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (-1)^k \frac{\partial^{2k+2}}{\partial t^2\, \partial x^{2k}} + \omega^2 \frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right] U(t,x) = a_2(t)\, b_2(x), & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где T и l данные положительные действительные числа, k - заданное положительное фиксированное целое число, ω - положительный параметр, $a_1(t) \in C\,[\,0\,;\,T\,]$, $a_2(t) \in C\,[-T\,;\,0\,]$, $b_i(x) \in !\ (\Omega_l)$, $i = 1\,,\,2$, $\Omega_l \equiv [0; l]$.

Отметим, что уравнение (1) относительно неизвестной функции $U\,(t, x)$ является смешанным дифференциальным уравнением.

Проблема. Найти в области Ω неизвестную функцию $U\,(t, x)$ из класса:

$$U\,(t, x) \in C\,(\bar{\Omega}) \cap C^1\,(\Omega) \cap C^{1\,,\,4k}\,(\Omega_+) \cap C^{2\,,\,4k}\,(\Omega_-) \cap$$

$$\cap C^{1+2k}_{t,x}(\Omega_+) \cap C^{2+2k}_{t,x}(\Omega_-),$$

удовлетворяющую смешанным уравнениям (1), следующим граничным условиям

$$\int_{-T}^{0} U\,(t,x)\,d\,t = \varphi\,(x)\,,\ \ 0 \le x \le l\,, \tag{2}$$

$$U\,(t,0) = U\,(t,l) = \frac{\partial^2}{\partial\,x^2} U\,(t,0) = \frac{\partial^2}{\partial\,x^2} U\,(t,l) =$$

$$= ... = \frac{\partial^{4\,k-2}}{\partial\,x^{4\,k-2}} U\,(t,0) = \frac{\partial^{4\,k-2}}{\partial\,x^{4\,k-2}} U\,(t,l) = 0, \tag{3}$$

где $\varphi\,(x)$ - заданная гладкая функция, $\Omega_- = \{(t,\,x)\,|\ -T < t < 0,\ 0 < x < l\,\}$, $\Omega_+ = \{(t,\,x)\,|\ 0 < t < T\,,\ 0 < x < l\,\}$, $\bar{\Omega} = \{(t,x)\,|\ -T \le t \le T\,,\ 0 \le x \le l\,\}$.
Для функции $\varphi\,(x)$ выполняются условия периодичности:

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \frac{\partial^2}{\partial\,x^2}\varphi(0) = \frac{\partial^2}{\partial\,x^2}\varphi(l) = ... = \frac{\partial^{4\,k-2}}{\partial\,x^{4\,k-2}}\varphi(0) = \frac{\partial^{4\,k-2}}{\partial\,x^{4\,k-2}}\varphi(l) = 0.$$

Нетривиальные решения дифференциального уравнения (1) в области Ω разыскиваются в виде ряда Фурье

$$U\,(t,\,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(t)\,\vartheta_n\,(x), \tag{4}$$

где

$$u_n\,(t) = \int_0^l U\,(t,\,x)\,\vartheta_n\,(x)\ d\,x, \tag{5}$$

$$\vartheta_n\,(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\ \sin\,\frac{\pi\,n}{l}\,x, n = 1\,,\,2\,,\ \ldots$$

Также предполагается что,

$$b_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{i,n}\,\vartheta_n(x), \tag{6}$$

где $b_{i,n} = \int_0^l b_i\,(x)\,\vartheta_n(x)\,d\,x,\ \ i = 1, 2.$

Однозначная разрешимость краевой задачи для квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений в случае конечной эредитарности с оператором дифференцирования по векторному полю

[1]Сартабанов Ж.А., [2]Айтенова Г.М.
[1] *Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан,*
e-mail: sartabanov42@mail.ru
[2] *Западно-Казахстанский университет имени М.Утемисова, Уральск, Казахстан,*
e-mail: gulsezim-88@mail.ru

Искомую вектор-функцию рассматриваемой задачи обозначим через $u(\tau,t) = (u_1(\tau,t),...,u_n(\tau,t))$ аргументов $\tau \in (\alpha,\beta) = I$, $t = (t_1,...,t_m) \in R\times...\times R = R^m$, $R = (-\infty,+\infty)$, $\alpha,\beta \in R$. Оператор D_c вида $D_c u(\tau,t) = \frac{\partial u(\tau,t)}{\partial \tau} + \sum\limits_{j=1}^{m} c_j \frac{\partial u(\tau,t)}{\partial t_j}$, с постоянными коэффициентами c_j, $j = \overline{1,m}$ представляет собой дифференцирование функции $u(\tau,t)$ по направлению векторного поля $\frac{dt}{d\tau} = c$, $c = (c_1,...,c_m)$. Функция $h(s,\tau,t) = t - c\tau + cs$ есть характеристический интеграл оператора D_c. Если вектор-функция $u(\tau,t)$ описывает линейный эредитарный процесс с конечным периодом $\varepsilon = const > 0$, то она в математическую модель процесса входит в виде интегрального члена $\int\limits_{\tau-\epsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,h(s,\tau,t))u(s,h(s,\tau,t))ds$ с ядром $K(\tau,t,s,\sigma)$.

Рассматриваем квазилинейную систему

$$D_c u(\tau,t) = A(\tau,t)u(\tau,t) + \int\limits_{\tau-\epsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,h(s,\tau,t))u(s,h(s,\tau,t))ds+$$

$$+f\left(\tau,t,u(\tau,t),\int\limits_{\tau-\epsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,h(s,\tau,t))u(s,h(s,\tau,t))ds\right) \qquad (1)$$

с граничным условием

$$B(h(\alpha,\tau,t))u(\alpha,h(\alpha,\tau,t)) + C(h(\beta,\tau,t))u(\beta,h(\beta,\tau,t)) = 0, \qquad (2)$$

где $A = A(\tau,t)$, $B = B(t)$, $C = C(t)$ и $K = K(\tau,t,s,\sigma)$ - непрерывные по $\tau \in \overline{I}$, ω-периодические непрерывно дифференцируемые по $t \in R^m$ и $\sigma \in R^m$ $n\times n$-матрицы, $f(\tau,t,u,v)$-заданная при $\tau,t,u,v \in \overline{I}\times R^m \times \overline{R}^n_\Delta \times \overline{R}^n_\Delta$, непрерывная по τ гладкая по (t,u,v) n-вектор-функция, $\overline{I}$ - замыкание I, $R^n_\Delta = \{u \in R^n : |u| < \Delta\}$, $\Delta = const > 0$, $\overline{R}^n_\Delta$ - замыкание R^n_Δ.

Установлены достаточные условия однозначной разрешимости краевой задачи (1)-(2) в пространстве S^ω_Δ непрерывно дифференцируемых по $(\tau,t) \in I\times R^m$ ω-периодических по t ограниченных по норме числом Δ функций.

Исследование тесно связано с публикациями авторов [1]-[3].

Литература

1. *Сартабанов Ж. А.* Псевдопериодические решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений, Укр. матем. журн., Т.41, 1989, С. 125–130.

2. *Sartabanov Zh. A., Aitenova G. M., Abdikalikova G. A.* Multiperiodic solutions of quasilinear systems of integro-differential equations with D_c-operator and ε-period of hereditarity, Eurasian Mathematical Journal, Vol.13, 2022, P. 86–100.

3. *Sartabanov Zh. A., Aitenova G. M.* Multiperiodic solutions of linear systems integro-differential equations with D_c-operator and ε-period of hereditarity, News of NAS RK. Series of physico-mathematical, Vol.6, 2019, P. 106–122.

Регуляризация решения задачи коши для обобщенной системы коши-римана в многомерной пространственной области

[1]Сатторов Э.Н., [2]Эрмаматова Ф. Э.

[1] *Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: Sattorov-e@rambler.ru

[2] *Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: fotimaermamatova817@gmail.com

В настоящей работе рассматривается задача восстановления решения система уравнений [1],[2]

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} + H_i\right) = 0,$$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} - \frac{\partial F_k}{\partial x_j} - H_k F_j + H_j F_k = 0, (i,k,j = 1,...,n), \qquad (1)$$

которая является n- мерным аналогом обобщенной системы Коши-Римана, по ее известным значениям на части границы этой области, т.е. задача Коши.

Пусть R^n- вещественное $n-$ мерное евклидово пространство,

$$x = (x_1,\ldots,x_n),\ \ y = (y_1,\ldots,y_n) \in R^n,\ \ x' = (x_1,\ldots,x_{n-1}),\ \ y' = (y_1,\ldots,y_{n-1}) \in R^{n-1},$$

$$s = \alpha^2 = |y' - x'| = (y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_{n-1} - x_{n-1}^2, \;\; r^2 = s + (y_n - x_n)^2 = |y - x|^2,$$

$\Omega-$ ограниченная односвязая область в R^n с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, состоящей из компактной связной части T плоскости $y_n = 0$ и гладкой поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_n > 0, \overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega, \partial\Omega = T \cup S,$

$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))-$ вектор-функция, которые имеют в этой области непрерывные производные первого порядка.

Постановка задачи (з а д а ч а К о ш и). Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности S :

$$F(y) = f(y), y \in S, \tag{2}$$

где $f(y) = (f_1(y), \cdots, f_n(y))-$ заданная на S непрерывная вектор-функция. Требуется восстановить функцию $F(x)$ в Ω, исходя из заданной f,

Предположим, что вектор-функции $F(y) \in A(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ на поверхности $\partial\Omega$ удовлетворяют неравенству

$$|F(y)| \leq K, y \in T, \tag{3}$$

где K - заданное положительное число.

Положим

$$F_{\sigma\delta}(x) = \int\limits_S M_\sigma(y, x; H) f_\delta(y) dS, x \in \Omega, \tag{4}$$

где $\sigma = \frac{1}{a^2} ln\frac{K}{\delta}, \quad \delta < K.$

Полученно следующий результат [3].

Теорема. *Пусть вектор-функция $F(y) \in A(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ условия (3). Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо неравенство*

$$|F(x) - F_{\sigma\delta}(x)| \leq \psi^1(\sigma; H) K^{1-\frac{x_n^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_n^2}{a^2}}, \tag{5}$$

где

$$\psi^1(\sigma; H) = \frac{3}{\pi}\left[2b\sqrt{\pi}(\frac{1}{\sqrt{3\sigma}}|H| + \sqrt{\sigma}) + 2 + a(1 + 3b)\sqrt{\pi\sigma}\right]. \tag{6}$$

Следствие 2.1. *Для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство*

$$\lim_{\sigma \to \infty} F^\sigma(x) = F(x), \tag{7}$$

причем предел достигается равномерно на компактах из Ω.

Литература

1. *Оболашвили Е.И.* Обобщенная система Коши-Римана в многомерном евклидовом пространстве, Сборник трудов конференции "Комплексный анализ"ГДР, Гале, (1976).

2. *Оболашвили Е.И.* Обобщенная система Коши-Римана в многомерном пространстве, Труды Тбилисского Математического Института, т.58. (1978), 168-173.

3. *Сатторов Э.Н., ЭрмаматоваФ.Э.* О восстановлении решений обобщенной системы Коши-Римана в многомерной пространственной областипо их значениям на куске границы этой области, Математические заметки , т.110.є3 (2021), 405-423.

Задача определения ядра двумерного интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа

[1]Сафаров Ж.Ш., [2]Хайдаров Б.Х.
[1] *Докторант, Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: j.safarov65@mail.ru
[2] *Магистрант, Бухарский государственный университет, Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: behzodhaydarov15@gmail.com

Известно,что, учет памяти среды при распространении в ней упругих, акустических и электромагнитных волн, дает более точное описание процессов, происходящих в этих средах. Поэтому нахождение неизвестных характеристик для сред с памятью, является актуальной задачей. При решении практических задач наиболее интересным является случай, когда характеристики среды зависят от двух и более переменных. Например, для геофизики одним из основных вопросов является количественная оценка горизонтальных неоднородностей в скоростях сейсмических волн.

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - \Delta u - \int\limits_0^t k(\tau)u(x,y,t-\tau)\,d\tau = f(x,y)u \tag{1}$$

в области $D = \{(x,y,t) : x \in R,\ \ 0 < y < l\ \ t > 0\}$, с начальными

$$u|_{t<0} = 0, \qquad x \in R,\ \ 0 \le y \le l, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u_y|_{y=0} = \delta'(t)\delta'(x), \qquad u_y|_{y=l} = 0, \qquad t > 0, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ и $f(x,t)-$ заданные функции. При заданных функциях $f(x,y)$ и $k(t)$ нахождение функции $u(x,t)$ из (1)–(3) назовем прямой задачей.

Обратная задача заключается, в определении неизвестного коэффициента $f(x,y)$ и ядро $k(t),\ \ t > 0$, интегрального члена входящих в уравнении (1), если относительно решения прямой задачи (1) –(3) имеется дополнительная информация

$$u(x,0,t) = g(x,t), \qquad x \in R, t > 0, \tag{4}$$

где $g(x,t)-$ заданная функция.

Одним из подходов к решению многомерных обратных задач также является метод сведение задачи к серии одномерных задач. Впервые в работе [1] исследовалась задача нахождения двумерного коэффициента волнового уравнения в предположении, что искомые коэффициенты от одной из переменных зависят слабо. В частности, в работе [2] рассмотрена одна модельная задача определения двумерного ядра интегро-дифференциального уравнения в среде со слабо горизонтальной неоднородностью, в которой развиты методы решения обратных задач из работ [3]-[5]. В работах [6],[7] изучена обратная задача по определению двух неизвестных функций для уравнения, описывающего процесс распространения волн в полупространстве, заполненном средой. Было показано, что обе искомые функции одной переменной однозначно определяются заданием образа Фурье по переменной x решения прямой задачи на границе полупространства.

Предполагаем, что $f(x,y)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$f(x,y) = f_0(y) + \varepsilon x f_1(y) + O(\varepsilon^2), \tag{5}$$

где $\varepsilon-$ малый параметр. В дальнейшем будем полагать в равенстве (5) $f_0(y) = f_0 > 0$ есть известная величина. Решение прямой задачи (1)–(3) будем искать в виде ряда по степеням ε :

$$u(x,y,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x,y,t) \tag{6}$$

Тогда, учитывая (4) и (6), имеем

$$g(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j g_j(x,t).$$

Нетрудно проверить, что u_j (следовательно и g_j) – нечетные по x при четных j и четные – при нечетных j. Тем самым, по известной функции $g(x,t)$ можно найти $g_0(x,t)$ и $g_1(x,t)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$:

$$g_0(x,t)=\frac{g(x,t)-g(-x,t)}{2},\quad g_1(x,t)=\frac{g(x,t)+g(-x,t)}{2}.$$

Подставляя (5), (6) в (1) – (4) и приравнивая коэффициенты при $\varepsilon^j, j=0,1$, получаем две обратные одномерные задачи последовательного определения $k(t)$ и $f_1(y)$. Для решения обратных задач достаточно задать образ Фурье от функций $g_0(x,t)$ и $g_1(x,t)$ по переменной x для фиксированного ненулевого значения параметра преобразования. В данной работе исследуется обратная задача по определению функции $k(t)$.

Рассмотрим прямую задачу определения $u_0(x,y,t)$ из следующей начально-краевой задачи:

$$u_{0tt}-\Delta u_0-\int\limits_0^t k(\tau)u_0(x,y,t-\tau)\,d\tau=f_0u_0,\quad (x,y,t)\in D,$$

$$u_0|_{t<0}=0,$$

$$u_{0y}|_{y=0}=\delta'(t)\delta'(x),\qquad u_{0y}|_{y=l}=0.$$

Применяя преобразования Фурье, получаем

$$\widetilde{u}_{0tt}-\Delta\widetilde{u}_0-\int\limits_0^t k(\tau)\widetilde{u}_0(x,y,t-\tau)\,d\tau=(f_0-\nu^2)\widetilde{u}_0,\quad 0<y,l,\ \ t>0, \tag{7}$$

$$\widetilde{u}_0|_{t<0}=0, \tag{8}$$

$$\widetilde{u}_{0y}|_{y=0}=-i\nu\delta'(t),\qquad \widetilde{u}_{0y}|_{y=l}=0, \tag{9}$$

где $\widetilde{u}_0(\nu,y,t)=F_x[u_0](\nu,y,t):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_0(x,y,t)e^{-i\nu x}dx.$

Обратная задача. *Найти $u_0(\nu,y,t)$ и $k(t)$, входящие в (2.4)–(2.5), если $u_0(\nu,y,t)$ для некоторого ненулевого значения параметра ν известно*

$$\widetilde{u}_0(\nu,0,t)=i\nu\delta(t)+\widetilde{g}_0(\nu,t)\theta(t),t\in R, \tag{10}$$

где $\widetilde{g}_0(\nu,t)=F_x[g_0](\nu,t)-$ заданная функция, $\theta(t)-$ функция Хевисайда.

Теорема 1. *Пусть $l>0$ фиксировано и выполнены следующие условия: $\widetilde{g}_0(\nu,0)=0$, $(\widetilde{g}_0)'_t(\nu,0)=-i\nu\frac{f_0-\nu^2}{2}$, $\widetilde{g}_0(\nu,t)\in C^2[0,2l]$ для некоторого ненулевого значения параметра ν. Тогда обратная задача (7)–(10) в области $G_l=(y,t):0\le y\le t\le 2l-y$ имеет единственное решение $k(t)\in C[0,2l]$.*

Литература

1. *Благовещенский А. С., Федоренко Д. А.* Обратная задача для уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде, Зап. науч. сем. ПОМИ, Т. 354, 2008, стр.81–99.

2. *Durdiev D. K., Rahmonov A. A.* A 2D kernel determination problem in a viscoelastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity, Mathematical Methods in the Applied Sciences,2020, vol. 43, pp. 8776–8796.
https://doi.org/10.1002/mma.6544

3. *Дурдиев Д. К., Бозоров З. Р.* Задача определения ядра интегро-дифференциального волного уравнения со слабо горизонтальной однородностью, Дальневост. матем. журн., Т.13, No 2, 2013, стр.209–221.

4. *Дурдиев Д. К.* Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегро- дифференциальном волновом уравнении, Сиб. журн. индустр. матем., Т.12, No 3, 2009, стр.28–40.

5. *Durdiev D.K., Safarov J.SH.* 2D kernel identification problem in viscoelasticity equation with a weakly horizontal homogeneity, Sib. Zh. Ind. Mat., 2022, vol.25, no.1, pp.14–38.
https://doi.org/10.33048/SIBJIM.2022.25.102

6. *Akhmatov, Z. A., Totieva, Zh. D.* Quasi-Two-Dimensional Coefficient Inverse Problem for the Wave Equation in a Weakly Horizontally Inhomogeneous Medium with Memory, Vladikavkaz Mathematical Journal, 2021, vol. 23, no.4, P.15-27. DOI 10.46698/l4464-6098-4749-m

7. *Durdiev D. K., Bozorov Z. R.* Quasi-two-dimensional inverse problem of determining the kernel of an integral term in the viscoelasticity equation, Scientific Bulletin of BUKHGU, 2020, vol.3, no.79, pp. 10–21.

Построение функций Бесселя многих переменных вырожденных гипергеометрических систем, полученных из систем Лауричелла

[1]Тасмамбетов Ж.Н., [2]Исенова А.А.

[1] *Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г.Актобе, ул.Бр.Жубановых, 263, Казахстан,*
e-mail: tasmam45@gmail.com

[2] *Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г.Актобе, ул.Бр.Жубановых, 263, Казахстан,*
e-mail: akkenje_ia@mail.ru

Функции Бесселя двух и более переменных остаются малоизученными. Особенно их связь с вырожденными гипергеометрическими системами дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые удовлетворяют функции Бесселя многих переменных до сих пор не установлены. В данной работе нами установлены две вырожденные системы и доказаны ряд теорем устанавливающие их связь.

Теорема 1. *Вырожденная система типа Горна*

$$x_1 Z_{x_1x_1} + (2\alpha - x_1)Z_{x_1} - x_2 Z_{x_2} - \lambda Z = 0,$$

$$x_2 Z_{x_2x_2} + (2\beta - x_2)Z_{x_2} - x_1 Z_{x_1} - \lambda Z = 0, \tag{1}$$

имеет четыре линейно-невисимые частные решения

$$Z_1(x_1, x_2) = \Psi_2(\alpha, 2\alpha, 2\beta; x_1, x_2), \tag{2}$$

$$Z_2(x_1, x_2) = x_1^{-\alpha}\Psi_2(\alpha - 2\alpha + 1; 2 - 2\alpha, 2\beta; x_1, x_2),$$

$$Z_3(x_1, x_2) = x_2^{-\beta}\Psi_2(\alpha - 2\beta + 1; 2\alpha, 2 - 2\beta; x_1, x_2),$$

$$Z_4(x_1, x_2) = x_1^{-\alpha}x_2^{-\beta}\Psi_2(\alpha - 2\alpha - 2\beta + 2; 2\alpha - 2, 2\beta - 2; x_1, x_2),$$

где предельный переход в функции (2) определяет вырожденную функцию приводящаяся к функцию Бесселя двух переменных

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Psi_2(\lambda; 2\alpha, 2\beta; \frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}) = I(2\alpha, 2\beta; x, y) =$$

$$= (\frac{x}{2})^{2\alpha} \cdot (\frac{y}{2})^{2\beta} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}(\frac{x}{2})^{2m} \cdot (\frac{y}{2})^{2n}}{m!n! \cdot \Gamma(2\alpha+m+1) \cdot \Gamma(2\beta+n+1)}.$$

Оставщиеся решения $Z_t(x_1, x_2), t = \overline{2,4}$ также выражаются через функцию Гумберта (2). Теорему 1 можно обобщить на случай системы типа Горна состоящей из n уравнений.

Теорема 2. *Вырожденная система типа Горна*

$$x_j W_{x_j x_j} + (2\alpha_j - x_j) W_{x_j} - \sum_{k \neq j} W_{x_k} - \lambda W = 0, j = \overline{1,n}, \tag{3}$$

имеет 2^n линейно-неависимых частных решений, первое частное решение котрое выражается через функцию Гумберта от n переменных.

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Psi_2^{(n)}(\lambda, 2\alpha_1, ..., 2\alpha_n; x_1, ..., x_n) = I(2\alpha_1, 2\alpha_2, ..., 2\alpha_n; x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$= (\frac{x_1}{2})^{2\alpha_1} ... (\frac{x_n}{2})^{2\alpha_n} \sum_{m_1,...,m_n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_1+...+m_n}(\frac{x_1}{2})^{2m_1} \cdot (\frac{x_n}{2})^{2m_n}}{m_1!...m_n!\Gamma(2\alpha_1+m_1+1)...\Gamma(2\alpha_n+m_n+1)}. \tag{4}$$

Вышеприведенная система типа Горна получается из системы Лауричелла F_A с помощью предельного перехода [1].

Другим важным примером является вырожденная гипергеометрическая система

$$z_i(1-z_i)W_{z_i z_i} + \sum_{j=1, j\neq i} z_j W_{z_j z_i} + [\gamma - (\alpha_i + \beta_i + 1) z_i] W_{z_i} - \alpha_i \beta_i W = 0, i = \overline{1,k}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j W_{z_j z_i} + [\gamma - z_i] W_{z_i} - \alpha_i - kW = 0, i = \overline{k+1, k+l}, \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j W_{z_j z_i} + \gamma W_{z_i} - W = 0, i = \overline{k+l+1, n}, \tag{7}$$

полученная из обобщенной системы Лауричелла F_B, с помощью предельного перехода. Каждый из трех уравнений общей системы (5) являются в свою очередь также системами. Например, система (6) состоит из l уравнений и получена путем конфлюэнтного предельного перехода по β_i в i-ом уравнении системы Лауричелла

$$z_i(1-z_i)W_{z_i z_i} + \sum_{j=1, j\neq i} z_j W_{z_j z_i} + [\gamma - (\alpha_i + \beta_i + 1) z_i] W_{z_i} - \alpha_i \beta_i W = 0, i = \overline{1,n}.$$

Конфлюэнтный переход в уравнении (6) по параметру α_{i-k} приводит к уравнению (7).

Для раскрытия отдельных свойств эти уравнения можно рассматривать отдельно или вместе с каждыми двумя другими уравнениями. Так, отдельно изучив построения решения (7), получим решения в виде функций Бесселя (4). Совместное изучение (6) и (7) приводит нас к нормально-регулярному решению. А общее частное решение системы (5) представляется в виде функции В.И.Художникова $\Phi_{B,n}^{k,l}(0 \leq k, l \leq n, n-1 \leq k+n \leq n), n$ - число переменных [2].

Литература

1. *Appell P., Kampe de Feriet M.J.* Fonctions hypergeometriques et hypesperiques, Gauthier Villars, Paris, 1926.
2. *Khudozhnikov V.Y.* Two new degenerated hypergeometric functions of many variables and integral equations with them, Differential equations, 2003, vol. 39, є6, p.835-843.

Решение вырожденных систем в виде гипергеометрических функций многих переменных

[1]Тасмамбетов Ж.Н., [2]Убаева Ж.К.

[1] *Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан,*
e-mail: tasmam@rambler.ru

[2] *Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан,*
e-mail: zhanar_ubaeva@mail.ru

Постановка задачи. Исследовать возможности построения решение вырожденной системы

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{\partial^2 W}{\partial Z_j \partial Z_i} + (\gamma - Z_i)\frac{\partial W}{\partial Z_i} - \alpha_i W = 0, i = \overline{1, l} \tag{1_1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{\partial^2 W}{\partial Z_j \partial Z_i} + \gamma\frac{\partial W}{\partial Z_i} - W = 0, i = \overline{l+1, n} \tag{1_2}$$

в виде вырожденных гипергеометрических функций многих переменных, в частности нормально-регулярных решений полученных из системы (1) с помощью преобразования

$$W(Z_1, Z_2, ..., Z_n) = exp(\alpha_{1,0,...,0}Z_1 + ... + \alpha_{0,...,0,1}Z_n U(Z_1, ..., Z_n) \tag{2}$$

где $\alpha_{1,0,...,0}, ..., \alpha_{0,...,0,1}-$ неизвестные постоянные.

Для построения нормальных и нормально-регулярных решений применяется метод Фробениуса-Латышевой [1]. Каждое уравнение системы (1) в свою очередь также являются системами состоящих из l и $n-l$ уравнений. В работе рассмотрены построения решений ряда частных случаев вырожденных систем (1) и доказаны ряда теорем относительно существования решений и связи между регулярным и нормально-регулярными решениями. Так, при $j = 1, 2$ и $i = 1, 2$ из (1) получим известную систему Горна Φ_3. Справедливы утверждения.

Теорема 1. *Система Горна*

$$Z_1 W_{Z_1Z_1} + Z_2 W_{Z_1Z_2} + (\gamma - Z_1)W_{Z_1} - \alpha_i W = 0,$$
$$Z_2 W_{Z_2Z_2} + Z_1 W_{Z_1Z_2} + \gamma W_{Z_2} - W = 0 \tag{3}$$

имеет три линейно-независимых частных решений одним из которых является функция Гумберта

$$\Phi_3(\alpha_1; \gamma; Z_1, Z_2) = \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} \frac{(\alpha_1, m_1)}{(\gamma, m_1 + m_2)} \frac{Z_1^{m_1}}{m_1!} \frac{Z_2^{m_2}}{m_2!}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Система Горна (2) имеет только одно нормально-регулярное решение*

$$W_1(Z_1, Z_2) = exp(-Z_1)U_1(Z_1, Z_2), \tag{5}$$

и между регулярным решением вблизи особенности $(0,0)-$ *а также нормально-регулярным решением (5) имеет место соотношение*

$$\Phi_3(\alpha_1; \gamma; Z_1, Z_2) = exp(-Z_1)U_1(Z_1, Z_2), \tag{6}$$

где $U_1(Z_1, Z_2)$ *гипергеометрический ряд двух переменных*

$$U_1(Z_1, Z_2) = 1 - \frac{\gamma - \alpha_1}{\gamma} Z_1 + \frac{1}{\gamma} Z_2 - \frac{\gamma + 1 - \alpha_1}{\gamma(\gamma+1)} Z_1 Z_2 + \frac{(\gamma - \alpha_1)(\gamma + 1 - \alpha_1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{Z_1^2}{2!} + ...$$

При $j = 1, 2, 3$ и $i = 1, 2, 3$ справедливо утверждено.

Теорема 3. *Вырожденная гипергеометрическая система Горна*

$$\sum_{j=1}^{3} Z_j \frac{\partial^2 W}{\partial Z_j \partial Z_i} + (\gamma - Z_i)\frac{\partial W}{\partial Z_i} - \alpha_i W = 0, i = 1, 2$$

$$\sum_{j=1}^{3} Z_j \frac{\partial^2 W}{\partial Z_j \partial Z_i} + \gamma \frac{\partial W}{\partial Z_i} - W = 0, i = 3 \tag{7}$$

имеет 2^3 *линейно-независимых частных решений, одним из которых является функция Гумберта-Художникова*

$$\Phi_{B,3}^{0,2}\begin{pmatrix}(\alpha_2) \\ \gamma\end{pmatrix}|(Z_3)\Bigg) = \sum_{i_1,i_2,i_3=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{i_1}(\alpha_2)_{i_2}}{(\gamma)_{i_1+i_2+i_3}} \frac{Z_1^{i_1}}{i_1!} \frac{Z_2^{i_2}}{i_2!} \frac{Z_3^{i_3}}{i_3!}$$

и между регулярным решением Гумберта-Художникова, а также нормально-регулярными решениями

$$W(Z_1, Z_2, Z_3) = exp(-Z_k)U_k(Z_1, Z_2, Z_3) \tag{8}$$

имеют место соотношени

$$\Phi_{B,3}^{0,2}\begin{pmatrix}(\alpha_2) \\ \gamma\end{pmatrix}|(Z_3)\Bigg) = exp(-Z_k)U_k(Z_1, Z_2, Z_3),$$

где $U_k(Z_1, Z_2, Z_3)(k = 1, 2)$ *гипергеометрические ряды трёх переменных*

$$U_1(Z_1, Z_2, Z_3) = 1 - \frac{\gamma - \alpha_1}{\gamma} Z_1 + \frac{\alpha_2}{\gamma} Z_2 + \frac{1}{\gamma} Z_3 - \frac{(\gamma + 1 - \alpha_1)\alpha_2}{\gamma(\gamma + 1)} Z_1 Z_2$$

$$+\frac{\alpha_2}{\gamma(\gamma+1)} Z_2 Z_3 - \frac{\gamma + 1 - \alpha_1}{\gamma(\gamma + 1)} Z_1 Z_3 -$$

$$-\frac{\alpha_2(\gamma + 2 - \alpha_1)}{\gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)} Z_1 Z_2 Z_3 + \frac{(\gamma - \alpha_1)(\gamma + 1 - \alpha_1)}{\gamma(\gamma + 1)} \frac{Z_1^2}{2!} + ...$$

$$U_2(Z_1, Z_2, Z_3) = 1 + \frac{\alpha_1}{\gamma} Z_1 + \frac{\gamma - \alpha_2}{\gamma} Z_2$$

$$+\frac{1}{\gamma} Z_3 - \frac{\alpha_1}{\gamma(\gamma + 1)} Z_1 Z_3 - \frac{\alpha_1(\gamma + 1 - \alpha_2)}{\gamma(\gamma + 1)} Z_1 Z_2 - \frac{\gamma + 1 - \alpha_2}{\gamma(\gamma + 1)} Z_2 Z_3 -$$

$$-\frac{\alpha_1(\alpha_1 + 1)}{\gamma(\gamma + 1)} \frac{Z_1^2}{2!} + \frac{(\gamma - \alpha_2)(\gamma + 1 - \alpha_2)}{\gamma(\gamma + 1)} \frac{Z_2^2}{2!} + \frac{1 \cdot 2}{\gamma(\gamma + 1)} \frac{Z_3^2}{2!} + ...$$

Эти результаты можно обобщить на случай и переменных.

Литература

1. *Тасмамбетов Ж.Н.* Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, Актобе: ИП Жандилдаева С.Т. 2015. 464 с.

О разрешимости некоторых краевых задач для нелокального полигармонического уравнения

Турметов Б.Х.

Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави,Туркестан,Казахстан,

e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар в $R^n, n \geq 2$, а $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ - единичная сфера. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n, n \geq 2$. Рассмотрим отображения вида $S_j x = (x_1, ..., x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, ..., x_n)$, $1 \leq j \leq n$. Очевидно, что $S_j^2 = E$. Если рассмотрим всевозможные произведения этих отображений, то их общее количество с учетом тождественного отображения $S_0 x = x$ равняется 2^n.

Обобщая отображения вида S_j в дальнейшем будем считать, что задано $S_1, \ldots, S_n$ - набор действительных симметричных коммутативных матриц $S_i S_j = S_j S_i$ таких что $S_i^2 = E$. Отметим, что поскольку $|x|^2 = ({S_i}^2 x, x) = (S_i x, S_i x) = |S_i x|^2$, то $x \in \Omega \Rightarrow S_i x \in \Omega$ и $x \in \partial\Omega \Rightarrow S_i x \in \partial\Omega$.

Пусть $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{2^n-1}$ - некоторый набор действительных чисел. Если ввести запись индекса суммирования i в двоичной системе счисления $(i_n \ldots i_1)_2 \equiv i$, где $i_k = 0, 1$ при $k = 1, \ldots, n$, то будем записывать эти коэффициенты также в виде $a_{(0\ldots00)_2}, a_{(0\ldots01)_2}, a_{(0\ldots10)_2}, a_{(0\ldots11)_2}, \ldots, a_{(1\ldots11)_2}$. Тогда можно рассматривать отображения вида $x \to S_n^{i_n} \ldots S_1^{i_1} x$.

Пример. *В случае $n = 3$ имеем*

$$S_0 x = x; S_1 x = (-x_1, x_2, x_3)\,; S_2 x = (x_1, -x_2, x_3)\,; S_3 x = (x_1, x_2, -x_3)\,;$$

$$S_4 x = S_1 S_2 x \equiv (-x_1, -x_2, x_3)\,; S_5 x = S_1 S_3 x \equiv (-x_1, -x_2, x_3)\,; S_6 x = S_2 S_3 x \equiv (x_1, -x_2, -x_3)\,;$$
$$S_7 x = S_1 S_2 S_2 x \equiv (-x_1, -x_2, -x_3)\,.$$

В двоичной системе счисления эти отображения можно записать в виде

$$0 = (000)_2, 1 = (001)_2, 2 = (010)_2, 3 = (011)_2, 4 = (100)_2, 5 = (101)_2, 6 = (110)_2, 7 = (111)_2$$

и

$$S_0 x \equiv S_3^0 S_2^0 S_3^0 x; S_1 x = S_3^0 S_2^0 S_1^1 x; S_2 x = S_3^0 S_2^1 S_1^0 x; S_3 x = S_3^0 S_2^1 S_1^1 x; S_4 x = S_3^1 S_2^0 S_1^0 x;$$
$$S_5 x = S_3^1 S_2^0 S_1^1 x; S_6 x = S_3^1 S_2^1 S_1^0 x; S_7 x = S_3^1 S_2^1 S_1^1 x.$$

Используя этот запись введем оператор

$$L_n u \equiv \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i (-\Delta)^m u(S_n^{i_n} \ldots S_1^{i_1} x),$$

где $m \in N, \Delta-$ оператор Лапласа.

Краевые задачи Дирихле и Неймана для нелокального аналога уравнения Пуассона ($m = 1$) исследованы в работе [1], а спектральные вопросы изучены в работе [2]. Настоящая работа является продолжением этих исследований, и мы будем изучать вопросы разрешимости краевых задач с условием Дирихле и Неймана в общем случае.

Пусть ν вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. В работе исследуются следующие краевые задачи.

Задача D. *Найти функцию $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{m-1}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям*

$$L_n u(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^j u(x)}{\partial \nu^j}\right|_{\partial\Omega} = g_j(x), j = 0, 1, ..., m-1.$$

Задача N. *Найти функцию $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{m}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) и граничным условиям*

$$\left.\frac{\partial^j u(x)}{\partial \nu^j}\right|_{\partial\Omega} = g_j(x), j = 1, 2, ..., m.$$

Пусть $k = (k_n, ..., k_1)_2, k_i = 0, 1$. Обозначим

$$\mu_n^k \equiv \mu_n^{(k_n,...,k_1)_2} = \sum_{i=0}^{2^n-1} (-1)^{k_n i_n + ... + k_1 i_1} a_{(i_n \ldots i_1)_2}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\mu_n^k \neq 0, k = 0,1,...,2^n-1, 0 < \lambda < 1, f(x) \in C^{\lambda}\left(\bar{\Omega}\right), g_j(x) \in C^{m-1-j+\lambda}(\partial\Omega), j = 0,1,...,m-1$. *Тогда решение задачи D существует, единственно и принадлежит классу* $C^{2m+\lambda}\left(\bar{\Omega}\right)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mu_n^k \neq 0, k = 0,1,...,2^n-1, 0 < \lambda < 1, f(x) \in C^{\lambda}\left(\bar{\Omega}\right), g_j(x) \in C^{m-j+\lambda}(\partial\Omega), j = 1,2,...,m$. *Тогда для разрешимости задачи N необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\frac{1}{(2m-1)!!}\int\limits_{\Omega}\left(1-|x|^2\right)^{m-1}f(x)dx = \left(\sum_{k=0}^{2^n-1}a_k\right)\int\limits_{\partial\Omega}(-1)^j\begin{pmatrix}2m-j-1\\ j-1\end{pmatrix}(2m-2j-1)!!g_j(x)dS_x.$$

Если решение задачи N существует,то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и принадлежит классу $C^{2m+\lambda}\left(\bar{\Omega}\right)$.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования Комитета науки МОН РК в рамках научного проекта N AP08855810.

Литература

1. *Турметов Б.Х., Карачик В.В.* О разрешимости краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона с множественной инволюцией, Вестник Удмуртского университета.Математика. Механика.Компьютерные науки, no 4 , 2021, 651–667.

2. *Турметов Б.Х., Карачик В.В.* On eigenfunctions and eigenvalues of a nonlocal Laplace operator with multiple involution, Symmetry, no 10 , 2021, 1–20.

Об одном методе решения линейных интегральных уравнений дробного порядка

[1]Турметов Б.Х., [2]Байметова З.Н.

[1] *Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави,Туркестан,Казахстан,*
e-mail: batirkhan.turmetov@ayu.edu.kz

[2] *Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави,Туркестан,Казахстан,*
e-mail: zilola.baymetova@bk.ru

В данной статье рассматриваются методы построения решения интегральных уравнении типа Вольтерра. В работе построены явные решения однородного и неоднородного уравнений. Отметим, что рассматриваемый метод основан на построении нормированных систем функций относительно интегрального оператора дробного порядка.

Пусть $0 < \alpha, \beta$. В работе [1] рассмотрен следующий интегральный оператор

$$J_a^{\alpha,\beta}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x\left(\frac{(x-a)^{\beta}-(t-a)^{\beta}}{\beta}\right)^{\alpha-1}f(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\beta}}.$$

В случае $\beta = 1$ оператор $J_a^{\alpha,\beta}$ совпадает с оператором интегрирования порядка α в смысле Римана-Лиувилля.

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. *Пусть* $\alpha, \beta > 0, m = 1,2,...$. *Необходимо найти в области* $x > a$ *решение следующего интегрального уравнения*

$$y(x) = \frac{\lambda(x-a)^{\alpha\beta(m-1)}}{\Gamma(\beta)}\int\limits_a^x\left(\frac{(x-a)^{\alpha}-(t-a)^{\alpha}}{\alpha}\right)^{\beta-1}y(t)\frac{dt}{(t-a)^{1-\alpha}} + f(x) \qquad (1).$$

Задача 2. *Пусть* $0 < \beta, \alpha_j$ *и* $\lambda_j, \in R, j = 1, 2, ..., m$. *Необходимо найти в области* $x > a$ *решение следующего интегрального уравнения*

$$y(x) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j J_a^{\alpha_j,\beta} y(x) = f(x), x > a. \tag{2}$$

Относительно задачи 1 справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha, \beta > 0, m > 0, f(x) \in C[a, b]$. *Тогда функция*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda (x-a)^{\alpha\beta(m-1)} \cdot J_a^{\alpha,\beta} \right)^k f(x)$$

является решением уравнения (1) из класса $C[a, b]$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha, \beta > 0, m > 0$ *и* $f(x) = f_0(x-a)^{\alpha\mu}, \mu > -1,$ f_0 *- действительное число. Тогда решением уравнение (1) является функция*

$$y(x) = f_0 \cdot (x-a)^{\beta\mu} E_{\alpha,m,\mu/\alpha} \left(\lambda \beta^{-\alpha} (x-a)^{\alpha\beta m} \right),$$

где $E_{\beta,m,l}(z)$ *функция Килбаса-Сайго [2], которая определяется равенством*

$$E_{\beta,m,l}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i, c_0 = 1, c_i = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\Gamma[\beta(km+l)+1]}{\Gamma[\beta(km+l+1)+1]}, i \geq 1.$$

Следствие 1. *Пусть* $\alpha, \beta > 0, m > 0$ *и* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{l} f_k (x-a)^{\beta\mu_k}, \mu_k > -1,$ $f_k \in R$. *Тогда решение уравнение (1) представляется в виде*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{l} f_k (x-a)^{\beta\mu_k} \cdot E_{\alpha,m,\mu_k/\alpha} \left(\lambda \beta^{-\alpha} (x-a)^{\alpha\beta m} \right). \tag{3}$$

Замечание 1.*В случае* $\beta = 1, a = 0$ *представление (3) получено в работе [2] .*

Следствие 2. *Пусть* $\alpha, \beta > 0, m = 1$ *и* $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{l} f_k (x-a)^{\beta k},$ f_k *- действительное число. Тогда решение уравнение (1) представляется в виде*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{l} k! f_k (x-a)^{\alpha k} \cdot E_{\beta,k+1} \left(\lambda \alpha^{-\beta} (x-a)^{\alpha\beta} \right),$$

где $E_{\beta,\gamma}(z)$ *- функция типа Миттаг-Леффлера.*

Основным результатом относительно задачи 2 является следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_j, \beta > 0, f \in C[a, b]$. *Тогда функция*

$$y(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \int\limits_a^x \left(\frac{(x-a)^\beta - (t-a)^\beta}{\beta} \right)^{\alpha_j - 1} P_j(x, t, a, \alpha_j, \beta, \lambda_j) f(t) \frac{dt}{(t-a)^{1-\beta}}, \tag{4}$$

где

$$P_j(x, t, a, \alpha_j, \beta, \lambda_j) = E_{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), \alpha_j}$$

$$\left(\lambda_1\left(\frac{(x-a)^\beta-(t-a)^\beta}{\beta}\right)^{\alpha_1},...,\lambda_m\left(\frac{(x-a)^\beta-(t-a)^\beta}{\beta}\right)^{\alpha_m}\right),$$

$$E_{(b_1,...,b_m),\gamma}\left(z_1,z_2,...,z_n\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j_1+...+j_m=i}\frac{i!}{j_1!\cdot...\cdot j_m!}\frac{z_1^{j_1}\cdot...\cdot z_m^{j_m}}{\Gamma\left(j_1b_1+...+j_mb_m+\gamma\right)}$$

является решением уравнения (2) из класса $C[a,b]$.

Замечание 2.*В случае* $\beta=1, a=0$ *представление (4) получено в работе [3] .*

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования Комитета науки МОН РК в рамках научного проекта N AP09259137.

Литература

1. *Jarad F., Ugurlu E., Abdeljawad T., Baleanu D.* On a new class of fractional operators, Advances in Difference Equations, 247,2017, 1–16.
2. *Kilbas A.A., Saigo M.* On solution of integral equation of Abel-Volterra type, Differential and Integral Equations, 8,1995,993–1011.
3. *Gorenflo R., Luchko Y.* Operationl method for solving generalized abel integral equation of second kind, Integral Transforms and Special Functions, 5,1997,47–58.

Задача коши для бигармонического уравнения

[1]**Турсунов Ф.Р.**, [2]**Шодиев Д.С.**, [3]**Хайруллаев.М.**

[1,2,3] *Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан,*

e-mail: farhod.tursunov.76@mail.ru1, dilshod.shodiev.76@mail.ru2

Пусть $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3$ и G- ограниченная односвязная область в R^3 с границей ∂G, состоящей из компактной части T плоскости $y_3=0$ и гладкого куска поверхности S - Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3>0$. $\bar G=G\cup\partial G$, $\partial G=S\cup T$.

В области G рассмотрим уравнение

$$\Delta^2U(y)=0,\ \ y\in G, \tag{1}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}$ оператор Лапласа.

Постановка задачи. Требуется найти бигармоническую функцию $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^4(G)\cap C^3(\bar G)$, у которого известны значения на части S границы ∂G, т.е.:

$$\begin{gathered}U(y_1,y_2,y_3)|_S=f_1(y),\ \ \Delta U(y_1,y_2,y_3)|_S=f_3(y),\\ \left.\frac{\partial U(y_1,y_2,y_3)}{\partial n}\right|_S=f_2(y),\quad \left.\frac{\partial(\Delta U(y_1,y_2,y_3))}{\partial n}\right|_S=f_4(y),\end{gathered} \tag{2}$$

здесь $f_j(y)\in C^{4-j}(S), j=1,2,3,4$ - заданные функции, а $\frac{\partial}{\partial n}$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G.

Отметим, что при решении прикладных задач следует найти приближенные значения решения $U(x)$ и его производный $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i},\ x\in G,\ i=1,2,3$ [3],[4]. В данной работе предлагается алгоритм построения приближенного решения, и производные приближенных решений т.е. $U(x,\sigma,f_{k\delta})=U_{\sigma\delta}(x)$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_{k\delta})}{\partial x_i}=\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$, $k=1,2,3,4;\ i=1,2,3$ зависящих от параметра σ и доказывается, что при специальном выборе параметра $\sigma=\sigma(\delta)$ семейство $U_{\sigma\delta}(x)$и $\frac{\partial U_{\sigma\delta}(x)}{\partial x_i}$ при $\delta\to 0$ сходится в каждой точке $x\in G$ к решению $U(x)$ и его производную $\frac{\partial U(x)}{\partial x_i}$ соответственно. Семейство функций $U(x,\sigma,f_{k\delta})$ и $\frac{\partial U(x,\sigma,f_{k\delta})}{\partial x_i}$, $i=1,2,3$ с указанными свойствами называется регуляризованным решением по М.М. Лаврентьеву [1].

Для построения приближенного решения воспользуем функцией Карлемана предложенной Ш. Ярмухамедовым [2]:

$$-2\pi^2 e^{\sigma x_3^2}\Phi_\sigma(x,y) = \int_0^\infty Im\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_3}\right]\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}. \tag{3}$$

В работе [2] доказано, что функция $\Phi_\sigma(x,y)$ определенная равенствами (3) при $\sigma>0$, представима в виде

$$\Phi_\sigma(x,y) = F(r) + G_\sigma(x,y), \tag{4}$$

где $F(r)=\frac{1}{4\pi r}$, $G_\sigma(x,y)$- гармоническая функция по y в R^3 включая $y=x$. Отсюда следует, что функция $\Phi_\sigma(x,y)$ для любого $\sigma>0$ по y является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Фундаментальное решение $\Phi_\sigma(x,y)$ с указанным свойством называется функцией Карлемана для полупространства [1].

Для функции $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^4(G)\cap C^3(\bar{G})$ и любого $x\in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина [5]:

$$\begin{gathered} U(x) = \int_{\partial G}\left[U(y)\frac{\partial\left(\Delta L(x,y)\right)}{\partial n} - \Delta L(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y + \\ + \int_{\partial G}\left[\Delta U(y)\frac{\partial L(x,y)}{\partial n} - L(x,y)\frac{\partial\left(\Delta U(y)\right)}{\partial n}\right]dS_y,\ x\in G, \end{gathered} \tag{5}$$

где $L(x,y)$ является фундаментальным решением уравнение (1).

Так как $\Phi_\sigma(x,y)$ представлена в виде (4), тогда в интегральное представление (5) $L(x,y)$ заменяя на функцию $L_\sigma(x,y)=r^2\Phi_\sigma(x,y)$, имеем:

$$\begin{gathered} U(x) = \int_{\partial G}\left[U(y)\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n} - \Delta L_\sigma(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y + \\ + \int_{\partial G}\left[\Delta U(y)\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n} - L_\sigma(x,y)\frac{\partial\left(\Delta U(y)\right)}{\partial n}\right]dS_y,\ \ x\in G. \end{gathered} \tag{6}$$

Основной результат настоящей работе является полученые оценки отклонения производных первого порядка приближенного решения от производных точного решения.

Литература

1. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. //Изд. СО АН СССР, Новосибирск,1962.
2. *Ярмухамедов Ш.* Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши.// Математические заметки, 83:5, (2008), 763-778.
3. *А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов.* О задаче Коши для уравнения Лапласа. // Уфимский матем. журнал, 11:4, (2019),92-106.
4. *А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов.* Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа. // Известия высших учебных заведений. Математика, N 2,(2021), 56-73.
5. *И.Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений.// ОГИЗ Государственное издательство техника -теоретической литературы. Москва. 1948.
6. *Dilshod S. Shodiev.* On the Cauchy problem for the biharmonic equation // J.Sib, Fed. Univ. Math. Phys., 2022, Volume 15, ISSUE 2, 201-215.

Об одной краевой задаче для параболо-гиперболического уравнения второго рода с двумя линиями изменения типа

Узоков Ж. Х.

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, г. Ташкент,
e-mail: jahongir.uzoqov@bk.ru

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} x\,u_{xx} + \alpha_0 u_x - u_y, & x > 0, \quad y > 0, \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy}, & x > 0, \quad y < 0, \\ u_{yy} - (-x)^n u_{xx}, & x < 0, \quad y > 0, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$0 < \alpha_0 < 1 + 2\beta < 1, 2\beta = \frac{m}{m-2}, \quad 2\alpha = \frac{n}{n-2}, 0 < m < 1, \quad 0 < n < 1. \tag{2}$$

Пусть $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup J_1 \cup J_2$, где Ω_0−область, ограниченная отрезками AB, BC, CD, DA прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$, $x=0$ соответственно; Ω_1 −характеристический треугольник, ограниченный характеристиками $AB:\ y=0$, $AN:\ x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 0$, $BN:\ x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}} = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, пересекающимися в точке $N\left(0,5\,;\ -\left(\frac{2-m}{4}\right)^{2/(2-m)}\right)$; Ω_2 −характер-истический треугольник, ограниченный характеристиками $AD:\ x=0$, $AM:\ y - \frac{2}{2-n}(-x)^{\frac{2-n}{2}} = 0$, $DM:\ y + \frac{2}{2-n}(-x)^{\frac{2-n}{2}} = 1$ уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $D(0,1)$, пересекающимися в точке $M\left(-\left(\frac{2-n}{4}\right)^{2/(2-n)}\ ;\ 0,5\right)$, $J_1 = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ y = 0\}$,
$J_2 = \{(x,y) :\ x = 0,\ 0 < y < 1\}$.

Задача AT. Найти в области D функцию $u(x,y)$, обладающую свойствами: 1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$; 2) $u(x,y) \in C^{2,1}_{x,y}(\Omega_0)$ и является регулярным решением уравнения (1) в области Ω_0; 3) $u(x,y)$ - обобщенным решением уравнения (1) из класса R_2 [1] в областях D_1 и D_2; 4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)|_{BB_0} = \varphi_1(y),\ \ 0 \le y \le 1, \quad u(x,y)|_{AM} = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le \frac{1}{2},$$

$$u|_{AN} = \psi_1(x), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\psi_1(x)$ −заданные функции, причем $\varphi_2(0) = \psi_1(0)$,

$$\varphi_1(y) \in C[0,1] \cap C^1(0,1), \qquad (3)\ \ \varphi_2(y) \in C^2\left[0;\tfrac{1}{2}\right], \quad \psi_1(x) \in C^2\left[0;\tfrac{1}{2}\right]. (4)$$

Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполнены условия (2)-(4), то в области Ω существует единственное решение задачи AT.*

Используя, принципа экстремума для параболических и гиперболических уравнений[2] доказывается единственности решения задачи AT, а существование решения задачи AT- методом интегральных уравне-ний[3].

Литература

1. *Кароль И.Л.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. Докл. АН СССР. 1953. **88**(2). С. 197-200.

2. *Салахитдинов М.С., Исламов Н. Б.* Нелокальная краевая задача с условием Бицадзе-Самарского для уравнения параболо-гиперболического типа второго рода. Известия вузов. Математика. Россия. 2015. 6. С. 43–52.

3. *Исламов Н. Б.* ОАналог задачи Бицадзе–Самарского для одного класса уравнений параболо-гиперболического типа второго рода. Уфимск. матем. журн., 2015. **7(1).** С.31–45; *Ufa Math. J.*, **7**:1 (2015), 31–45.

Начально-краевая задача для неоднородной системы уравнений параболического типа с двумя линиями вырождения

[1]**Хажиев И. О,** [2]**Худайберганов Я. К,** [3]**Сапаева Ш. Э**

[1]*Национальный университет Узбекистана имени Мирза Улугбека, Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: kh.ikrom04@gmail.com

[2,3]*Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,*
e-mail: komilyashin89@mail.ru,shohsanamsapayeva@mail.ru

Работа посвящена исследованую некорректной краевой задачи для неоднородной системы уравнений параболического типа с двумя линиями вырождения.

Пусть пара функций $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))$ в области $\Omega = \Omega_0 \times Q$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} u_{1t} + sgn(x)u_{1xx} + sgn(y)u_{1yy} + a_1u_1 + a_2u_2 = f_1, \\ u_{2t} + sgn(x)u_{2xx} + sgn(y)u_{2yy} + b_1u_2 + b_2u_1 = f_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Omega_0 = \left\{x, y|(-1;1)^2, x \neq 0, y \neq 0\right\}$, $Q = (0;T)$, $T < \infty$ и удовлетворяет следующим условиям:
начальным

$$u_j(x,y,t)\,|_{t=0} = \varphi_j(x,y)\ ,\ (x,y) \in [-1;1]^2, \tag{2}$$

граничным

$$\begin{aligned} u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}} = 0,\ (y,t) \in [-1;1] \times \bar{Q}, \\ u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}} = 0,\ (x,t) \in [-1;1] \times \bar{Q}, \end{aligned} \tag{3}$$

а также условиям склеивания

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0} = \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ (y,t) \in [-1;1] \times \bar{Q}, \\ \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} = \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t) \in [-1;1] \times \bar{Q}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $(i = 0,1)$,$(j = 1,2)$, a_j, b_j- некоторые константы, $(a_1 - a_2)^2 + 4b_1b_2 > 0$ и $\varphi_j(x,y)$, $f_j(x,y,t)-$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi_j(x,y)|_{\partial\Omega_0} = 0,\ f_j(x,y,t)|_{\partial\Omega_0} = 0$.

Исследуемая в данной работе задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики, а именно в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Некорректные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений были рассмотрены в работах М. М. Лаврентьева [1], H.A Levine, С. Г Крейна, А. Л. Бухгейма, К. С. Фаязова, а для уравнений смешанного и смешанно-составного типа в работах К. С. Фаязова, К. С. Фаязова и И. О. Хажиева [2], [3], К. С. Фаязова и Я. К. Худайберганова [4]. Из этих работ следует, что краевые задачи для уравнений смешанного типа имеют практическое применение, они возникают при решении задач газовой динамики, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеяния, в прогнозировании уровня грунтовых вод и в других областях физики и техники.

В данной работе доказана некорректность искомой задачи, получено представление решения, выведена априорная оценка решения, получены теоремы, доказывающие единственность и устойчивость на множестве корректности.

Литература

1. *М. М. Лаврентьев., Л. Я. Савельев* Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. 941 с.

2. *К. С. Фаязов* Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка. УзМЖ. 1995. No 2. С. 89-93.

3. *K.S. Fayazov, I.O. Khajiev* Estimation of conditional stability of the boundary-value problem for the system of parabolic equations with changing direction of time. Reports on mathematical physics, Vol. 88 (2021),No. 3.

4. *К. С. Фаязов, Я. К. Худайберганов* Некорректная краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения, Сибирские электронные математические известия. 2020. Том 17. стр. 647-660.

Начально-краевая задача для неоднородной системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения

[1]**Хажиев И. О.**, [2]**Худайберганов Я. К.**, [3]**Эшчанова О. Р.**

[1]*Национальный университет Узбекистана имени Мирза Улугбека, Ташкент, Узбекистан,*
e-mail: kh.ikrom04@gmail.com

[2,3]*Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан,*
e-mail: komilyashin89@mail.ru, eshchanovaozoda@gmail.com

Работа посвящена исследованую некорректной краевой задачи для неоднородной системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения.

Пусть пара функций $(u_1(x,y,t), u_2(x,y,t))$ в области $\Omega = \Omega_0 \times Q$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} u_{1tt} + sgn(x)u_{1xx} + sgn(y)u_{1yy} + a_1u_1 + a_2u_2 = f_1, \\ u_{2tt} + sgn(x)u_{2xx} + sgn(y)u_{2yy} + b_1u_2 + b_2u_1 = f_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Omega_0 = \left\{x, y|(-1;1)^2, x \neq 0, y \neq 0\right\}$, $Q = (0;T)\,, T < \infty$ и удовлетворяет следующим условиям:

начальным

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^i u_1(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0} &= \varphi_i(x,y)\,,\ (x,y) \in [-1;1]^2 \times \bar{Q}, \\ \left.\frac{\partial^i u_2(x,y,t)}{\partial t^i}\right|_{t=0} &= \psi_i(x,y)\,,\ (x,y) \in [-1;1]^2 \times \bar{Q}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

граничным

$$\begin{aligned} u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{x=-1\\x=+1}} &= 0,\ (y,t) \in [-1;1] \times \bar{Q}, \\ u_j(x,y,t)\Big|_{\substack{y=-1\\y=+1}} &= 0,\ (x,t) \in [-1;1] \times \bar{Q}, \end{aligned} \tag{3}$$

а также условиям склеивания

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=-0} &= \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial x^i}\right|_{x=+0},\ (y,t) \in [-1;1] \times \bar{Q}, \\ \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=-0} &= \left.\frac{\partial^i u_j(x,y,t)}{\partial y^i}\right|_{y=+0},\ (x,t) \in [-1;1] \times \bar{Q}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $(i = 0,1)$,$(j = 1,2)$,a_j, b_j- некоторые константы, $(a_1 - a_2)^2 + 4b_1b_2 > 0$ и $\varphi_i(x,y)$, $\psi_i(x,y)$, $f_j(x,y,t)-$ заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi_i(x,y)|_{\partial\Omega_0} = 0$, $\psi_i(x,y)|_{\partial\Omega_0} = 0$, $f_j(x,y,t)|_{\partial\Omega_0} = 0$.

Исследуемая в данной работе задача относится к классу некорректно поставленных задач математической физики, а именно в данной задаче отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Некорректные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений были рассмотрены в работах М. М. Лаврентьева [1], H.A Levine, С. Г Крейна, А. Л. Бухгейма, К. С. Фаязова, а для уравнений смешанного и смешанно-составного типа в работах

К. С. Фаязова, К. С. Фаязова и И. О. Хажиева [2], [3], К. С. Фаязова и Я. К. Худайберганова [4]. Из этих работ следует, что краевые задачи для уравнений смешанного типа имеют практическое применение, они возникают при решении задач газовой динамики, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в магнитной гидродинамике, в теории электронного рассеяния, в прогнозировании уровня грунтовых вод и в других областях физики и техники.

В данной работе доказана некорректность искомой задачи, получено представление решения, выведена априорная оценка решения, получены теоремы, доказывающие единственность и устойчивость на множестве корректности.

Литература

1. *М. М. Лаврентьев., Л. Я. Савельев* Теория операторов и некорректные задачи. 2-е изд., перераб. и дополн. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. 941 с.
2. *К. С. Фаязов* Некорректная краевая задача для одного уравнения смешанного типа второго порядка. УзМЖ. 1995. No 2. С. 89-93.
3. *K.S. Fayazov, I.O. Khajiev* Estimation of conditional stability of the boundary-value problem for the system of parabolic equations with changing direction of time. Reports on mathematical physics, Vol. 88 (2021),No. 3.
4. *К. С. Фаязов, Я. К. Худайберганов* Некорректная краевая задача для системы уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения, Сибирские электронные математические известия. 2020. Том 17. стр. 647-660.

Об одной нелокальной краевой задаче для дифференциального уравнения типа Буссинеска

Халмухамедов А.Р.
Национальный Университет Узбекистана,
кафедра "Дифференциальные уравнения и Математическая физика"
e-mail: khalmukhamedov@gmail.com

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ - произвольная ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$ and $T > 0$. Рассмотрим в цилиндре $\Omega \times (0, T)$ следующее уравнение

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + \nu^2 \Delta u \;=\; 0, \quad x \in \Omega, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

где параметр ν является положительным числом.

Пусть A является произвольным положительным самосопряженным расширением оператора Лапласа $-\Delta$:

$$Au = -\Delta u, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$
$$(Au, u) \geq \mu(u, u), \quad \mu > 0, \quad u \in D(A). \tag{2}$$

Предположим, что оператор A имеет компактный обратный A^{-1}. В частности, это самосопряженное расширение может быть порождена с граничными условиями следующего вида

$$\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial n} \;+\; \beta(x)u \;=\; 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

с некоторыми $\alpha(x)$ и $\beta(x)$.

Рассмотрим следующие нелокальные условия

$$u(x, 0) = u(x, T), \tag{4}$$

и

$$\int\limits_0^T u(x, t)\, dt = \phi(x). \tag{5}$$

Уравнения вида (1) известны как линеаризованные уравнения типа Буссинеска (см. [2], урав. 26), и при моделировании различных процессов возникает необходимость исследования разрешимости таких уравнений. Для обзора результатов по краевым задачам для уравнений типа Буссинеска, включая и нелинейные уравнения смотрите [3].

В работе [4] Т.К. Юлдашев рассмотрел задачу разрешимости и построения конструктивного решения краевой задачи для уравнения вида (1) где перед параметром ν^2 стоит знак $-$, с нелокальными условиями аналогичными с (4)-(5) в случае $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ (см. [4], условие (6)). Эти результаты получили свое развитие в работе [1] для произвольных областей $\Omega \subset R^N, N > 1$, где установлено, что для существования решения, вообще говоря, дополнительно требуется ортогональность функции $\phi(x)$ на линейное подпространство, образованное некоторыми собственными функциями оператора A.

Основной целью настоящей работы является исследование разрешимости и конструктивного построения решения для уравнения (1) с начальными условиями (4) и (5) и показать, что в этом случае, достаточно потребовать принадлежности функции $\phi(x)$ к области определения $D(A)$ оператора A.

Решение задачи (1)+(4)+(5) определяется как функция $u(x,t)$ которая:

i) принадлежит области определения $D(A)$ для каждого t из интервала $0 \le t \le T$ и является непрерывным по t на этом интервале в норме $L_2(\Omega)$;

ii) вместе с функцией $Au(x,t)$ является дважды непрерывно дифференцируемая на открытом интервале $(0,T)$ в норме $L_2(\Omega)$;

iii) *удовлетворяет уравнению (1) и условиям (4)-(5).*

В этой работе доказано справедливость следующего утверждения.

Теорема. *Пусть $\phi \in D(A)$. Тогда решение задачи (1)+(4)+(5) существует и единственно.*

Литература

1. *Alimov Sh., Khalmukhamedov A.*, On a Non-Local Problem for a Boussinesq Type Differential Equation , ISSN 1995-0802, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 4, 916-923.

2. *Boussinesq, J.* "Theorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond". Journal de Mathéatiques Pures et Appliquées (1872): 55-108.

3. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.*, Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа, Москва, Физматлит, 2007, 736 с.

4. *Юлдашев Т.К.* Смешанное дифференциальное уравнение типа Буссинеска. Вестник Волгоградского государственного университета. Сер. 1, Мат. Физ., 2016, выпуск 2(33), 13-26.

О числе собственных значений модельного оператора типа Шредингера на решетке

[1]Халхужаев А.М., [2]Боймуродов Ж.Х.

[1] *Институт математики им. В.И. Романовского, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: ahmad_x@mail.ru

[2] *Навоийский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан,*
e-mail: jurabek.boymurodov@mail.ru

В данной работе мы рассматриваем модельный оператор, соответствующий трехчастичному оператору Шредингера на трехмерной решетке и случаю, когда две одинаковые частицы (бозоны) взаимодействуют с частицей иной природы с помощью парного контактного потенциала.

Пусть $\mathbb{T}^3$ трехмерный тор, $L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$- гильбертово пространство, интегрируемое с квадратом на $(\mathbb{T}^3)^2$ и симметричное относительно перестановок переменных.

Рассмотрим оператор $H_{\mu,\gamma}$, действующий в $L_2^s((\mathbb{T}^3)^2)$ по формуле:

$$H_{\mu,\gamma} = H_{0,\gamma} - \mu(V_1 + V_2),$$

где

$$(H_{0,\gamma} f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\varepsilon(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{q}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{p} + \mathbf{q}))f(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \ \ \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{T}^3,$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = 3 - \sum_{i=1}^{3} \cos p_i, \quad \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{T}^3,$$

$$((V_1 + V_2)f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{p}, \mathbf{s})d\mathbf{s} + \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s}, \mathbf{q})d\mathbf{s},$$

$\mu > 0$- есть энергия взаимодействия двух частиц, $\gamma > 0$ отношение масс бозона и другой частицы. Двухчастичный оператор $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k}), \mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$, соответствующий двухчастичному взаимодействию трехчастичной системы $H_{\mu,\gamma}$, имеет вид:

$$(h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{p})f(\mathbf{p}) - \mu \int_{\mathbb{T}^3} f(\mathbf{s})d\mathbf{s},$$

где

$$\varepsilon_{\mathbf{k},\gamma}(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \gamma\varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{p}).$$

Лемма 1. Пусть $\mu > \mu_0(\gamma)$, $\mu_0(\gamma) = \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{d\mathbf{q}}{(1+\gamma)\varepsilon(\mathbf{q})} \right)^{-1} > 0$. Тогда оператор $h_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$ имеет единственное простое собственное значение $z_{\mu,\gamma}(\mathbf{k})$, ниже существенного спектра.

Пусть

$$E_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}) = z_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}) + \varepsilon(\mathbf{p}),$$

$$\tau_{\min}(\mu, \gamma) = \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3} E_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}), \ \ \tau_{\max}(\mu, \gamma) = \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3} E_{\mu,\gamma}(\mathbf{p}),$$

$$E_{\min,\gamma} = \min_{\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} E_{\mathbf{0},\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0, \ \ E_{\max,\gamma} = \max_{\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{T}^3} E_{\mathbf{0},\gamma}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 6(1 + \gamma).$$

Лемма 2. Существенный спектр оператора $H_{\mu,\gamma}$ состоит из следующего множества:

$$\sigma_{ess}(H_{\mu,\gamma}) = [\tau_{\min}(\mu, \gamma), \tau_{\max}(\mu, \gamma)] \cup [0, 6(1 + \gamma)].$$

Обозначим

$$\gamma_1 = \left[\int_{\mathbb{T}^3} \frac{(\cos^2 s_1 + 2\cos s_1 \cos s_2)d\mathbf{s}}{\varepsilon(\mathbf{s})} - 3\left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\cos s_1 d\mathbf{s}}{\varepsilon(\mathbf{s})} \right)^2 \left(\int_{\mathbb{T}^3} \frac{d\mathbf{s}}{\varepsilon(\mathbf{s})} \right)^{-1} \right]^{-1} \approx 2,9368.$$

Теорема. Пусть $\gamma \in (0, \gamma_1)$. Тогда существует $\mu_\gamma > 0$ такое, что для любого $\mu > \mu_\gamma$ оператор $H_{\mu,\gamma}$ имеет единственное собственное значение, $z_1(\mu, \gamma)$ лежащее левее существенного спектра.

Литература

1. *S.N.Lakaev.,Sh.N.Lakaev* The existence of bound states in a system of three particles in an optical lattice. J.Phys. A:Math. Theor. **50**, 335202(2017).

2. *S.N.Lakaev.,G.Dell'Antonio.,A.M.Khalkhuzhaev* Existence of an isolated band in a system of three particles in an optical lattice. J.Phys. A,Math.,є14 Theor. **49**,145204(2016).

Задача Коши для уравнения Хирота в классе периодических бесконечнозонных функции

[1]**Хасанов А.Б.**, [2]**Маннонов Г.А.**, [3]**Эшбеков Р.**

[1] *СамГУ, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: ahasanov2002@mail.ru

[2] *СамГУ, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: mannonov.g@mail.ru

[3] *СамГУ, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: rayxonbek@mail.ru

В настоящей работе рассматривается задача Коши для уравнения Хирота

$$\begin{cases} p_t = a(t)\left[p_{xxx} - 6(p^2+q^2)p_x\right] + b(t)\left[-q_{xx} + 2(p^2+q^2)q\right] \\ q_t = a(t)\left[q_{xxx} - 6(p^2+q^2)q_x\right] + b(t)\left[p_{xx} - 2(p^2+q^2)p\right] \end{cases}, \tag{1}$$

при начальных условиях

$$\begin{array}{l} p(x,t)|_{t=0} = p_0(x), \quad q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \\ p_0(x+\pi) = p_0(x) \in C^5(R), \; q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^5(R) \end{array} \tag{2}$$

в классе действительных безконечнозонных π-периодических по x функций

$$\begin{array}{l} p(x+\pi,t) = p(x,t), \; q(x+\pi,t) = q(x,t), \; x \in R, \; t > 0, \\ p(x,t), \; q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \end{array} \tag{3}$$

Здесь $a(t), \; b(t) \in C\left([0,\infty)\right)$-заданные непрерывные ограниченные функции.

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $p(x,t), \; q(x,t), \; x \in R, \; t > 0$, задачи (1)-(3) с помощью обратной спектральной задачи для оператора Дирака:

$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, \; x \in R, \tau \in R, \; t > 0, \tag{4}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Следует обметит, что уравнение Хироты

$$iu_t + \beta\left(u_{xx} \pm 2\,|u|^2\,u\right) - i\alpha\left(u_{xxx} \pm 6\,|u|^2\,u_x\right) = 0, \; \alpha, \beta \in R$$

было проинтегрировано в работах [1-4], а также [5-7] в классе быстроубывающих и конечнозонных функции.

Если запишем уравнения Хироты соответствующие (-) дефокусирующему случаю в вида эквивалентной ему на вещественную и мнимую части функции $u(x,t) = q(x,t) - ip(x,t), \; i = \sqrt{-1}$, то получим система уравнения вида (1).

Обозначим через
$c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), \, c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$и $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), \, s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$
решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$.

Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Спектр оператора Дирака L чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) \equiv E = \{\lambda \in R: \; |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = R \backslash \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \, \lambda_{2n})\right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \, \lambda_{2n}), \; n \in Z$ называются лакунами, где λ_n корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$.

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z$ и при этом $\xi_n(\tau,t) \in \left[\lambda_{2n-1}, \, \lambda_{2n}\right]$.

Числа $\xi_n(\tau,t),\ n\in Z$и знаки $\sigma_n(\tau,t)=sign\{s_2(\pi,\,\xi_n,\tau,t)-c_1(\pi,\,\xi_n,\tau,t)\}$называются спектральными параметрами оператора L. Спектральные параметры $\xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z$ и границы спектра $\lambda_n(\tau,t),\ n\in Z$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$.

Теперь с помощью начальных функций $p_0(x+\tau),\,q_0(x+\tau),\,x,\tau\ \in\ R$ построим оператор Дирака виде $L(\tau,0)$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\left\{\lambda_n,\,\xi_n^0(\tau),\,\sigma_n^0(\tau)=\pm1,\,n\in Z\right\}$ оператора $L(\tau,t)$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $p(x,t),\,q(x,t),\,x\ \in\ R,\ t\ >\ 0$ является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные $\{\lambda_n(\tau,t),\xi_n(\tau,t),\,\sigma_n(\tau,t)\}$, $n\ \in\ Z$ оператора $L(\tau,t)$удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:*

1. $\frac{\partial\lambda_n(\tau,t)}{\partial t}=0,\ \ n\in Z$
2. $$\frac{\partial\xi_n(\tau,t)}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\left\{a(t)\left[\xi_n^3(\tau,t)+4p(\tau,t)\xi_n^2(\tau,t)+\right.\right.$$
$$+2\left(p^2(\tau,t)+q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)\right)\xi_n(\tau,t)+2\left(p(\tau,t)q_\tau(\tau,t)-p_\tau(\tau,t)q(\tau,t)\right)+$$
$$\left.+2p(\tau,t)\left(p^2(\tau,t)+q^2(\tau,t)\right)-p_{\tau\tau}(\tau,t)\right]+b(t)\left[\left(p(\tau,t)+\xi_n(\tau,t)\right)^2+\right.$$
$$\left.\left.+q^2(\tau,t)+q_\tau(\tau,t)+\xi_n^2(\tau,t)\right]\right\}\ ,\ n\in Z. \tag{5}$$

Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\ \ n\in Z, \tag{6}$$

где $\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n^0(\tau)=\pm1,\ n\in Z$-спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau,0)$с коэффициентами $p_0(x+\tau),\ q_0(x+\tau),\,\tau\in R$. Последовательность $h_n(\xi),\ n\in Z$,участвующая в уравнении (5), определяется по формуле:

$$\begin{array}{l} h_n(\xi)=\sqrt{\left(\xi_n(\tau,t)-\lambda_{2n-1}\right)\left(\lambda_{2n}-\xi_n(\tau,t)\right)}f_n(\xi),\\ f_n(\xi)=\sqrt{\prod\limits_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t)-\xi_n(\tau,t))^2}}. \end{array} \tag{7}$$

Далее, с помощью замены переменных

$$\xi_n(\tau,t)=\lambda_{2n-1}+(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\sin^2x_n(\tau,t),\ n\in Z$$

систему уравнения Дубровина (5) можно переписать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt}=H(x(\tau,t)),\quad x(\tau,t)|_{t=0}=x^0(\tau),\quad x^0(\tau)\in K \tag{8}$$

где

$$\begin{array}{l} K=\{x(\tau,t)=(...,\,x_{-1}(\tau,t),\,x_0(\tau,t),\,x_1(\tau,t),...):\\ \|x\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(1+|n|\right)\left(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}\right)|x_n(\tau,t)|<\infty\right\}. \end{array}$$

Лемма 1. Если

$$p_0(x+\pi)=p_0(x)\in C^5(R),\,q_0(x+\pi)=q_0(x)\in C^5(R),$$

то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липщица в банаховом пространстве K:

$$\left\|H\left(x(\tau,t)\right)-H\left(y(\tau,t)\right)\right\|\leq L\left\|x(\tau,t)-y(\tau,t)\right\|,\ \forall x,y\in K$$

где

$$L=A\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+|k|\right)|k|^3\gamma_k\leq\infty,\ \ A>0, \tag{9}$$

$$\gamma_k = \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{c_k}{2^4\,|k|^5} + \frac{\delta_k}{k^6}, \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k^2 < \infty, \tag{10}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2 < \infty, \ c_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Q_0^{(5)}(t) e^{-2ikt} dt, \ Q_0(t) = q_0(t) - ip_0(t).$$

Следует отметить, что оценка (11) получена в работе (см.[8], стр.98).

Замечание 1. Теорема 1 и лемма 1 дают метод решения задачи (1)-(3). Для этого сначала найдем спектральные данные $\lambda_n, \xi_n^0(\tau), \ \sigma_n^0(\tau) = \pm 1, \ n \in Z$ оператора Дирака $L(\tau, 0)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau, t)$ через $\lambda_n, \ \xi_n(\tau, t), \ \sigma_n(\tau, t), \ n \in Z$. Теперь решая задача Коши (5), (6) при произвольном значении τ, находим
$\xi_n(\tau, t), \ \sigma_n(\tau, t), \ n \in Z$. Из формулы следов

$$p(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right), \tag{11}$$

$$q(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)), \tag{12}$$

определим функции $p(\tau, t)$ и $q(\tau, t)$, т.е. решение задачи (1)-(3).

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если начальные функции* $p_0(x), \ q_0(x)$ *удовлетворяют условиям*

$$p_0(x + \pi) = p_0(x) \in C^5(R), \ \ q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^5(R),$$

то существует однозначно определяемое решение $p(\tau, t), \ \ q(\tau, t)$ *задачи (1)-(3), которое определяется, соответственно, суммой рядов (11), (12) и принадлежит классу* $C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0)$.

Литература

1. *Hirota R.* Exact envelop-soliton solutions of a nonlinear wave equation // J.Math Phys. 1973, vol.14, pp. 805–809.

2. *Hirota R.* Exact N-soliton solutions of the wave equation of Long waves in shallow water and in nonlinear lattices // J.Math Phys. 1973, vol.14, pp. 810–815.

3. *Матвеев В.Б., Смирнов А.О.* Решения типа "волнубийц"уравнений иерархии Абловица-Каупа-Ньюэлла-Сигура: единый подход // ТМФ, 2016, т.186, No2, с.191–220.

4. *Матвеев В.Б., Смирнов А.О.* Двухфазные периодические решения уравнений из АКНС иерархии // Зап.научн.сем. ПОМИ, 2018, т.473, с.205–227.

5. *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодических и антипериодических краевых задач, порождаемых операцией Дирака I, II // Теория функцией, функциональный анализ и их приложения-Харьков: Выша школа, 1978, вып.30. с.90-101.; 1979, вып.31, с.102–109.

Задачи Коши для нелинейного уравнения типа синус-Гордона

[1]Хасанов А.Б., [2]Нормуродов Х.Н., [3]Худоёров У.О.
[1] *СамГУ, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: ahasanov2002@mail.ru
[2] *СамГУ, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: normurodov.96@bk.ru
[3] *СамГАСИ, Самарканд, Узбекистан,*
e-mail: xudoyorov.2022@bk.ru

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения типа синус-Гордона вида
$$q_{xt} = chq, \quad q = q(x,t), \ x \in R, \ t > 0 \tag{1}$$
с начальным условием
$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \quad q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^2(R) \tag{2}$$
в классе действительных бесконечнозонных π- периодических по x функций:
$$q(x+\pi,t) = q(x,t), \quad q(x,t) \in C^{1,1}_{x,t}(t>0) \cap C(t \geq 0). \tag{3}$$

Следует отметить, что уравнения синус-Гордона:
$$u_{xt} = \sin u, \ u = u\,(x,t)\,, \ x \in R, \ t > 0$$
было проинтегрировано в работах [1-2], а также [3] в классе быстроубывающих и конечнозонных функции.

В данной работе предлагается алгоритм построения решения $q(x,t), \ x \in R, \ t > 0$, задачи (1)-(3) с помощью обратной спеткральной задачи для оператора Дирака:
$$L(\tau,t)y \equiv B\frac{dy}{dx} + \Omega(x+\tau,t)y = \lambda y, \ x \in R, \ t > 0, \ \tau \in R \tag{4}$$
где
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}q'_x(x,t) \\ \frac{1}{2}q'_x(x,t) & 0 \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $c(x,\lambda,\tau,t) = (c_1(x,\lambda,\tau,t), c_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ и $s(x,\lambda,\tau,t) = (s_1(x,\lambda,\tau,t), s_2(x,\lambda,\tau,t))^T$ решения уравнения (4) с начальными условиями $c(0,\lambda,\tau,t) = (1,0)^T$ и $s(0,\lambda,\tau,t) = (0,1)^T$. Функция $\Delta(\lambda,\tau,t) = c_1(\pi,\lambda,\tau,t) + s_2(\pi,\lambda,\tau,t)$ называется функцией Ляпунова для уравнения (4).

Спектр оператора Дирака $L(\tau,t)$ чисто непрерывен и состоит из множества
$$\sigma\,(L) = \{\lambda \in R: \ |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = R \backslash \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \, \lambda_{2n}) \right).$$
Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}), \ n \in Z\backslash\{0\}$, называются лакунами, где λ_n, корни уравнения $\Delta(\lambda) \mp 2 = 0$.

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda,\tau,t) = 0$ обозначим через $\xi_n(\tau,t), n \in Z\backslash\{0\}$ и при этом $\xi_n(\tau,t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}], \ n \in Z\backslash\{0\}$.

Числа $\xi_n(\tau,t), n \in Z\backslash\{0\}$, и знаки $\sigma_n(\tau,t) = sign\{s_2(\pi,\xi_n,\tau,t) - c_1(\pi,\xi_n,\tau,t)\}, \ n \in Z\backslash\{0\}$ называются спектральными параметрами оператора $L(\tau,t)$. Спектральные параметры $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t) = \pm 1, \ n \in Z\backslash\{0\}$ и границы спектра $\lambda_n(\tau,t), n \in Z\backslash\{0\}$, называются спектральными данными оператора Дирака $L(\tau,t)$.

Теперь с помощью начальных функций $q_0(x+\tau), \ \tau \in R$, построим оператор Дирака вида $L(\tau,0)$. Решая прямую задачу, находим спектральные данные $\left\{\lambda_n, \ \xi_n^0(\tau), \ \sigma_n^0(\tau), \ n \in Z\backslash\{0\}\right\}$ оператора $L(\tau,0)$.

Основной результат настоящей работы содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $q(x,t)$, $x \in R$, $t > 0$, является решением задачи Коши (1)-(3). Тогда спектральные данные$\{\lambda_n(\tau,t),\, \xi_n(\tau,t),\, \sigma_n(\tau,t) = \pm 1\}$, $n \in Z\setminus\{0\}$, оператора $L(\tau,t)$, удовлетворяют аналогу системы дифференциальных уравнений Дубровина:*

$$1.\frac{\partial \lambda_n(\tau,t)}{\partial t} = 0, \quad n \in Z\setminus\{0\}; \tag{5}$$

$$2.\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = (-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi(\tau,t)) g_n(\xi(\tau,t)),\ n \in Z\setminus\{0\}. \tag{6}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \in Z\setminus\{0\}$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t), n \in Z\setminus\{0\}$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.
Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau,t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau),\ n \in Z\setminus\{0\} \tag{7}$$

где $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in Z\setminus\{0\}$ - спектральные параметры оператора Дирака $L(\tau,0)$. Последовательность $h_n(\xi)$ и $g_n(\xi)$, $n \in Z\setminus\{0\}$ участвующая в уравнении (6) определяется по формулам:

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t,\tau))} \times f_n(\xi),$$

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau,t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau,t))}{(\xi_k(\tau,t) - \xi_n(\tau,t))^2}}, \quad g_n(\xi) = \frac{1}{2\xi_n(\tau,t)} \exp\{q(\tau,t)\}. \tag{8}$$

Замечание 1. Учитывая формулы следов

$$q'_\tau(\tau,t) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau,t)\, h_k(\xi(\tau,t)), \tag{9}$$

$$0 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k} + \lambda_{2k-1}}{2} - \xi_k(\tau,t) \right) \tag{10}$$

$$\left(\frac{1}{2} q_\tau(\tau,t)\right)^2 + \frac{1}{2} q_{\tau\tau}(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t) \right) \tag{11}$$

Систему (6) можно переписать в замкнутой форме:

$$\frac{\partial \xi_n(\tau,t)}{\partial t} = (-1)^n \sigma_n(\tau,t) \sqrt{(\xi_n(\tau,t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t,\tau))} \cdot f_n(\xi) \cdot g_n(\xi(\tau,t)) \tag{12}$$

где

$$g_n(\xi) = \frac{1}{2\xi_n(\tau,t)} \exp\left\{ C(t) + 2\int_0^\tau \left(\sum_{k=-\infty,\, k\neq 0}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(s,t)\, h_k(\xi(s,t)) \right) ds \right\} \tag{13}$$

Здесь $C(t)$-некоторая огрониченная непрерывная функция.

В результате замена переменных

$$\xi_n(\tau,t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau,t),\ n \in Z\setminus\{0\}$$

систему дифференциальных уравнения Дубровина (12) и начальные условия (7) можно переписать в виде одного уравнения в банаховом пространстве K:

$$\frac{dx(\tau,t)}{dt} = H(x(\tau,t)), \quad x(\tau,t)|_{t=0} = x^0(\tau) \in \tag{14}$$

где

$$K = \{x(\tau,t) = (..., x_{-1}(\tau,t), x_1(\tau,t), ...) : \|x(\tau,t)\| =$$

$$= \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} (1+|n|)\,(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1})\,|x_n(\tau,t)| < \infty\},$$

$$H(x) = (...,\ H_{-1}(x),\ H_1(x), ...),$$

$$H_n(x) = \frac{1}{2}(-1)^n \sigma_n(0)\cdot g_n(...,\ \lambda_1 + (\lambda_2-\lambda_1)\sin^2 x_1(\tau,t),\ ...)\times$$

$$\times f_n(...,\ \lambda_1 + (\lambda_2-\lambda_1)\sin^2 x_1(\tau,t),\ ,...).$$

Известно (см. [4], стр. 98), что если $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^2(R)$, то $(q_0(x))' \in C^1(R)$. Поэтому для длины лакун оператора $L(\tau,0)$, имеет место равенства:

$$\gamma_n = \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1} = \frac{\alpha_n}{|n|},\ \ |n| \to \infty, \tag{15}$$

где

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty.$$

Лемма 1. Справедливы следующие оценка:

1. $C_1 \le |f_n(\xi)| \le C_2,\ \left|\frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| \le C_3,$
2. $|g_n(\xi)| \le \frac{C_4}{|n|},\ \left|\frac{\partial g_n(\xi)}{\partial \xi_m}\right| \le C_5 \frac{|m|+1}{|n|},\ m,\ n \in Z\backslash\{0\}$

где $C_j > 0,\ j = 1,2,3,4,5$, не зависят от параметра m и n.

Лемма 2. Если $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^2(R)$, то вектор-функция $H(x(\tau,t))$ удовлетворяет условию Липщица в банаховом пространстве K, т.е. существует константа $L > 0$ такая, что для произвольных элементов $x(\tau,t),\ y(\tau,t) \in K$ выполняется следующие неравенство

$$\|H(x(\tau,t)) - H(y(\tau,t))\| \le L\,\|x(\tau,t) - y(\tau,t)\|\,,$$

где

$$L = C\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|+1}{|n|}\,(\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}) =! \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|+1}{|n|}\gamma_n = C\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \frac{|n|+1}{|n|^2} < \infty.$$

Замечание 2. Теорема 1 и лемма 2 дают метод нахождения решения задачи (1)-(3). Для этого, сначала найдем спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1,\ n \in Z\backslash\{0\}$, оператора Дирака $L(\tau,0)$. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau,t)$ через $\lambda_n,\ \xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t) = \pm 1,\ n \in Z\backslash\{0\}$. Теперь решая задачу Коши (12), (7) при произвольном значении τ, находим $\xi_n(\tau,t),\ \sigma_n(\tau,t),\ n \in Z\backslash\{0\}$. Из формулы следов (9) определим функция $q_\tau(\tau,t)$, т.е. решение задачи (1)-(3).

Замечание 3. Функция $q_\tau(\tau,t)$ построенная с помощью системы уравнений Дубровина (12) и формула следа (9) действительно удовлетворяет уравнение 1.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если начальная функция $q_0(x)$ удовлетворяет условию $q_0(x+\pi) = q_0(x) \in C^2(R)$, то существует однозначно определяемое решение $q_\tau(\tau,t)$ задачи (1)-(3), которое определяется, как сумма ряда (9), и принадлежит классу $C^{1,1}_{x,t}(t>0)\bigcap C(t\ge 0)$.*

Литература

1. *Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Полное описание решений “Sin-Gordon” уравнения. //Докл. АНСССР. 1974. т. 219, No6, с.1334–1337.
2. *Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. and Sugur H.* Method for solving the sine-Gordon equation // Phys. Rev.Lett. 1973. v.30, No25, p.1262–1264.

3. *Митрапольский Ю.А., Боголюбов Н.Н (мл), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. Киев: Наукова думка, 1987.

4. *Мисюра Т.В.* Характеристика спектров периодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака I // Теория функцией, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Вища школа, 1978. т.30 с.90–101.

О разрешимости одной обратной задачи для эллиптического уравнения дробного порядка

[1]Хасанов И., [2]Рахмонов А.

[1]*Бухарский государственный университет, Бухара, Узбекистан*

e-mail: ihasanov998@gmail.com

[2] *Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан*

e-mail: araxmonov@mail.ru

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной краевой задачи для эллиптического уравнения дробного порядка с интегральным условиям переопределения. Рассмотрим уравнение

$$\left(\partial_{0,t}^{\alpha}u\right)(x,t)+u_{xx}(x,t)=q(t)u(x,t)+f(x,t), \tag{1}$$

где $1<\alpha<2-$заданное число, $\partial_{0t}^{\alpha}-$регуляризованная производная Герасимова-Капуто дробного порядка α, с началом в точке 0, которая определяется следующим образом [1,2]:

$$(\partial_{0,t}^{\alpha}y)(t)=(I_{0,t}^{2-\alpha}y)(t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{1-\alpha}y''(\tau)d\tau,$$

где $I_{0,t}^{\alpha}$ - дробный интеграл Реймана-Лиувилля порядка α, т. е.

$$(I_{0,t}^{2-\alpha}y)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)ds,$$

$\Gamma-$ гамма-функция Эйлера, и поставим для него $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1,\ 0\le t\le T\}$ обратную краевую задачу с граничными условиями:

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u(x,T)=\psi(x),\quad (0\le x\le 1), \tag{2}$$

$$u(0,t)=u(1,t),\quad u_x(1,t)=0,\quad (0\le t\le T), \tag{3}$$

и интегральным условием переопределения

$$\int_0^1 u(x,t)dx=h(t)\quad (0\le t\le T), \tag{4}$$

где $f(x,t),\varphi(x),\psi(x),h(t)-$ заданные функции, а $u(x,t)$ и $q(t)-$ искомые функции.

Условие (4) является нелокальным интегральным условием первого рода, то есть не содержит значений искомого решения в точках границы.

Обратная задача. *Определить функции $u(x,t)\in C^2(D_T)$, $q(t)\in C[0,T]$ из краевой задачи (1)-(3) и дополнительным условием (4).*

Литературы

1. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II, Geophys. J. Royal Astronom. Soc, 13, (1967) 529-539.

2. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam, 2006.

О единственности решения задачи с условием Геллерстедта на параллельных характеристиках для уравнений смешанного типа

[1]**Хасанова Д.У.**, [2] **Косимов М. Р.**, [3] **Мусурмонов М.А.**
[1,2,3]*Термезский государственный университет (Термез, Узбекистан),*
e-mail: dildorahasanova95@gmail.com, Mirjaloltemirov3@gmail.com,
marufmusurmonov185@gmail.com

I.**Постановка задачи G_0.** Пусть $D-$ конечная односвязная область комплексной плоскости $C=\{z=x+iy\}$, ограниченная при $y>0$ нормальной кривой $\sigma_0(y=\sigma_0(x))$ с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, заданной уравнением $x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$, а при $y<0-$ характеристиками

$$AC:\, x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=-1 \quad \text{и} \quad BC:\, x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=1$$

уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx}+u_{yy}-(m/2y)u_y=0, \tag{1}$$

где $m-$ положительная постоянная.

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, а через C_0 и C_1 точка пересечения характеристик AC и BC с характеристиками уравнения (1) , выходящими из точки $E(c,0)$, где $c-$ некоторое число, принадлежащее интервалу $I=(-1,1)$ оси $y=0$.

Задача G_0. Требуется найти в области D функцию $u(x,y)\in C\left(\overline{D}\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x,y)$ принадлежит $C^2\left(D^+\right)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области D^+;

2) функция $u(x,y)$ является в области D^- обобщенным решением класса R_1 уравнения (1) ($u(x,y)\in R_1$ если в формуле Даламбера $\tau'(x),\nu(x)\in H$ (см. ниже (6) [1, с.104];

3) на интервале вырождения AB имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to+0}y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y},\ x\in I\setminus\{c\}, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x=\pm1$, $x=c$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) для любых $x\in\overline{I}$ выполняются равенства

$$u(x,y)\mid_{\sigma_0}=\varphi(x),\quad x\in[-1,1], \tag{3}$$

$$u(x,y)\mid_{AC_0}=\psi_0(x),\quad x\in[-1,(c-1)/2], \tag{4}$$

$$u(x,y)\mid_{EC_1}=\psi_1(x),\quad x\in[c,(c+1)/2], \tag{5}$$

Функции $\varphi(x),\ \psi_0(x),\psi_1(x)$ заданы и $\varphi(x)\in C[-1,1]\cap C^{0,\alpha_0}(-1,1),\ \psi_0(x)\in C[-1,(c-1)/2]\cap C^{1,\alpha_0}(-1,(c-1)/2),\ \psi_1(x)\in C[(c+1)/2,1]\cap C^{1,\alpha_0}((c+1)/2,1),\ \alpha_0\in(0,1)$, причем $\varphi(x)=(1-x^2)\widetilde{\varphi}(x)$, где $\widetilde{\varphi}(x)\in C^{0,\alpha_0}[-1,1]\cap C^{0,\alpha_0}(-1,1),\ \psi_0(-1)=0,\ \psi_1(c)=0$.

Заметим, что условие (3) является условием Дирихле, заданным на σ_0, а условия (4) и (5)– это условие Геллерстедта заданное на граничной характеристике AC_0, и на внутренней характеристике EC_1 . При $c=-1$ или $c=1$ задача G_0 совпадает с задачей Трикоми (см., например, (1, с. 128)).

2. Единственность решения задачи G_0. Формула Даламбера, определяющая в области D^- решение для уравнения (1) видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$\tau(x)=u(x,0),\quad x\in\overline{I};\quad \nu(x)=\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I,$$

имеет вид [1, с. 39]

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\tau\left(x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)+\tau\left(x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right)\right]-$$

$$-\frac{(-y)^{(m+2)/2}}{m+2}\int_{-1}^{1}\nu\left[x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right]dt. \tag{6}$$

С помощью формулы Даламбера (6) из краевых условий (4) и (5) нетрудно получить равенства

$$\tau^{'}(x)-\nu(x)=\psi_0\left(\frac{x-1}{2}\right),\quad x\in(-1,c), \tag{7}$$

и

$$\tau^{'}(x)+\nu(x)=\psi_1\left(\frac{x+c}{2}\right),\quad x\in(c,1), \tag{8}$$

Соотношения (7) и (8) являются первыми функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенными на интервалы $(-1,c)$ и $(c,1)$ оси $y=0$ из области D^-.

Для задачи G_0 аналогом принципа экстремума А.В.Бицадзе (3, с. 301) является

Теорема 1. *Решение $u(x,y)$ задачи G_0 при выполнении условий $\psi_0(x)\equiv 0$, $\psi_1(x)\equiv 0$ своего наибольшего положительного значения (НПЗ) или наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области $\overline{D}^+$ может принимать только в точках нормальной кривой σ_0.*

Доказательство. Пусть функция $u(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. В силу принципа Хопфа (3, с. 25) решение $u(x,y)$ уравнения (1) своего НПЗ во внутренних точках области D^+ не достигает.

Пусть решение $u(x,y)$ своего НПЗ достигает во внутренней точке $M_0(x_0,0)$ интервала AB.

Рассмотрим отдельно три случая возможного положения точки x_0.

1. Пусть $x_0\in(-1,c)$. Тогда в силу известного аналога принципа Заремба– Жиро в этой точке

$$\nu(x_0)<0, \tag{9}$$

(1, с. 74). С другой стороны хорошо известно, что в точке положительного максимума в силу соответствующего однородного равенство (7) (где $\psi_0\left(\frac{x_0-1}{2}\right)\equiv 0$) имеем

$$\nu(x_0)=0, \tag{10}$$

а это равенство в силу условия сопряжения (2) противоречить неравенству (9), следовательно $x_0\notin(-1,c)$.

2. Пусть $x_0\in(c,1)$. Здесь аналогично случаю 1 в силу однородного (где $\psi_1\left(\frac{x_0+c}{2}\right)\equiv 0$) условия (8) легко показывается, что это предположение также ведет к противоречию т.е. $x_0\notin(c,1)$.

3. Пусть $x_0=c$. Тогда из соответствующего однородного краевого условия (5) (с $\psi_1(x)\equiv 0$) имеем $\tau(c)=0$, следовательно и в этом случае точка x_0 не является точкой НПЗ функции $u(x,y)$.

Таким образом, решение $u(x,y)$ удовлетворяющим условиям теоремы 1 своего НПЗ достигает в точках кривой σ_0.

Аналогично как и выше также можно показать, что решение $u(x,y)$ удовлетворяющая условиям теоремы 1 своего НОЗ так же достигает в точках кривой σ_0. Теоремы 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Задача G_0 можеть иметь не более одного решения.*

В самом деле, в силу теоремы 1 решение однородной задачи G_0 своего НПЗ и НОЗ достигает в точках нормальной кривой σ_0 и в этих точках в силу соответствующего однородного (с $\varphi(x)\equiv 0$) условия (3) $u(x,y)\mid_{\sigma_0}=0$. Отсюда следует, что $u(x,y)\equiv 0$ всюду в замкнутой области $\overline{D}^+$, следовательно, и во всей смешанной области D.

Литература

1. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М.,1985.–304 с.

2. *М.С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.Ташкент 2005.-224 с

3. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981.-448 с.

Интегрирование уравнение мКдФ с дополнительным членом в классе быстроубывающих функций

[1]Хоитметов У.А., [1]Собиров Ш.К., [1]Матякубов Ж.Ш.

[1] *Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан*

e-mail: x_umid@mail.ru, shexzod1994@mail.ru, matyakubov0134@gmail.com

В данной работе рассматривается следующая система уравнений

$$
\begin{gathered}
u_t + p(t)(6u^2u_x + u_{xxx}) + q(t)u_x = 2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=0}^{m_k-1} C^j_{m_k-1}\big(g^j_{k1}g^{m_k-1-j}_{k1} - g^j_{k2}g^{m_k-1-j}_{k2}\big),\\
L(t)g^0_k = \xi_k g^0_k, \quad L(t)g^j_k = \xi_k g^j_k + j g^{j-1}_k, \quad \operatorname{Im}\xi_k > 0,\\
g^j_k \in L^2(-\infty,\,\infty), \quad k=\overline{1,N},\ \ j=\overline{0,m_k-1},
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где

$$
L(t) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x,t) \\ -u(x,t) & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix}, \quad g^j_k = \big(g^j_{k1}(x,t),\, g^j_{k2}(x,t)\big), \quad C^l_n = \frac{n!}{(n-l)!l!},
$$

$g^0_k = \big(g^0_{k1}(x,t),\ g^0_{k2}(x,t)\big)^T$ – собственная вектор-функция оператора $L(t)$ соответствующая собственному значению ξ_k ($\operatorname{Im}\xi_k > 0$) кратности $m_k,\ k=\overline{1,N}$, а $p(t)$ и $q(t)$ заданные непрерывно дифференцируемые функции.

Предполагается, что

$$
\frac{1}{(m_k-1-l)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(g^{m_k-1}_{k1}g^{m_k-1-l}_{k2} + g^{m_k-1}_{k2}g^{m_k-1-l}_{k1}\Big)\,dx = A^k_{m_k-1-l}(t),
\tag{2}
$$

где $A^k_{m_k-1-l}(t)$ изначально заданные непрерывные функции $l=\overline{0,m_k-1}$. Уравнение (1) рассматривается при начальном условии

$$
u(x,0) = u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}.
\tag{3}
$$

В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:

1)

$$
\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,|u_0(x)|dx < \infty.
\tag{4}
$$

2) Оператор $L(0) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u_0(x) \\ -u_0(x) & -\frac{d}{dx}\end{pmatrix}$ имеет ровно $2N$ собственных значений $\xi_1(0),\xi_2(0),\ldots,$
$\xi_{2N}(0)$ с кратностями $m_1(0),m_2(0),\ldots,m_{2N}(0)$.

Предположим, что функция $u(x,t)$ обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x\to\pm\infty$, т.е.

$$
\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big((1+|x|)\,|u(x,t)| + \sum_{k=1}^{3}\left|\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\right|\Big)dx < \infty.
\tag{5}
$$

Основная цель данной работы – получить представления для решения $u(x,t)$, $g_k^j(x,t)$, $k=\overline{1,N}$, $j=\overline{0,m_k-1}$, задачи (1)–(5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Основным результатом данной работы являетмя следующая теорема.

Теорема 3. Если функции $u(x,t)$, $g_k^j(x,t)$, $k=\overline{1,N}$, $j=\overline{0,m_k-1}$ является решением задачи (1)-(5), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$
\begin{aligned}
&m_k(t)=m_k(0),\ \ \xi_k(t)=\xi_k(0),\quad k=\overline{1,N},\\
&\frac{dr^+}{dt}=\left(8i\xi^3p(t)-2i\xi q(t)\right)r^+,\quad \operatorname{Im}\xi=0,\\
&\frac{d\chi_0^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3p(t)-2i\xi_nq(t)+A_0^n(t)\right)\chi_0^n,\\
&\frac{d\chi_1^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3p(t)-2i\xi_nq(t)+A_0^n(t)\right)\chi_1^n+\\
&\quad+\left(24i\xi_n^2p(t)-2i\xi_nq(t)+A_1^n(t)\right)\chi_0^n,\\
&\frac{d\chi_2^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3p(t)-2i\xi_nq(t)+A_0^n(t)\right)\chi_2^n+\left(24i\xi_n^2p(t)-2i\xi_nq(t)+A_1^n(t)\right)\chi_1^n+\\
&\quad+\left(24i\xi_np(t)-2i\xi_nq(t)+A_2^n(t)\right)\chi_0^n,\\
&\frac{d\chi_3^n}{dt}=\left(8i\xi_n^3p(t)-2i\xi_nq(t)+A_0^n(t)\right)\chi_3^n+\left(24i\xi_n^2p(t)-2i\xi_nq(t)+A_1^n(t)\right)\chi_2^n\\
&\quad+\left(24i\xi_np(t)-2i\xi_nq(t)+A_2^n(t)\right)\chi_1^n+\left(8ip(t)-2i\xi_nq(t)+A_3^n(t)\right)\chi_0^n,\\
&\frac{d\chi_l^n}{dt}=(8i\xi_n^3p(t)-2i\xi_nq(t)+A_0^n(t))\chi_l^n+(24i\xi_n^2p(t)-2i\xi_nq(t)+A_1^n(t))\chi_{l-1}^n\\
&\quad+(24i\xi_np(t)-2i\xi_nq(t)+A_2^n(t))\chi_{l-2}^n+(8ip(t)-2i\xi_nq(t)+A_3^n(t))\chi_{l-3}^n+\\
&\quad+\sum_{s=0}^{l-4}A_{l-s}^n(t)\chi_s^n,\ n=\overline{1,N},\ l=\overline{4,m_n-1}.
\end{aligned}
$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(5).

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу Коши

$$
\begin{cases}
u_t+p(t)(6u^2u_x+u_{xxx})+q(t)u_x=2\left(g_{11}^2-g_{12}^2\right)\\
Lg_1=\xi_1g_1;\quad u(x,0)=-\dfrac{2}{\operatorname{ch}2x}
\end{cases}
$$

где

$$
p(t)=t-\frac{e^{-2t(t+4)}}{32},\quad q(t)=t^2-\frac{e^{-2t(t+4)}}{8},\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}g_{11}g_{12}dx=A_0^1(t)=\frac{e^{-8t-2t^2}}{4}.
$$

Нетрудно найти данные рассеяния оператора $L(0)$:

$$
\{r^+(0)=0,\ \xi_1(0)=i,\ \chi_0^1(0)=2i\}.
$$

Согласно теореме 2, эволюция данных теории рассеяния выглядит следующим образом

$$
\xi_1(t)=\xi_1(0)=i,\quad r^+(t)=0,\quad \chi_0^1(t)=2ie^{-8t-2t^2}.
$$

Следовательно, $F(x)=2e^{-x-8t-2t^2}$. Решая систему интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко

$$
K_2(x,y)+\int\limits_x^\infty K_1(x,s)F(s+y)ds=0,
$$

$$
-K_1(x,y)+F(x+y)+\int\limits_x^\infty K_2(x,s)F(s+y)ds=0,
$$

получим

$$K_1(x,y) = \frac{2e^{-x-y+8t+2t^2}}{1+e^{-4x+16t+4t^2}}\,.$$

Откуда находим решение задачи Коши:

$$u\,(x,t) = -\frac{2}{\mathrm{ch}\,(2x-8t-2t^2)}, \quad g_{11}(x,t) = \frac{e^{-3x+8t+2t^2}}{1+e^{-4x+16t+4t^2}}, \quad g_{12}(x,t) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-4x+16t+4t^2}}.$$

Литература

1. *Gardner C.S., Greene I.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation, Phys. Rev. Lett. vol. 19, 1967, pp. 1095–1097.
2. *Wadati M.* The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation, J.Phys. Soc. Japan, vol. 32, 1972, p. 1681.
3. *Хасанов А.Б.* Об обратной задачи теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка. ДАН СССР, Т. 277, No.3, 1984, с. 559–562.
4. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
5. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
6. *Khasanov A.B., Hoitmetov U.A.* On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. vol. 38, 2021. pp. 19–35.

.